

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Формулы Френеля и принцип причинности

А.А. Колоколов

*На основе принципа причинности и аналитических свойств амплитудного коэффициента отражения фурье-компонент импульса электромагнитного излучения рассмотрена методика однозначного определения формул Френеля для прозрачных, поглощающих и усиливающих линейных сред с помощью предельного перехода от импульса к плоской монохроматической волне.*

PACS numbers: 03.40.Kf, 42.15.-i, 42.20.Jb, 42.25.-p

## Содержание

1. Введение (1025).
  2. Неоднозначность решения граничной задачи для плоской монохроматической волны (1026).
  3. Принцип причинности для электромагнитного излучения на границе раздела двух сред (1027).
  4. Предельный переход от импульса к плоской монохроматической волне (1028).
  5. Отражение света от усиливающей среды (1030).
  6. Направленность вынужденного излучения атома в области непускания среды (1032).
  7. Заключение (1033).
- Список литературы (1034).

*"Кратчайший путь между двумя истинами действительной области часто проходит через комплексную область".*

Ж. Адамар

## 1. Введение

Формулы Френеля для плоских монохроматических волн впервые были получены в 1823 г. и лежат в основе метода Фурье при решении задачи об отражении электромагнитного излучения от плоской поверхности раздела двух линейных однородных диэлектрических сред. Современный вывод этих формул с помощью двух граничных условий, выражающих непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей излучения на поверхности раздела сред, часто предельно упрощен и сведен к формальному решению системы из двух алгебраических уравнений [1, 2]. Однако хорошо известно, что для

однозначного определения формул Френеля этих граничных условий недостаточно, поэтому их следует дополнить правилом отбора преломленной волны. Обычно это правило сводится к требованию, чтобы реализуемая преломленная волна имела ограниченную амплитуду и переносила энергию от границы раздела сред [3].

Эксперименты по отражению света от усиливающих сред поставили задачу обобщения формул Френеля на неравновесные отражающие среды. Поскольку в усиливающей среде возможно как возбуждение волн с экспоненциально растущей амплитудой, так и формирование потока энергии в направлении границы раздела сред, то обычное правило отбора преломленной волны оказалось неприменимым. Различные попытки получить формулы Френеля для усиливающей среды на основе новых правил отбора привели к несогласующимся между собой результатам [4–10].

Выход из возникших трудностей связан с решением граничной задачи при использовании более адекватной модели падающего излучения в виде импульса с передним амплитудным фронтом [7–9]. В случае линейных сред без пространственной дисперсии граничные условия, дополненные принципом причинности в виде требований на направление распространения передних амплитудных фронтов отраженного и преломленного излучений относительно границы раздела сред, позволяют получить единственное решение.

Однако из единственности решения граничной задачи для импульса отнюдь не следует единственность определения амплитудного коэффициента отражения для отдельно взятой фурье-компоненты импульса, т.е. плоской монохроматической волны. Дело в том, что принцип причинности задает только асимптотику амплитудного коэффициента отражения в области бесконечно больших частот, определяющих скорость переднего амплитудного фронта. Благодаря этому для описания отраженного излучения можно использовать континуум эквивалентных фурье-представлений, где одна и та же фурье-компонента, входящая в разные фурье-представления, характеризуется разными коэффициентами отражения.

Будет показано, что единственным образом определяется локальный амплитудный коэффициент отраже-

А.А. Колоколов. Московский государственный технологический университет "Станкин",  
101472 Москва, Вадковский пер. 3а, Российская Федерация  
Тел. (095) 972-94-84  
E-mail: physder@sec.ru, kolaa@sec.ru

Статья поступила 22 декабря 1998 г.

ния, равный отношению тангенциальных компонент полей отраженного и падающего импульсов в заданной точке поверхности раздела сред и фиксированный момент времени. В случае прозрачных и поглощающих отражающих сред локальный амплитудный коэффициент отражения квазимонохроматического импульса с прямоугольным распределением амплитуды при неограниченном увеличении длительности и ширины импульса имеет предел, совпадающий с коэффициентом отражения Френеля для плоских монохроматических волн. При этом отраженный импульс конечной длительности и ширины всегда может быть записан посредством по крайней мере двух фурье-представлений, для которых его центральная фурье-компонента имеет разные коэффициенты отражения.

Таким образом, формулы Френеля определяют не "правильные" значения амплитудного коэффициента отражения плоских монохроматических волн, а предельные значения локального амплитудного коэффициента отражения и получаются при решении другой граничной задачи, связанной с использованием принципа причинности. Данный подход, основанный на получении единственного решения граничной задачи для падающего импульса с передним амплитудным фронтом и предельном переходе от импульса к плоской монохроматической волне, позволяет с единых позиций однозначно определять формулы Френеля для линейных сред и устранить противоречия, возникшие при описании отражения света от усиливающих сред.

## 2. Неоднозначность решения граничной задачи для плоской монохроматической волны

Пусть имеется плоская поверхность раздела двух линейных однородных и прозрачных сред без пространственной дисперсии, магнитные проницаемости которых считаются равными единице. Координатные оси  $x$  и  $y$  выберем параллельными, а координатную ось  $z$  — перпендикулярной поверхности раздела сред. Из среды с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1 > 0$ , занимающей полупространство  $z < 0$ , падает плоская монохроматическая волна с частотой  $\omega$ , поляризованная перпендикулярно плоскости падения  $xOz$ . Электрическое поле  $E(x, z, t)$  падающей волны направлено вдоль оси  $y$  и имеет вид

$$E(x, z, t) = \mathcal{E} \exp[i(k_x x + k_{1z} z - \omega t)], \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{E}$  — постоянная комплексная амплитуда,  $k_x$  и  $k_{1z}$  — проекции волнового вектора на оси  $x$  и  $z$  соответственно,  $t$  — время и  $i = \sqrt{-1}$ .

Согласно граничным условиям на поверхности раздела сред  $z = 0$  электрические поля  $E_r(x, z, t)$  отраженной и  $E_{tr}(x, z, t)$  преломленной волн также направлены вдоль оси  $y$  и записываются следующим образом:

$$E_r(x, z, t) = \mathcal{E}_r \exp[i(k_x x - k_{1z} z - \omega t)], \quad (2.2)$$

$$E_{tr}(x, z, t) = \mathcal{E}_{tr} \exp[i(k_x x - \omega t)], \quad (2.3)$$

где  $\mathcal{E}_r$  — постоянная комплексная амплитуда, а функция  $\mathcal{E}_{tr}(z)$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{tr}}{dz^2} + \left( \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right) \mathcal{E}_{tr} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь  $\varepsilon_2 > 0$  — диэлектрическая проницаемость отражающей среды и  $c$  — скорость света в вакууме.

Общее решение уравнения (2.4) может быть записано в виде

$$\mathcal{E}_{tr}(z) = C_1 \exp(ik_{2z} z) + C_2 \exp(-ik_{2z} z), \quad (2.5)$$

где  $k_{2z}(k_x, \omega) = \sqrt{\varepsilon_2 \omega^2 / c^2 - k_x^2}$ , а комплексные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны удовлетворять соотношению

$$2ik_{1z} \mathcal{E} = ik_{1z} \mathcal{E}_{tr} + \frac{d\mathcal{E}_{tr}}{dz}, \quad z = 0, \quad (2.6)$$

полученному путем исключения  $\mathcal{E}_r$  из граничных условий.

Соотношение (2.6) не позволяет однозначно определить постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , поэтому амплитудный коэффициент отражения плоской монохроматической волны,

$$R_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{E_r(x, z = 0, t)}{E(x, z = 0, t)} = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}}, \quad (2.7)$$

может принимать континуум значений в зависимости от произвольного выбора одной из комплексных констант. В частности, при  $C_2 = 0$ , когда преломленная волна распространяется от границы раздела сред,

$$R_{\perp}(k_x, \omega) = R_{\perp+}(k_x, \omega) = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}}, \quad (2.8)$$

а при  $C_1 = 0$ , когда преломленная волна распространяется к границе раздела сред,

$$R_{\perp}(k_x, \omega) = R_{\perp-}(k_x, \omega) = \frac{k_{1z} + k_{2z}}{k_{1z} - k_{2z}} = \frac{1}{R_{\perp+}(k_x, \omega)}. \quad (2.9)$$

Обычно считается, что в области пропускания отражающей среды, где  $k_x^2 < \varepsilon_2 \omega^2 / c^2$  и  $k_{2z}$  — вещественная положительная величина, реализуется то решение, которое описывает перенос энергии от границы раздела сред. Согласно этому правилу отбора преломленной волны  $C_2 = 0$  и  $R_{\perp}(k_x, \omega) = R_{\perp+}(k_x, \omega)$  [11].

При такой формулировке правила отбора преломленной волны существенным образом используется запись общего решения в виде (2.5). Более универсальная формулировка правила отбора, не связанная с конкретной формой записи общего решения, основана на использовании двух интегралов уравнения (2.4) [12]:

$$J_1 = i \left( \mathcal{E}_{tr} \frac{d\mathcal{E}_{tr}^*}{dz} - \mathcal{E}_{tr}^* \frac{d\mathcal{E}_{tr}}{dz} \right),$$

$$J_2 = \left| \frac{d\mathcal{E}_{tr}}{dz} \right|^2 + \left( \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right) |\mathcal{E}_{tr}|^2, \quad (2.10)$$

где "\*" обозначает комплексное сопряжение. Величина  $J_1$  описывает плотность потока энергии, переносимой преломленной волной вдоль оси  $z$ , а интеграл  $J_2$  связан с сохранением плотности потока  $z$ -й компоненты импульса, переносимого волной вдоль оси  $z$ .

Используя (2.5), легко показать, что для реализуемой преломленной волны ( $C_2 = 0$ ) отношение  $J_1/J_2$  принимает максимальное значение, равное  $1/k_{2z}$ . Полученный результат приводит к новой формулировке правила отбора — для преломленной волны отношение интегралов  $J_1/J_2$  достигает своего максимального значения, —

которая допускает обобщение на случай нелинейной отражающей среды [12].

В области непроникновения отражающей среды, где  $k_x^2 > \varepsilon_2 \omega^2 / c^2$  и  $k_{2z}(k_x, \omega) = i|k_{2z}(k_x, \omega)|$ , правило отбора заключается в требовании ограниченности амплитуды преломленной волны для всех  $z > 0$ . Отсюда сразу следует, что  $C_2 = 0$ , и тем самым определяется единственное решение граничной задачи.

При учете поглощения отражающей среды, когда  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + i\varepsilon_2''$ ,  $\varepsilon_2'' > 0$  и  $k_{2z} = k_{2z}' + ik_{2z}''$ ,  $k_{2z}' > 0$ ,  $k_{2z}'' > 0$ , требование переноса энергии от границы раздела сред приводит к необходимости положить  $C_2 = 0$  для всех вещественных  $k_x$ . Соответствующие решения для прозрачной отражающей среды могут быть получены с помощью предельного перехода, когда  $\varepsilon_2'' \rightarrow 0$ .

Все описанные выше результаты в равной степени относятся к волне, поляризованной параллельно плоскости падения, когда амплитудный коэффициент отражения определяется отношением тангенциальных компонент векторов напряженности магнитных полей отраженной и падающей волн.

### 3. Принцип причинности для электромагнитного излучения на границе раздела двух сред

Плоские монохроматические волны не существуют в природе и используются лишь в качестве фурье-компонент при решении линейных задач методом Фурье. В связи с этим требование единственности решения граничной задачи для плоских монохроматических волн не вполне корректно, тем более, что свойства отдельных фурье-компонент в отношении поведения амплитуды и переноса энергии не всегда совпадают со свойствами импульса в целом [13]. Только в случае падения импульса, поле которого на поверхности раздела сред отлично от нуля при  $0 < t < \tau$  и  $|x| < \sigma$ , где  $\tau$  — длительность и  $2\sigma$  — ширина импульса, граничные условия можно дополнить принципом причинности и получить единственное решение.

Для импульса, поляризованного перпендикулярно плоскости падения, электрическое поле  $E_r(x, t)$  отраженного излучения при  $z = 0$  согласно методу Фурье запишется в виде

$$\begin{aligned} E_r(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Gamma(k_x, \omega)} R_{\perp}(k_x, \omega) \tilde{E}(k_x, \omega) \times \\ &\times \exp[i(k_x x - \omega t)] dk_x d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{R\perp}(x', t') E(x - x', t - t') dx' dt', \quad (3.1) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{R\perp}(x', t') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Gamma(k_x, \omega)} R_{\perp}(k_x, \omega) \times \\ &\times \exp[i(k_x x' - \omega t')] dk_x d\omega \quad (3.2) \end{aligned}$$

— поверхностная функция Грина для отраженного излучения,  $\tilde{E}(k_x, \omega)$  — фурье-образ поля  $E(x, t)$  падающего импульса при  $z = 0$  и  $\Gamma(k_x, \omega)$  — поверхность интегрирования в пространстве комплексных фурье-переменных  $k_x = k_x' + ik_x''$  и  $\omega = \omega' + i\omega''$ .

В (3.1) и (3.2) амплитудный коэффициент отражения  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  пока не задан. Его однозначное определение осуществляется с помощью принципа причинности, который в пространстве фурье-переменных реализуется в виде последовательности операций теории функций комплексного переменного, включая принятие правила обхода особых точек, проведение разрезов и выбор листов римановой поверхности. В результате выполнения этих операций  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  становится регулярной функцией пространственной  $k_x$  и временной  $\omega$  частот.

Согласно принципу причинности  $E_r(x, t) = 0$  для всех  $t < 0$ , поэтому линия пересечения поверхности  $\Gamma(k_x, \omega)$  с комплексной плоскостью  $\omega$  должна лежать выше всех особых точек  $R_{\perp}(0, \omega)$ . Если эту линию выбрать в виде прямой  $\omega = \omega' + i\omega''$ ,  $\omega'' = \text{const}$ , параллельной оси вещественных значений  $\omega$ , то поверхность  $\Gamma(k_x, \omega)$  будет лежать в трехмерном пространстве переменных  $\omega' + i\omega''$ ,  $k_x'$  и  $k_x''$ .

Для каждой частоты  $\omega' + i\omega''$  функция  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  имеет в комплексной плоскости  $k_x$  четыре точки ветвления, являющиеся решениями уравнений  $k_{1z}(k_x, \omega) = 0$  и  $k_{2z}(k_x, \omega) = 0$ :

$$\begin{aligned} k_{\text{br}1,2}(\omega) &= \pm \sqrt{\varepsilon_1(\omega)} \frac{\omega}{c} = \pm k_1(\omega), \\ k_{\text{br}3,4}(\omega) &= \pm \sqrt{\varepsilon_2(\omega)} \frac{\omega}{c} = \pm k_2(\omega). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Точки ветвления (3.3) определяют асимптотику отраженного монохроматического пучка с частотой  $\omega$  в области  $|x| \gg \sigma$ , где формируются четыре боковые волны [14, 16].

Поскольку для всех сред при  $|\omega| \rightarrow \infty$   $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1 - \Omega^2/\omega^2$ , где  $\Omega$  — электронная плазменная частота среды, то предельные фазовые скорости боковых волн

$$\begin{aligned} v_{1,3}(\infty) &= \lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} \frac{\omega}{k_{\text{br}1,3}} = c, \\ v_{2,4}(\infty) &= \lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} \frac{\omega}{k_{\text{br}2,4}} = -c \end{aligned} \quad (3.4)$$

совпадают со скоростями передних амплитудных фронтов этих волн вдоль поверхности раздела сред.

Для того, чтобы в соответствии с принципом причинности амплитудные фронты боковых волн перемещались от области падения импульса, при  $|\omega'| \rightarrow \infty$  точки ветвления  $k_{\text{br}1,3}$  должны обходить в комплексной плоскости  $k_x$  снизу, а точки ветвления  $k_{\text{br}2,4}$  — сверху. Поверхность  $\Gamma(k_x, \omega)$  нигде не пересекается кривыми точек ветвления, поэтому данное асимптотическое правило определяет обход точек ветвления для всех частот интегрирования.

С целью однозначного определения  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  необходимо провести разрезы, соединяющие точки ветвления попарно между собой или с бесконечно удаленными точками. Принятое выше правило обхода может быть выполнено, если разрезы соединяют попарно точки  $k_{\text{br}1}$  и  $k_{\text{br}3}$ , а также точки  $k_{\text{br}2}$  и  $k_{\text{br}4}$ . Кроме того, можно провести разрезы, соединяющие точки  $k_{\text{br}1}$  и  $k_{\text{br}3}$  с бесконечно удаленными точками в области  $k_x'' > 0$ , а точки  $k_{\text{br}2}$  и  $k_{\text{br}4}$  с бесконечно удаленными точками в области  $k_x'' < 0$ .

После проведения разрезов следует выбрать один из двух листов римановой поверхности двужанной функции  $k_{2z}(k_x, \omega)/k_{1z}(k_x, \omega)$  (разрезы соединяют попарно

точки ветвления), либо один из двух листов римановых поверхностей двучленных функций  $k_{1z}(k_x, \omega)$  и  $k_{2z}(k_x, \omega)$  по отдельности (разрезы соединяют точки ветвления с бесконечно удаленными точками).

В первом случае на одном листе римановой поверхности функции  $k_{2z}(k_x, \omega)/k_{1z}(k_x, \omega)$

$$\lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} \frac{k_{2z}(k_x, \omega)}{k_{1z}(k_x, \omega)} = 1, \quad \lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} R_{\perp}(k_x, \omega) = 0, \quad (3.5)$$

а на другом листе

$$\lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} \frac{k_{2z}(k_x, \omega)}{k_{1z}(k_x, \omega)} = -1, \quad \lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} R_{\perp}(k_x, \omega) = \infty. \quad (3.6)$$

В соответствии с принципом причинности передние амплитудные фронты падающего и преломленного излучений должны распространяться вдоль оси  $z$  в одном направлении, поэтому необходимо выбрать тот лист римановой поверхности, где справедливы пределы (3.5).

Во втором случае, когда разрезы соединяют точки ветвления с бесконечно удаленными точками, выбор листов римановой поверхности для  $k_{1z}(k_x, \omega)$  и  $k_{2z}(k_x, \omega)$  производится на основании требования, чтобы передние амплитудные фронты падающего и преломленного излучений распространялись в положительном направлении оси  $z$ :

$$v_{1z}(\infty) = \lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} \frac{\omega}{k_{1z}(\omega)} = v_{2z}(\infty) = \lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} \frac{\omega}{k_{2z}(\omega)} = c. \quad (3.7)$$

В результате на выбранных листах римановых поверхностей снова справедливы пределы (3.5).

Величина  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  в любой точке поверхности  $\Gamma(k_x, \omega)$  определяется путем аналитического продолжения из нулевого значения в области  $|\omega'| \rightarrow \infty$  в данную точку вдоль выбранной поверхности интегрирования. Согласно (3.5) и (3.7) принцип причинности накладывает ограничения лишь на асимптотику амплитудного коэффициента отражения фурье-компонент, поэтому с помощью деформации разрезов можно всегда переопределить значение  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  в любой конечной точке. Отсюда следует, что полный набор фурье-компонент для преломленного излучения, позволяющий использовать произвольное фурье-представление, включает в себя оба независимых решения в (2.5). Этот вывод в равной степени относится к фурье-представлениям падающего и отраженного излучений в отношении независимых решений соответствующего волнового уравнения.

По теореме Коши такие локальные переопределения величины  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  не влияют на пространственно-временное распределение поля  $E_r(x, t)$  отраженного излучения, поскольку все возможные фурье-представления могут быть преобразованы друг в друга при непрерывной деформации разрезов и поверхности интегрирования.

Совершенно аналогично рассматривается случай падения импульса, поляризованного параллельно плоскости падения, когда амплитудный коэффициент отражения плоской монохроматической волны имеет вид [11]

$$R_{\parallel}(k_x, \omega) = \frac{\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{1z} + \varepsilon_1 k_{2z}}. \quad (3.8)$$

Единственное различие связано с явлением Брюстера, когда в точках  $k_x = \pm k_B = \pm \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \omega / c$  функция (3.8) на одном листе римановой поверхности имеет нуль, а на другой — полюс. Если в результате проведения разрезов в точках  $k_x = \pm k_B$  окажется полюс, то вклад этого полюса в отраженное излучение равен нулю. В процессе интегрирования этот полюс может обходиться только четное число раз, причем число обходов в одном направлении всегда равно числу обходов в противоположном направлении.

Следствием принципа причинности для процесса отражения электромагнитного излучения на границе раздела двух линейных сред является выполнение соотношений Крамерса – Кронига для  $R_{\perp, \parallel}(k_x, \omega) = R'_{\perp, \parallel} + iR''_{\perp, \parallel}$  на плоскости вещественных  $k_x$  и  $\omega$ , которая не пересекается разрезами [15]. Если для вещественного  $k_x$  функции  $R_{\perp, \parallel}(k_x, \omega)$  не имеют особых точек в области  $\omega'' > 0$ , то для вещественных  $\omega$

$$R'_{\perp, \parallel}(k_x, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R''_{\perp, \parallel}(k_x, u)}{u - \omega} du, \\ R''_{\perp, \parallel}(k_x, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_{\perp, \parallel}(k_x, u)}{u - \omega} du, \quad (3.9)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения.

Соотношения (3.9) могут выполняться для прозрачных сред, поскольку в области непротекания отражающей среды (полного отражения)  $R''_{\perp, \parallel} \neq 0$ . Соотношения Крамерса – Кронига позволяют получить правило сумм для  $R_{\perp, \parallel}(k_x, \omega)$ , удобное для анализа структуры отраженного излучения вблизи его переднего фронта [15]. Интегральный характер данных соотношений еще раз подчеркивает, что выполнение принципа причинности связано не с определением функций  $R_{\perp, \parallel}(k_x, \omega)$  в отдельной точке, а с их аналитическими свойствами в целом.

Поверхностная функция Грина  $\mathcal{G}_{R_{\perp, \parallel}}(x, t)$  для отраженного излучения определяется однозначно и не зависит от выбора разрезов. Смещая поверхность интегрирования  $\Gamma(k_x, \omega)$  в область, где  $\omega'' \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_1(\omega) \rightarrow 1$  и  $\varepsilon_2(\omega) \rightarrow 1$ , и выполняя интегрирование подобно тому, как это сделано в [15, 16], можно показать, что

$$\mathcal{G}_{R_{\perp, \parallel}}(x, t) = 0, \quad \text{если } t < \frac{|x|}{c}. \quad (3.10)$$

При переходе через точки  $x = \pm ct$  величина  $\mathcal{G}_{R_{\perp, \parallel}}$  меняется скачком. Таким образом, передний амплитудный фронт поверхностной функции Грина распространяется со скоростью света в вакууме  $c$  вдоль границы раздела сред от точки падения  $x = 0$  дельта-импульса.

#### 4. Предельный переход от импульса к плоской монохроматической волне

Принцип причинности вместе с граничными условиями однозначно определяет локальный амплитудный коэффициент отражения импульса:

$$\rho_{\perp}(x, t; \sigma, \tau) = \frac{E_r(x, z=0, t)}{E(x, z=0, t)}, \quad 0 < t < \tau, \quad |x| < \sigma. \quad (4.1)$$

С целью установления связи между  $\rho_{\perp}(x, t; \sigma, \tau)$  и  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  рассмотрим предельный переход от квазимонохроматического импульса с прямоугольным распреде-

лением амплитуды

$$E(x, t) = \begin{cases} \mathcal{E} \exp[i(k_{1x}x - \omega_1 t)], & 0 < t < \tau, \quad |x| < \sigma, \\ 0, & t < 0, t > \tau, \quad |x| > \sigma \end{cases} \quad (4.2)$$

(где  $\mathcal{E}$  — комплексная амплитуда,  $k_{1x} = \sin \theta \sqrt{\epsilon_1} \omega_1 / c$ ,  $\theta$  — угол падения импульса,  $\omega_1$  — частота центральной фурье-компоненты импульса) к плоской монохроматической волне, полагая  $\tau \rightarrow \infty$  и  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Согласно (3.2), (3.10), (4.1) и (4.2)

$$\rho_{\perp}(x, t; \sigma, \tau) = \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} \int_0^{\tau} \mathcal{G}_{R\perp}(x', t') \times \\ \times \exp[-i(k_{1x}x' - \omega_1 t')] dx' dt', \quad (4.3)$$

поэтому из свойств прямого и обратного преобразований Фурье следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow \infty} \rho_{\perp}(x, t = \tau; \sigma, \tau) = \rho_{\perp\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{G}_{R\perp}(x', t') \times \\ \times \exp[-i(k_{1x}x' - \omega_1 t')] dx' dt' = R_{\perp}(k_{1x}, \omega_1), \quad (4.4)$$

если вся поверхность интегрирования  $\Gamma(k_x, \omega)$  может быть совмещена с плоскостью вещественных значений  $k_x$  и  $\omega$ , исключая точки ветвления.

Возможность такого совмещения зависит от положения особых точек  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  и выбора разрезов. Для поглощающих сред, где все особые точки  $\epsilon_1(\omega)$  и  $\epsilon_2(\omega)$  лежат в области  $\omega'' < 0$ , при выборе разрезов, не пересекающих плоскость вещественных значений, поверхность  $\Gamma(k_x, \omega)$  всегда может быть совмещена с этой плоскостью. Если же выбранные разрезы пересекут плоскость вещественных значений, то для отдельных областей вещественных значений  $k_{1x}$  и  $\omega_1$   $\rho_{\perp\infty} \neq R_{\perp}(k_{1x}, \omega_1)$ . С точки зрения применения метода Фурье все возможные разрезы полностью равноправны, однако те, которые обеспечивают выполнение равенства (4.4), более удобны при описании отражения широких импульсов большой длительности.

Как указывалось в разделе 3, величина  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  в правой части (4.4) получается путем аналитического продолжения из нулевого значения в области  $|\omega'| \rightarrow \infty$  в данную точку  $(k_x, \omega)$  по плоскости вещественных значений. Результатом такого аналитического продолжения может быть один из двух возможных амплитудных коэффициентов отражения плоской монохроматической волны (2.8) или (2.9). Аналитическое продолжение по оси вещественных частот имеет определенные физические основания, поскольку после прихода переднего амплитудного фронта текущая частота электромагнитного поля в любой точке среды меняется от бесконечно больших значений до центральной или несущей частоты импульса.

В качестве примера рассмотрим случай нормального падения из вакуума ( $\epsilon_1 = 1$ ) импульса с постоянной амплитудой вдоль всей поверхности раздела сред, когда в (4.2)  $k_{1x} = 0$  и  $\sigma \rightarrow \infty$ . Если все особые точки и нули  $\epsilon_2(\omega)$  находятся в области  $\omega'' < 0$ , путь интегрирования  $\Gamma(\omega)$  можно совместить с осью вещественных значений, а вся процедура определения  $R_{\perp}(\omega) = R_{\parallel}(\omega) = R(\omega)$  сводится к нахождению отношения  $k_{2z}(\omega)/k_{1z}(\omega) = \sqrt{\epsilon_2(\omega)}$  на этой оси.

Поведение функции  $\sqrt{\epsilon_2(\omega)}$  при изменении  $\omega$  от  $\infty$  до 0 удобно рассматривать с помощью вектора на комплексной плоскости  $z = u + iv$ . Для  $\omega \rightarrow \infty$   $\epsilon_2(\omega) \rightarrow 1$ , поэтому изображающий вектор имеет единичную длину и направлен вдоль полуоси положительных значений  $u$  (рис. 1). В случае поглощения на всех частотах  $0 < \omega < \infty$   $\epsilon_2''(\omega) > 0$  и  $0 < \arg \epsilon_2 < \pi$ , поэтому независимо от закона дисперсии изображающий вектор может находиться только в квадранте I. Следовательно, для всех частот  $0 < \omega < \infty$   $k'_{2z}(\omega) > 0$  и  $|R(\omega)| < 1$ .

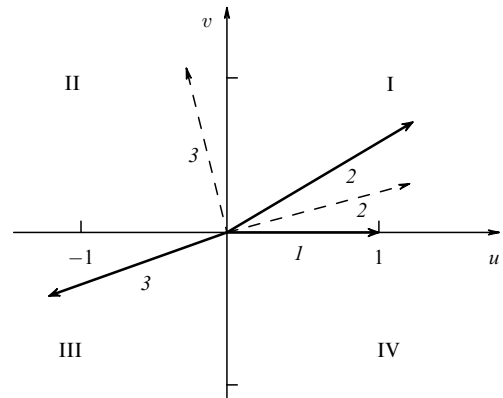


Рис. 1. Векторное изображение величин  $\epsilon_2(\omega)$  (сплошная линия) и  $\sqrt{\epsilon_2(\omega)}$  (пунктир) на комплексной плоскости  $\omega = u + iv$ : 1 —  $\epsilon_2(\infty) = \sqrt{\epsilon_2(\infty)} = 1$ ; 2 —  $\epsilon'_2(\omega) > 0$ ,  $\epsilon''_2(\omega) > 0$ ; 3 —  $\epsilon'_2(\omega) < 0$ ,  $\epsilon''_2(\omega) < 0$ .

Если в области непроникновения отражающей среды, где  $\epsilon'_2(\omega) < 0$ , для некоторой полосы частот создать усиление с  $\epsilon''_2(\omega) < 0$ , то в этой полосе частот  $\pi < \arg \epsilon_2(\omega) < 3\pi/2$  и изображающий вектор попадет в квадрант II (см. рис. 1). Таким образом, в области непроникновения с усилением  $k'_{2z}(\omega) < 0$ ,  $k''_{2z}(\omega) > 0$  и  $|R(\omega)| > 1$ . Соответствующие фурье-компоненты преломленного излучения распространяются к границе раздела сред, а их амплитуды экспоненциально убывают при удалении от этой границы. В результате становится возможным усиление отраженного квазимонохроматического импульса, если его частота попадет в полосу усиления отражающей среды.

Если функция  $\epsilon_2(\omega)$  имеет нули или полюса на оси вещественных значений, то при их обходе  $\arg \epsilon_2(\omega)$  меняется на величину, зависящую от характера особой точки, и поведение изображающего вектора становится более сложным. Аналогичная ситуация возникает в том случае, когда особые точки находятся в области  $\omega'' > 0$ , и проводимые разрезы пересекают ось вещественных значений. Вопросы, связанные с применением принципа причинности к распространению электромагнитного излучения в прозрачной среде, когда особые точки лежат на оси вещественных значений, рассматривались в [17].

По существу, известные формулы Френеля для прозрачных и поглощающих сред, полученные с помощью правил отбора преломленной волны, относятся к решению граничной задачи для импульса. Они определяют предельный локальный амплитудный коэффициент отражения, который находится с помощью фурье-преобразования поверхностной функции Грина (4.4). Пространственные и временные размеры падающего импульса,

при которых выполняется равенство (4.4), зависят от требуемой точности и скорости затухания боковых волн.

Используя (4.2), можно показать, что в случае прозрачных сред полуширина  $\sigma$  монохроматического пучка ( $\tau \rightarrow \infty$ ) и длительность  $\tau$  квазимонохроматического импульса, падающего нормально из вакуума ( $k_{1x} = 0$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ), должны удовлетворять неравенствам [15, 16]

$$\sigma > \frac{1}{\beta^{\gamma_\sigma(k_{1x})}} |k_1 - k_2|^{-1}, \quad \tau > \frac{1}{\beta^{\gamma_\tau(\omega_1)}} |\omega_{sn} - \omega_{sp}|^{-1}, \quad (4.5)$$

где  $\beta$  — требуемая относительная погрешность, равная  $|\rho_\perp(x=0; \sigma) - R_\perp(k_{1x}, \omega_1)|/R_\perp(k_{1x}, \omega_1)|$  для пучка и  $|\rho_\perp(t=\tau; \tau) - R_\perp(\omega_1)|/R_\perp(\omega_1)|$  для импульса, а функции  $\gamma_\sigma(k_{1x})$  и  $\gamma_\tau(\omega_1)$  принимают значения от  $2/3$  до  $2$  в зависимости от близости величины  $k_{1x}$  к  $k_1$  или  $k_2$  и величины  $\omega_1$  к  $\omega_{sn}$  или  $\omega_{sp}$ . Частоты  $\omega_{sn}$  и  $\omega_{sp}$  определяют нуль и полюс диэлектрической проницаемости отражающей среды при учете только того ансамбля гармонических осцилляторов, которые при  $\omega = \omega_1$  дают наибольший вклад в  $\varepsilon_2(\omega)$  [15].

Минимальные ширина и длительность падающего излучения определяются размерами областей непропускания отражающей среды для пространственных  $\Delta k_x = |k_1 - k_2|$  и временных  $\Delta \omega = |\omega_{sn} - \omega_{sp}|$  частот. Учет поглощения увеличивает затухание боковых волн и уменьшает необходимые величины ширины и длительности падающего излучения.

## 5. Отражение света от усиливающей среды

Рассмотрим отражение монохроматического пучка частоты  $\omega_1$ , падающего из прозрачной среды с  $\varepsilon_1(\omega_1) > 0$  на плоскую поверхность  $z = 0$  усиливающей среды с  $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 + i\varepsilon''_2$ ,  $0 < \varepsilon'_2(\omega_1) < \varepsilon_1(\omega_1)$  и  $\varepsilon''_2(\omega_1) < 0$ . Такая предельно упрощенная модель позволяет с общих позиций, изложенных в разделах 3 и 4, проанализировать проблему обобщения формул Френеля на случай усиливающей среды и устранить противоречия в работах [4–10].

Используя (3.1), (4.2) и (4.3), поле  $E_r(x, t)$  отраженного пучка может быть записано тремя способами:

$$\begin{aligned} E_r(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(k_x)} R_\perp(k_x) \tilde{E}(k_x) \exp[i(k_x x - \omega_1 t)] dk_x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{R\perp}(x_1) E(x - x_1, t) dx_1 = \\ &= \rho_\perp(x; \sigma) \mathcal{E} \exp[i(k_{1x} x - \omega_1 t)], \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\mathcal{G}_{R\perp}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(k_x)} R_\perp(k_x) \exp(ik_x x_1) dk_x, \quad (5.2)$$

$$\rho_\perp(x; \sigma) = \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} \mathcal{G}_{R\perp}(x_1) \exp(-ik_{1x} x_1) dx_1, \quad (5.3)$$

$\tilde{E}(k_x)$  — фурье-образ функции  $\mathcal{E} \exp(ik_{1x} x)$ ,  $\mathcal{E} = \text{const}$  и  $\Gamma(k_x)$  — путь интегрирования в комплексной плоскости  $k_x$ .

Наиболее подробно изучено поведение функции  $R_\perp(k_x)$  на оси вещественных значений  $k_x$ . На рисунке 2 приведены три зависимости  $|R_\perp(\theta)|$ , где  $\theta$  — угол

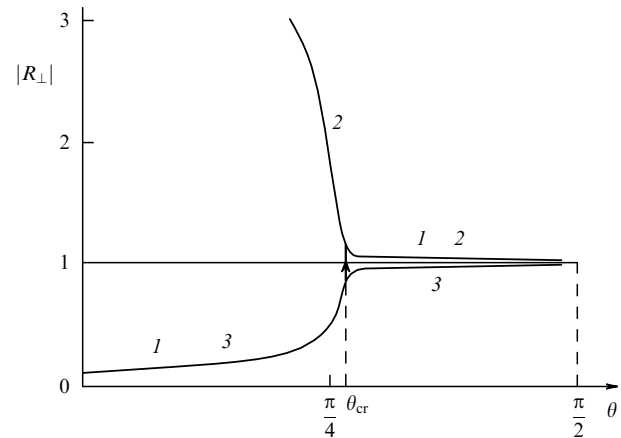


Рис. 2. Варианты зависимости  $|R_\perp(\theta)|$  от угла падения  $\theta$  для  $\varepsilon'_1 = 4$ ,  $\varepsilon''_1 = 0$ ,  $\varepsilon'_2 = 2,25$ ,  $\varepsilon''_2 = -0,01$ ,  $\theta_{cr} = 48^\circ 30'$ : 1 —  $R_\perp(\theta) = R_{\perp+}(\theta)$ ,  $0 \leq \theta < \theta_{cr}$ ;  $R_\perp(\theta) = R_{\perp-}(\theta)$ ,  $\theta_{cr} < \theta \leq \pi/2$ ; 2 —  $R_\perp(\theta) = R_{\perp-}(\theta)$ ; 3 —  $R_\perp(\theta) = R_{\perp+}(\theta)$ .

падения, полученные при использовании различных подходов к решению задачи об отражении плоской монохроматической волны от усиливающей среды. Как будет показано ниже, для метода Фурье все три варианта не противоречат друг другу и являются эквивалентными, поскольку приводят к одинаковым распределениям поля отраженного пучка.

При  $\varepsilon''_2 < 0$  точка ветвления  $k_{br3}$  смещена в нижнюю полуплоскость, а точка ветвления  $k_{br4}$  — в верхнюю, поэтому разрезы, обеспечивающие правильный обход точек ветвления, не позволяют совместить весь путь  $\Gamma(k_x)$  с осью вещественных значений. Усиление боковых волн, определяемых точками ветвления  $k_{br3}$  и  $k_{br4}$ , делают необходимым учет фурье-компонент с комплексными  $k_x$ . Проведем разрезы, проходящие параллельно оси мнимых значений и соединяющие точки ветвления  $k_{br1}$  и  $k_{br3}$  с бесконечно удаленными точками в верхней полуплоскости, а точки ветвления  $k_{br2}$  и  $k_{br4}$  — в нижней (рис. 3). Путь интегрирования проходит по всей оси вещественных значений и берегам разрезов  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}_4$ .

Выбор листа римановой поверхности для  $R_\perp(k_x, \omega_1)$  в (5.1) производится с помощью асимптотических условий

$$\lim_{|k'_x| \rightarrow \infty} \frac{k_{2z}(k_x, \omega_1)}{k_{1z}(k_x, \omega_1)} = 1, \quad \lim_{|k'_x| \rightarrow \infty} R_\perp(k_x, \omega_1) = 0, \quad (5.4)$$

которые следуют из принятого правила обхода точек ветвления и (3.5). При этом согласно принципу причинности и требованию сходимости интеграла Фурье для падающего пучка  $k_{1z}(k_x, \omega_1) \rightarrow i|k'_x|$ , если  $|k'_x| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим поведение функций  $k_{2z}$  и  $R_\perp$  на оси вещественных значений  $k_x$ . В области пропускания отражающей среды, где  $-k'_2 < k_x < k'_2$ ,  $k'_{2z}(k_x) > 0$ ,  $k''_{2z}(k_x) < 0$  и  $|R_\perp(k_x)| < 1$ . Фурье-компоненты преломленного пучка распространяются от границы раздела сред, а их амплитуды экспоненциально растут с увеличением  $z$ . Усиление соответствующих фурье-компонент отраженного пучка отсутствует. В области непропускания, где  $k'_2 < |k_x| < k_1$ ,  $k'_{2z}(k_x) < 0$ ,  $k''_{2z}(k_x) > 0$  и  $|R_\perp(k_x)| > 1$ . Фурье-компоненты преломленного пучка распространяются к границе раздела сред, а их амплитуды экспоненциально уменьшаются с увеличением  $z$ . В

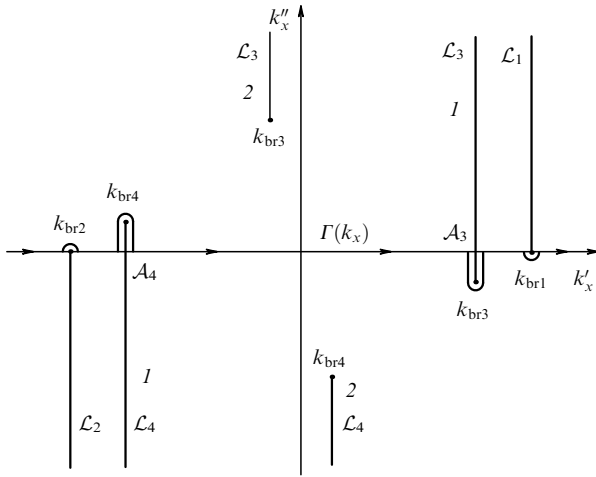


Рис. 3. Расположение точек ветвления  $k_{br1,2}$  для  $\varepsilon'_1(\omega) > 0$ ,  $\varepsilon''_1(\omega) = 0$  и  $k_{br3,4}$  для  $1 - \varepsilon'_1(\omega) > \varepsilon'_2(\omega) > 0$ ,  $\varepsilon''_2(\omega) < 0$  и  $2 - \varepsilon'_2(\omega) < 0$ ,  $\varepsilon''_2(\omega) < 0$ .

области непротекания происходит усиление фурье-компонент отраженного пучка. В точках  $A_3$  и  $A_4$  пересечения разрезов  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}_4$  с осью вещественных значений, где  $k_x = \pm k'_2$  и  $\theta = \theta_{cr} = \arcsin(k'_2/k_1)$ , величина  $R_\perp(k_x)$  меняется скачком в связи с переходом с одного листа римановой поверхности на другой лист. Данная зависимость описывается кривой 1 на рис. 2 и получена в [4, 7, 9].

Если разрезы  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}_4$  деформировать таким образом, чтобы точки  $A_3$  и  $A_4$  сместились непосредственно к  $k_x = 0$ , то для всех вещественных  $k_x \neq 0$   $k'_{2z}(k_x) < 0$ ,  $k''_{2z}(k_x) > 0$  и  $|R_\perp(k_x)| > 1$ . Фурье-компоненты преломленного пучка распространяются к границе раздела сред, а их амплитуды экспоненциально уменьшаются с ростом  $z$ . В результате происходит усиление фурье-компонент отраженного пучка с вещественными  $k_x \neq 0$ . Соответствующая зависимость  $|R_\perp(\theta)|$ , полученная в [6], изображена с помощью кривой 2 на рис. 2.

В случае смещения точки  $A_4$  в область  $k_x \rightarrow -\infty$ , а точки  $A_3$  в область  $k_x \rightarrow +\infty$ , для всех фурье-компонент преломленного пучка с вещественными  $k_x$   $k'_{2z}(k_x) > 0$ ,  $k''_{2z}(k_x) < 0$  и  $|R_\perp(k_x)| < 1$ . Фурье-компоненты преломленного пучка распространяются от границы раздела сред, а их амплитуды экспоненциально растут с увеличением  $z$ . Соответствующие фурье-компоненты отраженного пучка не усиливаются. Зависимость  $|R_\perp(\theta)|$  для этого случая описывается кривой 3 на рис. 2 и получена в [8].

Очевидно, что деформации разрезов и смещения точек пересечения разрезов с осью вещественных значений никак не влияют на интеграл Фурье, а изменяют только относительную величину вкладов фурье-компонент с вещественными и комплексными  $k_x$ . Следовательно, все три варианта определения амплитудного коэффициента отражения плоских монохроматических волн являются эквивалентными. Совершенно аналогично можно рассмотреть различные эквивалентные определения функции  $R_\perp(k_x)$  на оси вещественных значений в случае прозрачных и поглощающих отражающих сред. Для этого достаточно выбрать разрезы, пересекающие ось вещественных значений.

Если усиление мало и  $|k''_2|\sigma \lesssim 1$ , поле  $E_r(x, t)$  на границе раздела сред пространственно разделено на поле отраженного пучка в области  $|x| < \sigma$  и поле боко-

вых волн, которое в области  $x \gg \sigma$ ,  $1/|k_1 - k_2|$  описывается выражением [16]

$$E_r(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(k_1 - k_2)}} \left\{ \frac{\tilde{E}(k_1)}{x^{3/2}} \exp \left[ i \left( k_1 x - \omega_1 t + \frac{3\pi}{4} \right) \right] + \frac{\tilde{E}(k_2)}{x^{3/2}} \exp \left[ i \left( k_2 x - \omega_1 t + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}. \quad (5.5)$$

В области  $x \ll -\sigma$ ,  $-1/|k_1 - k_2|$  формируются две аналогичные боковые волны с амплитудами, пропорциональными  $\tilde{E}(-k_1)$  и  $\tilde{E}(-k_2)$ , распространяющиеся от области падения пучка. Отметим, что выражение (5.5) справедливо для прозрачных ( $k''_2 = 0$ ) и поглощающих ( $k''_2 > 0$ ) отражающих сред. Асимптотика поверхностной функции Грина (5.2) также описывается аналогичными выражениями, где  $\tilde{E}(k_1) = \tilde{E}(k_2) = \tilde{E}(-k_1) = \tilde{E}(-k_2) = 1$ .

Для усиливающей отражающей среды предельный переход к плоской монохроматической волне становится невозможным, поскольку амплитуды боковых волн с фазовыми скоростями  $\pm \omega_1/k_2$  экспоненциально растут с увеличением  $|x|$  и интеграл Фурье (5.3) расходится, если  $\sigma \rightarrow \infty$ . Следовательно, возникает вопрос выбора наиболее удобного фурье-представления. Вариант определения  $R_\perp(k_x)$ , представленный кривой 1 на рис. 2, более предпочтителен, поскольку в этом случае поле отраженного пучка с необходимой точностью описывается интегралом Фурье по оси вещественных  $k_x$ , а асимптотика в виде усиливаемых боковых волн — интегралом Фурье по берегам разрезов  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}_4$ .

Вне малых областей с размерами  $\Delta k_x \approx |k''_2|$  и центрами в точках  $k_x = \pm k'_2$  (вблизи критического угла полного отражения), а также вне области скользящего падения  $k_x \approx k_1$ , с необходимой точностью можно считать, что

$$\rho_\perp \left( x = 0; \sigma \approx \frac{1}{|k''_2|} \right) = R_\perp(k_{1x}). \quad (5.6)$$

В области полного отражения возможно усиление отраженного пучка для  $|x| < \sigma$ , причем максимальное значение  $|\rho_\perp(x = 0; \sigma \approx 1/|k''_2|)|$  не превышает максимальное значение  $|R_\perp(k_{1x})|$ , где  $k'_2 < |k_{1x}| < k_1$ .

Для усиливающей отражающей среды с  $\varepsilon'_2(\omega_1) < 0$  точка ветвления  $k_{br3}(\omega_1)$  лежит в области  $k'_x < 0$ , а точка ветвления  $k_{br4}(\omega_1)$  — в области  $k'_x > 0$ , как показано на рис. 3. Боковые волны, определяемые данными точками ветвления, распространяются к области падения пучка, а их амплитуды экспоненциально уменьшаются с увеличением  $|x|$ . Этот результат становится очевидным, если заметить, что законы дисперсии рассматриваемых боковых волн и преломленных волн с  $k_x = 0$  совпадают (см. раздел 4).

Для усиливающей среды с  $\varepsilon'_2 > 0$  функция  $k_{2z}(k_x, \omega)$  при вещественных  $k_x \neq 0$  имеет точки ветвления в области  $\omega'' > 0$ , поэтому соотношения Крамерса – Кронига (3.9) не выполняются, а процесс отражения излучения с распределением поля на границе раздела сред

$$E(x, t) = \mathcal{E}(t) \exp(ik_x x), \quad (5.7)$$

где  $k_x$  — вещественная величина, является абсолютно неустойчивым. Учет ограниченности излучения вдоль

поверхности раздела сред превращает абсолютную неустойчивость в конвективную, описываемую усиливаемыми боковыми волнами [16].

Эксперименты по отражению света от усиливающих сред показали, что в области полного отражения действительно возможно усиление отраженного света [18–22]. При определенных условиях энергетический коэффициент отражения достигал величины порядка  $10^3$ , что на два порядка превышает максимальное значение  $|R_{\perp}|^2$  для плоских монохроматических волн в практически важном случае  $|\varepsilon_2''| \ll \varepsilon_2'$  [10]. Обнаруженное расхождение обусловлено неоднородностью отражающей среды, когда отражение преломленного света происходит на некотором расстоянии от границы раздела сред [7, 10, 23]. Физические процессы, вызывающие неоднородность отражающей среды в условиях оптической накачки, рассмотрены в [23].

При описании отражения плоских монохроматических волн от неоднородной вдоль оси  $z$  среды возникают точно такие же проблемы, как в случае однородной отражающей среды. Например, для

$$\varepsilon_2(z) = \varepsilon_2(\infty) + \Delta\varepsilon_2 \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \quad (5.8)$$

(где  $0 < \varepsilon_2(\infty) < \varepsilon_1$ ,  $\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon_2' + i\Delta\varepsilon_2''$ ,  $\Delta\varepsilon_2'$  и  $\Delta\varepsilon_2'' < 0$  — вещественные постоянные,  $h$  — характерная длина неоднородности) амплитудный коэффициент отражения плоской монохроматической волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, имеет вид [10]

$$R_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{k_{1z} - k_{2z}(\infty) + i\sqrt{\Delta\varepsilon_2} \omega p / c}{k_{1z} + k_{2z}(\infty) - i\sqrt{\Delta\varepsilon_2} \omega p / c}. \quad (5.9)$$

Здесь

$$p = \frac{J_{v+1}(2\sqrt{\Delta\varepsilon_2} \omega h / c)}{J_v(2\sqrt{\Delta\varepsilon_2} \omega h / c)}, \quad (5.10)$$

$J_{v+1}$  и  $J_v$  — функции Бесселя 1-го рода с комплексными индексами,  $v = -2ik_{2z}(\infty)h$  и  $k_{2z}(\infty) = [\varepsilon_2(\infty)\omega^2/c^2 - k_x^2]^{1/2}$ .

Для однозначного определения  $R_{\perp}(k_x, \omega)$  необходимо принять правило обхода особых точек, провести разрезы, соединяющие точки ветвления  $k_{1z}$  и  $k_{2z}(\infty)$  с бесконечно удаленными точками, и выбрать листы римановой поверхности для двузначных функций  $k_{1z}$  и  $k_{2z}(\infty)$ . Комплексные индексы функций Бесселя, задающие асимптотику преломленной волны при  $z \rightarrow \infty$ , также становятся однозначно определенными только после проведения разрезов и выбора листа римановой поверхности для  $k_{2z}(\infty)$ . Все операции в комплексном пространстве фурье-переменных выполняются на основе принципа причинности в виде условий на распространение передних амплитудных фронтов падающей, отраженной и преломленной волн по нормали и вдоль поверхности раздела сред.

Путем подбора величин  $\Delta\varepsilon_2'$ ,  $\Delta\varepsilon_2'' < 0$  и  $h$  можно получить любое значение  $|R_{\perp}(k_x, \omega)|$ . В случае сильной неоднородности, когда  $\omega_1 h / c \approx 1$ , при некоторых вещественных  $k_x$  знаменатель выражения (5.9) обращается в нуль, что означает возбуждение генерации света в приповерхностном слое отражающей среды [10]. Соответствующие углы падения лежат в небольшой окрестности критического угла полного отражения  $\theta_{\text{кр}}$ . Незави-

симо от поляризации света при  $\Delta\varepsilon_2' < 0$  эти углы всегда меньше  $\theta_{\text{кр}}$ , а при  $\Delta\varepsilon_2' > 0$  — всегда больше  $\theta_{\text{кр}}$ . Критический угол полного отражения выделен в том смысле, что вблизи него порог генерации достигается при наименьшем коэффициенте усиления.

## 6. Направленность вынужденного излучения атома в области непротекания среды

Усиление света, отраженного от однородной усиливающей среды, обусловлено вынужденным излучением возбужденных атомов среды. В области непротекания отражающей среды, где  $\varepsilon_2'(\omega) < 0$  или  $\omega^2 \varepsilon_2'(\omega) / c^2 < k_x^2$ ,  $\varepsilon_2'(\omega) > 0$ , возбужденные атомы взаимодействуют с экспоненциально затухающими волнами, которые связаны с поверхностью раздела сред и не являются свободным излучением. Пространственная направленность вынужденного излучения атома в поле таких волн требует специального анализа.

В феноменологической электродинамике обмен энергией, импульсом и моментом импульса между атомом и излучением описывается с помощью комплексной поляризуемости атома  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ , где  $\alpha'' > 0$  для основного состояния и  $\alpha'' < 0$  для возбужденного состояния атома. Полный поток вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$  через произвольную замкнутую поверхность  $F$ , охватывающую атом с дипольным моментом  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ , индуцированным полем частоты  $\omega$ , состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое зависит только от поля падающей волны и в стационарном случае равно нулю. Второе определяется только полем диполя и пропорционально  $|\alpha|^2$ . Оба этих слагаемых не связаны с вынужденным излучением атома.

Третье слагаемое  $I_{\text{int}}$  имеет интерференционную природу, поскольку определяется как полем падающей волны, так и полем диполя. Согласно теореме Пойнтинга

$$I_{\text{int}} = \oint_F \mathbf{S}_{\text{int}} d\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \alpha'' \omega |\mathbf{E}_0|^2, \quad (6.1)$$

где электрическое поле  $\mathbf{E}_0$  падающей волны берется в точке нахождения атома. Согласно (6.1) энергообмен между атомом и волной описывается интерференционным потоком  $I_{\text{int}}$ , поэтому пространственная направленность вынужденного излучения обусловлена анизотропией распределения интерференционной компоненты  $\mathbf{S}_{\text{int}}$  вектора Пойнтинга.

Допустим, что в вакууме на атом с координатами  $x = y = z = 0$  падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$  и имеющая волновой вектор  $\mathbf{k} = (\omega/c, 0, 0)$ . Используя формулы для поля диполя в волновой зоне и предполагая, что волна имеет сколь угодно большие, но конечные поперечные размеры, можно в аналитическом виде показать, что весь интерференционный поток энергии  $I_{\text{int}}$  проходит через плоскость  $x = \text{const} > 0$  и описывается выражением (6.1) [24, 25]. Для невозбужденного атома  $\alpha'' > 0$ , поэтому  $I_{\text{int}} < 0$ . Полный поток энергии вдоль оси  $x$ , переносимой суммарным излучением, уменьшается, что означает поглощение атомом части падающего излучения. Для возбужденного атома  $\alpha'' < 0$ , поэтому  $I_{\text{int}} > 0$ , и полный поток энергии вдоль оси  $x$  увеличивается. Это соответствует направленному вынужденному излучению атома.



Обмен импульсом и моментом импульса описывается интерференционными компонентами максвелловского тензора напряжений для суммарного поля падающей волны и диполя [26]. В случае плоской монохроматической волны, рассмотренной выше, отношение импульса  $P_x$  к энергии  $W$ , переносимых интерференционным потоком, имеет вид [26]

$$\frac{P_x}{W} = \frac{k_x}{\omega}, \quad (6.2)$$

где  $k_x = \omega/c$ , и совпадает с отношением этих величин для падающей волны. Именно это обстоятельство позволяет говорить об испускании атомом фотона плоской монохроматической волны. Таким образом, гипотеза об "игольчатом" излучении атома становится излишней, поскольку пространственная направленность его вынужденного излучения определяется пространственной структурой падающей волны.

Пусть теперь на атом падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$  и экспоненциально затухающая вдоль оси  $z$ . Вещественная проекция волнового вектора на ось  $x$  удовлетворяет условию  $k_x > \omega/c$ , при этом проекция волнового вектора на ось  $z$   $k_z = i(k_x^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}$  имеет мнимую величину. Расчет показывает, что весь интерференционный поток, описываемый формулой (6.1), проходит через плоскость  $z = \text{const} < 0$ , т.е. направлен перпендикулярно потоку энергии, переносимой падающей волной вдоль оси  $x$  [24, 25]. При  $\alpha'' > 0$  интерференционный поток энергии направлен в положительном направлении оси  $z$ , а при  $\alpha'' < 0$  — в отрицательном направлении оси  $z$ , т.е. в сторону экспоненциального роста амплитуды падающей волны.

В области полного отражения от поглощающей среды интерференционный поток энергии направлен от границы раздела сред в глубь отражающей среды, а в случае усиливающей среды — к границе (усиливает отраженное излучение). Этот вывод согласуется с результатом, полученным в разделе 5 на основе принципа причинности. Интересно отметить, что в области полного отражения интерференционный поток переносит через границу раздела сред компоненту импульса  $P_x$ , удовлетворяющую соотношению (6.2), где  $k_x > \omega/c$  [26]. Измерения импульса отдачи атома, взаимодействующего с экспоненциально затухающей волной при полном отражении света, согласуются с (6.2) [27, 28]. Перенос интерференционным потоком момента импульса в области полного отражения для света различной поляризации рассмотрен в [26].

В среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью поле диполя, совершающего гармонические колебания, экспоненциально затухает с расстоянием и не переносит энергию. Однако, если дипольный момент атома возбуждается преломленной волной, возникающей при нормальном падении плоской монохроматической волны, то положение меняется. Сама преломленная волна экспоненциально затухает по нормали к поверхности раздела сред и не переносит энергию. Тем не менее интерференция реактивных компонент полей диполя и преломленной волны формирует поток энергии, который по-прежнему описывается выражением (6.1) [30].

Если  $\alpha'' > 0$ , интерференционный поток энергии направлен к атому в сторону экспоненциального затухания преломленной волны. При  $\alpha'' < 0$  интерференцион-

ный поток энергии направлен от атома в сторону экспоненциального роста преломленной волны, т.е. к границе раздела сред и усиливает отраженное излучение. В отношении механизма переноса энергии электромагнитного поля данный случай вынужденного излучения имеет сходство с процессом безызлучательного переноса энергии между атомами и может быть назван туннельным вынужденным излучением [30]. Отметим, что в этом случае отношение (6.2) обращается в нуль. Другой возможный вариант излучения возбужденных атомов в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью рассмотрен в [29].

В процессе отражения излучения поток энергии через границу раздела сред определяется возбуждением преломленной волны и энергообменом между преломленной волной и отражающей средой. В области непропускания отражающей среды преломленная волна занимает слой конечной толщины, поэтому ее формирование происходит за конечное время. После этого поток энергии через границу раздела сред обусловлен энергообменом между сформированной преломленной волной и атомами среды, а его направление зависит от состояния атомов и пространственно-временной структуры преломленной волны.

Меняя граничные условия на поверхности раздела сред, можно управлять пространственно-временной структурой преломленной волны и, соответственно, направленностью вынужденного излучения возбужденных атомов отражающей среды. Таким образом можно реализовать усиление преломленной, отраженной и боковых волн, а также формально получить абсолютную неустойчивость процесса отражения [16]. Вынужденное излучение атомов в поле экспоненциально затухающих преломленных волн, связанных с границей раздела сред, всегда происходит в направлении экспоненциального роста амплитуды этих волн, а не в направлении переноса энергии. Именно благодаря такой направленности вынужденного излучения формируется преломленная волна, распространяющаяся к границе раздела сред.

## 7. Заключение

Задача об отражении электромагнитного излучения ставится на плоскости пространственной  $x$  и временной  $t$  вещественных переменных, где формулируются граничные условия и принцип причинности, определяющий направления распространения передних амплитудных фронтов падающего, отраженного и преломленного излучений. Только в случае ограниченного на поверхности раздела сред как по  $x$ , так и по  $t$  падающего излучения можно использовать принцип причинности и получить для линейных сред без пространственной дисперсии единственное решение граничной задачи. Это решение определяет поле отраженного излучения, локальный амплитудный коэффициент отражения и поверхностную функцию Грина.

Метод Фурье переводит решение данной граничной задачи в четырехмерное пространство комплексных фурье-переменных  $k_x$  и  $\omega$ , где особые точки амплитудного коэффициента отражения фурье-компонент позволяют сразу увидеть специфику отражения, связанную с возбуждением поверхностных волн. Из граничных условий на поверхности раздела сред не следует однозначное соотношение между фурье-компонентами падающего и

отраженного излучения для любой отдельно взятой точки  $(k_x, \omega)$ . Принцип причинности однозначно определяет лишь асимптотику амплитудного коэффициента отражения фурье-компонент при  $|\omega| \rightarrow \infty$  и не устраняет имеющуюся неоднозначность. В результате единственное решение граничной задачи может быть записано с помощью континуума эквивалентных фурье-представлений, где одна и та же фурье-компонента в разных фурье-представлениях имеет разные амплитудные коэффициенты отражения.

Получение континуума эквивалентных фурье-представлений сводится к определению амплитудного коэффициента отражения фурье-компонент как регулярной функции в пространстве фурье-переменных, где задание правила обхода особых точек, проведение разрезов и выбор листа римановой поверхности выполняются в соответствии с принципом причинности. Амплитудный коэффициент отражения фурье-компонент в любой точке поверхности интегрирования находится путем аналитического продолжения из нулевого значения в области, где  $|\omega'| \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что правило отбора фурье-компонент преломленного излучения в каждой точке поверхности интегрирования необходимо заменить на критерий выбора наиболее удобного фурье-представления.

Если при неограниченном увеличении длительности и ширины импульса локальный амплитудный коэффициент отражения имеет предел  $\rho_\infty$ , то он совпадает с одним из двух возможных амплитудных коэффициентов отражения плоских монохроматических волн  $R_+$  или  $R_-$ , допускаемых граничными условиями. В этом случае естественно выбрать такое фурье-представление, когда амплитудный коэффициент отражения центральной фурье-компоненты импульса совпадает с  $\rho_\infty$ . Обычно используемые фурье-представления для прозрачных и поглощающих отражающих сред обладают именно таким свойством. Экспериментально измеряемые коэффициенты отражения, описываемые формулами Френеля, следует связывать с предельным локальным амплитудным коэффициентом отражения импульса, однозначно определяемым принципом причинности и граничными условиями.

Дискуссии, посвященные отражению света от усиливающих, а также нелинейных сред, где решение вопроса о существовании гистерезисных явлений оказалось невозможным в рамках модели плоской монохроматической волны [31], позволили с новых позиций посмотреть на формулы Френеля и дать им более точную физическую интерпретацию. Этот подход основан на принципе причинности, определяющем направление и скорость распространения переднего амплитудного фронта элект-

ромагнитного излучения — фундаментальной характеристики излучения, введенной Л. Бриллюэном и А. Зоммерфельдом. По существу, единственность решения задачи об отражении импульса достигается посредством согласования направлений распространения передних амплитудных фронтов всех трех импульсов, возникающих на поверхности раздела сред.

Автор благодарен В.Л. Гинзбургу, Б.З. Каценеленбауму, А.Н. Ораевскому, С.Н. Столярову и В.В. Шевченко за интерес к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

## Список литературы

1. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
2. Кизель В А *Отражение света* (М.: Наука, 1973)
3. Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972)
4. Романов Г Н, Шахиджанов С С *Письма в ЖЭТФ* **16** 298 (1972)
5. Бойко Б Б, Петров Н С, Джилавари И З *Журн. прикл. спектр.* **18** 727 (1973)
6. Колоколов А А *Письма в ЖЭТФ* **21** 660 (1975)
7. Вайнштейн Л А *УФН* **118** 339 (1976)
8. Винокуров Г Н, Жулин В И *Квант. электрон.* **9** 553 (1982)
9. Зямин А Б *Журн. прикл. спектр.* **40** 1005 (1984)
10. Бойко Б Б, Петров Н С *Отражение света от усиливающих и нелинейных сред* (Минск: Наука и техника, 1988)
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
12. Колоколов А А, Суков А И *Изв. вузов. Радиофизика* **21** 1459 (1978)
13. Ахизер А И, Половин Р В *УФН* **104** 185 (1971)
14. Бреховских Л М *Волны в слоистых средах* (М.: Наука, 1973)
15. Колоколов А А *ЖЭТФ* **106** 1373 (1994)
16. Колоколов А А *Радиотехника и электроника* **43** 901 (1998)
17. Болотовский Б М, Столяров С Н "О принципах излучения в среде с дисперсией", в сб. *Проблемы теоретической физики Памяти И Е Тамма* (Отв. ред. В И Ритус) (М.: Наука, 1972) с. 267; Кадомцев Б Б, Михайловский А Б, Тимофеев А В *ЖЭТФ* **47** 2266 (1964)
18. Koester Ch J *IEEE J. Quantum Electron.* **2** 580 (1966)
19. Коган Б Я, Волков В М, Лебедев С А *Письма в ЖЭТФ* **16** 144 (1972)
20. Лебедев С А, Волков В М, Коган Б Я *Опт. и спектр.* **35** 976 (1973)
21. Лебедев С А, Коган Б Я *Опт. и спектр.* **48** 1030 (1980)
22. Cybulski R F, Silverman N P J. *Opt. Soc. Am.* **73** 1732 (1983)
23. Лебедев С А, Коган Б Я *Опт. и спектр.* **48** 1183 (1980)
24. Колоколов А А *Изв. вузов. Радиофизика* **22** 360 (1979)
25. Колоколов А А *Опт. и спектр.* **47** 558 (1979)
26. Коваленко А П, Колоколов А А *Изв. вузов. Радиофизика* **25** 401 (1982)
27. Huard S, Imbert Ch *Opt. Commun.* **24** 185 (1978)
28. Huard S *Can. J. Phys.* **57** 612 (1979)
29. Быков В П *ЖЭТФ* **63** 1226 (1972)
30. Колоколов А А, Скроцкий Г В *УФН* **162** 164 (1992)
31. Розанов Н Н *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах* (М.: Наука, 1997)

## Fresnel formulas and the principle of causality

A.A. Kolokolov

Moscow State University of Technology 'Stankin',  
per. Vadkovskii 3a, 101472 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 972-94 84. E-mail: physder@sec.ru, kolaa@sec.ru

A method is considered whereby Fresnel formulas for transparent, absorbing, and amplifying linear media are uniquely determined by passing to the plane-monochromatic-wave limit of an electromagnetic pulse, using the principle of causality, and employing the analytical properties of the amplitude reflection coefficient of the Fourier components of the pulse.

PACS numbers: 03.40.Kf, **42.15.-i**, 42.20.Jb, **42.25.-p**

Bibliography — 31 references

Received 22 December 1998