Июнь 1999 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 169, № 6*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О квантовом описании линейных кинетических свойств бесстолкновительной плазмы

М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе

Показаны простота и эффективность описания линейных кинетических свойств бесстолкновительной квантовой плазмы с самосогласованным полем с помощью квантовых гидродинамических уравнений, получаемых непосредственно из уравнения Шрёдингера.

PACS numbers: **52.25.-b**, 52.25.Dg, **52.90.+z**

1. Покажем, что известную систему уравнений холодной гидродинамики в эйлеровой форме [1] [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{V}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\times\nabla)\mathbf{V} = \frac{e}{m}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{B}]\right\} \qquad (1)$$

по крайней мере в линейном приближении можно успешно использовать и для описания кинетических свойств плазмы с тепловым разбросом частиц по скоростям (власовская плазма).

Пусть некоторая группа частиц плотностью n в однородной изотропной плазме (без внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$) обладают скоростью $\mathbf{V}$. Малое возмущение такого состояния слабым электромагнитным полем $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ приведет к возмущениям плотности δn и скорости $\delta\mathbf{V}$, которые находятся из линеаризованной системы (1). Поскольку n и $\mathbf{V}$ являются постоянными, величины δn и $\delta\mathbf{V}$ можно искать в виде $\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr})$. Определив δn и $\delta\mathbf{V}$, а затем плотность тока

$$j_i = en\delta V_i + e\delta n V_i = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j\,, \qquad (2)$$

[1] Для сокращения последующих записей мы рассматриваем только одну компоненту плазмы, например электронную.

М.В. Кузелев. Московский государственный университет печати, 127550 Москва, ул. Прянишникова 2а, Российская Федерация
Тел. (095) 976-40-88.
Факс (095) 976-06-35
E-mail: mgup@mail.cnt.ru
А.А. Рухадзе. Институт общей физики РАН, 117942 Москва, ул. Вавилова 38, Российская Федерация
Тел. (095) 135-02-47
Факс (095) 135-80-11
E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Статья поступила 5 марта 1999 г., после доработки 16 марта 1999 г.

найдем проводимость σ_{ij} и диэлектрическую проницаемость рассматриваемой группы частиц

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi\mathrm{i}}{\omega}\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) =$$

$$= \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\left[\delta_{ij} + \frac{k^2 V_i V_j}{(\omega - \mathbf{kV})^2} + \frac{k_i V_j + V_i k_j}{\omega - \mathbf{k}V}\right]. \qquad (3)$$

Теперь можно перейти от группы частиц ко всей плазме, произведя усреднение по функции распределения $f_0(p)$ по импульсам путем замены $n \to f_0(p)\,\mathrm{d}p$ с последующим интегрированием

$$n \to \int \mathrm{d}\mathbf{p} f_0(p)[...]\,, \qquad (4)$$

где под интегралом в квадратных скобках стоит множитель из выражения (3), заключенный в квадратные скобки. В результате находим известное выражение для тензора диэлектрической проницаемости изотропной плазмы, получаемое обычно путем решения кинетического уравнения Власова [2],

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, \mathbf{k})\,,$$

где

$$\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\int \frac{\mathbf{k}\,\partial f_0/\partial\mathbf{p}}{\omega - \mathbf{kV}}\,\mathrm{d}\mathbf{p}\,, \qquad (5)$$

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\int \mathrm{d}\mathbf{p}\left[f_0(p) + \frac{mV_\perp^2\,\mathbf{k}\,\partial f_0/\partial\mathbf{p}}{2(\omega - \mathbf{kV})}\right].$$

Естественно, что изложенный метод применим не только при вычислении диэлектрической проницаемости изотропной плазмы. Замена (4) пригодна в любом случае, когда плазму с тепловым разбросом можно рассматривать как совокупность групп частиц, описываемых уравнениями (1). При этом под интегралом в (4) в квадратных скобках должны находиться все выражения, зависящие от гидродинамических характеристик каждой группы частиц.

2. Обобщим изложенный метод на случай квантовой плазмы. Для этого будем исходить из уравнения Шрёдингера для электронов без спина, следуя при выводе работе [3],

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \mathrm{i}\hbar\frac{e}{mc}\mathbf{A}\nabla + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 + e\varphi\right]\psi\,. \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{A}$ и φ — векторный и скалярный потенциалы полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, причем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,, \quad \mathbf{B} = [\nabla\times\mathbf{A}]\,, \quad (\nabla\mathbf{A}) = 0\,. \qquad (7)$$

Представляя волновую функцию в виде

$$\psi = a(\mathbf{r}, t)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(\mathbf{r}, t)\right] \qquad (8)$$

и используя определения плотностей заряда и тока

$$\rho = en = e|\psi|^2 = ea^2\,,$$

$$\mathbf{j} = en\mathbf{V} = \frac{\mathrm{i}e\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) - \frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\psi\psi^* = \frac{ea^2}{m}\left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,, \qquad (9)$$

из уравнения Шрёдингера (6) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{V}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{V}\times\nabla)\mathbf{V} = \frac{e}{m}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{B}]\right\} + \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla\left\{\frac{1}{n}\left[\Delta n - \frac{1}{2n}(\nabla n)^2\right]\right\}\,. \qquad (10)$$

Первое из этих уравнений совпадает с уравнением непрерывности, а второе — с уравнением Эйлера из системы (1). Поэтому по аналогии с (1) систему (10) будем называть квантовыми уравнениями холодной гидродинамики плазмы.

Уравнения (10) отличаются от (1) наличием в уравнении Эйлера квантовой силы, обусловленной принципом неопределенности Гейзенберга. В этом легко убедиться, рассмотрев малые возмущения однородного состояния с $n = \mathrm{const}$ и $\mathbf{V} = 0$. В пределе $n \to 0$, когда самосогласованными полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ можно пренебречь. Из линеаризованной системы (10) для решений вида $\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr})$ получаем дисперсионное соотношение

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \equiv \omega_{\mathrm{q}}\,, \qquad (11)$$

описывающее колебания одного электрона. Это соотношение связывает между собой временну́ю (пропорциональную $1/\omega$) и пространственную (пропорциональную $1/k$) области локализации свободного электрона, или энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\mathbf{k}$. Величина (11) является частотой квантовых колебаний свободного электрона.

Теперь, следуя изложенному выше методу, мы можем получить диэлектрическую проницаемость квантовой изотропной плазмы с тепловым разбросом электронов по скоростям. Вначале для любой группы частиц плазмы получим соответствующую квантовую диэлектрическую проницаемость, т.е. квантовый аналог тензора (3). Для зависимостей возмущенных величин в виде $\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr})$ из (10) следует

$$\varepsilon^{\mathrm{q}}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{\mathrm{cl}}_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{\omega_{\mathrm{q}}^2}{\omega_{\mathrm{L_e}}^2}\delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}_{i\mu}(\omega, \mathbf{k})\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}_{i\nu}(\omega, \mathbf{k})\times \left[1 + \frac{\omega_{\mathrm{q}}^2}{\omega_{\mathrm{L_e}}^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{k})\right]^{-1}\,, \qquad (12)$$

где $\omega_{\mathrm{L_e}} = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ — электронная ленгмюровская частота, а $\varepsilon^{\mathrm{cl}}_{ij} = \delta_{ij} + \delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}_{ij}$ — классический тензор диэлектрической проницаемости, определенный выражением (3). При получении (12) мы воспользовались очевидной заменой

$$\mathbf{E}^{\mathrm{q}} = \mathbf{E}^{\mathrm{cl}} - \mathrm{i}\mathbf{k}\frac{\hbar k^2}{4me}\frac{\delta n}{n}\,, \qquad (13)$$

которая следует в линейном приближении из уравнения Эйлера (10).

Подставляя далее (3) в (12) и переходя к кинетическому описанию с помощью замены (4), после несложных вычислений находим известные выражения [2] для квантовых продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей изотропной плазмы

$$\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2}\int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\omega - \mathbf{kV}}\left[f_0\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\right]\,,$$

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{L_e}}^2}{\omega^2} + \frac{2\pi e^2}{\hbar\omega^2}\times \int\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\omega - \mathbf{kV}}V_\perp^2\left[f_0\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2}\right)\right]\,. \qquad (14)$$

Отметим, что в [2] выражения (14) получены путем решения квантового кинетического уравнения Вигнера. В пределе $\hbar \to 0$ формулы (14) очевидным образом переходят в (5).

3. Рассмотрим теперь однородную магнитоактивную плазму. Направим внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$ вдоль оси $\mathrm{O}Z$ и ограничимся для простоты случаем потенциального поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{A} = 0$. Как и выше, рассмотрим группу частиц с плотностью n, обладающих продольной скоростью V_z и вращающихся вокруг силовых линий магнитного поля с ларморовской частотой $\Omega = eB_0/mc$ и ларморовским радиусом $R_{\mathrm{L}} = V_\perp/\Omega$. Продольную диэлектрическую проницаемость такой классической холодной плазмы (группы частиц) легко получить исходя из общих формул, приведенных в [1]. Она имеет вид

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{L_e}}^2}{k^2}\times \sum_s\left[\frac{k_z^2 J_s^2(z)}{(\omega - k_z V_z - s\Omega)^2} + \frac{2sk_\perp^2 J_s(z)J_s'(z)}{z\Omega(\omega - k_z V_z - s\Omega)}\right]\,, \qquad (15)$$

где $J_s(z)$ — функция Бесселя от действительного аргумента $z = k_\perp R_{\mathrm{L}}$.

Усредняя выражение (15) по функции распределения $f_0(\mathbf{p})$ по указанному выше рецепту (4), получаем известное выражение для продольной диэлектрической проницаемости классической магнитоактивной плазмы [1]

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \mathrm{d}\mathbf{p} \sum_s \frac{J_s^2(z)}{\omega - k_z V_z - s\Omega} \times \\ \times \left(k_z \frac{\partial f_0}{\partial V_z} + \frac{s\Omega}{V_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial V_\perp} \right) . \quad (16)$$

Не представляет труда записать и продольную диэлектрическую проницаемость магнитоактивной квантовой плазмы. Для этого следует заметить, что полная сила в правой части уравнения Эйлера (10) вообще не зависит от типа плазмы. Следовательно, универсальный характер имеет и соотношение (13), а значит, и формула (12). Поэтому для продольной диэлектрической проницаемости имеем

$$\varepsilon^{\mathrm{q}}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{\mathrm{cl}}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{\omega_{\mathrm{q}}^2}{\omega_{\mathrm{L_e}}^2} \frac{\delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}(\omega, \mathbf{k})\delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}(\omega, \mathbf{k})}{1 + (\omega_{\mathrm{q}}^2/\omega_{\mathrm{L_e}}^2)\delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}(\omega, \mathbf{k})} , \quad (17)$$

где $\varepsilon^{\mathrm{cl}} = 1 + \delta\varepsilon^{\mathrm{cl}}$ определяется выражением (15).

Таким образом, (17) представляет собой продольную диэлектрическую проницаемость холодной квантовой плазмы. Переход к кинетическому описанию производится, как и выше, путем усреднения (17) по функции распределения $f_0(\mathbf{p})$ с помощью замены (4). При подстановке (15) в (17) и последующем усреднении получаются громоздкие выражения, и мы их здесь приводить не будем.

Более целесообразно обсудить вопрос о самом распределении $f_0(\mathbf{p})$, по которому проводится усреднение. Дело в том, что в магнитоактивной плазме, вообще говоря, следует учитывать квантование энергии поперечного движения электронов, что никак не сказывается на величине ω_{q}, но существенно влияет на вид функции распределения $f_0(\mathbf{p})$.

В случае максвелловской статистики (невырожденные электроны) [4]

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi m)^{3/2} T^{1/2} E_\perp} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mT} - \frac{p_\perp^2}{2mE_\perp} \right) , \quad (18)$$

где

$$E_\perp = \frac{\hbar\Omega}{2} \coth \frac{\hbar\Omega}{2T} \approx \begin{cases} T , & \hbar\Omega \ll 2T , \\ \hbar\Omega/2 , & \hbar\Omega \gg 2T , \end{cases} \quad (19)$$

— средняя энергия поперечного движения электрона.

Условие же отсутствия вырождения записывается как

$$E_{\mathrm{F}} \ll T^{1/3} E_\perp^{2/3} , \quad (20)$$

где $E_{\mathrm{F}} = (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{2/3}$ — энергия Ферми при $B_0 = 0$.

При нарушении неравенства (20) необходимо учитывать вырождение и функция $f_0(\mathbf{p})$ усложняется. Однако в приближении Хартри она имеет простой вид [5]

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \sum_s (-1)^s \times \\ \times \frac{L_s(p_\perp^2/m\hbar\Omega)\exp(-p_\perp^2/m\hbar\Omega)}{1 + \exp\left\{ T^{-1} \left[p_z^2/2m + \hbar\Omega(s + 1/2) - \zeta \right] \right\}} , \quad (21)$$

где $L_s(x)$ — функция Лагерра, а ζ — химический потенциал, в случае свободных электронов совпадающий с энергией Ферми E_{F}. Суммирование в (21) распространяется по всем квантовым уровням Ландау s.

Заметим, что обобщение полученных выше результатов на многокомпонентную плазменную среду очевидно и сводится к простому суммированию по компонентам в формулах (3), (5), (12), (14)–(17). Существенно также, что диэлектрическую проницаемость плазмы в квантующем магнитном поле можно получить и непосредственным решением уравнения Вигнера с распределениями (18) или (21). Однако этот путь оказывается весьма сложным в связи с громоздкими математическими выкладками [6, 7]. Применение формул (16) и (17) может оказаться предпочтительнее.

Таким образом, простая модель холодной гидродинамики при соответствующем усреднении по функции распределения описывает кинетические свойства квантовой плазмы так же полно, как и классической. Выше это продемонстрировано в линейном приближении. Нелинейные же процессы требуют отдельного рассмотрения.

Список литературы

1. Александров А Ф, Богданкевич Л С, Рухадзе А А *Основы электродинамики плазмы* 2-е изд. (М.: Высшая школа, 1988)
2. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Госатомиздат, 1961)
3. Блохинцев Д И *Основы квантовой механики* (М.: Высшая школа, 1963)
4. Рухадзе А А, Шафер В Ю *Кратк. сообщ. по физ.* (10) 41 (1980)
5. Зильберман П Е *ФТТ* **12** 1697 (1970)
6. Зырянов П С, Калашников В П *ЖЭТФ* **40** 1119 (1961)
7. Елеонский В М, Зырянов П С, Силин В П *ЖЭТФ* **42** 896 (1962)

On the quantum mechanical description of the linear kinetics of a collisionless plasma

M.V. Kuzelev
Moscow State University of Printing Art
ul. Pryanishnikova 2a, 127550 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 976-40 88. Fax (7-095) 976-06 35
A.A. Rukhadze
General Physics Institute, Russian Academy of Sciences
ul. Vavilova 38, 117942 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 135-02 47. Fax (7-095) 135-02 70

It is demonstrated that the linear kinetics of a collisionless quantum plasma can be described in a simple and effective way by means of a self-consistent-field scheme in which quantum hydrodynamic equations are derived directly from the Schrödinger equation.

PACS numbers: **52.25.-b**, 52.25.Dg, **52.90.+z**

Bibliography — 7 references *Received 5 March 1999, revised 16 March*