

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Необратимость и вероятностное описание динамики классических частиц

С.Н. Гордиенко

Показано, что высказанные Б.Б. Кадомцевым идеи о необходимости введения малого "внешнего шума" для возникновения необратимой по времени эволюции приводят к принципиально новой постановке задачи обоснования статистической механики: построить описание динамики многочастичной системы в пренебрежении частицами, испытывающими малое ускорение. Оказывается, что такая постановка задачи не только приводит к естественному возникновению необратимой эволюции, но и позволяет указать новый способ построения кинетических уравнений, корректно учитывающих флуктуации. На первом этапе эволюции, описываемом небольшими временами, происходит забывание начальных и формирование "послестолкновительных" корреляций. Именно заключительная стадия первого и этап сформированных "послестолкновительных" корреляций могут быть описаны замкнутым кинетическим уравнением. Установлена связь идей Б.Б. Кадомцева о роли внешнего шума с подходом Н.Н. Боголюбова к получению кинетических уравнений, что приводит к новой физической интерпретации гипотезы о "молекулярном хаосе".

PACS numbers: 03.65.-w, 03.65.Bz, 05.40.-a, 05.45.-a

Содержание

1. Введение (653).
2. Структура иерархии ББГКИ (654).
3. Физический смысл простейших свойств иерархии ББГКИ (655).
4. Расщепление иерархии ББГКИ методом Н.Н. Боголюбова (655).
5. Метод Н.Н. Боголюбова и идеи Б.Б. Кадомцева о роли внешнего окружения (656).
6. Сингулярные функции распределения и иерархия ББГКИ (657).
7. Новый метод получения кинетических уравнений (658).
8. Уравнения для сингулярных "расширенных" функций распределения (658).
9. Метод асимптотического интегрирования (659).
10. О соотношении между одночастичной и двухчастичной функциями распределения (660).
11. Необратимость по времени (651).
12. Введение гладких функций распределения (662).
13. Два этапа эволюции "расширенных" функций распределения и слабая форма H -теоремы (663).
14. Размыкание системы уравнений асимптотической эволюции (664).
15. Физический смысл формализма "расширенных" функций распределения (665).
16. Дополнительные ограничения на "расширенные" функции распределения (666).

17. Переход к уравнению Больцмана (666).
 18. Необратимость по времени и вероятностное описание динамики (666).
 19. Заключение (667).
 20. Приложение (668).
- Список литературы (671).

1. Введение

Эксперимент показывает, что замкнутая макроскопическая система через определенное время — время релаксации приближается к состоянию термодинамического равновесия. Вместе с тем, законы как классической, так и квантовой механики обратимы по времени. Поэтому вопрос о том, как из обратимых уравнений динамики может быть получено описание необратимых процессов, многократно обсуждался и продолжает обсуждаться в физической литературе [1]. Мы не станем даже пытаться комментировать все высказанные по этому поводу точки зрения, а вместо этого подробнее остановимся на тех подходах к проблеме (хотя некоторые из этих подходов не во всем разделяем), которые так или иначе связаны с идеологией настоящей работы.

Как показано в [1], для разреженного газа одной лишь гипотезы Больцмана о "молекулярном" хаосе достаточно, чтобы явно ввести физическую необратимость: согласно H -теореме кинетическое уравнение Больцмана описывает необратимую релаксацию газа к термодинамическому равновесию. При рассмотрении вопроса о том, какое именно физическое явление стоит за гипотезой о молекулярном хаосе, Б.Б. Кадомцев [1] пришел к выводу, что необратимость динамики газа классических частиц и возможность его статистического описания

С.Н. Гордиенко. Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау РАН,
142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация
Тел. 8(252) 486-91
E-mail: gord@itp.ac.ru

Статья поступила 30 октября 1998 г.,
после доработки 5 марта 1999 г.

определяются очень малым взаимодействием системы с внешним необратимым окружением. При этом в [1] утверждается, что сам по себе динамический хаос не является основанием для появления необратимости. По мнению Б.Б. Кадомцева [1], "необратимость не является прямым следствием хаоса, хотя косвенным образом с этим хаосом может быть связана". Подобный вывод, сделанный на основе качественных рассуждений, является совершенно неожиданным. В связи со сказанным напомним, что аргументы в пользу невозможности последовательного построения статистической физики в рамках теории "влияния внешней среды" приведены, например, в [2]. В работе [2], опубликованной значительно ранее работы [1], утверждается, что от идеи введения внешнего необратимого окружения для построения статистической физики следует отказаться, а необратимая динамика возникает в динамических системах, обладающих свойством перемешивания.

Сделанный в [1] вывод о том, что без внешних шумов термодинамическое равновесие может и не достигаться, представляет не только чисто теоретический интерес. В самом деле, согласно [1], С.А. Майоров, А.Н. Ткачев и С.И. Яковленко [3] методом молекулярной динамики для совокупности точечных зарядов в замкнутом объеме с зеркально отражающими стенками показали, что в результате устанавливается стационарное состояние, отличное от термодинамически равновесного. Причем в этом стационарном состоянии очень замедляется процесс рекомбинации сильно переохлажденной плазмы.

Однако хорошо известно, что уравнение Больцмана может быть получено "обрыванием" иерархии Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) по малому параметру, как было продемонстрировано Н.Н. Боголюбовым [4]. При подобном подходе не возникает необходимости во введении внешнего шума.

В настоящей работе показано, что в действительности существует тесная связь между подходом Н.Н. Боголюбова и идеями Б.Б. Кадомцева о роли внешнего окружения в формировании необратимой по времени эволюции и предложен новый подход к получению кинетических уравнений. Как следует из дальнейшего, развитие подхода Б.Б. Кадомцева позволяет по-новому посмотреть на физическое содержание гипотезы о "молекулярном хаосе" и указать метод последовательного описания флуктуаций в рамках кинетической теории. Кроме того, в рамках развития идей Б.Б. Кадомцева необходимо дать ответ на вопрос, почему внешний шум приводит к необратимой динамике, но сама необратимая динамика не зависит от внешнего шума, если последний достаточно мал.

2. Структура иерархии ББГКИ

Обсудим некоторые простые свойства иерархии ББГКИ, обращая особое внимание на вопросы, которые будут связаны с необратимостью динамики по времени.

Рассмотрим систему из N одинаковых частиц, описывающуюся гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (1)$$

где $U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ и m — парный потенциал межчастичного взаимодействия и масса частиц соответственно.

Динамику этой системы можно описывать двумя эквивалентными способами. Можно изучать траектории системы в фазовом пространстве, а можно рассмотреть эволюцию функций, заданных на фазовом пространстве. Первый подход соответствует описанию динамики уравнениями Гамильтона (вторым законом Ньютона), второй — уравнением Лиувилля. Произвольная функция $\rho(t, 1, \dots, N)$, где $i = (\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i)$, заданная на $6N$ -мерном фазовом пространстве системы, эволюционирует во времени в соответствии с уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \hat{\Lambda} \rho, \quad (2)$$

где $\hat{\Lambda}$ — оператор Лиувилля, причем

$$\hat{\Lambda} = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \right). \quad (3)$$

Имея в виду описание динамических систем с большим числом частиц $N \rightarrow +\infty$, удобно от функции $\rho(t, 1, \dots, N)$, которая предполагается симметричной по всем группам переменных $1, 2, \dots$, перейти к s -частичным функциям распределения

$$F_s(t, 1, \dots, s) = \int \frac{d(s+1) \dots dN}{(N-s)!} \times \rho(t, 1, \dots, i, \dots, N), \quad 1 \leq s \leq N, \quad (4)$$

а все многочастичные функции распределения с $s \geq (N+1)$ по определению положим равными нулю. Используя функции F_s , уравнение (2) перепишем в виде системы зацепляющихся уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}_1 + \dots + \hat{l}_s \right) F_s = \hat{\Lambda}_s F_s + \int \sum_{1 \leq i \leq s} \hat{\Lambda}(i, s+1) \times F_{s+1}(t, 1, \dots, i, \dots, s, s+1) d(s+1), \quad 1 \leq s \leq N, \quad (5)$$

где

$$\hat{l}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i},$$

$$\hat{\Lambda}_s = \sum_{1 \leq i < j \leq s} \hat{\Lambda}(i, j),$$

$$\hat{\Lambda}(i, j) = \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} + \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}, \quad i \neq j.$$

Теперь, совершая термодинамический предельный переход

$$N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{V} = \text{const}, \quad (6)$$

где V — объем системы, в предположении, что все F_s имеют конечный предел, приходим к бесконечной системе зацепляющихся уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}_1 + \dots + \hat{l}_s \right) F_s = \hat{\Lambda}_s F_s + \int \sum_{1 \leq i \leq s} \hat{\Lambda}(i, s+1) \times F_{s+1}(t, 1, \dots, i, \dots, s, s+1) d(s+1). \quad (7)$$

Система уравнений (7) отличается от системы уравнений (5) лишь тем, что в системе (7) содержится бес-

конечное число уравнений. Обращают на себя внимание несколько характерных особенностей системы уравнений (7) и тесно связанной с ней системы уравнений (5). Во-первых, система уравнений (7) обратима по времени. Во-вторых, все уравнения (7) — линейные интегродифференциальные уравнения. Действительно, если

$$\Gamma = (F_1, F_2, \dots, F_s, \dots) \text{ и } \Gamma' = (F'_1, F'_2, \dots, F'_s, \dots) \quad (8)$$

— два произвольных решения уравнений (7), то набор функций

$$a\Gamma + b\Gamma' = (aF_1 + bF'_1, aF_2 + bF'_2, \dots, aF_s + bF'_s, \dots), \quad (9)$$

где a и b — произвольные числа, также дает решение уравнений (7).

И, наконец, при получении (7) на симметричную функцию $\rho(t, 1, \dots, N)$ не было наложено никаких ограничений, кроме требования существования предела F_s при любом s , когда $N \rightarrow +\infty$. Нигде не предполагались неотрицательность и нормированность функции $\rho(t, 1, \dots, N)$.

3. Физический смысл простейших свойств иерархии ББГКИ

Обратимость по времени иерархии ББГКИ является естественным следствием обратимости по времени уравнений Гамильтона, соответствующих (1). То, что функции ρ весьма произвольного вида приводят к (7), означает, что эволюция произвольных (симметричных) ансамблей описывается (7). Вследствие этого возникает проблема физической интерпретации частных решений (7). В самом деле, с точки зрения физики представляет интерес поведение не произвольных ансамблей, а лишь таких, эволюция которых позволяет сделать заключение о динамике (возможно, "огрубленной") отдельных точек фазового пространства. Вместе с тем, пока у нас нет критерия, позволяющего выделять "физически интересные" ансамбли и соответствующие им наборы функций (F_1, F_2, \dots) . Поясним последние рассуждения простым примером. Рассмотрим ансамбль, задаваемый согласно

$$\rho(t, 1, \dots, N) = \exp\left(-\frac{H}{T_1}\right) + \exp\left(-\frac{H}{T_2}\right), \quad T_1 \neq T_2, \quad (10)$$

где T_1 и T_2 следует интерпретировать как температуры, а ансамбль (10) — понимать как "смесь" систем, находящихся при различных температурах. Очевидно, что изучение ансамбля (10) не имеет физического смысла. Более содержательные примеры, связанные с необходимостью разумного выбора ансамбля, приведены, например, в [5, 6], где указано на связь этого вопроса с концепцией квазисредних [7].

Отмеченная ранее линейность всех уравнений (7), вытекающая из линейности уравнения Лиувилля, имеет ясный физический смысл. Заметим, что уравнения (7) описывают не одиночную систему, динамика которой задается (1), а целый ансамбль таких систем, отличающихся начальными условиями. Линейность уравнений цепочки ББГКИ является отражением того, что частица, принадлежащая данному экземпляру системы с

гамильтонианом (1), взаимодействует лишь с частицами, входящими в тот же самый экземпляр системы, т.е. не взаимодействует с частицами, принадлежащими другим системам из рассматриваемого ансамбля. Последнее становится очевидным, если перейти в выражении (4) от интеграла к суммам Римана. Однако, чтобы избежать запутывающих суть дела громоздких обозначений, убедимся в сказанном на примере ансамбля, состоящего всего из двух точек фазового пространства, входящих с весами α и $1 - \alpha$ соответственно. В этом случае можно записать

$$F_1 = \alpha \sum_{i=1}^{i=N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^{(1)}(t)) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^{i=N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^{(2)}(t)), \quad (11)$$

$$F_2 = \alpha \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j^{(1)}(t)) \times \\ \times \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_j^{(1)}(t)) + (1 - \alpha) \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_i^{(2)}(t)) \times \\ \times \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_j^{(2)}(t)) \quad (12)$$

и т.д., где в $\mathbf{r}_i^{(n)}(t)$ ($n = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, N}$) верхний индекс нумерует одну из двух точек фазового пространства, входящих в рассматриваемый ансамбль, а нижний индекс нумерует частицы. Подставляя (11), (12) в уравнение (7), описывающее эволюцию одночастичной функции распределения, легко убедиться, что свойство линейности действительно допускает указанную выше интерпретацию. Из (11), (12) следует, что частицы из данного представителя (точки фазового пространства) взаимодействуют только с частицами данного представителя, т.е. той же самой точки в $6N$ -мерном фазовом пространстве системы.

4. Расщепление иерархии ББГКИ методом Н.Н. Боголюбова

Для получения кинетического уравнения Больцмана Н.Н. Боголюбов предложил искать решение (7) в виде [4]

$$F_2(t, 1, 2) = F_1(t, 1)F_1(t, 2) + G_2(t, 1, 2), \\ F_3(t, 1, 2, 3) = F_1(t, 1)F_1(t, 2)F_1(t, 3) + F_1(t, 1)G_2(t, 2, 3) + \\ + F_1(t, 2)G_2(t, 1, 3) + F_1(t, 3)G_2(t, 1, 2) + G_3(t, 1, 2, 3), \quad (13)$$

где функции G_2 , G_3 и т.д. в определенном смысле малы. "Малость" корреляционных функций имеет различный смысл в разных задачах: в задаче о разреженном газе с короткодействующим потенциалом "малость" корреляционных функций подразумевает их малую величину на расстояниях, значительно превышающих радиус действия потенциала; в случае газа со слабым межчастичным взаимодействием (значительно меньшим температуры) корреляционные функции предполагаются действительно повсюду малыми.

Подход Н.Н. Боголюбова является последовательным с математической точки зрения, хотя его примени-

мость ограничена лишь конечным порядком по малому параметру из-за обращающихся в бесконечность вкладов от четырехчастичных столкновений [8] (см. подробное обсуждение этого вопроса в [9]). Однако его физическое содержание требует определенных пояснений. Прежде всего заметим, что (13) является неявным определением ансамбля систем, который мы собираемся изучать с помощью уравнений (7). Поскольку подход Боголюбова предполагает, что

$$\int G_2 \, d1 \, d2 = 0, \quad (14)$$

то согласно (13), (14)

$$\int F_2(t, 1, 2) \, d1 \, d2 = \int F_1(t, 1) \, d1 \int F_1(t, 2) \, d2, \quad (15)$$

что при учете (4) приводит к равенству ($N \rightarrow +\infty$)

$$\int \rho(t, 1, \dots, N) \, d1 \dots dN = \left(1 - \frac{1}{N}\right) N!, \quad (16)$$

т.е. требуется определенная нормировка изучаемого ансамбля, позволяющая использовать язык теории вероятностей. Необходимо также заметить, что использование нелинейной факторизации (13) означает принципиальное с физической точки зрения предположение: считается, что динамика системы позволяет построить такой ансамбль, в котором реальное взаимодействие частицы, принадлежащей любой фиксированной системе, входящей в ансамбль, с частицами этой же системы, удастся с хорошей точностью аппроксимировать усредненным по ансамблю взаимодействием с частицами из различных систем ансамбля. Иными словами, факторизация (13) "вводит" взаимодействие между частицами, принадлежащими различным системам ансамбля. В сказанном можно непосредственно убедиться, представляя (13) как произведение сумм Римана, аппроксимирующих F_1 согласно (4). Впрочем, сказанное иллюстрируется и рассмотренным ранее примером "двухточечного" ансамбля. В самом деле, в этом конкретном случае использование первого из уравнений (13) означало бы следующую аппроксимацию функции F_2 :

$$\begin{aligned} F_2 = & \alpha^2 \sum \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j^{(1)}(t)) \times \\ & \times \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_j^{(1)}(t)) + (1 - \alpha)^2 \sum \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i^{(2)}(t)) \times \\ & \times \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_j^{(2)}(t)) + \alpha(1 - \alpha) \sum (\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i^{(1)}(t)) \times \\ & \times \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_j^{(2)}(t)) + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i^{(2)}(t)) \times \\ & \times \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i^{(2)}(t)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j^{(1)}(t)) \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_j^{(1)}(t))). \quad (17) \end{aligned}$$

Важно заметить, что из-за третьего слагаемого в (17), которое пропорционально $\alpha(1 - \alpha)$, и аналогичных слагаемых в более сложных ансамблях подход (13) "включает" в себя взаимодействие между частицами, принадлежащими различным представителям ансамбля. В самом деле, в (17) по сравнению с (12) появилось слагаемое новой природы: слагаемое, пропорциональное $\alpha(1 - \alpha)$, содержит произведения δ -функций, включающих в себя частицы из разных представителей ансамбля (с различными верхними индексами).

Теперь становится понятным, почему в результате подхода (13) удастся получить необратимые по времени

кинетические уравнения. В самом деле, (13) "вводит" взаимодействие между различными представителями ансамбля, т.е. каждая система, входящая в ансамбль, становится незамкнутой и возникновение необратимой эволюции в этих условиях в случае бесконечного числа систем в ансамбле представляется совершенно естественным. Разумеется, что необратимость возникает при проведении вычислений в том порядке по малому параметру, в котором становится заметной разница между различными точками фазового пространства, входящими в ансамбль (примером может служить плазма: уравнение Власова, т.е. первый порядок по обратному числу частиц в дебаевской сфере, обратимо, а уравнение Власова с интегралом столкновений Ландау, т.е. при учете второго порядка по малому параметру, уже не обратимо). Заметим, что это объясняет и Больцмановскую гипотезу о "молекулярном" хаосе: частица просто "сталкивается" (с соответствующим весом) с частицами из других представителей ансамбля, поэтому частицы до столкновения статистически независимы.

Несколько забегая вперед, сделаем еще одно важное замечание. С указанной точки зрения обоснование принципа "молекулярного" хаоса означает, по меньшей мере, нахождение таких свойств динамической системы и описание ее в таком приближении, когда справедлива замена истинного межчастичного взаимодействия внутри одного представителя ансамбля взаимодействием его частиц с частицами "среднего" по ансамблю представителя. Точный смысл последних рассуждений станет ясен из дальнейшего рассмотрения.

5. Метод Н.Н. Боголюбова и идеи Б.Б. Кадомцева о роли внешнего окружения

Остановимся подробнее на существовании тесной связи между методом Н.Н. Боголюбова получения кинетических уравнений Больцмановского типа и высказанными Б.Б. Кадомцевым [1] идеями о необходимости введения взаимодействия с "внешним" шумом (взаимодействия с внешним необратимым окружением) для возникновения в системе необратимой динамики.

Ранее мы убедились, что подход (13) соответствует введению взаимодействия с частицами, принадлежащими различным представителям изучаемого ансамбля, т.е. каждый представитель ансамбля становится незамкнутым, а взаимодействие с другими представителями ансамбля выполняет роль взаимодействия с внешним окружением. Заметим, что непрерывность функции распределения требует, чтобы ансамбль содержал бесконечное число (точнее, континуум) представителей. Нетривиальным результатом подхода Н.Н. Боголюбова является доказательство того, что на определенных временных интервалах, для определенных состояний системы (начальных условий) при наличии в системе (1) малых параметров (см. подробности в [4, 8]) взаимодействие частиц с вводимым согласно (13) отнюдь не малым внешним шумом (ср., например, третью и две первые суммы в (17)) в определенном смысле хорошо аппроксимирует "грубую" динамику системы.

Вместе с тем подобная трактовка необратимости представляется не совсем удовлетворительной по целому ряду причин. Прежде всего замена истинного межчастичного взаимодействия внутри каждого конкретного представителя ансамбля взаимодействием с

частицами "усредненного" представителя ансамбля означает фактическое пренебрежение флуктуациями, на что было впервые указано М.А. Леонтовичем [10]. Первая попытка устранить этот недостаток уравнения Больцмана была предпринята в известной работе Б.Б. Кадомцева "О флуктуациях в газе" [11] (см. также [13]). Однако использованный в ней метод и огромное количество последовавших за этой работой исследований по флуктуациям в кинетических уравнениях позволяют рассмотреть лишь случай малых флуктуаций, т.е. случай, когда допустимо представление о "безфлуктуационном" состоянии, возмущаемом малыми флуктуациями.

Таким образом, метод Боголюбова применим для построения кинетических уравнений лишь для таких сред, причем находящихся лишь в таких состояниях, когда флуктуации играют пренебрежимо малую роль. Во избежание недоразумений специально подчеркнем, что могут быть описаны флуктуации "усредненного" представителя ансамбля, т.е. теория может быть уточнена таким образом, чтобы учесть, что для решения некоторых задач необходимо по-разному строить ансамбли или, иными словами, описывать флуктуации "усредненного" представителя ансамбля. При этом легко видеть, что подобный метод, в принципе, не в состоянии дать полное описание флуктуаций. Заметим, что в подходе Боголюбова необратимость возникает в конечном итоге из-за возможности аппроксимировать истинное межчастичное взаимодействие фиктивным взаимодействием, возникающим из-за нелинейной факторизации (13). К сожалению, подобный механизм возникновения необратимости не проливает свет на физические процессы в системе частиц с гамильтонианом (1), приводящие к необратимой динамике. И, наконец, с развиваемой точки зрения сам метод сведения истинной многочастичной задачи к взаимодействию частиц с частицами "среднего" представителя является весьма искусственным. Из-за этого сам метод расщепления Боголюбова позволяет получать кинетические уравнения для достаточно узкого класса систем (в действительности методом Боголюбова нельзя получить кинетические уравнения даже для систем с произвольным степенным потенциалом межчастичного взаимодействия).

Ниже указан новый метод изучения необратимой динамики, но прежде необходимо остановиться на другом подходе к иерархии ББГКИ.

6. Сингулярные функции распределения и иерархия ББГКИ

Обратимся к несколько иной трактовке иерархии ББГКИ, основанной на аппарате сингулярных функций распределения [11–13].

Введем сингулярную одночастичную функцию распределения [11–13]

$$\phi_1(t, 1) = \sum_{i=1}^{i=N} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i(t)) \quad (18)$$

и, пользуясь ею, построим сингулярные s -частичные функции распределения

$$\phi_s(t, 1, \dots, s) = \phi_1(t, 1) \dots \phi_1(t, i) \dots \phi_1(t, s). \quad (19)$$

Согласно второму закону Ньютона находим уравнения, описывающие эволюцию сингулярных функций распределения $\phi_1(t, 1), \dots, \phi_s(t, 1, \dots, s)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}_1 \right) \phi_1(t, 1) = C_1(t, 1), \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}_1 + \dots + \hat{l}_s \right) \phi_s(t, 1, \dots, s) = C_s(t, 1, \dots, s), \quad (21)$$

где

$$\hat{l}_i = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i},$$

$$C_s(t, 1, \dots, s) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=s} \int \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{(s+1)})}{\partial \mathbf{r}_i} \times \\ \times \phi_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1) d(s+1).$$

Уравнения (20), (21) нуждаются в некоторых пояснениях. Уравнения (21) для $\phi_s, s \geq 2$, справедливы при всех различных $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s$, а при вычислении интегралов, входящих в $C_s, s \geq 1$, в интеграле, содержащем $\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{(s+1)})/\partial \mathbf{r}_i$, должна быть исключена бесконечно малая окрестность точки \mathbf{r}_i , чтобы исключить "самодействие" частицы, находящейся в этой точке.

Попытаемся сейчас от сингулярных функций распределения $\phi_s, s \geq 1$, перейти к описанию динамики сглаженными функциями распределения, усреднив уравнения (20), (21) по ансамблю. Имеющийся произвол в выборе ансамбля было бы хорошо использовать таким образом, чтобы в результате усреднения получить по возможности наиболее простые уравнения, т.е. подобрать ансамбль таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\langle \phi_s(t, 1, \dots, s) \rangle = \langle \phi_1(t, 1) \rangle \dots \langle \phi_1(t, i) \rangle \dots \langle \phi_1(t, s) \rangle. \quad (22)$$

К сожалению, это невозможно. Обратимся к определению функции $\phi_3(t, 1, 2, 3)$ при $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$:

$$\langle \phi_3(t, 1, 2, 3) \rangle = (\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times \\ \times \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) F_2(t, 1, 2) + F_3(t, 1, 2, 3), \quad (23)$$

где F_2 и F_3 — гладкие функции распределения, определяемые (4). Из (23) следует невозможность выбора ансамбля таким образом, чтобы удовлетворить (22). Подобному выбору ансамбля препятствуют δ -функциональные множители, имеющиеся в части слагаемых, входящих в (24). Заметим, что указанные слагаемые возникли из-за усреднения по ансамблю сильносингулярных выражений типа

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i(t)) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_i(t)), \quad (24)$$

содержащих квадрат δ -функции. Таким образом, невозможность удовлетворить соотношениям (22) никак не связана со взаимодействием частиц, а просто является формальным следствием определения s -частичных функций распределения.

Выясним физический смысл последних несколько формальных построений. Прежде всего заметим, что усреднение по ансамблю уравнений (20), (21) приводит к иерархии ББГКИ при правильном учете сильносингу-

лярного вклада в $\langle \phi_s \rangle$:

$$\langle \phi_s(t, 1, \dots, s) \rangle = \left(\sum_{1 \leq i \leq s-1} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) \delta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_s) \right) \times \\ \times F_{s-1}(t, 1, \dots, s-1) + F_s(t, 1, \dots, s) \\ \text{при } \mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j, 1 \leq i < j \leq (s-1). \quad (25)$$

При этом сильносингулярные слагаемые в ϕ_s , $s \geq 3$, приводят к слагаемым $\widehat{A}_{s-1}F_{s-1}$ в правой части (7), а менее сингулярные слагаемые порождают интегральные члены в (7), содержащие F_s . Попытка подобрать ансамбль таким образом, чтобы выполнялись равенства (22), с математической точки зрения означает попытку решать (7) методом разделения переменных, чему препятствуют слагаемые $\widehat{A}_{s-1}F_{s-1}$, возникшие, разумеется, из сильносингулярных слагаемых в ϕ_s .

Появление наряду с интегралами слагаемых $\widehat{A}_{s-1}F_{s-1}$ при $s > 2$ в правой части (7) имеет простой динамический смысл: функции F_s , $s > 2$ определены таким образом, что интегральный член в (7), содержащий их, не учитывает силового воздействия частицы, находящейся в точке \mathbf{r}_i , $1 \leq i \leq s-1$, на частицу, находящуюся в точке \mathbf{r}_j , $i \neq j$, что и приводит к возникновению в уравнении системы (7) для функции F_{s-1} слагаемых $\widehat{A}_{s-1}F_{s-1}$. В сказанном можно убедиться, заметив, что согласно (4)

$$F_s(t, 1, \dots, s) = \left\langle \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_s} \prod_{j=1}^{j=N} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{i_j}(t)) \delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{i_j}(t)) \right\rangle. \quad (26)$$

Заметим, что функция F_2 лишена указанного "недостатка", присущего функциям F_s при $s > 2$.

Таким образом, возникновение в уравнениях ББГКИ слагаемых, препятствующих расцеплению, проистекает из-за определения функций F_s и никак не связано со взаимодействием между частицами (см. (24), (25)). Следовательно, процедура получения кинетических уравнений может быть упрощена переходом к описанию процессов релаксации на языке других функций. Однако необходимо иметь в виду, что указанные слагаемые $\widehat{A}_{s-1}F_{s-1}$, $s > 2$, имеют и динамический смысл: они обеспечивают учет тех межчастичных взаимодействий, которые не учитываются интегральными слагаемыми в (7), что проистекает из самого определения s -частичных функций распределения при $s > 2$.

7. Новый метод получения кинетических уравнений

Разъясним главные идеи, лежащие в основе предлагаемого нами подхода к получению кинетических уравнений. Прежде всего заметим, что при изложенном выше методе получения кинетических уравнений делалась попытка описать взаимодействие между частицами исходя из заданных функций распределения. При этом в качестве нулевого приближения для решения иерархии ББГКИ использовался газ невзаимодействующих частиц, послуживший основой для представления решений в виде (13). Таким образом, в определенном круге задач удалось не только описать ансамбль систем, эволюцию которого задает кинетическое уравнение, но и построить необратимые уравнения больцмановского типа. Вместе с тем необходимо понимать, что необратимая по времени эволюция связана именно с межча-

стичным взаимодействием, т.е. с этой точки зрения использование в качестве нулевого приближения газа невзаимодействующих частиц представляется не совсем логичным. В связи с этим в работах [5, 6] было предложено решать в известном смысле обратную задачу по сравнению с той, которая обычно рассматривается при построении кинетических уравнений больцмановского типа. В [5, 6] предложено, считая заданным пространственное распределение "сил", действующих на частицы, искать по ним функции распределения, обеспечивающие ту или иную конфигурацию "силовых" векторов. Подобный подход приводит к необходимости введения "расширенных" функций распределения (см. последний абзац предыдущего раздела), т.е. к функциям распределения, зависящим от дополнительных аргументов — ускорений частиц. Напомним, что возможность введения "расширенных" функций распределения отмечали еще М. Борн и А. Власов, однако сами они не пользовались этим формализмом.

Заметим, что введение дополнительной переменной — ускорения переводит нас из $6N$ -мерного фазового пространства в $9N$ -мерное "расширенное" фазовое пространство, в котором, как будет показано ниже, значительно проще описывается взаимодействие частиц. Иными словами, сначала мы "погрузимся" в "расширенное" фазовое пространство, а затем "вернемся" обратно, но лишь после того, как частицы системы заметным образом провзаимодействуют друг с другом.

После сделанных предварительных разъяснений перейдем к непосредственному получению кинетических уравнений для "расширенных" функций распределения.

8. Уравнения для сингулярных "расширенных" функций распределения

В следующих нескольких разделах мы будем в основном следовать методу работы [6] для получения нового класса кинетических уравнений.

Дополнительным дифференцированием уравнений движения, вытекающих из (1), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ \frac{d\mathbf{a}_i}{dt} = -\frac{1}{m} \sum_{j \neq i} \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (27)$$

где \mathbf{a}_i — ускорение i -й частицы.

Система дифференциальных уравнений (27) имеет более высокий порядок по сравнению с уравнениями движения, т.е. она обладает и решениями, не соответствующими никаким истинным движениям частиц. Ниже мы укажем способ исключения "нефизических" решений, а в дальнейшем будем во всех построениях подразумевать только "физические" решения (27).

В полной аналогии с (18), (19) введем сингулярные "расширенные" функции распределения

$$\Phi_1(t, 1) = \sum_{i=1}^{i=N} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i(t)) \delta(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_i(t)), \quad (28)$$

$$\Phi_s(t, 1, \dots, s) = \Phi_1(t, 1) \dots \Phi_1(t, s), \quad (29)$$

где $i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i)$.

Нетрудно убедиться, что в соответствии с (27) функции $\Phi_s, s \geq 1$, подчиняются уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1\right)\Phi_1(t, 1) = C_1^*(t, 1), \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s\right)\Phi_s(t, 1, \dots, s) = C_s^*(t, 1, \dots, s), \quad (31)$$

где

$$\widehat{L}_i = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{a}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i},$$

$$C_s^*(t, 1, \dots, s) = \sum_{i=1}^{i=s} \int \widehat{Q}(i, s+1) \times \\ \times \Phi_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1) d(s+1),$$

$$\widehat{Q}(i, j) = \frac{1}{m} \left[\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_i} \right], \quad i \neq j,$$

причем уравнение для Φ_s справедливо при $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j, 1 \leq i < j \leq s$, а в интеграле, содержащем $\widehat{Q}(i, s+1)$, опущена бесконечно малая окрестность точки \mathbf{r}_i .

Появление дополнительного аргумента в функциях распределения приводит к возможности построения кинетических уравнений методом, принципиально отличающимся от метода Боголюбова. При этом в формализме теории возникают конструкции, не имеющие аналога в рамках стандартной иерархии ББГКИ.

9. Метод асимптотического интегрирования

Убедимся в том, что в пределе больших времен t в точных уравнениях (30), (31) естественным образом возникает необратимая динамика.

Считая заданной правую часть (30), решим указанное линейное неоднородное уравнение относительно Φ_1

$$\Phi_1(t, 1) = \exp(-t\widehat{L}_1)\Phi_1(t=0, 1) + \\ + \int_0^t \exp(-\tau\widehat{L}_1) \int \widehat{Q}(1, 2')\Phi_2(t-\tau, 1, 2') d2' d\tau, \quad (32)$$

где $\Phi_1(t=0, 1)$ — "расширенная" одночастичная функция распределения в момент времени $t=0$.

Заметим, что возникший оператор $\exp(-t\widehat{L}_1)$ принципиально отличается от оператора свободной эволюции, играющего важную роль в иерархии ББГКИ. Действительно, легко видеть, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t\widehat{L}_1)\Phi_1(t=0, 1) = 0. \quad (33)$$

Остановимся подробнее на равенстве (33). Рассмотрим произвольную функцию $g(1) = g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1)$, для которой справедливо соотношение

$$\lim_{\mathbf{v}_1 \rightarrow \infty} g(1) = 0.$$

Тогда согласно определению оператора $\exp(-t\widehat{L}_1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t\widehat{L}_1)g(1) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} g\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_1 t + \frac{\mathbf{a}_1 t^2}{2}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{a}_1 t, \mathbf{a}_1\right) = 0, \quad (34)$$

поскольку при $\mathbf{a}_1 \neq 0$ оператор $\exp(-t\widehat{L}_1)$ неограниченно увеличивает скорость при $t \rightarrow \infty$. Это принципиально отличает оператор $\exp(-t\widehat{L}_1)$ от оператора свободной эволюции. Заметим, что уже на этом этапе видно, что особую роль в динамике системы играют частицы с нулевым и близким к нулевому ускорениями. В дальнейшем роль этих частиц будет рассмотрена подробно, а пока лишь укажем, что именно из-за них стремление к пределу в (34) является неравномерным.

Следовательно, в пределе больших положительных t (при эволюции "вперед" по времени)

$$\Phi_1(t, 1) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau\widehat{L}_1) \int \widehat{Q}(1, 2') \times \\ \times \Phi_2(t-\tau, 1, 2') d2' d\tau, \quad t \gg \tau^* = \frac{v_{ch}}{a_{ch}}, \quad (35)$$

а в пределе больших отрицательных времен (при эволюции "назад" по времени)

$$\Phi_1(t, 1) = \int_0^{-\infty} \exp(-\tau\widehat{L}_1) \int \widehat{Q}(1, 2') \times \\ \times \Phi_2(t-\tau, 1, 2') d2' d\tau, \quad t \ll -\tau^* = \frac{v_{ch}}{a_{ch}}, \quad (36)$$

где v_{ch} и a_{ch} — характерная скорость и характерное ускорение, испытываемое частицей, соответственно. Заметим, что интегралы по τ в (35), (36) сходятся неравномерно. Неравномерная сходимость указанных интегралов вытекает, например, из неравномерной сходимости к пределу в (34) при малых ускорениях.

Воспользуемся выражениями (35), (36) для получения уравнений эволюции для сингулярных функций распределения в пределе больших времен. Указанные выражения позволяют производить такие преобразования уравнений эволюции (28), которые не являются алгебраическими тождествами, а справедливы лишь в силу того, что рассматриваются решения уравнений (30), (31) в пределе большого времени.

В дальнейшем предстоит работать в формализме обобщенных функций, поэтому необходимо иметь в виду некоторые особенности этого аппарата, отличающие его от стандартных непрерывных функций. Прежде всего в формализме обобщенных функций остаются неопределенными произведения функций, когда носители сомножителей пересекаются. Применительно к нашей задаче это означает, что "плохо" определены степенные функции от рассматриваемых сингулярных функций распределения. В самом деле легко видеть, что произведение функций $\delta(x+y)$ и $\delta(x-y), y > 0$ — корректно определенное выражение

$$\delta(x+y)\delta(x-y) = 0, \quad y > 0,$$

а $\delta^2(x)$ — неопределенная величина. Приведенный пример демонстрирует также некоторую трудность, связанную с предельными переходами в выражениях, содержащих произведения обобщенных функций

$$\lim_{y \rightarrow 0} \delta(x+y)\delta(x-y) \neq \delta^2(x).$$

Последнее замечание важно для нас, поскольку всякий интеграл, в том числе и входящий в (35), (36), связан с предельным переходом. Учитывая сказанное, необхо-

димому внимательно следить за корректностью вычислений при использовании выражений (35), (36), так как нашей целью является преобразование C_s^* , входящего в (31), с использованием указанных представлений для Φ_1 . Сложности возникают тогда, когда значение группы переменных $(s+1)$, по которым происходит интегрирование в (31), совпадает с одной из групп переменных i , $1 \leq i \leq s$. Поэтому необходимо отдельно рассматривать вклад в интеграл C_s^* (31) от точек $(s+1) = i$, $i = \overline{1, s}$ и от всей остальной области интегрирования $(s+1) \neq i$, $i = \overline{1, s}$. Для этого перепишем C_s^* , входящий в (31), как

$$\begin{aligned} C_2^* &= \widehat{Q}^*(1, 2)\Phi_2(t, 1, 2) + \Phi_1(t, 1) \int \widehat{Q}(2, 2') \times \\ &\quad \times \Phi_2(t, 2, 2') d2' + \Phi_1(t, 2) \int \widehat{Q}(1, 2')\Phi_2(t, 1, 2') d2', \\ C_s^* &= \sum_{1 \leq i < j \leq s} \widehat{Q}^*(i, j)\Phi_s(t, 1, \dots, i, \dots, j, \dots, s) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq s} \Phi_1(t, 1) \dots \Phi_1(t, i-1)\Phi_1(t, i+1) \dots \Phi_1(t, s) \times \\ &\quad \times \int \widehat{Q}(i, s+1)\Phi_2(t, i, (s+1)) d(s+1), \quad s \geq 3, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\widehat{Q}^*(i, j) = \frac{1}{m} \left[\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_j} \right], \quad i \neq j,$$

где в интегралах по $d(s+1)$ исключены бесконечно малые окрестности точек i , $i = \overline{1, s}$.

Во избежание недоразумений специально подчеркнем, что равенство (37) является тождеством для сингулярных функций распределения. Кроме того, заметим, что C_s^* можно выразить через сингулярные функции Φ_1, \dots, Φ_s не только согласно (37), но и многими другими способами. Ниже станет понятным удобство той или иной факторизации, а пока воспользуемся (37) просто как формальным тождеством.

Заметим, что представление (37) позволяет заменить Φ_1 интегралом от Φ_2 согласно (35), (36). Таким образом, получаем систему кинетических уравнений, описывающих эволюцию сингулярных функций распределения Φ_s , $s \geq 2$, при временах $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ (эволюция "вперед" по времени):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) \Phi_s = C_s^+(t, 1, \dots, s), \quad s \geq 2, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} C_s^+ &= \sum_{1 \leq i < j \leq s} \widehat{Q}^*(i, j)\Phi_s(t, 1, \dots, i, \dots, j, \dots, s) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq s} \Phi_1(t, 1) \dots \Phi_1(t, i-1)\Phi_1(t, i+1) \dots \Phi_1(t, s) \times \\ &\quad \times \int \widehat{Q}(i, s+1)\Phi_2(t, i, (s+1)) d(s+1), \quad s \geq 3, \\ C_2^+ &= \widehat{Q}^*(1, 2)\Phi_2(t, 1, 2) + \Phi_1(t, 1) \int \widehat{Q}(2, 2') \times \\ &\quad \times \Phi_2(t, 2, 2') d2' + \Phi_1(t, 2) \int \widehat{Q}(1, 2')\Phi_2(t, 1, 2') d2', \\ \Phi_1(t, i) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \widehat{L}_i) \int \widehat{Q}(i, 2'')\Phi_2(t - \tau, i, 2'') d2'' d\tau, \end{aligned}$$

а также систему уравнений, определяющих эволюцию сингулярных функций распределения при больших отрицательных временах $t \leq -\tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ (эволюция "назад" по времени):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) \Phi_s = C_s^-(t, 1, \dots, s), \quad s \geq 2, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} C_2^- &= \widehat{Q}^*(1, 2)\Phi_2(t, 1, 2) + \Phi_1(t, 1) \int \widehat{Q}(2, 2') \times \\ &\quad \times \Phi_2(t, 2, 2') d2' + \Phi_1(t, 2) \int \widehat{Q}(1, 2')\Phi_2(t, 1, 2') d2', \\ C_s^- &= \sum_{1 \leq i < j \leq s} \widehat{Q}^*(i, j)\Phi_s(t, 1, \dots, i, \dots, j, \dots, s) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq s} \Phi_1(t, 1) \dots \Phi_1(t, i-1)\Phi_1(t, i+1) \dots \Phi_1(t, s) \times \\ &\quad \times \int \widehat{Q}(i, s+1)\Phi_2(t, i, (s+1)) d(s+1), \quad s \geq 3, \\ \Phi_1(t, i) &= \int_0^{-\infty} \exp(-\tau \widehat{L}_i) \int \widehat{Q}(i, 2'')\Phi_2(t - \tau, i, 2'') d2'' d\tau. \end{aligned}$$

Разумеется, уравнения (35), (36) можно решать при произвольных t . При этом необходимо понимать, что это означает отождествление начального момента времени с $t = -\infty$ для уравнений (35), а для уравнений (36) — отождествление начального момента времени с $t = +\infty$.

Подчеркнем, что уравнения (35) и (36) являются результатом асимптотического (для больших положительных и отрицательных времен) интегрирования точных уравнений движения.

10. О соотношении между одночастичной и двухчастичной функциями распределения

В стандартной иерархии БГКИ не известно никакого способа, позволяющего построить одночастичную функцию распределения в момент времени t в точке пространства \mathbf{r} исходя из двухчастичной функции распределения, заданной при близких к t временах в окрестности точки \mathbf{r} . Единственное общее соотношение между F_1 и F_2 , известное из стандартной цепочки БГКИ, сводится к равенству

$$F_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{1}{N} \int F_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}') d\mathbf{v}' d\mathbf{r}', \quad (40)$$

вытекающему непосредственно из (4). Выражение (40) крайне неудобно: основной вклад в (40) возникает из-за \mathbf{r}' , существенно отличающихся от \mathbf{r} .

С физической точки зрения двухчастичная функция распределения содержит больше информации о динамике системы по сравнению с одночастичной функцией распределения, поэтому кажется естественным, чтобы одночастичная функция распределения выражалась через двухчастичную при помощи "почти" локального оператора. Такой оператор для "расширенных" функций распределения дается выражением (35). Это выражение справедливо лишь при достаточно больших временах $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$, что представляется разумным исходя из физических соображений: за время τ^* частицы "забы-

вают" из-за взаимодействия свое начальное состояние и имевшиеся между ними корреляции, а формирование "послестолкновительных" корреляций, возникающих при взаимодействии, приводит к связи между одночастичной и двухчастичной функциями распределения.

Начальные корреляции в любой динамической системе более или менее произвольны, "послестолкновительные" определяются взаимодействием. Поэтому формирование "послестолкновительных" корреляций с необходимостью должно приводить к необратимой динамике. В следующем разделе этот вопрос рассмотрен подробнее, а сейчас сделаем два важных замечания.

Во-первых, выражение (35) является линейным как по функции Φ_1 , так и по функции Φ_2 . Поэтому переход в (32) к гладким функциям распределения (вероятностному описанию динамики) f_1, f_2 , получающимся при усреднении Φ_1, Φ_2 соответственно по ансамблю, производится просто и дает благодаря линейной связи между Φ_1 и Φ_2

$$f_1(t, 1) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \hat{L}_1) \int \hat{Q}(1, 2) f_2(t - \tau, 1, 2) d2 d\tau. \quad (41)$$

Во-вторых, при получении (35) и (41) нигде не использовалась малость межчастичного взаимодействия, т.е. эти выражения оправданы при любой величине потенциала $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, входящего в (1). Более того, переход к пределу $U \rightarrow 0$ в (35) и (41) представляет собой сложную задачу: эти уравнения справедливы лишь при $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$, а при $U \rightarrow 0$ время $\tau^* \rightarrow +\infty$, но при этом потенциал U входит линейно в оператор \hat{Q} . Однако в настоящей работе мы не станем специально изучать случай малых взаимодействий, а ограничимся лишь сделанным замечанием.

Специально обратим внимание на принципиальное различие между выражениями (40) и (41). В выражении (40) основной вклад в интеграл возникает из-за \mathbf{r}' , существенно отличающихся от \mathbf{r} . В выражении (41) интегрирование формально также производится по сколь угодно большому \mathbf{r}_2 , однако из-за наличия ядра основной вклад в интеграл дается областью, локализованной в небольшой окрестности точки \mathbf{r}_1 . Размеры области, в которой формируется интеграл (41), определяются межчастичным взаимодействием в системе. Подобная связь между одночастичной и двухчастичной функциями распределения является совершенно естественной: в самом деле, одночастичная функция распределения формируется за счет частиц, "прилетевших" в данную точку пространства из других точек, однако частицы не могут "прилететь" в данную точку пространства из очень удаленных точек, не претерпев рассеяния на других частицах, т.е. для определения одночастичной функции распределения достаточно знать двухчастичную функцию распределения в окрестности, размеры которой определяются масштабом, на котором происходит рассеяние частиц силовыми полями. Формализм расширенных функций распределения позволяет это учесть, что снимает все трудности, связанные с расходящимся вкладом в интеграл от четырех и более частичных столкновений, возникающие при обычном подходе [9].

11. Необратимость по времени

Убедимся, что уравнение (38), возникающее как следствие установления связи (35) между одночастичной и

двухчастичной функциями распределения, описывает необратимую динамику, имеющую место в динамической системе (1) при больших временах $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$.

Рассмотрим функции $\Phi_s, s \geq 2$, удовлетворяющие (38), и функцию Φ_1 , определяемую согласно (35) по функции Φ_2 . Обозначим этот набор функций $\Phi_s^+, s \geq 1$. Для функций, связанных аналогичным образом с уравнениями (36) и (39), введем обозначение $\Phi_s^-, s \geq 1$. В дальнейшем будем придерживаться этой системы обозначений без особых пояснений. Введем оператор обращения времени \hat{T} , т.е. функциям Φ_s^+ и Φ_s^- поставим в соответствие новые функции $\hat{T}\Phi_s^+$ и $\hat{T}\Phi_s^-$, определяемые равенствами

$$(\hat{T}\Phi_s^+)(t, 1, \dots, s) = \Phi_s^+(-t, \hat{T}1, \dots, \hat{T}s), \quad (42)$$

$$(\hat{T}\Phi_s^-)(t, 1, \dots, s) = \Phi_s^-(-t, \hat{T}1, \dots, \hat{T}s), \quad (43)$$

где $\hat{T}i = (\mathbf{r}_i, -\mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i)$.

Заметим, что определяемые таким образом функции $\hat{T}\Phi_s^+, s \geq 2$, являются решениями уравнений (39), а функции $\hat{T}\Phi_1^+$ и $\hat{T}\Phi_2^+$ связаны соотношением (36). Функции $\hat{T}\Phi_s^-, s \geq 2$, есть решения уравнений (38), а $\hat{T}\Phi_1^-$ и $\hat{T}\Phi_2^-$ связаны соотношением (35). Следовательно, оператор обращения времени переводит решения одних кинетических уравнений в решения других кинетических уравнений. Таким образом, необратимость по времени проявляется в том, что решения кинетических уравнений, описывающих эволюцию "вперед" по времени, при преобразованиях (42) не переходят, вообще говоря, в решения этих же кинетических уравнений. Вместе с тем эквивалентность двух направлений времени в классической механике также находит свое отражение: решения системы уравнений (38) при обращении времени переходят в решения уравнений (39) и наоборот.

Если рассматривать (30) как линейное неоднородное уравнение относительно Φ_1 , то выражения (35), (36) не описывают общий вид решения. Общее решение представляется в виде суммы частного решения самого уравнения (30) и произвольного решения соответствующего уравнению (30) линейного однородного уравнения. Равенства (35), (36) возникли из-за предположения о том, что решение однородного уравнения — первое слагаемое в (32) быстро затухает при росте $|t|$. Физически это означает, что в системе можно ввести v_{ch} и a_{ch} . Это накладывает ряд ограничений как на саму физическую систему, описываемую (1), так и на ее состояния, которые могут описываться подобным образом. В самом деле, если гамильтониан (1) допускает при заданной энергии положение равновесия, т.е. уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (44)$$

имеют решения, то соответствующее положение равновесия движение (у всех частиц нулевая скорость и нулевое ускорение) не может быть описано (35) и (36). Существуют и другие "патологические" движения, которые не допускают перехода к (35) и (36). Однако для широкого класса систем уравнения (38) и (39) позволяют ввести необратимую динамику для движений "общего положения", что принципиально важно, так как позволяют ввести понятие релаксации [2].

Остановимся подробнее на физических и математических причинах, по которым асимптотическое интегрирование приводит к необратимой динамике. С математической точки зрения необратимость возникает из-за того, что предельный переход, приведший к (35), (36), является неравномерным. В этом легко убедиться, используя, например, (33): при малых \mathbf{a}_1 функция

$$\exp(-t\hat{L}_1)\Phi_1(t=0, 1)$$

не мала даже при больших t , т.е. в пространстве $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1)$ существуют области, в которых равенства (35) и (36) не выполняются при сколь угодно больших $|t|$, но сами эти области уменьшаются с ростом $|t|$. Физически такие области связаны с частицами, которые не испытывают заметного воздействия со стороны других частиц или воздействие других частиц компенсируется, что и соответствует малым \mathbf{a}_1 .

Возникшая необратимость имеет ясный физический смысл. Из-за сделанных предельных переходов из рассмотрения были исключены частицы "слабосвязанные" с другими частицами системы. Заметим, что исключение этих частиц произошло весьма нетривиальным способом: было корректно учтено воздействие имеющих малое ускорение частиц на другие частицы системы (некоторые из "других" частиц системы могут испытывать сильное воздействие со стороны частиц с малым ускорением: рассмотрите три частицы, находящиеся в центре и концевых точках отрезка достаточно малой длины; в этом случае частица, находящаяся в центре, имеет нулевое ускорение, но существенным образом влияет на частицы на его концах), после чего сами "слабосвязанные" частицы были как бы исключены из системы предельным переходом. В каком-то смысле "слабосвязанные" частицы при таком подходе по отношению к другим частицам выполняют роль внешнего окружения. Легко видеть, что и в этом случае идея Б.Б. Кадомцева о роли внешнего шума остается "почти" справедливой: источник "шума" ("внешнее окружение") присутствует в задаче, но находится в самой системе. Вместе с тем, возможна и даже предпочтительна интерпретация введенной необратимости в рамках идей Б.Б. Кадомцева о роли внешнего шума.

Заметим, что частицы с малым ускорением (для времени t к частицам с малым ускорением относятся частицы, испытывающие ускорение, меньшее, чем v_{ch}/t , т.е. тем меньшее, чем больше t , так как именно с такими частицами связана неравномерность в (34)) чрезвычайно чувствительны даже к малым внешним воздействиям. Во избежание путаницы специально подчеркнем, что в различные моменты времени разные частицы имеют малое ускорение, но в 9-мерном (три компоненты координат, три компоненты скоростей и три компоненты ускорений) "расширенном" фазовом пространстве одной частицы существуют целые области, в которых сколь угодно малый внешний шум становится существенным, однако сами эти области малы в силу малости внешнего шума. С этой точки зрения развитый в работе метод получения необратимой динамики в точности соответствует идее Б.Б. Кадомцева: любое малое внешнее и, вообще говоря, не контролируемое воздействие существенно сказывается на малом числе "слабосвязанных" частиц, при этом пренебрежение этими частицами приводит к необратимой динамике, которая

не зависит от самого внешнего воздействия, если оно существенно меньше межчастичного взаимодействия. Таким образом, именно внешний шум приводит к необратимой динамике, но для малого внешнего шума сама необратимая динамика от него не зависит. Заметим, что именно рассмотрение соотношений (35), (36) с точки зрения взаимодействия с "внешним" шумом позволяет раскрыть физическое содержание неравномерного предельного перехода (34), приводящего к (35), (36).

Интересно сопоставить введенный в рассмотрение механизм формирования необратимой динамики со свойствами интегрируемости динамической системы (1). Сделаем это на конкретном примере. Рассмотрим систему частиц с гамильтонианом (1), потенциал межчастичного взаимодействия в которой $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ не в состоянии ее связать, т.е. на больших временах система "разлетается" на отдельные свободнолетающие частицы. Примером такой динамической системы является газ с короткодействующим отталкивающим межмолекулярным потенциалом взаимодействия. Если такая система состоит из N частиц, то она имеет $3N$ первых интегралов в инволюции [14], за которые можно принять проекции импульсов на координатные оси при $t \rightarrow +\infty$, т.е. после завершения разлета. Для кинетического рассмотрения такой системы ее необходимо существенно изменить: воспрепятствовать разлету, т.е. ввести "стенки", описываемые внешним потенциалом $V(\mathbf{r})$. При этом уравнения (30) и (31) сохраняют свой вид, но изменится определение операторов \hat{L}_i . Теперь \hat{L}_i определены равенствами

$$\hat{L}_i = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \left(\mathbf{a}_i - \frac{1}{m} \frac{\partial V(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i}. \quad (45)$$

Для оператора \hat{L}_1 , определяемого (45), соотношение (33) уже не справедливо, так как оператор $\exp(-t\hat{L}_1)$ то увеличивает скорость, то снова уменьшает ее после столкновения со стенкой. Вместе с тем, предположив, что система имеет бесконечные размеры, т.е. $N = +\infty$, снова можно использовать (33). Таким образом, в динамических системах рассматриваемого типа асимптотическое интегрирование, приводящее к (35) и (36), автоматически предполагает рассмотрение системы с бесконечно большим числом частиц, что снимает проблему, связанную с интегрируемостью при любых конечных N . В самом деле, из бесконечности N следует бесконечное время разлета и построить $3N$ первых интегралов указанным способом не удастся.

12. Введение гладких функций распределения

Уравнения (38) и выражение (35), полученные в результате асимптотического интегрирования точных уравнений (30) и (31), описывают необратимую динамику с помощью сингулярных функций распределения. Однако с практической точки зрения значительно удобнее обращаться не с обобщенными, а с настоящими (непрерывными) функциями распределения. Чтобы перейти к описанию динамики непрерывными функциями распределения, усредним (35), (38) по ансамблю. Переход к описанию непрерывными функциями распределения может быть истолкован как переход к вероятностному описанию необратимой динамики, которая уже возникла в (35), (38) как свойство уравнений движения при больших временах.

После сделанных предварительных пояснений перейдем к последовательному построению вероятностного описания динамики классических частиц. Прежде всего заметим, что в развиваемом подходе к описанию необратимых процессов в динамических системах усреднение по ансамблю выполняет совсем другую роль по сравнению с усреднением по ансамблю в иерархии ББГКИ: как было показано выше, необратимость в иерархии "расширенных" функций распределения естественно возникает и без введения ансамбля систем, а лишь при учете внешнего шума. Иерархия

$$\langle \Phi_1(t, 1) \rangle = f_1(t, 1), \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{s+1}(t, 1, \dots, s, (s+1)) \rangle = \\ = \left(\sum_{1 \leq i \leq s} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{s+1}) \delta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{s+1}) \delta(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{s+1}) \right) \times \\ \times f_s(t, 1, \dots, s) + f_{s+1}(t, 1, \dots, s, (s+1)), \\ s > 1, \quad \mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_{s+1}, \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned} \tag{47}$$

где f_s — гладкие "расширенные" s -частичные функции распределения, подчиненные уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 \right) f_1(t, 1) = \int \widehat{Q}(1, 2) f_2(t, 1, 2) d2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) f_s = \widehat{Q}_s f_s + \int \sum_{1 \leq i \leq s} \widehat{Q}(i, (s+1)) \times \\ \times f_{s+1}(t, 1, \dots, s, (s+1)) d(s+1), \quad s \geq 2, \end{aligned} \tag{48}$$

причем

$$\widehat{Q}_s = \sum_{1 \leq i < j \leq s} \widehat{Q}^*(i, j).$$

Уравнения (48) совершенно аналогичны уравнениям цепочки ББГКИ (7).

Воспользуемся равенством (35), чтобы получить отличное от (48) описание динамики системы в пределе больших времен $t \gg \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$. Введем функции

$$\begin{aligned} f^{(k)}(t_1, 1', 1''; \dots; t_k, k', k'') = \\ = \langle \Phi_2^+(t_1, 1', 1'') \dots \Phi_2^+(t_k, k', k'') \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \tag{49}$$

где нижний индекс Γ означает, что рассматривается регуляризованное усреднение, т.е. если два каких-либо аргумента функции $f^{(k)}$ совпадают, то это означает, что усреднялось произведение парных корреляционных функций с различными значениями аргументов, после чего произведен предельный переход. Функция $f^{(k)}$ позволяет представить функции f_k и f_{k+1} как интегралы в пределе больших времен $t \gg \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$:

$$\begin{aligned} f_k(t, 1, \dots, k) = \int_0^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_0^{+\infty} d\tau_k \exp \left(- \sum_{i=1}^k \tau_i \widehat{L}_i \right) \times \\ \times \int d1' \dots dk' \left(\prod_{i=1}^{i=k} \widehat{Q}(i, i') \right) \times \\ \times f^{(k)}(t - \tau_1, 1, 1'; \dots; t - \tau_j, j, j'; \dots; t - \tau_k, k, k'), \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t, 1, \dots, k, k') = \int_0^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_0^{+\infty} d\tau_{k-1} \times \\ \times \exp \left(- \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \widehat{L}_i \right) \int d1' \dots dk-1' \left(\prod_{i=1}^{i=(k-1)} \widehat{Q}(i, i') \right) \times \\ \times f^{(k)}(t - \tau_1, 1, 1'; \dots; t - \tau_j, j, j'; \dots; t - \tau_{k-1}, (k-1), \\ (k-1)'; t, k, k'), \end{aligned} \tag{51}$$

что следует из выражения (35).

Таким образом, из интегральных представлений (50), (51) следует, что при $t \gg \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ функции f_s и f_{s+1} связаны уравнениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 \right) f_1(t, 1) = \int \widehat{Q}(1, 2) f_2(t, 1, 2) d2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) f_s(t, 1, \dots, s) = \\ = \int \sum_{i=1}^{i=s} \widehat{Q}(i, (s+1)) f_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1) d(s+1), \quad s > 1. \end{aligned} \tag{52}$$

Заметим, что система уравнений (52) существенно отличается от уравнений (48), которым удовлетворяют функции f_s и f_{s+1} при произвольных временах: в уравнениях (52) отсутствуют слагаемые $\widehat{Q}_s f_s$, аналогичные слагаемым $\widehat{L}_s f_s$ в стандартной цепочке ББГКИ, из-за которых и возникают проблемы с корректным расщеплением иерархии ББГКИ. Система уравнений асимптотической эволюции (52), описывающая релаксацию при $t \gg \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ и содержащая лишь интегральные слагаемые в правой части, существенно проще системы уравнений (48), позволяющей описать релаксацию при любых временах, поэтому необходимо подробнее обсудить связь между указанными системами уравнений.

13. Два этапа эволюции "расширенных" функций распределения и слабая форма H-теоремы

Заметим, что слагаемые $\widehat{Q}_s f_s$, $s \geq 2$, вообще говоря, не содержат никакого малого параметра, позволяющего считать их малыми по сравнению с интегральными членами в правой части (48). Вместе с тем уравнения (52) отличаются от (48) именно тем, что не содержат $\widehat{Q}_s f_s$, $s \geq 2$, в правой части, но корректно описывают эволюцию лишь при достаточно больших временах. Это приводит к выводу о качественно различной динамике системы при $t < \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ и $t \gg \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$. За время $t \sim \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ начальные функции распределения $f_s(t = 0, 1, \dots, s)$, $s \geq 2$, эволюционируют по функциям $f_s(t, 1, \dots, s)$, обеспечивающим малую величину выражений $\widehat{Q}_s f_s(t, 1, \dots, s) = 0$, $s \geq 2$. Точнее, должны выполняться равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \widehat{Q}_s f_s(t, 1, \dots, s) = 0, \quad s \geq 2. \tag{53}$$

Здесь существует некоторая аналогия с обращением в нуль интеграла столкновений в кинетических уравнениях больцмановского типа при установлении теплового равновесия. В рассматриваемой ситуации выполнение (53) связано с "забыванием" начальных корреляций.

Особый интерес представляет соотношение (53) при $s = 2$. Заметим, что все приведенные выше равенства остаются справедливыми при замене операторов $\widehat{Q}(i, j)$ операторами $\widehat{Q}^*(i, j)$. Однако, с одной стороны, справедливо (53), а с другой — после указанной замены выражение $\widehat{Q}_2 f_2$ (по определению $\widehat{Q}_2 = \widehat{Q}^*$) входит в (41), но одночастичная функция распределения не равна нулю. С математической точки зрения мы сталкиваемся с хорошо известным явлением неравномерной сходимости. Однако в связи с важностью вопроса остановимся на этом подробнее. Заметим, что несмотря на справедливость выражения (34) интеграл

$$\int \widehat{Q}^*(1, 1') \exp(-t\widehat{L}_{1'}) g(1') dv_{1'}$$

совсем не обязан стремиться к нулю или становиться малым. Даже, наоборот, из-за линейного по $v_{1'}$ слагаемого, входящего в $\widehat{Q}^*(1, 1')$, и дифференцирования по $\mathbf{a}_{1'}$, приводящего к появлению множителя t^2 , этот интеграл вообще может стремиться к бесконечности при больших t . Возвращаясь к выражению (41), легко видеть, что после указанной замены конечный вклад в этот интеграл возникает из-за окрестности точки $\mathbf{a}_{1'} = 0$. Обращаться с такими выражениями крайне неудобно. Однако выбранная нами форма записи кинетических уравнений, имеющая непосредственный физический смысл, но несколько более громоздкая из-за различия между операторами $\widehat{Q}(i, j)$ и $\widehat{Q}^*(i, j)$, лишена указанных трудностей.

При $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ эволюция описывается уравнениями (52); при этом f_s , $s \geq 2$, все время с хорошей точностью подчинены (53). Следовательно, исчезновение слагаемого $\widehat{Q}_s f_s$, $s \geq 2$, в правой части (48) при переходе к изучению эволюции на больших временах, т.е. при переходе к (52), оправдано в силу большой величины t/τ^* . Столь различная роль интегральных и неинтегральных слагаемых в правой части (48) становится естественной, если заметить, что эти два различных типа слагаемых возникают принципиально различным образом (см. пояснения, предшествующие (37)).

Таким образом, возникает еще одна трактовка необратимой релаксации в динамических системах. Любой набор начальных многочастичных функций распределения эволюционирует "по направлению" к функциям, приближенно удовлетворяющим (53). Последнее утверждение следует рассматривать как слабую форму H -теоремы, однако справедливую в системах с произвольной величиной взаимодействия.

Заметим, что в системах конечного размера переход на второй этап эволюции может и не происходить при отсутствии внешнего шума и соответствующих граничных условиях. В этом можно убедиться, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, использованным в разделе, посвященном обсуждению необратимости по времени. Мы не можем подробнее остановиться на этом вопросе в настоящей работе, но заметим, что таким образом можно предложить естественную интерпретацию результатам численного моделирования, представленным в [3].

Необходимо подчеркнуть, что возникновение двух качественно различных этапов эволюции установлено в формализме "расширенных" функций распределения. В дальнейшем этот вопрос будет рассмотрен и на основе описания кинетики стандартными функциями распределения.

Напомним, что в рамках метода Боголюбова делается допущение о том, что все многочастичные функции распределения, начиная с некоторого момента времени, являются функционалами от одночастичной функции распределения. Это предположение естественно приводит к представлению о различных стадиях эволюции функций распределения: первая стадия — до указанного момента времени, вторая — после него. В ряде работ вторую стадию эволюции разбивают еще на две: кинетическую и гидродинамическую [15]. Подобный "аксиоматический" подход приводит к некоторым трудностям, наиболее известной из которых является так называемая "неадиабатичность" медленных мод: если в системе существуют моды с большими характерными временами, то они не успевают следить за эволюцией одночастичных функций распределения и требуют специального рассмотрения. Таким свойством обладают, например, гидродинамические моды. Этим вопросам посвящена обширная литература. В развиваемом в настоящей работе подходе было доказано (не предположено!), что начиная с некоторого момента одночастичная функция распределения (а ниже мы убедимся, что и высшие функции распределения) выражается через двухчастичную функцию распределения. При этом уже не возникает проблемы "неадиабатичности" медленных мод, но получающиеся кинетические уравнения оказываются существенно более сложными.

14. Размыкание системы уравнений асимптотической эволюции

Уравнения асимптотической эволюции (52), как и иерархия БГКИ, представляют собой бесконечный набор зацепляющихся линейных интегродифференциальных уравнений, связывающих s -частичную и $(s+1)$ -частичную функции распределения при произвольном натуральном s . Сначала мы прибегнем к не совсем строгому, но наглядному способу расщепления кинетических уравнений (48) и (52), позволяющему понять физический смысл этого расщепления, а затем укажем и более формальный подход. Можно попытаться искать решения (52) в виде

$$f_s(t, 1, \dots, s) = \prod_{i=1}^{i=s} f_1(t, i), \quad (54)$$

но подобные функции распределения ни в каком смысле не подчинены соотношениям (53). Разумеется, что в определенных динамических системах, имеющих малый параметр, переход к описанию динамики уравнениями Власова, к чему и приводит (54), может быть вполне оправдан. Однако в общем случае необходим другой подход к размыканию кинетических уравнений (48) и (52). Для этого воспользуемся возникающим в динамике системы на больших временах малым параметром, связанным с большой величиной t/τ^* и обеспечивающим переход от (48) к (52).

В приложении подробно рассмотрен способ размыкания уравнений для расширенных функций распределения. Однако здесь представляется уместным обсудить основные отличия этого метода размыкания от методов, опирающихся на идею "молекулярного хаоса", т.е. на представление высших функций распределения через одночастичную типа (12) и (13). Под гипотезой о "молекулярном хаосе" понимают возможность в *любой*

момент времени рассматривать атомы некоррелированными перед столкновениями. Именно это физическое предположение эквивалентно факторизациям (12), (13) и аналогичным им для высших функций распределения. При этом нетривиальной частью гипотезы является именно то, что она справедлива в любой момент времени, т.е. необходимо доказать справедливость подобного рассмотрения при больших временах при наличии межчастичного взаимодействия. Обоснование возможности указанного рассмотрения и представляет главную (но не единственную) проблему при построении кинетических уравнений. Обратим внимание на то, что гипотеза о "молекулярном хаосе" не разрешается выбором начальных условий "общего положения": эта гипотеза является существенно динамическим допущением и требует для своего обоснования достаточно глубокого изучения динамики многочастичной системы.

Подойдем к этому вопросу с несколько иной точки зрения. Заметим, что в иерархии БГКИ именно неинтегральные слагаемые в правой части (5) могут вызвать нарушение гипотезы о "молекулярном хаосе", а интегральные слагаемые в правой части (5) не приводят ни к каким трудностям при обосновании этой гипотезы. Переход к расширенным функциям распределения принципиально меняет ситуацию. В самом деле, в уравнениях для расширенных функций распределения (48) существуют неинтегральные слагаемые, которые в точности аналогичны слагаемым в иерархии БГКИ, создающим трудности при обосновании гипотезы о "молекулярном хаосе". Однако это сходство является чисто формальным. Дело в том, что при больших временах указанные слагаемые в уравнениях для расширенных функций распределения обращаются в нуль согласно слабой форме *H*-теоремы (см. (53)):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \widehat{Q}_s f_s(t, 1, \dots, s) = 0, \quad s \geq 2.$$

Таким образом, введение расширенных функций распределения радикально изменяет задачу расщепления бесконечной цепочки зацепляющихся уравнений, описывающих динамику многочастичной системы. Оказывается, что переход к расширенным функциям распределения позволяет эффективно устранить слагаемые, препятствующие расщеплению в пределе больших времен эволюции. Учитывая это, приходим к замкнутому кинетическому уравнению для двухчастичной функции распределения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2 \right) f_2(t, 1, 2) = \widehat{Q}^*(1, 2) f_2(t, 1, 2) + D(t, 1, 2) + D(t, 2, 1), \quad (55)$$

а также уравнениям, позволяющим вычислить высшие расширенные функции распределения через двухчастичную,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) f_s = \widehat{Q}_s f_s + \\ + \sum_{1 \leq i \leq s} f_{s-1}(t, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, s) \times \\ \times \int \widehat{Q}(i, (s+1)) f_2(t, i, (s+1)) d(s+1), \quad s \geq 3, \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t, 1, 2) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \widehat{L}_1) \int \widehat{Q}(1, 1') f_2(t - \tau, 1, 1') d1' d\tau \times \\ \times \int \widehat{Q}(2, 2') f_2(t, 2, 2') d2'. \end{aligned}$$

Выражения (55) и (56) дают ответ на вопрос Уленбека о возможности выразить все функции распределения через двухчастичную [15]. В самом деле, соотношение (41) позволяет выразить одночастичную функцию распределения через двухчастичную, (55) является замкнутым уравнением, описывающим эволюцию двухчастичной функции распределения, а уравнения (56) дают возможность выразить высшие функции распределения через двухчастичную. Во избежание недоразумений укажем, что выделенная роль двухчастичной функции распределения определяется тем, что в настоящей работе рассматриваются лишь системы с двухчастичным потенциалом взаимодействия.

15. Физический смысл формализма "расширенных" функций распределения

Обсудим физические причины, лежащие в основе того, что для "расширенной" функции распределения f_2 удается получить замкнутое кинетическое уравнение.

Заметим, что любая расширенная функция распределения содержит "информацию", для получения которой необходимо знать всю бесконечную цепочку обычных функций распределения (в самом деле, уже одночастичная расширенная функция распределения позволяет вычислить $\langle \mathbf{a} \rangle^{2n}$ при любом n , хотя для вычисления этого среднего необходимо знать $(2n+1)$ -частичную стандартную функцию распределения F_{2n+1}).

В действительности в системах с бесконечно большим числом частиц даже вся бесконечная цепочка многочастичных функций распределения не в полной мере описывает динамику. Специально подчеркнем, что подобная ситуация имеет место лишь при $N = +\infty$. Заметим, что для вычисления величины $\langle |\mathbf{a}|^r \rangle$, где r — дробное число, в системе из N частиц необходимо использовать функцию F_N . Таким образом, информация о дробных моментах ускорения теряется в системах с бесконечно большим числом частиц при описании таких систем стандартными функциями распределения. Последнее не кажется странным, если заметить, что в уравнениях движения переход к пределу $N \rightarrow +\infty$ происходит сравнительно легко, при этом функция ρ становится функцией, определенной на бесконечномерном пространстве, т.е. ρ превращается в крайне "неприятный" с математической точки зрения объект. Вместе с тем информация о дробных моментах ускорений содержится в расширенных функциях распределения. Однако даже вся бесконечная цепочка расширенных функций распределения содержит не всю информацию о динамике системы классических частиц. В этом можно убедиться, рассмотрев дробные моменты, например, производных от ускорения. Неполнота описания динамики функциями f_s , $s \geq 1$, делает естественным необратимый по времени характер соотношений (41), а наличие в f_2 информации, дополнительной по сравнению с информацией, содержащейся во всей бесконечной цепочке стандартных многочастичных функций распределения, позволяет понять, почему для f_2 удается сравнительно легко получить замкнутое уравнение.

16. Дополнительные ограничения на "расширенные" функции распределения

Кинетические уравнения для "расширенных" функций распределения получены исходя из уравнений (27), которые следуют из уравнений движения. Однако порядок системы уравнений (27) равен $9N$, т.е. превышает порядок уравнений движения, который равен $6N$. Следовательно решения системы дифференциальных уравнений (27) зависят от $9N$ произвольных постоянных, в то время как решения истинных дифференциальных уравнений зависят лишь от $6N$ произвольных постоянных, а решения истинных уравнений движения зависят лишь от $6N$ произвольных констант ($3N$ координат и столько же скоростей в начальный момент времени). Таким образом, необходимо исключить из рассмотрения решения (27), не соответствующие никаким истинным движениям физических частиц. Для этого достаточно учесть, что ускорения частиц в начальный момент времени определяются вторым законом Ньютона. "Нефизические" решения существуют также у кинетических уравнений (48), (52), и они могут быть исключены наложением аналогичных ограничений на расширенные функции распределения, т.е. на одночастичную "расширенную" функцию распределения, например, должна быть наложена дополнительная связь

$$\mathbf{a}_1 \Phi_1(t, 1) = -\frac{1}{m} \int \frac{\partial U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \Phi_2(t, 1, 2) d\mathbf{r}_2, \quad (57)$$

которая при $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ согласно (35) сводится к

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \hat{L}_1) \int \hat{Q}(1, 2) \Phi_2(t - \tau, 1, 2) d\mathbf{r}_2 d\tau = \\ = -\frac{1}{m} \int \frac{\partial U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \Phi_2(t, 1, 2) d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (58)$$

Заметим, что если (57) выполнено в начальный момент времени, то оно будет выполняться и в дальнейшем. Таким образом, (58) следует рассматривать как ограничение на начальные условия.

Напомним, что само выражение (35) справедливо лишь для "физических" и близких к ним решений (27). Действительно, переход от (32) к (35) возможен лишь при условии, что v_{ch} растет по времени медленнее, чем $a_{ch}t$, что нарушается для решений (27), сильно отличающихся от имеющих физический смысл. Если мы рассматриваем лишь "строго" физические решения для изолированной системы, то v_{ch} вообще не зависит от времени. Таким образом, выражение (35) заведомо справедливо для физических и близких к ним решений.

17. Переход к уравнению Больцмана

Убедимся в том, что уравнения (55) и (56) допускают переход к уравнению Больцмана. Прежде всего заметим, что уравнение Больцмана не позволяет корректно описать флуктуации и учитывает лишь парные столкновения [10]. Однако в уравнении Больцмана уже явным образом учтены многие конкретные детали движения частиц (достаточно заметить, что в уравнение Больцмана входят явным образом не потенциалы межчастичного взаимодействия, а сечения парных столкновений). Таким образом, задача перехода от уравнений (55) и

(56) к уравнению Больцмана разбивается на два этапа: во-первых, необходимо указать, какому приближению в уравнениях (55) и (56) соответствует уравнение Больцмана, и, во-вторых, в указанном приближении необходимо перейти к тем параметрам, которые входят в уравнение Больцмана. Первый этап имеет принципиальное значение, а второй носит чисто технический характер.

Прежде всего укажем приближение, в котором от уравнений (55) и (56) можно перейти к уравнению Больцмана. Для этого будем искать решения в виде

$$f_n(1, 1, \dots, n) = F_n(t, 1^-, \dots, n^-) F_n^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, n^{(\delta)}), \quad (59)$$

где f_n — расширенная n -частичная функция распределения, F_n — обычная n -частичная функция распределения, $F_n^{(\delta)}$ — новая функция, подчиненная условию

$$\int F_n^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, n^{(\delta)}) d\mathbf{a}_n = F_{(n-1)}^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, (n-1)^{(\delta)}),$$

$i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i)$, $i^- = (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ и $i^{(\delta)} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_i)$. Заметим, что в пренебрежении флуктуациями решения вида (59) должны существовать в уравнениях (55) и (56) хотя бы тогда, когда достигнуто локальное термодинамическое равновесие. Действительно, из-за локального термодинамического равновесия скорости "отделяются" от ускорений согласно распределению Гиббса для систем классических частиц, а из-за пренебрежения флуктуациями можно утверждать, что это "отделение" происходит не в среднем по времени, а в любой фиксированный момент времени.

Подставим выражения для f_n , даваемые (59), в уравнения (55) и (56). Интегрирование получаемых уравнений по ускорениям с учетом дополнительных связей, возникающих аналогично (57), приводит к уравнениям стандартной иерархии ББГКИ для функций $F_n(t, 1^-, \dots, n^-)$, а интегрирование по скоростям позволяет прийти к уравнениям для функций $F_n^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, n^{(\delta)})$. Заметим, что уравнения для функций $F_n^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, n^{(\delta)})$ зависят от интегралов, содержащих в подынтегральных выражениях $F_n(t, 1^-, \dots, n^-)$, а уравнения для $F_n(t, 1^-, \dots, n^-)$, совпадающие со стандартной иерархией ББГКИ, не зависят от функций $F_n^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, n^{(\delta)})$. Таким образом, любой оправданный способ расщепления стандартной иерархии ББГКИ вблизи термодинамического равновесия в приближении флуктуациями приводит к определению как функций $F_n^{(\delta)}(t, 1^{(\delta)}, \dots, n^{(\delta)})$, так и функций $F_n(t, 1^-, \dots, n^-)$, т.е. позволяет указать соответствующие решения уравнений (55) и (56). Следовательно, в указанном частном классе решений (59) уравнения (55) и (56) действительно переходят в уравнение Больцмана. Иными словами, замкнутое кинетическое уравнение (55), являясь более общим по сравнению с кинетическим уравнением Больцмана, позволяет указать область применимости последнего с точки зрения степени неравновесности среды, описание которой уравнениями больцмановского типа все еще возможно.

18. Необратимость по времени и вероятностное описание динамики

Вернемся еще раз к связи между необратимостью по времени и вероятностным описанием динамики. Метод настоящей работы позволил ввести необратимую эво-

люцию как свойство динамики при больших временах. При переходе к вероятностному описанию необратимой динамики многочастичной системы возникла необходимость в достаточно подробном описании пространства событий. Отсутствие всякой информации о пространстве событий является существенным недостатком подхода к получению уравнения Больцмана в рамках идеологии молекулярного хаоса; на этот недостаток было указано М.А. Леонтовичем [10].

Необратимость по времени удалось показать лишь как свойство оператора \hat{T} переводить решения одной системы уравнений в решения другой системы уравнений, а при переходе к гладким функциям распределения удалось установить слабую форму H -теоремы, т.е. указать класс функций, "по направлению к которому" эволюционируют начальные многочастичные функции распределения. Вместе с тем, нам не удалось построить для полученных необратимых уравнений функционала Ляпунова. На самом деле трудно ожидать, что с уравнением (55) связана какая-либо величина, возрастающая по времени в каждой точке пространства. Действительно, поскольку уравнение (55) корректно описывает флуктуации, то оно допускает эволюцию в разные стороны: как по направлению к равновесию (стационару), так и от него. Во избежание недоразумений еще раз укажем, что уравнения больцмановского типа, допускающие H -теорему, не могут корректно учитывать флуктуации [10]. Это следует хотя бы из того, что при получении этих кинетических уравнений истинное межчастичное взаимодействие подменяется взаимодействием с частицами "усредненного" представителя ансамбля.

19. Заключение

Проблемы, возникающие при установлении связи между кинетической теорией и механикой, сводятся к двум основным трудностям, имеющим совершенно различную природу: во-первых, трудности, связанные с введением в классическую механику вероятностных представлений и представлений о релаксации, и, во-вторых, трудности, связанные с необходимостью определять тот класс динамических систем, к которым результаты кинетической теории применимы [2]. Для решения этих задач предложены различные подходы, как правило, опирающиеся на достаточно сложные свойства динамических систем, а именно апеллирующие к представлениям о динамическом хаосе, перемешивании в фазовом пространстве, эргодичности и т.д. На фоне этих достаточно сложных теорий, часто использующих глубокие результаты из теории динамических систем, идеи Б.Б. Кадомцева, опирающиеся на наглядные физические представления, кажутся на первый взгляд несколько наивными. Тем более неожиданным оказывается то, что развитие этих идей позволяет дать ответ на вопросы, на которые долгое время не удавалось ответить на основе других подходов.

Прежде всего заметим, что идеология Б.Б. Кадомцева, основанная на идее о необходимости введения "внешнего шума", позволяет дать ясное описание причин возникновения необратимости в статистической механике. В самом деле, в системе из большого числа частиц существуют частицы, взаимодействие которых с другими частицами системы (испытываемое из-за этого ускорение) меньше взаимодействия с "внешним шумом",

т.е. ускорение, испытываемое ими в результате действия "внешнего шума", больше ускорения, возникающего при действии на них других частиц системы. Число таких частиц мало в силу малости величины взаимодействия с внешним окружением, а их ускорение определяется главным образом именно неконтролируемой величиной малого "внешнего шума". Поэтому с физической точки зрения было бы хорошо построить такое, пусть и приближенное описание динамики системы, в котором пренебрегалось бы этими частицами в силу малости их числа по сравнению с полным числом частиц в системе. Проблема состоит в том, что в разные моменты времени разные частицы попадают в класс частиц с малыми ускорениями. Для того чтобы справиться с указанной технической трудностью, удобно в качестве новой "независимой" переменной ввести ускорения частиц, а рассмотрение провести в возникающем таким образом "расширенном" фазовом пространстве.

В настоящей работе показано, что пренебрежение указанными "слабосвязанными" частицами в самом деле приводит к необратимой динамике, которая оказывается универсальной, т.е. не зависящей от деталей "внешнего шума". С математической точки зрения рассматривалась задача об описании динамики многочастичной системы в пренебрежении частицами с малым ускорением. Подобная постановка задачи является новой в кинетической теории, а ее физическая интерпретация опирается на идеи Б.Б. Кадомцева о роли "внешнего шума" в формировании необратимой динамики.

Остановимся подробнее на принципиальной роли частиц с малым ускорением. Заметим, что внешний шум влияет, разумеется, не только на небольшое число частиц, испытывающих малое ускорение из-за взаимодействия с другими частицами системы, но и на все другие частицы системы. Таким образом, многочастичная система состоит из большого числа частиц (почти все частицы системы), для которых внешний шум является лишь малым возмущением, и малого числа частиц (мало в силу малости величины внешнего шума), ускорение которых, наоборот, определяется, в основном, внешним шумом. В свете сказанного возникает вопрос о том, что является более существенным для динамики системы на больших временах: сравнимое с межчастичным взаимодействием воздействие внешнего шума на малое число частиц или малое по сравнению с межчастичным взаимодействием влияние внешнего шума на все остальные частицы?

В рамках формализма, представленного в настоящей работе, пренебрежение относительно небольшим числом частиц, испытывающих меньшее ускорение из-за взаимодействия с другими частицами системы по сравнению с ускорением из-за влияния на них внешнего шума, приводит к отбору определенного типа решений уравнений для функций распределения (см. раздел 11), после чего влияние внешнего шума на остальные частицы может быть учтено по теории возмущений, строящейся для решений этого типа. Любопытно отметить, что возможность "сбоя" фаз из-за взаимодействия системы с внешним необратимым окружением и отбора определенного типа решений была ранее осознана в квантовой механике. В работе [1] Б.Б. Кадомцев писал: "Допустим теперь, что рассматриваемый нами газ находится в слабом взаимодействии с внешним необратимым окру-

жением. Первый и главный эффект от такого взаимодействия состоит в разрушении точных фазовых соотношений между сходящимися и расходящимися волнами. Происходит, как говорят, сбой фаз ... Соответствующий эффект можно назвать "коллапсом" волновой функции". Б.Б. Кадомцев считал, что "первый и главный" эффект от взаимодействия с внешним необратимым окружением состоит в том, что вызываемый им "сбой" фаз (нарушение точных фазовых соотношений) по-разному сказывается на "сходящихся" и "расходящихся" волнах. В действительности аргументация Б.Б. Кадомцева весьма тонка, и утверждения, вырванные из контекста, могут быть неправильно истолкованы. Приведем, однако, один из главных результатов анализа, проведенного Б.Б. Кадомцевым: при учете взаимодействия с внешним необратимым окружением физический смысл имеют не все, а лишь некоторые решения уравнения Шрёдингера, описывающего динамику многочастичной задачи. Остановимся на этом подробнее. Заметим, что уравнение Шрёдингера является уравнением первого порядка по времени, поэтому задание начальных условий однозначно определяет дальнейшую эволюцию системы. Однако учет малого внешнего шума, т.е. воздействия на систему, делает ее незамкнутой. На достаточно больших временах "выживают" лишь те решения уравнения Шрёдингера, которые в каком-то смысле устойчивы по отношению к этому шуму. Остальные решения "притягиваются" к ним, что не противоречит никаким динамическим принципам, поскольку учет внешнего шума сделал систему незамкнутой и диссипативной. Именно возможность постепенного превращения одних решений уравнения Шрёдингера в другие под действием внешнего шума, т.е. "притяжение" неустойчивых по отношению к внешнему шуму решений к "устойчивым", приводит к своеобразному принципу отбора решений и вводит необратимость в квантовомеханических задачах [1].

При этом совершенно незамеченной оставалась возможность такого же механизма возникновения необратимости (из-за отбора решений нужного типа) в классической механике. Вероятно, подобная ситуация сложилась из-за того, что уравнение Шрёдингера линейно и "волновые" аналогии напрашиваются сами собой, в то время как уравнения движения классической динамики нелинейны, однако уравнение Лиувилля, уравнения цепочки ББГКИ или уравнения для "расширенных" функций распределения — также линейные уравнения, что делает неудивительным возможность возникновения необратимости аналогичным образом.

В рамках кадомцевского понимания проблемы обоснования статистической механики удалось показать, что необратимая эволюция возникает в формализме "расширенных" функций распределения как естественное свойство динамики системы классических частиц при больших временах. При этом вероятностное описание динамики в этом временном интервале является лишь удобным формальным средством, позволяющим отказаться от формализма обобщенных функций, причем вероятностное описание является тем более оправданным, чем большие времена ($t \gg \tau^*$) рассматриваются. Получено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию "расширенной" двухчастичной функции распределения и дающее аналитическое описание необратимой динамики системы классических частиц. Таким обра-

зом, удалось исходя из динамики обосновать гипотезу о "молекулярном" хаосе и найти ее форму, пригодную не только для газов.

В настоящей работе мы убедились, что развитие идей Б.Б. Кадомцева о природе необратимости приводит не только к принципиально новой постановке самой задачи обоснования статистической физики, но и уже позволило получить решение ряда задач, не поддававшихся решению в рамках других подходов. К сожалению, несмотря на физическую ясность и возможность формального описания, идеология Б.Б. Кадомцева пока не получила должной известности и признания, хотя бесспорно представляет значительный интерес и, возможно, является наиболее адекватным подходом к проблеме.

20. Приложение

Прежде всего заметим, что иерархию ББГКИ, а также системы уравнений (48), (52) можно трактовать различными способами. Можно рассматривать их как уравнения эволюции для многочастичных функций распределения. Но возможна и другая точка зрения. Так как уравнение для s -частичной функции распределения содержит $(s+1)$ -частичную функцию распределения, то можно попытаться рассмотреть его как интегродифференциальное уравнение, позволяющее по функции f_s , $s \geq 1$, определять $(s+1)$ -частичную функцию распределения. Заметим, что вторая точка зрения возможна лишь в системе с бесконечно большим числом частиц $N = +\infty$. В системе с конечным числом частиц N уравнение для N -частичной функции распределения, совпадающее с уравнением Лиувилля, не допускает подобной интерпретации. Кроме того, вторая интерпретация зацепляющихся бесконечных цепочек связана с вопросом о разрешимости соответствующих линейных интегродифференциальных уравнений.

Метод расщепления Боголюбова использует обе указанные интерпретации иерархии ББГКИ. Для вычисления функции G_2 , определяемой согласно (13), достаточно потребовать, чтобы уравнение для двухчастичной функции распределения, рассматриваемое как интегродифференциальное уравнение относительно функции G_3 , имело решение $G_3 \ll G_2$. Найденная таким образом функция G_2 позволяет определить F_2 согласно (13) и получить, как показано Н.Н. Боголюбовым, кинетическое уравнение Больцмана и его аналоги для других сред.

Для описания конца первого и второго этапа эволюции "расширенными" функциями распределения уравнениями (48) или (52) подчиним трехчастичную функцию распределения интегродифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & \int \hat{Q}(1, 3) f_3(t, 1, 2, 3) d3 + \int \hat{Q}(2, 3) f_3(t, 1, 2, 3) d3 = \\ & = f_1(t, 1) \int \hat{Q}(2, 3) f_2(t, 2, 3) d3 + f_1(t, 2) \times \\ & \times \int \hat{Q}(1, 3) f_2(t, 1, 3) d3, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

т.е. уравнения, описывающие эволюцию f_1 и f_2 , запишем как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 \right) f_1(t, 1) = \int \hat{Q}(1, 2) f_2(t, 1, 2) d2, \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2 \right) f_2(t, 1, 2) = \\ & = f_1(t, 1) \int \widehat{Q}(2, 3) f_2(t, 2, 3) d3 + f_1(t, 2) \times \\ & \times \int \widehat{Q}(1, 3) f_2(t, 1, 3) d3, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

выражение (П.1) используем как интегродифференциальное уравнение для определения f_3 , а уравнения (48) для f_s с $s \geq 3$ будем рассматривать как интегродифференциальные уравнения для функций f_{s+1} , $s \geq 3$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) f_s(t, 1, \dots, s) = \\ & = \int \sum_{i=1}^{i=s} \widehat{Q}(i, (s+1)) f_{s+1}(t, 1, \dots, s, s+1) d(s+1), \quad s \geq 3. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Прежде всего заметим, что в системе с бесконечно большим числом частиц $N = +\infty$ уравнения (П.1)–(П.4) не противоречат имеющемуся между функцией f_s и функцией f_{s+1} , $s \geq 1$, интегральному соотношению

$$\int f_{s+1}(t, 1, \dots, s, (s+1)) d(s+1) = N f_s(t, 1, \dots, s). \quad (\text{П.5})$$

Таким образом, вопрос о существовании ансамбля, динамика которого описывается уравнениями (П.1)–(П.4), сводится к проблеме разрешимости соответствующих интегродифференциальных уравнений, определяющих f_s , $s \geq 3$. К сожалению, при буквальном понимании интегродифференциальное уравнение (П.1) не имеет решений. В этом легко убедиться, рассмотрев, например, систему частиц с бесконечно сильным отталкиванием на нулевом расстоянии. В этом случае $f_3 = 0$ при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, и левая часть обращается в нуль при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, в то время как правая часть выражения (П.1) имеет ненулевое значение. Однако для наших целей достаточно существования решения (П.1) лишь в пределе малого параметра, обеспечивающего переход от (48) к (52), т.е. достаточно построить функцию f_3 , определенную не на всем 27-мерном пространстве $(1, 2, 3)$, а исключив из него множество, малое в силу малости параметра, обеспечивающего переход от (48) к (52). Простые физические соображения позволяют убедиться в том, что понимаемое таким образом решение уравнения (П.1) в самом деле существует.

Вместо системы частиц, описываемой гамильтонианом (1), рассмотрим связанную с ней новую систему частиц с потенциалом межчастичного взаимодействия $g^2 U$, массой gm и концентрацией n/g , где $g \rightarrow +0$. Заметим, что при $g \rightarrow +0$ эволюция многочастичных функций распределения описывается именно системой уравнений (52). Таким образом, второй этап эволюции расширенных функций распределения означает, что в этом временном интервале систему частиц можно описывать в "непрерывном" пределе, причем такое описание тем точнее, чем больше величина t/τ^* . Следовательно, изучение функций распределения истинной задачи можно заменить изучением функций распределения "непрерывной" модели. При фиксированной характерной скорости частиц с массой gm "температура" равна gT , а энергия

парного взаимодействия частиц "непрерывной" модели определяется величиной $g^2 U$ при $g \rightarrow 0$. В рассматриваемой "непрерывной" модели эффективная температура gT значительно превышает энергию парного взаимодействия $g^2 U$, что позволяет провести расщепление изучаемой бесконечной цепочки уравнений для расширенных функций распределения. Таким образом, в случае "непрерывной" модели должен существовать ансамбль, для которого выполнены равенства

$$\int \widehat{Q}(1, 3) f_3(t, 1, 2, 3) d3 = f_1(t, 2) \int \widehat{Q}(1, 3) f_2(t, 1, 3) d3, \quad (\text{П.6})$$

$$\int \widehat{Q}(2, 3) f_3(t, 1, 2, 3) d3 = f_1(t, 1) \int \widehat{Q}(2, 3) f_2(t, 2, 3) d3. \quad (\text{П.7})$$

Равенства (П.6), (П.7) и связь "непрерывной" модели с эволюцией реальной системы частиц при больших временах обеспечивают разрешимость (П.1), (П.4) в указанном выше смысле. Иными словами, существование ансамбля, удовлетворяющего (П.6), (П.7) для "непрерывной" модели, обеспечивает разрешимость интегродифференциальных уравнений (П.1) и (П.4) в пределе больших t/τ^* . Еще раз подчеркнем, что функции f_1 и f_2 эволюционируют таким образом, что с ростом величины t/τ^* сужается область 27-мерного пространства $(1, 2, 3)$, на которой не существует решения интегродифференциальных уравнений (П.6), (П.7). Следовательно, в пределе большого отношения t/τ^* переход от (48) к (П.1)–(П.4) является вполне обоснованным. Решая уравнение (П.2) относительно f_1 при $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$, что приводит к (41), и подставляя найденное выражение для f_1 в (П.3), получаем кинетические уравнения для функции f_s , $s \geq 2$ (см. пояснения ниже),

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2 \right) f_2(t, 1, 2) = \widehat{Q}^*(1, 2) f_2(t, 1, 2) + \\ & + D(t, 1, 2) + D(t, 2, 1), \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \dots + \widehat{L}_s \right) f_s = \widehat{Q}_s f_s + \\ & + \sum_{1 \leq i \leq s} f_{s-1}(t, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, s) \times \\ & \times \int \widehat{Q}(i, (s+1)) f_2(t, i, (s+1)) d(s+1), \quad s \geq 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t, 1, 2) = & \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \widehat{L}_1) \int \widehat{Q}(1, 1') f_2(t - \tau, 1, 1') d1' d\tau \times \\ & \times \int \widehat{Q}(2, 2') f_2(t, 2, 2') d2'. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (П.8) является нелинейным замкнутым кинетическим уравнением относительно функции f_2 , а уравнения для высших функций распределения — линейные интегродифференциальные уравнения.

Специально отметим, что в уравнении (П.8) и его аналогах для высших функций распределения сохранены слагаемые $\widehat{Q}_s^* f_s$, $s \geq 2$. Если ставить целью описание только второго этапа эволюции, то подобные

слагаемые должны быть опущены. Однако необходимость описания и конечной стадии первого этапа эволюции требует сохранения и этих слагаемых. Заметим, что кинетические уравнения (П.8) одновременно являются и определением ансамбля, описываемого этими кинетическими уравнениями. В самом деле, используемое расщепление обосновано в пределе бесконечно большого времени, т.е. когда справедливо (53). С этой точки зрения предъявленные кинетические уравнения описывают такой ансамбль, в котором исчезающие при конечных временах слагаемые $\hat{Q}_s^* f_s$, $s \geq 2$, дают поправки к функциям f_s , $s \geq 2$, в соответствии с рассматриваемыми уравнениями. Заметим, что построенные кинетические уравнения не противоречат соотношению (П.5).

Другим подходом к обоснованию расщепления уравнений для расширенных функций распределения является метод, указанный в основном тексте статьи. Заметим, что выражения (П.6) и (П.7) заведомо справедливы для таких ансамблей, в которых функции распределения близки к набору δ -функций, иными словами, в ансамблях, которые составлены из достаточно узкой окрестности одной точки фазового пространства. Этого всегда можно добиться для начального момента времени. Выберем окрестность настолько узкой, чтобы к тому моменту времени, когда неинтегральные слагаемые в цепочке уравнений уже станут достаточно малыми согласно (53), равенства (П.6) и (П.7) по-прежнему выполнялись с хорошей точностью. Однако тогда равенства (П.6) и (П.7) будут справедливы и в дальнейшем, что позволяет произвести расщепление по указанной выше схеме.

Кроме того возможен и более формальный подход к получению кинетических уравнений (П.8). Решая первое из уравнений (48) относительно функции f_1 , будем искать решение оставшихся уравнений (48) в виде, соответствующем уравнениям (П.8). Однако этот метод не позволяет понять физический смысл указанной факторизации, из-за чего и был подробно описан наглядный подход, связанный с переходом к "непрерывному" пределу.

Заметим, что в используемом подходе "взаимодействие" между частицами различных представителей ансамбля возникло уже после получения необратимой динамики (см. (41), (52)) исходя только из уравнений движения. Однако необратимость в (П.8) может быть интерпретирована и на языке "межсистемного" взаимодействия, вводимого уравнением (П.1). Таким образом показано, что необратимость, возникающая из одной лишь динамики системы классических частиц в пределе больших времен, может быть интерпретирована как "взаимодействие" между частицами различных представителей ансамбля, т.е., как объяснено выше, в соответствии с гипотезой о "молекулярном" хаосе. Следовательно, используемый подход позволяет обосновать гипотезу о "молекулярном" хаосе и дать ей корректную формулировку (П.1) для случая, когда межчастичное взаимодействие не мало.

Укажем физическую причину, позволяющую эффективно использовать факторизацию (П.1): интегродифференциальное уравнение (П.1) не имеет решения при r_1 , близком к r_2 . Однако при $U(r) \rightarrow \infty$, когда $r \rightarrow 0$, очень малая часть частиц подходит друг к другу так близко. Из-за малости числа частиц невозможность построить

решение в этой области не является существенным препятствием.

Заметим, что к уравнению (П.8) можно прийти и другим путем. Согласно (35) функцию f_3 при $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$ можно записать как

$$f_3(t, 1, 2, 3) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \hat{L}_1) \int \hat{Q}(1, 1') \times \\ \times \langle \Phi_2(t - \tau, 1, 1') \Phi_2(t, 2, 3) \rangle d1' d\tau. \quad (\text{П.9})$$

Если предположить, что под знаком интеграла в выражении (П.9) допустима замена

$$\langle \Phi_2(t - \tau, 1, 1') \Phi_2(t, 2, 3) \rangle = \\ = \langle \Phi_2(t - \tau, 1, 1') \rangle \langle \Phi_2(t, 2, 3) \rangle, \quad (\text{П.10})$$

то снова приходим к уравнению (П.8). Однако факторизация (П.10) в общем случае неверна, что следует хотя бы из того, что при $\tau = 0$ левая часть выражения (П.10) симметрична относительно любых перестановок групп переменных $1, 1', 2, 3$, а правая часть — не симметрична. Однако в ряде задач, имеющих малый параметр, основной вклад в интеграл (П.9) дают такие значения τ , при которых величины $\Phi_2(t - \tau, 1, 1')$ и $\Phi_2(t, 2, 3)$ можно считать статистически независимыми, что позволяет обосновать (П.10).

Заметим, что если функция f_2 мало меняется за время $\tau^* = v_{ch}/a_{ch}$, то функции $D(t, 1, 2)$ и $D(t, 2, 1)$ допускают существенное упрощение: при вычислении определяющего их интеграла по τ можно пренебречь зависимостью двухчастичной расширенной функции распределения от времени, т.е. записать

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \right) f_2(t, 1, 2) = \hat{Q}^*(1, 2) f_2(t, 1, 2) + \\ + D(t, 1, 2) + D(t, 2, 1), \quad (\text{П.11})$$

где

$$D(t, 1, 2) = \int_0^{+\infty} \exp(-\tau \hat{L}_1) \int \hat{Q}(1, 1') f_2(t, 1, 1') d1' d\tau \times \\ \times \int \hat{Q}(2, 2') f_2(t, 2, 2') d2'.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае эволюция двухчастичной функции распределения полностью определяется ее значением в этот же момент времени.

Дополнительные условия, которые необходимо наложить на "расширенные" функции распределения для отбора физически осмысленных решений (см. основной текст работы), можно использовать для перехода к описанию динамики стандартными функциями распределения.

Для получения стандартной s -частичной функции распределения исходя из "расширенной" s -частичной функции распределения следует проинтегрировать "расширенную" s -частичную функцию распределения по всем ускорениям. Учитывая сказанное, проинтегрируем уравнение для s -частичной функции из системы уравнений (48) по всем входящим в функцию f_s ускорениям, что дает

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int f_s(t, 1, \dots, s) \mathbf{d}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{d}\mathbf{a}_s + \\ & + \int \widehat{L}_1 f_s(t, 1, \dots, s) \mathbf{d}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{d}\mathbf{a}_s + \dots + \\ & + \int \widehat{L}_s f_s(t, 1, \dots, s) \mathbf{d}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{d}\mathbf{a}_s = 0, \quad s \geq 1. \quad (\text{П.12}) \end{aligned}$$

Ввиду того, что для всех функций распределения справедливы аналоги выражения (57)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i f_s(t, 1, \dots, i, \dots, s) &= -\frac{1}{m} \sum_{j=1, j \neq i}^{j=s} \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i} \times \\ & \times f_s(t, 1, \dots, i, \dots, j, \dots, s) - \frac{1}{m} \int \frac{\partial U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{s+1})}{\partial \mathbf{r}_i} \times \\ & \times f_{s+1}(t, 1, \dots, i, \dots, s, (s+1)) \mathbf{d}(s+1), \quad (\text{П.13}) \end{aligned}$$

выражение

$$\int \mathbf{a}_i f_s(t, 1, \dots, i, \dots, s) \mathbf{d}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{d}\mathbf{a}_s,$$

входящее в (П.12), может быть переписано с учетом (П.13), после чего уравнения (П.12) в точности переходят в цепочку уравнений ББГКИ. Заметим, что при интегрировании уравнений асимптотической эволюции (52) по всем ускорениям мы снова получаем уравнение (П.12), а использование (П.13) опять приводит к иерархии ББГКИ. Таким образом, описание процессов релаксации стандартными функциями распределения является слишком грубым для того, чтобы заметить два принципиально различных этапа эволюции, подробно рассмотренных выше. Именно из-за этого, не обращаясь к уравнениям для "расширенных" функций распределения, не удастся заметить "скрытый" малый параметр, связанный с большой величиной t/τ^* и приводящий к переходу от (48) к (52), что позволяет оборвать бесконечную цепочку уравнений с использованием (П.1) и прийти к (55). Однако, если знать, что расцепление возможно, то его можно выполнить, не обращаясь к формализму "расширенных" функций распределения.

В самом деле, из рассуждений, приведенных к (П.6), (П.7), следует выполнение соотношений, несколько более сильных по сравнению с (П.6), (П.7),

$$\begin{aligned} f_1(t, 1) & \int \left[\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_2} \right] f_2(t, 2, 3) \mathbf{d}3 = \\ & = \int \left[\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_2} \right] f_3(t, 1, 2, 3) \mathbf{d}3, \quad (\text{П.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(t, 2) & \int \left[\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_1} \right] f_2(t, 1, 3) \mathbf{d}3 = \\ & = \int \left[\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_1} \right] f_3(t, 1, 2, 3) \mathbf{d}3. \quad (\text{П.15}) \end{aligned}$$

Проинтегрируем (П.14), (П.15) по ускорениям $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, чтобы перейти в этих выражениях от "расширенных" функций распределения к стандартным функциям распределения:

$$\begin{aligned} F_1(t, 1) & \int \left[\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_2} \right] F_2(t, 2, 3) \mathbf{d}3 = \\ & = \int \left[\left(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_2} \right] F_3(t, 1, 2, 3) \mathbf{d}3, \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(t, 2) & \int \left[\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_1} \right] F_2(t, 1, 3) \mathbf{d}3 = \\ & = \int \left[\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \frac{\partial U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_1} \right] F_3(t, 1, 2, 3) \mathbf{d}3. \quad (\text{П.17}) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (П.16), (П.17) необходимо рассматривать как интегральные уравнения для определения функции $F_3(t, 1, 2, 3)$, а эволюция функций $F_1(t, 1)$ и $F_2(t, 1, 2)$ описывается первыми двумя уравнениями иерархии ББГКИ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 \right) F_1 = \widehat{\Lambda}(1, 2) F_2(t, 1, 2) \mathbf{d}2, \quad (\text{П.18})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2 \right) F_2 = \widehat{\Lambda}_2 F_2 + \int \sum_{1 \leq i \leq 2} \widehat{\Lambda}(i, 3) F_3(t, 1, 2, 3) \mathbf{d}3. \quad (\text{П.19})$$

Система уравнений (П.16)–(П.19) является аналогом кинетического уравнения (П.18), однако для введения необратимости и получения замкнутого уравнения для F_2 необходимо в явном виде построить решение интегральных уравнений (П.16), (П.17) и изучить характер решений (П.18), (П.19) при $t \geq \tau^* = v_{ch}/a_{ch}$. Теперь видны преимущества формализма "расширенных" функций распределения: во-первых, для формализма "расширенных" функций распределения не требовалось явного вида решений уравнений (П.6), (П.7), а, во-вторых, одночастичная "расширенная" функция распределения легко выражалась через "расширенную" двухчастичную функцию распределения, что позволило легко получить необратимую по времени динамику.

Список литературы

1. Кадомцев Б Б *Динамика и информация* (М.: Редакция журнала УФН, 1997)
2. Крылов Н С *Работы по обоснованию статистической физики* (М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1950)
3. Майоров С А, Ткачев А Н, Яковленко С И *УФН* **164** 297 (1994)
4. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.–Л.: Гостехиздат, 1946)
5. Гордиенко С Н *ЖЭТФ* **106** 436 (1994)
6. Гордиенко С Н *Физика плазмы* **23** 754 (1997)
7. Боголюбов Н Н *Избранные труды* Т. 3 (Киев: Наукова думка, 1971)
8. Шелест А В *Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений* (М.: Наука, 1990)
9. Sandri G *Ann. Phys. (N.Y.)* **24** 332 (1963)
10. Леонтович М А *ЖЭТФ* **5** 211 (1935)
11. Кадомцев Б Б *ЖЭТФ* **32** 943 (1957)
12. Кадомцев Б Б *ЖЭТФ* **33** 151 (1957)
13. Климонтович Ю Л *Турбулентное движение и структура хаоса* (М.: Наука, 1990)
14. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1979)
15. Кац М *Вероятность и смежные вопросы в физике* (М.: Мир, 1965)

Irreversibility and the probabilistic treatment of the dynamics of classical particles

S N Gordienko

L D Landau Institute of Theoretical physics, Russian Academy of Sciences

142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation

Tel. 8(252) 486-91

E-mail: gord@itp.ac.ru

It is shown that B B Kadomtsev's idea of small 'external noise' securing a time-irreversible evolution reduces the justification of statistical physics to a fundamentally new formulation which requires that the dynamics of a multiparticle system be treated by neglecting small acceleration particles. It turns out that this formulation not only leads naturally to irreversible evolution but also suggests a new way of constructing kinetic equations capable of correctly accounting for fluctuations. At the early, small-time, stage of evolution, the original correlations are forgotten and 'post-collisional' ones form. It is the final portion of the first stage and the formation of the 'post-collisional' correlations which can be described by a closed form kinetic equation. A relation between Kadomtsev's external noise idea and Bogolyubov's derivation of kinetic equations is established, leading to a new physical interpretation of the 'molecular chaos' hypothesis.

PACS numbers: **03.65.-w**, 03.65.Bz, **05.40.-a**, 05.45.-a

Bibliography 15 — references

Received 30 October 1998, revised 5 March 1999