

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Связь томасовской прецессии и теоремы Ишлинского, примененной к наблюдаемому вращению изображения релятивистски движущегося тела

Г.Б. Малькин

Показано, что угол поворота твердого тела, происходящего в процессе его движения по криволинейной траектории вследствие эффекта специальной теории относительности — томасовской прецессии, численно равен наблюдаемому в неподвижной системе отсчета телесному углу, который описала связанная с телом ось вследствие изменения поворота изображения твердого тела. Это вызвано лоренцевским сокращением длины и запаздыванием света, испущенного различными участками тела. В классической механике такое же соотношение имеет место между углом поворота твердого тела и реальным телесным углом, который описала связанная с телом ось в процессе его конического движения, что является следствием теоремы Ишлинского.

PACS number: 03.30.+p

Содержание.

1. Введение (585).
 2. Томасовская прецессия (585).
 3. Теорема Ишлинского и ее приложения (587).
 4. Наблюдаемый поворот быстро движущегося по круговой траектории объекта и томасовская прецессия (587).
 5. Физический смысл томасовской прецессии и угла Ишлинского (589).
 6. Заключение (589).
- Список литературы (589).

1. Введение

Томасовская прецессия [1, 2] есть релятивистский кинематический эффект, заключающийся в том, что ось гироскопа (точечного компаса) поворачивается (прецессирует), когда точка его подвеса движется по криволинейной траектории [3, 4]. Цель настоящей работы — показать, что существует глубокая физическая аналогия между томасовской прецессией и известным в классической механике явлением поворота твердого тела в процессе его конического движения на угол, численно равный телесному углу, который описала связанная с телом ось, что является следствием теоремы Ишлинского [5–9]. Иными словами, томасовскую прецессию можно интерпретировать как следствие наблюдаемого

в неподвижной системе отсчета вращения (изменения поворота) изображения твердого тела в процессе его движения по криволинейной траектории. Рассматриваемый поворот связан с релятивистским сокращением длины и запаздыванием света, испущенного от различных участков тела [10–14].

Следует отметить, что видимый эффект поворота изображения релятивистски движущегося тела, наблюдаемый в неподвижной системе отсчета, не означает, что тело меняет свою ориентацию в пространстве [13, 14]. Рассматриваемый эффект является проявлением релятивистской абберации [14, 15].

2. Томасовская прецессия

Рассмотрим подробнее эффект томасовской прецессии и его физические следствия. Как было отмечено выше, этот эффект приводит к повороту движущегося по криволинейной траектории гироскопа. В общем случае под гироскопом следует понимать некоторое твердое тело или материальную частицу, которые задают определенное направление в пространстве. В качестве примера можно указать обладающее сферической симметрией относительно центра тяжести твердое тело, движущееся в гравитационном поле по криволинейной траектории (по круговой или эллиптической орбите или по параболе) и сохраняющее при этом свою пространственную ориентацию в силу закона инерции. В качестве другого примера можно указать материальную частицу со спином — электрон, нейтрон и др.

В лабораторной системе отсчета выражение для угловой скорости прецессии имеет вид [4]

$$\Omega_T = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{[\mathbf{v} \mathbf{a}]}{v^2}, \tag{1}$$

Г.Б. Малькин. Институт прикладной физики РАН
603600 г. Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, Российская Федерация
E-mail: malykin@appl.ski-nnov.ru

Статья поступила 8 октября 1998 г.,
после доработки 10 февраля 1999 г.

где \mathbf{v} и \mathbf{a} — соответственно скорость и ускорение в лабораторной системе отсчета, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, а c — скорость света. В частном случае при движении по окружности радиуса r с угловой скоростью $\omega = v/r$ (рис. 1)

$$\Omega_T = \omega \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (2)$$

В сопровождающей системе отсчета величина угловой скорости томасовской прецессии в γ раз больше, чем в лабораторной системе отсчета (1), (2).

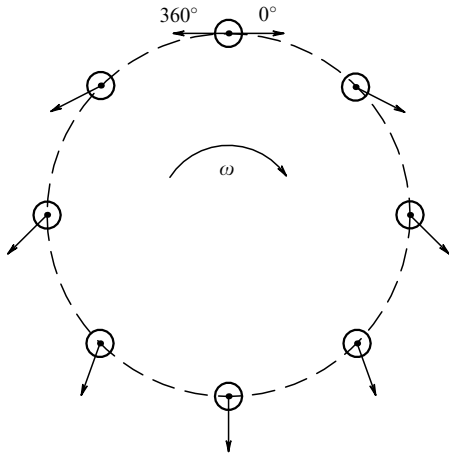


Рис. 1. Вызванный томасовской прецессией поворот оси, связанной с твердым телом, движущимся по круговой траектории, для случая $\gamma = 2$.

За один оборот по окружности угол поворота тела составит

$$\alpha = 2\pi \frac{\Omega_T}{\omega} = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (3)$$

В квантовой физике томасовская прецессия проявляется в осцилляции комплексных амплитуд вероятности спиновых состояний частицы в силовом поле [16].

Томасовская прецессия учитывает связанные с прецессией поправки при расчете влияния спин-орбитального взаимодействия на тонкую структуру спектров атомов [1, 2, 17], объясняет аномальный эффект Зеемана [1, 2], позволяет качественно объяснить взаимодействие нуклонов в ядре и причину "обращения" дублетов в ядре [4].

Влияние томасовской прецессии приводит к дополнительному сдвигу нуля интерференционной картины встречных волн де Бройля материальных частиц (электронов, нейтронов, атомов и др.) в интерференционных датчиках угловой скорости [18, 19], принцип действия которых основан на эффекте Саньяка [20]. Причина этого не связанного с вращением интерферометра сдвига нуля заключается в том, что если на входе интерферометра материальные частицы имели одинаковую поляризацию, т.е. одинаковую ориентацию спина, то на выходе интерферометра для частиц, распространяющихся в противоположных направлениях, томасовская прецессия вызывает одинаковые по абсолютной величине угла и противоположные по знаку изменения ориентации

спина, т.е. состояния поляризации интерферирующих частиц становятся различными. Рассматриваемый сдвиг нуля интерференционной картины встречных волн де Бройля аналогичен явлению поляризационной невязимости в волоконных кольцевых интерферометрах [21] и может быть принципиально исключен в случае использования материальных частиц, не имеющих спина, например π -мезонов [22].

Непосредственная регистрация томасовской прецессии для мюонов была осуществлена двадцать лет назад на кольцевом ускорителе в CERN [23, 24].

Около сорока лет назад Л. Шифф (Стэнфордский университет, Калифорния) предложил эксперимент [25, 26] по обнаружению эффекта томасовской прецессии, а также двух эффектов общей теории относительности — геодезической прецессии [27, 28] и эффекта Лензе–Тирринга [28–30] — с помощью одноосного механического гироскопа, установленного на искусственном спутнике Земли, который обращается на свободной от сноса полярной орбите. Для повышения точности измерений предполагается использовать два идентичных спутника, вращающихся во встречных направлениях. В этом случае томасовская прецессия и эффекты общей теории относительности приведут к противоположному развороту осей гироскопов на спутниках. Измерения предполагается проводить от одного года до нескольких лет.

Из выражения (3) следует, что если скорость спутника лежит в пределах между первой и второй космическими скоростями, то за один оборот спутника поворот оси гироскопа, обусловленный томасовской прецессией, составит порядка 3×10^{-9} рад. В этом случае угловая скорость поворота оси гироскопа составит 0,2 угл.сек/год. Вклад в поворот оси гироскопа от эффектов общей теории относительности составит соответственно: от геодезической прецессии — порядка 7 угл.сек/год; от эффекта Лензе–Тирринга — порядка 0,05 угл.сек/год [28].

Влияние трех рассматриваемых эффектов на поворот оси гироскопа можно разделить, помещая на спутник три гироскопа, один из которых ориентирован вдоль нормали к орбите, второй — вдоль бинормали к орбите, а третий — вдоль касательной к орбите.

Данный эксперимент до сих пор не осуществлен, однако работы по созданию одноосного механического гироскопа с соответствующей точностью ведутся не прерывно, начиная с 1964 г., в г. Стэнфорд [28, 31]. В настоящее время точность разработанного там гироскопа, представляющего собой покрытый тонкой пленкой сверхпроводящего ниобия кварцевый шар диаметра 5 см, который подвешивается в электростатическом поле, должна быть в состоянии невесомости, по оценкам [31], не хуже 3×10^{-6} угл.сек/год, что вполне достаточно для проведения рассматриваемых экспериментов.

Следует, однако, отметить, что исследователей в г. Стэнфорде в первую очередь интересует не обнаружение томасовской прецессии или геодезической прецессии (которая, в частности, проявляется как прецессия перигелия орбиты планет, была фактически обнаружена в 1859 г. французским астрономом Леверрье на примере прецессии перигелия орбиты Меркурия [32] и позднее получила адекватное объяснение в общей теории относительности [27]), а измерение эффекта Лензе–Тирринга. Последний эффект является аналогом эффекта взаимной индукции двух витков с током в электромагнетизме,

проявляется в виде взаимодействия двух вращающихся масс и до сих пор не зарегистрирован из-за его малой величины. Регистрация эффекта Лензе – Тирринга позволит проверить справедливость ряда выводов из общей теории относительности [28]. Таким образом, если рассматриваемые в [25, 26, 28, 31] эксперименты будут осуществлены, то не известно, каким образом будет ориентирована ось гироскопа на спутнике, и будет ли в ближайшее время проведено измерение эффекта томасовской прецессии с помощью механического гироскопа.

Отметим, что в последнее время появился ряд работ (см., например, [33]), в которых высказывается утверждение, что для материальных частиц, обладающих не только механическим, но и магнитным квантовым моментом (в частности, для электрона), эффект томасовской прецессии приводит к нарушению принципа относительности. Однако в [34] показана ошибочность этого утверждения.

3. Теорема Ишлинского и ее приложения

Рассмотрим теперь кинематический эффект в классической механике, который, как будет показано ниже, имеет много общего с томасовской прецессией. В начале 50-х годов А.Ю.Ишлинским была доказана теорема, именуемая также *теоремой о телесном угле* [5, 6] (см. также [7–9]), которую можно сформулировать следующим образом [9]: если некоторая ось, выделенная в твердом теле, имеющем три степени свободы, описала в процессе движения тела замкнутую коническую поверхность, и при этом проекция угловой скорости тела на эту ось была равна нулю, то после возвращения оси в исходное положение тело оказывается повернутым вокруг нее на угол, численно равный телесному углу описанного конуса (рис. 2). Отметим, что данное равенство выполняется с точностью до $2\pi N$, где N — целое число [35, 36]. Поступательное движение оси при этом не имеет никакого значения.

Приведем частный пример проявления рассматриваемого эффекта в классической механике. Если ось, на которую насажен без трения неподвижный в начальный момент времени маховик, описывает в пространстве некоторый телесный угол, то по возвращении оси в

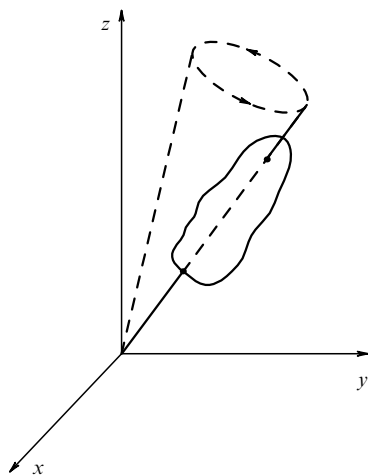


Рис. 2. Телесный угол, описываемый осью, связанной с твердым телом, в процессе конического движения тела.

исходное положение маховик повернется на угол, численно равный телесному углу, который описала ось. В работе [37] этот дополнительный угол поворота, приобретаемый телом в процессе пространственной эволюции, было предложено именовать *углом Ишлинского*. Как показано в [37, 38], угол Ишлинского является проявлением геометрической (топологической) фазы, которую часто называют *фазой Берри* [39], в классической механике (по поводу проявлений геометрической фазы в различных физических явлениях см. [40–44]). Если ось описывает одну и ту же коническую поверхность, но в противоположных направлениях, то абсолютная величина угла Ишлинского для противоположных направлений перемещения будет одинакова, а знаки будут различными.

Величина угла Ишлинского определяется не начальным и конечным положениями оси в пространстве, а зависит от траектории, которую описала ось в процессе пространственной эволюции, следовательно, накопление угла Ишлинского является неголономным явлением [45]. Последнее следует также из того, что, как показано в [5, 6], накопление механической системой в процессе ее пространственной эволюции угла Ишлинского происходит при наличии неголономных связей в данной системе.

Теорема Ишлинского находит приложения в области гироскопии. В частности, она объясняет появление угловой ошибки у пространственного гироскопа (гирорама, внутри которой находятся два спаренных механических гироскопа, оси которых параллельны) и у гироскопов с сильной коррекцией. Эта ошибка связана с изменением пространственной ориентации вертикальной оси, вокруг которой свободно вращается гирорама или соответственно внешний кожух гироскопа с сильной коррекцией, при перемещении гироскопа по земной поверхности [5, 6].

Отметим, что рассматриваемый эффект тесно связан с так называемым параллельным переносом вектора в римановой геометрии [5, 6].

4. Наблюдаемый поворот быстро движущегося по круговой траектории объекта и томасовская прецессия

Более 50 лет после создания специальной теории относительности было принято считать, что при наблюдении быстро движущегося объекта он представляется неподвижному наблюдателю сжатым в направлении движения в γ раз. Однако в 1959 г. Пенроуз [10] и Террел [11] обратили внимание на то, что световые кванты, пришедшие одновременно к наблюдателю, были испущены различными точками объекта в различное время: точки, расположенные дальше от наблюдателя, испустили кванты раньше, чем более близкие точки. По этой причине возникает эффект компенсации лоренцева сокращения, и когда размеры объекта много меньше расстояния до него, объект (а точнее говоря, его изображение на сетчатке глаза наблюдателя или на пленке фотоаппарата) выглядит не искаженным, а только повернутым на некоторый угол. В настоящее время данному вопросу посвящено большое число работ, наиболее подробно он рассмотрен в [12–14].

Нас интересует вопрос об изменении регистрируемого неподвижным наблюдателем угла ориентации объекта, который движется по круговой траектории.

Этот угол может быть задан формой объекта, например, одной из его граней, если он имеет форму многогранника, или связанной с объектом осью. Напомним еще раз, что видимый эффект поворота изображения релятивистски движущегося тела, наблюдаемый в неподвижной системе отсчета, не означает, что тело меняет свою ориентацию в пространстве [13, 14].

В простом случае, когда объект движется прямолинейно со скоростью v , выражение, связывающее угол θ' , задающий некоторое направление на объекте в соответствующей объекту системе отсчета, и угол θ , под которым это направление наблюдается в лабораторной (неподвижной) системе отсчета, определяется известными формулами, определяющими релятивистскую абберацию, и имеет вид [14, 15]

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta'}{1 + \cos \theta' \cdot v/c}. \quad (4)$$

Неподвижный наблюдатель видит объект повернутым на угол абберации $\Delta\theta = \theta - \theta'$. Пусть объект движется прямолинейно в плоскости, которая ортогональна прямой, соединяющей объект и наблюдателя, а ось, задающая направление, также лежит в данной плоскости, т.е. $\theta' = 90^\circ$. Исходя из (4) имеем

$$\Delta\theta = \theta - 90^\circ, \quad \cos(\Delta\theta) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда объект движется по круговой траектории в рассматриваемой плоскости, причем по-прежнему $\theta' = 90^\circ$. При этом видимое неподвижным наблюдателем направление оси будет меняться, изображение объекта будет вращаться и за один оборот объекта ось опишет конус с углом при вершине $2\Delta\theta$ (рис. 3). Величина телесного угла, заключенного внутри конуса, численно равна площади, ограниченной на сфере единичного радиуса образующей конуса, вершина которого расположена в центре сферы [46]. Отсюда нетрудно получить выражение, связывающее величину телесного угла с углом при вершине конуса:

$$\begin{aligned} \chi &= 4\pi \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) = 2\pi(1 - \cos(\Delta\theta)) = \\ &= 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

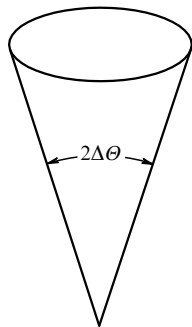


Рис. 3. Конус, который описывает в неподвижной системе отсчета изображение оси, связанной с релятивистски движущимся по круговой траектории твердым телом ($\Delta\theta$ — угол релятивистской абберации).

Данное явление можно проиллюстрировать на примере видимых неподвижным наблюдателем изображений движущейся по круговой траектории игральной кости (куба), которая в процессе движения сохраняет свою ориентацию в пространстве (рис. 4, 5). Игральная кость вращается в плоскости, которая ортогональна линии, соединяющей центр окружности с точкой, в которой находится наблюдатель (зрочок глаза наблюдателя), причем расстояние от наблюдателя до плоскости много больше, чем диаметр окружности. Когда игральная кость находится в верхней точке окружности (положение 1 на рис. 4, 5), она ориентирована таким образом, что повернута к наблюдателю той гранью, на которой изображена "шестерка", впереди по движению находится "четверка", позади "тройка", вверху "пятерка", внизу "двойка", а на стороне, противоположной расположению наблюдателя, — "единица". Направление движения игральной кости в каждой точке отмечено стрелкой. Если скорость игральной кости $v \ll c$, неподвижный наблюдатель во всех положениях игральной кости видит сторону с изображением "шестерки", причем ориентация изображения в процессе движения не меняется (см. рис. 4). В

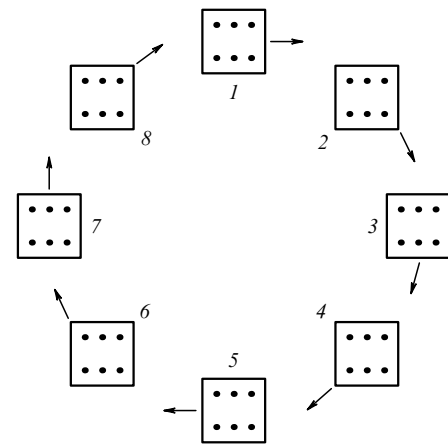


Рис. 4. Изображение игральной кости, видимое в неподвижной системе отсчета, для случая движения кости по круговой траектории со скоростью $v \ll c$.

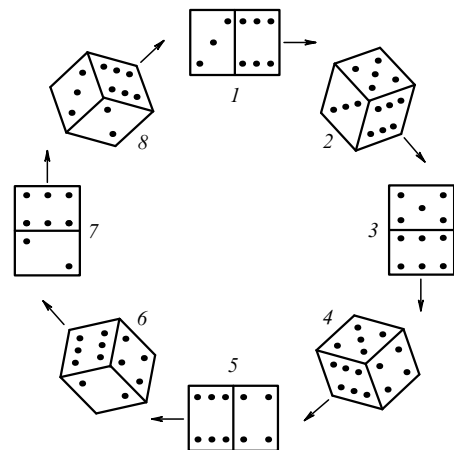


Рис. 5. Изображение игральной кости, видимое в неподвижной системе отсчета, для случая движения кости по круговой траектории с релятивистской скоростью $v = 0,865 c$ ($\gamma = 2$).

случае $v \sim c$ в различных точках окружности наблюдатель видит игральную кость повернутой к нему под разными углами (см. рис. 5). Таким образом, наблюдатель видит, что за один оборот игровой кости связанная с ней ось (например, ребро куба) описала некоторый телесный угол. Приведенное на рис. 5 изображение соответствует случаю $\gamma = 2$.

Сравнивая выражения (3) и (5), получим $\alpha \equiv \chi$, т.е. угол поворота тела вследствие томасовской прецессии равен углу Ишлинского, который приобретает телом при движении по круговой траектории в случае, если реальное изменение угла его ориентации равно изменению наблюдаемого в лабораторной системе отсчета угла поворота релятивистски движущегося по криволинейной траектории тела. Таким образом, томасовскую прецессию можно интерпретировать как следствие формального применения теоремы Ишлинского к телесному углу, соответствующему изменению наблюдаемого поворота изображения твердого тела в процессе его движения по криволинейной траектории относительно неподвижного наблюдателя.

Подчеркнем еще раз, что в данном случае речь идет не о реальном телесном угле, который описала связанная с телом ось, а о видимом (наблюдаемом) телесном угле, соответствующем изменению поворота изображения твердого тела в процессе его движения по криволинейной траектории.

Отметим здесь, что томасовская прецессия возникает не потому, что в лабораторной системе отсчета тело (выделенная в теле ось) наблюдается повернутым на некоторый угол, а потому, что этот угол меняется в процессе движения тела по криволинейной траектории, что и приводит к тому, что ось описывает телесный угол.

5. Физический смысл томасовской прецессии и угла Ишлинского

Рассмотрим физические причины, приводящие к обсуждаемым в данной работе эффектам. Томасовская прецессия объясняется относительностью понятия криволинейного поступательного движения системы материальных точек. Если в одной инерциальной системе отсчета K скорости всех точек тела в момент времени t одинаковы, то в другой инерциальной системе отсчета K' в момент времени t' при ускоренном движении тела они будут различными [4].

Эффект, описываемый теоремой Ишлинского, связан с тем, что кинематика твердого тела как системы материальных точек в классической механике не сводится к кинематике материальной точки. Кинематические уравнения твердого тела, записанные в любой форме, имеют существенно более сложную структуру, чем кинематические уравнения материальной точки. Если проекция скорости точки на какую-либо ось равна нулю, то и изменение соответствующей координаты отсутствует. Не так обстоит дело с твердым телом. Если угловая скорость тела в проекции на какую-либо ось равна нулю, то тело относительно этой оси неподвижным не остается [9]. Итак, оба рассматриваемых эффекта — как в специальной теории относительности, так и в классической механике — вызваны спецификой криволинейного движения твердого тела как системы материальных точек.

Здесь можно привести аналогию между двумя рассматриваемыми эффектами. Это релятивистский (именуемый также квадратичным) и классический эффекты Доплера. Эти эффекты вызваны различными причинами: релятивистским замедлением времени на движущемся объекте, излучающем волну (например, электромагнитную), относительно неподвижного наблюдателя и соответственно удалением объекта с некоторой скоростью от неподвижного наблюдателя. Однако следствия в обоих случаях одинаковы — наблюдатель регистрирует уменьшение частоты излучения. Отметим, что при условии $v \ll c$ томасовская прецессия так же, как и релятивистский эффект Доплера, квадратично зависит от скорости (см. выражение (2)).

Отметим, что и томасовская прецессия, и угол Ишлинского являются проявлением геометрической (топологической) фазы (угла) в релятивистской и соответственно классической механике. Так, в работах [47, 48] было показано, что влияние томасовской прецессии на спин-орбитальное взаимодействие является проявлением фазы Берри в квантовой механике. Следует отметить также работу Зоммерфельда [49] (см. также [50]), в которой вывод выражения для томасовской прецессии проводится с помощью построений на сфере с мнимым радиусом. Такие построения характерны для вычислений геометрической фазы [37]. Как было отмечено выше, угол Ишлинского также является проявлением геометрической фазы, в данном случае — в классической механике [37, 38].

6. Заключение

Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом.

1. Существует физическая аналогия между двумя различными кинематическими эффектами — томасовской прецессией в специальной теории относительности и эффектом, описываемым теоремой Ишлинского, в классической механике.

2. Причины изменения пространственной ориентации твердого тела для обоих эффектов различны: для первого — это изменение видимого в лабораторной системе отсчета вращения (изменения поворота) твердого тела (оси, связанной с телом) при его криволинейном движении, для второго — следствие реального поворота тела (оси, связанной с телом) при его коническом движении. Однако следствия действия как первого, так и второго эффекта на твердое тело одинаковы: после того как связанная с телом ось вернется в исходное положение, тело оказывается повернутым на угол, численно равный телесному углу, который описала ось.

3. Оба рассматриваемых эффекта как в специальной теории относительности, так и в классической механике вызваны спецификой криволинейного движения твердого тела, системы материальных точек.

В заключение автор выражает благодарность Я.И. Ханину за внимание к работе, Вл.В. Кочаровскому и Г.В. Пермитину за ряд полезных замечаний.

Работа частично поддержана грантом РФФИ (96-15-96742).

Список литературы

1. Thomas L H *Nature* (London) **117** 514 (1926)
2. Thomas L H *Philos. Mag.* **3** 1 (1927)

3. Мёллер К *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975) [Møller C *The Theory of Relativity* (Oxford: Clarendon Press, 1972)]
4. Малыкин Г Б, Пермитин Г В, в *Физическая энциклопедия* Т. 5 (М.: Рос. энциклопедия, 1998) с. 108
5. Ишлинский А Ю *Механика специальных гироскопических систем* (Киев: Изд. АН УССР, 1952)
6. Ишлинский А Ю *Механика гироскопических систем* (М. Изд. АН СССР, 1963)
7. Жбанов Ю К, Журавлев В Ф *Изв. АН СССР. Механика твердого тела* (1) 9 (1978)
8. Журавлев В Ф *ПММ* **60** 323 (1996)
9. Журавлев В Ф *Основы теоретической механики* (М.: Наука, 1997)
10. Penrose L *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **55** (1) 137 (1959)
11. Terrell J *Phys. Rev.* **116** 1041 (1959)
12. Вайскопф В Ф *Физика в двадцатом столетии* (М.: Атомиздат, 1977) [Weisskopf V F *Physics in Twentieth Century* (Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1972)]
13. Бологовский Б М, в сб. *Эйнштейновский сборник 1980–1982* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1985) с. 142
14. Бологовский Б М, в сб. *Эйнштейновский сборник 1986–1990* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1990) с. 279
15. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
16. Шифф Л *Квантовая механика* (М.: ИЛ, 1959) [Schiff L I *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1955)]
17. Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965) [Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962)]
18. Anandan J *Phys. Rev. D* **24** 338 (1981)
19. Mashhoon В *Phys. Rev. Lett.* **61** 2639 (1988)
20. Малыкин Г Б *УФН* **167** 337 (1997)
21. Малыкин Г Б *Оптика и спектроскопия* **76** 540 (1994)
22. Малыкин Г Б *Изв. вузов. Радиофизика* **41** 767 (1998)
23. Field J H, Picasso E, Combley F *Tests of fundamental physical theories from measurements of free charged leptons* (Geneva: CERN, 1978)
24. Филд Дж, Пикассо Э, Комбли Ф *УФН* **127** 553 (1979)
25. Schiff L I *Phys. Rev. Lett.* **4** 215 (1960)
26. Schiff L I *Nuovo Cimento* **17** 124 (1960)
27. Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 439 [Einstein A *Sitzungsber. preuss. Acad. Wiss.* **47** 831 (1915)]
28. Шапиро И, в кн. *Астрофизика, кванты и теория относительности* (М.: Мир, 1982) с. 215 [Shapiro I, in *Astrofizika e cosmologia gravitazione quanti e relativita* (Firenze: Giunti Barbera, 1979)]
29. Lense J, Thirring H *Phys. Z.* **19** 156 (1918)
30. Thirring H *Phys. Z.* **22** 29 (1921)
31. Lange В *Phys. Rev. Lett.* **74** 1904 (1995)
32. Leverrier U J *Ann. Observ. Imper.* (Paris) **5** 19 (1859)
33. Neganov B S *Hadr. J.* **14** 377 (1991)
34. Perelstein E A, Perelstein M E *Found. Phys. Lett.* **8** 449 (1995)
35. Goodman L E, Robinson A R J. *Appl. Mech.* **25** 210 (1958)
36. Гудман Л Е, Робинсон А Р, в сб. *Механика* N 5 (57) (М.: ИЛ, 1959) с. 133
37. Малыкин Г Б *Изв. вузов. Радиофизика* **40** 265 (1997)
38. Малыкин Г Б *Оптика и спектроскопия* **81** 474 (1996)
39. Berry M R. *Soc. London Ser. A* **392** 45 (1984)
40. Виницкий С И и др. *УФН* **160** (6) 1 (1990)
41. Berry M *Phys. Today* **43** (12) 34 (1990)
42. Anandan J *Nature* (London) **360** 307 (1992)
43. Клышко Д Н *УФН* **163** (11) 1 (1993)
44. Бондарчук В И, Давтян Л С, Корнеев Д А *УФН* **166** 185 (1966)
45. Неймарк Ю И, Фуфаев Н А *Динамика неголономных систем* (М.: Наука, 1967)
46. Выгодский М Я *Справочник по элементарной математике* (М.: Наука, 1982)
47. Mathur H *Phys. Rev. Lett.* **67** 3325 (1991)
48. Shankar R, Mathur H *Phys. Rev. Lett.* **73** 1565 (1994)
49. Зоммерфельд А *Строение атома и спектры* Т. 1 (М.: Гостехиздат, 1956) с. 579
50. Беллони Л, Рейна Р, в сб. *Эйнштейновский сборник 1984–1985* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1988) с. 201

The relation of the Thomas precession to Ishlinskii's theorem as applied to the rotating image of a relativistically moving body

G.B. Malykin

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences
ul. Ul'yanova 46, 603600 Nizhniĭ Novgorod, Russian Federation
E-mail: malykin@appl.ski-nnov.ru*

It is shown that, for a solid body following a relativistic curvilinear path (Thomson precession), its rotation angle is numerically equal to the rest-frame-observed solid angle through which the body-fixed axis turns as a consequence of the rotation change the body image undergoes due to Lorentz length contraction and the retardation of the light emitted by various portion of the body. In classical mechanics the same relation connects the body rotation angle to the actual solid angle the body-fixed axis subtends as the body performs a conical motion — which is a consequence of Ishlinskii's theorem.

PACS number: **03.30.+p**

Bibliography — 50 references

Received 8 October 1998, revised 10 February 1999