

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров

В.А. Саранин

Подробно исследованы отклонения от закона Кулона, характерные для электростатического взаимодействия проводящих шаров. Рассчитаны силы, действующие на шары, в зависимости от расстояния между ними. Установлено, что в общем случае произвольных одноименно заряженных шаров на близких расстояниях между ними отталкивание сменяется притяжением. Исключение составляет случай, когда заряды шаров относятся как квадраты их радиусов: в этом случае шары всегда отталкиваются. В случае одинаковых шаров, имеющих одинаковые по модулю заряды, найдены асимптотические соотношения для энергий и сил на малых расстояниях. Большинство полученных результатов обладает свойством автономности.

PACS number: 41.20.Cv

Содержание

1. Введение (453).
2. Постановка задачи и метод электрических изображений (453).
3. Взаимодействие точечного заряда и заряженного проводящего шара (454).
4. Взаимодействие произвольных заряженных проводящих шаров (454).
5. Взаимодействие одинаковых заряженных проводящих шаров (456).
6. Взаимодействие шара с проводящей плоскостью (457).
7. Асимптотические соотношения для сил (457).
8. Заключение (458).

Список литературы (458).

1. Введение

Задача о взаимодействии двух проводящих заряженных шаров является классической и рассмотрена в ряде монографий и учебно-методических пособий [1–6]. Однако представление полученных в них результатов носит в большей степени формальный характер (например, в виде бесконечных рядов), что не позволяет получить ответы на простые, но важные с научно-методической точки зрения вопросы. Известно, что такое взаимодействие на близких расстояниях между шарами не подчиняется закону Кулона. Возникают, например, вопросы: каков характер отклонений от

закона Кулона? какой величины ошибку дает кулоновское приближение (т.е. замена шаров эквивалентными точечными зарядами, расположенными в центрах шаров) при расчете силы и энергии взаимодействия? Эти вопросы не обсуждаются в научно-методической литературе несмотря на то, что задачи о взаимодействии заряженных шариков можно встретить практически в любом школьном или вузовском задачнике по физике. Вероятно, это обстоятельство связано с тем, что громоздкость окончательных выражений для энергии и силы взаимодействия не позволяет аналитически получить однозначные ответы на подобные вопросы. Однако некоторые специальные приемы и использование вычислительной техники делают это возможным.

При изложении материала основное внимание будет уделяться получению и обсуждению конечных результатов, более подробно с промежуточными выкладками можно ознакомиться, например, в [1].

2. Постановка задачи и метод электрических изображений

Рассмотрим два проводящих шара с радиусами R_1 и R_2 , находящихся на расстоянии $l \geq R_1 + R_2$ между центрами и заряженных до зарядов q_1 и q_2 (рис. 1). Интересующие нас потенциальную энергию взаимодействия шаров и силу, действующую на каждый из них, можно записать так:

$$W = \frac{1}{2} (q_1^2 s_{11} + 2s_{12} q_1 q_2 + q_2^2 s_{22}),$$

$$F_l = - \frac{\partial W}{\partial l}. \quad (1)$$

Здесь s_{11} , s_{12} , s_{22} — потенциальные коэффициенты. Проще найти не потенциальные, а емкостные коэффициенты, поэтому удобнее перейти в (1) к емкостным коэффициентам с помощью соотношений

В.А. Саранин. Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко, 427600 Глазов, ул. Первомайская 25, Российская Федерация
Тел. (341-41) 4-77-82
E-mail: saranin@ggpi.glazov.udm.net

Статья поступила 28 октября 1998 г.

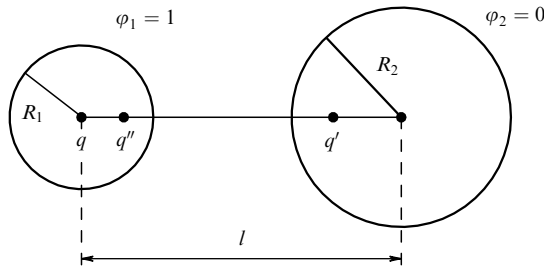


Рис. 1. К определению емкостных коэффициентов двух проводящих шаров.

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\ s_{22} &= s_{11} \frac{c_{11}}{c_{22}}, \\ s_{12} &= -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя метод электрических изображений, кратко изложим процедуру нахождения выражений для емкостных коэффициентов. По определению емкостных коэффициентов заряды на шарах можно представить в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}\varphi_1 + c_{21}\varphi_2, \\ q_2 &= c_{12}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2. \end{aligned}$$

Здесь по смыслу c_{11} есть заряд первого шара, а c_{12} — второго, при условии, что потенциал первого шара равен единице и потенциал второго шара поддерживается равным нулю. Мысленно удалив пока заряд q_1 , поместим в центр первого шара заряд $q = 4\pi\epsilon_0 R_1$. Тогда его потенциал будет равен единице, но при этом на втором шаре возникнет изображение, т.е. заряд q' . Можно показать, что изображение возникнет на расстоянии R_2^2/l от центра второго шара, а если его величина будет равна $q' = -4\pi\epsilon_0 R_1 R_2/l$, то потенциал второго шара останется равным нулю. Однако при этом q' будет являться источником для возникновения изображения q'' на первом шаре. Подбором величины q'' можно также добиться равенства единице потенциала первого шара. Таким образом, видно, что на каждом шаре возникает бесконечное число изображений зарядов, подбором величин которых можно добиться равенства единице и нулю потенциалов первого и второго шаров соответственно. Полные заряды на каждом из шаров при этом будут вычисляться так:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4\pi\epsilon_0 R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n)}, \\ c_{12} &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n-1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициент c_{22} легко получить из выражения для c_{11} , используя симметрию задачи.

3. Взаимодействие точечного заряда и заряженного проводящего шара

Наиболее простой предельный случай — это взаимодействие проводящего заряженного шара радиуса R и точечного заряда q_2 . В этом случае в шаре возникает всего одно изображение, и поэтому задача допускает

аналитическое решение в конечном виде [3, 7]:

$$\begin{aligned} W &= \frac{kq_1q_2}{l} - \frac{kq_2^2R^3}{2l^2(l^2 - R^2)}, \\ F_l &= \frac{kq_1q_2}{l^2} - \frac{kq_2^2R^3(2l^2 - R^2)}{l^3(l^2 - R^2)^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Запишем эти выражения в безразмерной форме, выбрав в качестве единицы длины R , единицы энергии — $kq_1^2/(2R)$, единицы силы — $kq_1^2/(2R^2)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} W &= \alpha \left[\frac{2}{x} - \frac{\alpha}{x^2(x^2 - 1)} \right], \\ F_x &= 2\alpha \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\alpha(2x^2 - 1)}{x^3(x^2 - 1)^2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $x = l/R$, $\alpha = q_2/q_1$. Самым интересным эффектом этого взаимодействия является смена знака у силы при $\alpha > 0$, т.е. в случае, когда заряды одноименные: сила отталкивания, действующая на каждый из них, может смениться силой притяжения. Происходит это на расстояниях x_0 , удовлетворяющих уравнению

$$\alpha = \frac{x_0(x_0^2 - 1)^2}{2x_0^2 - 1}. \quad (6)$$

Линия нулевой силы $x_0(\alpha)$ показана на рис. 2. Область параметров ниже кривой соответствует притяжению шаров, выше — отталкиванию. Видно, что эффект притяжения возникает при точечном заряде относительно большой величины или на относительно малых расстояниях заряда от шара. Нетрудно проверить, что на линии равновесия потенциальная энергия взаимодействия достигает максимума, так что в соответствии с теоремой Ирншоу это равновесие неустойчиво.

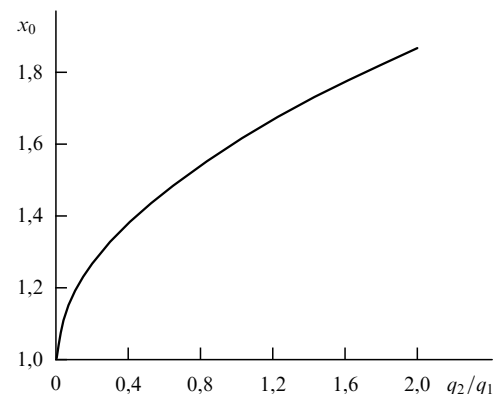


Рис. 2. Линия нулевой силы при взаимодействии точечного заряда и одноименно заряженного шара. Ниже кривой область действия силы притяжения, выше — отталкивания.

4. Взаимодействие произвольных заряженных проводящих шаров

Вычисления емкостных коэффициентов по схеме (3), которые можно найти, например, в [1], приводят к

следующим выражениям:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4\pi\epsilon_0 R_1 \gamma \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma \sinh(n\beta) + \sinh[(n-1)\beta] \right\}^{-1}, \\ c_{12} &= -4\pi\epsilon_0 R_1 \gamma \frac{\sinh \beta}{(1+\gamma)x} \sum_{n=1}^{\infty} [\sinh(n\beta)]^{-1}, \\ c_{22} &= 4\pi\epsilon_0 R_1 \gamma \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sinh(n\beta) + \gamma \sinh[(n-1)\beta] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\gamma = R_2/R_1$, за единицу длины выбрана величина $R_1 + R_2$, так что x есть безразмерное расстояние между центрами $x = l/(R_1 + R_2)$. Параметр β связан с расстоянием между центрами шаров соотношением

$$\cosh \beta = \frac{x^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma} \equiv y. \quad (8)$$

В качестве единицы измерения энергии выберем величину $k|q_1 q_2|/(R_1 + R_2)$. Тогда для безразмерной энергии взаимодействия шаров получим соотношение

$$W = \frac{1+\gamma}{2\alpha} \frac{\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}. \quad (9)$$

Здесь безразмерные c_{11} , c_{12} , c_{22} выражаются формулами (7) без множителя $4\pi\epsilon_0 R_1$.

Выражение для силы получается дифференцированием (9) по расстоянию между центрами шаров x . В единицах $k|q_1 q_2|/(R_1 + R_2)^2$ оно может быть представлено в форме

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{x(1+\gamma)^3}{2\alpha\gamma \sinh \beta} f(c_{ik}, c'_{ik}), \quad i, k = 1, 2. \quad (10)$$

Здесь через f обозначена производная по β от второго сомножителя в (9). Производные от емкостных коэффициентов по β , c'_{ik} , входящие в f , также нетрудно получить, и, ввиду их громоздкости они здесь не приводятся так же, как и f .

Как уже говорилось, аналитическое решение задачи взаимодействия двух шаров в общем случае весьма затруднительно, поэтому воспользуемся численным расчетом. Для этого все члены всех рядов выразим через переменную $z = \exp(-\beta)$. Тогда c_{11} для программирования и численного расчета удобно представить в виде

$$c_{11} = 2\gamma \sqrt{y^2 - 1} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1 - z^{2n})[(1 + \gamma y) - \gamma \sqrt{y^2 - 1}(1 + z^{2n})/(1 - z^{2n})]}.$$

Аналогично представляются и другие коэффициенты. Определение y дано в (8). С увеличением n величины z^n и z^{2n} убывают и, когда значение z^n достигает машинного нуля, расчет суммы прекращается.

Наиболее подробно были рассмотрены два случая взаимодействия разных по размеру заряженных проводящих шаров, часто встречающиеся в теории и на практике: (а) потенциалы шаров относительно бесконечности равны; (б) заряды шаров относятся как квадраты их радиусов.

а) В случае шаров с равными потенциалами относительно бесконечности $q_2/q_1 = R_2/R_1$, т.е. $\alpha = \gamma$. Это может иметь место, если зарядка шаров до их сближения происходила от одного и того же источника напряжения, либо потенциалы сравнялись за счет коронного тока.

При $\alpha = \gamma \neq 1$ сила на близких расстояниях между шарами является силой притяжения и неограниченно возрастает при сближении шаров. При удалении шаров друг от друга сила меняет знак, становясь силой отталкивания, затем достигает максимума и с дальнейшим увеличением расстояния между шарами начинает убывать по закону, приближающемуся к кулоновскому. Типичный график зависимости силы от безразмерного расстояния между центрами шаров (в единицах $(R_1 + R_2)$) для $\alpha = \gamma = 4,3$ показан на рис. 3 кривой 3. Кривая 4 соответствует точечному заряду и шару при $\alpha = 1$, а кривая 1 — кулоновскому закону. Координаты нулевой силы и координаты максимальной силы изменяются в зависимости от величины α (или γ) как $1 \leq x_0 \leq 1,08$ (нулевая сила) и $x_0 < x_m \leq 1,27$ (максимум силы).

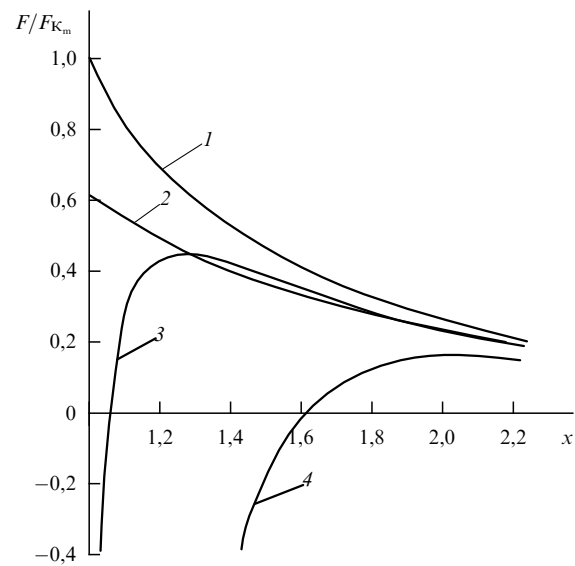


Рис. 3. Характерные графики зависимости силы взаимодействия одноименно заряженных шаров от расстояния между ними при различных соотношениях их радиусов и зарядов: 1 — кулоновское приближение; 2 — сила в случае одинаковых шаров; 3 — сила в случае шаров с равными потенциалами; 4 — сила взаимодействия точечного заряда и шара с равным зарядом. Все величины нормированы на максимальную силу, рассчитанную в кулоновском приближении, $F_{к.м.}$.

Качественно, с физической точки зрения, полученный результат можно объяснить так. Точечный заряд притягивается к незаряженному проводящему шару в результате того, что наведенные за счет электростатической индукции заряды, одноименные с точечным, расположены на шаре дальше от него, а разноименные — ближе. Если теперь на шар поместить небольшой заряд, одноименный с точечным, то эффект притяжения может сохраниться, в противном случае достаточно приблизить точечный заряд к шару. Аналогично дело обстоит и в случае проводящих шаров различных радиусов;

б) пусть теперь отношение зарядов шаров равно квадрату отношения их радиусов, т.е. $\alpha = \gamma^2$. Такая ситуация может реализоваться на практике, если заряды шаров возникают в результате их индукционной зарядки во внешнем электрическом поле. Как известно [8], в этом случае предельный заряд на шаре радиуса R равен

$$q = c_a E_0 R^2,$$

где c_a — постоянный множитель, зависящий от конкретного механизма зарядки, E_0 — напряженность внешнего поля. В этом случае неожиданно оказывается, что сила ведет себя инвариантно: она для всех расстояний между шарами является силой отталкивания. При любых отношениях радиусов γ график ее зависимости от расстояния между центрами шаров расположен между кривой 1 и кривой 2, соответствующей одинаковым шарам $\gamma = \alpha = 1$ (см. рис. 3).

5. Взаимодействие одинаковых заряженных проводящих шаров

Наиболее часто в учебных и прикладных задачах речь идет именно о таком взаимодействии, поэтому рассмотрим его более подробно.

Пусть имеются два одинаковых проводящих шара с радиусом R , заряженных до заряда q каждый и находящихся на расстоянии l между центрами. В этом случае [1]

$$c_{11} = c_{22} = 4\pi\epsilon_0 R \sinh\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sinh[(2n-1)\beta] \right\}^{-1},$$

$$c_{12} = -4\pi\epsilon_0 R \sinh\beta \sum_{n=1}^{\infty} [\sinh(2n\beta)]^{-1},$$

а параметр β определен следующим образом: $\cosh\beta = l/(2R) \equiv x$. Выберем в качестве единицы длины диаметр шаров $2R$, а в качестве единицы энергии — величину $W_{\max} = kq^2/(2R)$. Тогда в безразмерной форме выражение для энергии запишется так:

$$W = \frac{2}{\sinh\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{z_n} / \sinh(n\beta)}, \quad z_n = n + 1. \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, в случае одинаковых шаров, имеющих равные по модулю заряды, задача об их взаимодействии становится автомодельной.

Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому калибруем полученное выражение так, чтобы при $x \rightarrow \infty$ энергия взаимодействия шаров обращалась в нуль. При $\beta \gg 1$ $\sinh\beta \approx \exp\beta$, и знаменатель выражения (11) можно представить в виде

$$z_1 \approx 1 + \exp(-\beta).$$

Таким образом, при $\beta \gg 1$ имеем $z_1 \approx 1$, и следовательно, калиброванная указанным образом энергия взаимодействия шаров равна

$$W = 2 \left[\frac{1}{\sinh\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{z_n} / \sinh(n\beta)} - 1 \right]. \quad (12)$$

Очевидно, наибольший интерес представляет значение энергии в пределе $x \rightarrow 1$ ($\beta \rightarrow 0$), т.е. когда шары соприкасаются, так как именно в этом случае имеется наибольшее отличие результатов при замене шаров точечными зарядами в их центрах. Раскладывая знаменатель в ряд Тейлора по β , получим сумму знакопеременного гармонического ряда, которая, как известно, равна $\ln 2$. Следовательно, наибольшая энергия взаимодействия заряженных шаров равна

$$W = 2 \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right) \approx 0,885.$$

В силу автомодельности задачи полученный результат универсален и означает, что при расчете энергии взаимо-

действия одноименно заряженных шаров замена их точечными зарядами, расположенными в центрах, приводит к ошибке, не превышающей $\sim 12\%$. На рисунке 4 показано отношение реальной энергии взаимодействия шаров к кулоновской в зависимости от безразмерного расстояния между центрами (кривая 1), рассчитанное на компьютере как выражение (12), умноженное на x .

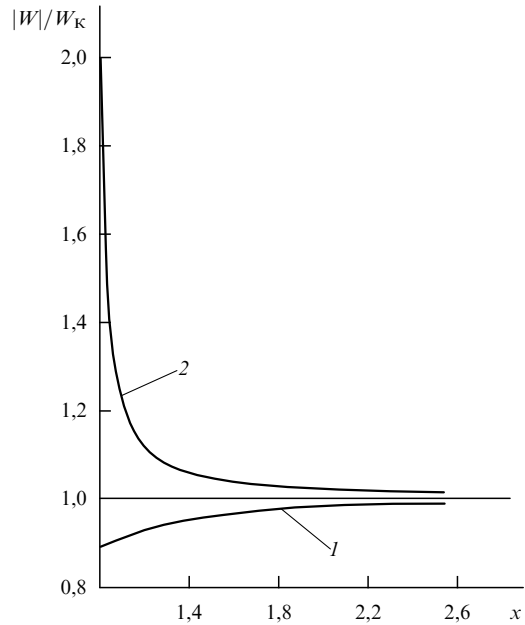


Рис. 4. Зависимость отношения реальной энергии взаимодействия одинаковых заряженных шаров к энергии, вычисленной в кулоновском приближении, от расстояния между центрами шаров: 1 — одноименно заряженные шары; 2 — заряды на шарах разных знаков.

Теперь найдем силу, действующую на каждый шар. Имеем

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial c_{11}/\partial \beta + \partial c_{12}/\partial \beta}{(c_{11} + c_{12})^2}.$$

Опуская выкладки, приведем окончательный результат, записанный в единицах силы $F_m = kq^2/(4R^2)$:

$$F_x = 2 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{z_n} [\coth\beta - n \coth(n\beta)] / \sinh(n\beta)}{[\sinh\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{z_n} / \sinh(n\beta)]^2}. \quad (13)$$

Чтобы найти отношение реальной силы к соответствующей кулоновской, получающейся при помещении зарядов в центры шаров, умножим выражение (13) на x^2 . Полученное отношение табулировалось на компьютере. Результат представлен на рис. 5, кривая 1. При сближении шаров до $x = 1,001$ значение реальной силы, действующей на каждый из шаров, стремится к $\approx 0,6157$ силы Кулона. Первые три значащие цифры сохраняются и при $x = 1,00001$, но для получения надежного результата в данном случае в суммах рядов необходимо сохранять слагаемые вплоть до 10^{-60} . Надежность полученного результата подтверждает и тот факт, что при совместном расчете силы и энергии на компьютере для энергии получается значение $\approx 0,8857$, которое с точностью до трех значащих цифр совпадает с найденным аналитически.

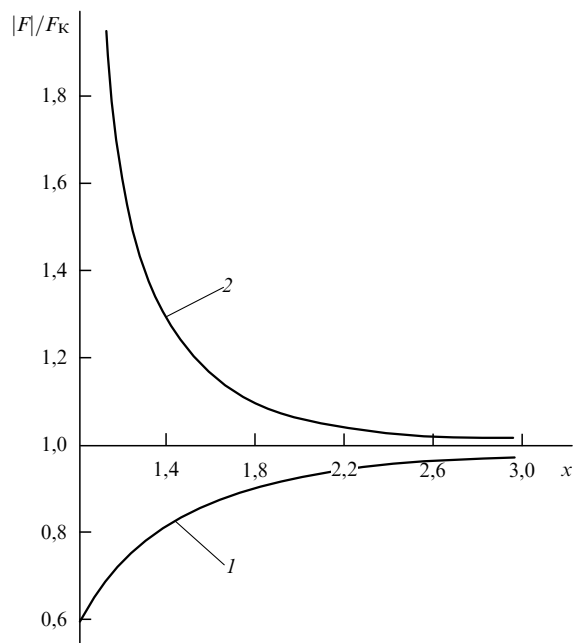


Рис. 5. Зависимость отношения реальной силы взаимодействия одинаковых заряженных шаров к силе, вычисленной в кулоновском приближении, от расстояния между центрами шаров: 1 — одноименно заряженные шары; 2 — заряды на шарах разных знаков.

Таким образом, при замене соприкасающихся заряженных шаров точечными зарядами, расположенными в их центрах, при расчете силы, действующей на шары, совершается ошибка примерно в 39 %, независимо от радиуса шаров и величины зарядов на них. Однако погрешность кулоновского приближения быстро уменьшается с ростом расстояния между центрами и на расстоянии, равном удвоенному диаметру шаров, становится уже менее 10 %.

Перейдем к рассмотрению взаимодействия разноименно заряженных одинаковых проводящих шаров. В этом случае для безразмерной энергии взаимодействия шаров имеем также выражение (11), но при $\varkappa_n = 0$, так что соответствующий ряд становится знакопостоянным. При больших значениях β знаменатель выражения для W вновь стремится к 1, поэтому откалиброванная потенциальная энергия будет иметь вид (12) с $\varkappa_n = 0$. Поскольку теперь при малых β в знаменателе получается сумма гармонического ряда, который расходится, то при $\beta \ll 1$ ($x \rightarrow 1$) имеем $W = -2$, т.е. энергия взаимодействия двух разноименно заряженных шаров на очень близком расстоянии друг от друга в два раза больше энергии взаимодействия эквивалентных точечных зарядов, расположенных в центрах шаров.

Дифференцируя выражение для потенциальной энергии (12) по координате x , получим выражение для силы, действующей на каждый из шаров со стороны другого, в виде (13), но с $\varkappa_n = 0$. Результаты компьютерного расчета энергии и силы взаимодействия шаров в этом случае представлены на рис. 4 и 5, на которых цифрами 2 обозначены кривые, показывающие зависимости отношений реальных сил и энергий к получающимся в кулоновском приближении. Видно, что с уменьшением расстояния между шарами сила притяжения, действующая на каждый из них, стремится к бесконечности.

6. Взаимодействие шара с проводящей плоскостью

В этом случае для емкостных коэффициентов имеем [1]:

$$c_{11} = -c_{12} = 4\pi\epsilon_0 R \sinh\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\beta)}, \quad c_{22} \rightarrow \infty.$$

Здесь параметр β связан с расстоянием от центра шара до плоскости d соотношением $\cosh\beta = d/R \equiv x$. Тогда из (1) для энергии взаимодействия получим $W = q^2/(2c_{11})$, где q — заряд шара. Сила взаимодействия определяется так:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial d} = \frac{q^2}{2Rc_{11}^2 \sinh\beta} \frac{\partial c_{11}}{\partial \beta}.$$

Выполняя дифференцирование, нетрудно убедиться в том, что получающееся выражение для силы в данном случае в точности совпадает с выражением для силы взаимодействия одинаковых противоположно заряженных шаров (формула (13) при $\varkappa_n = 0$).

Таким образом, проводящая плоскость формирует электрическое изображение заряженного шара так, что сила взаимодействия между ней и шаром равна силе взаимодействия между двумя одинаковыми противоположно заряженными шарами, находящимися на расстоянии $2d$ между центрами.

7. Асимптотические соотношения для сил

Получим асимптотические выражения для сил при малых расстояниях между шарами, используя формулу суммирования Эйлера–Маклорена [8]. При этом удержим в ней лишь первые три слагаемых, дающих основной вклад. Имеем

$$\sum_{k=0}^m f(k) \approx \int_0^m f(t) dt + \frac{1}{2} [f(0) + f(m)]. \quad (14)$$

Здесь $f(t)$ совпадает с функцией, стоящей под знаком суммы соответствующего ряда. Вычисляя по формуле (14) числитель (13) при $\varkappa_n = 0$, $k = n - 1$, $m = \infty$, получим для него выражение, которое обозначим через I_1 :

$$I_1 = -\frac{1}{\beta^2} \left[(\beta \coth\beta - 1) \ln \left(\tanh \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\beta}{\sinh\beta} \right].$$

При $\beta \ll 1$ ($x = \cosh\beta$) имеем

$$I_1 \approx -\frac{1}{2(x-1)}.$$

Аналогичные вычисления знаменателя (13) при $\varkappa_n = 0$ приводят к результату

$$I_2 \approx \ln \frac{2}{\beta} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{x-1} + 1 \right).$$

Окончательная асимптотическая формула для силы, действующей на близко расположенные разноименно заряженные шары, имеет следующий вид:

$$F_x = -\frac{4}{(x-1) \{ \ln[2/(x-1)] + 1 \}^2}. \quad (15)$$

В соответствии с численным расчетом полученная формула показывает, что сила взаимодействия шаров бесконечно возрастает при их сближении ($x \rightarrow 1$). Расчет силы по формуле (15) при $x = 1,001$ дает $F_x \approx -54,1$ в единицах силы, рассчитанной в кулоновском приближении. Численный расчет с удержанием 1985 членов ряда дает $F_x \approx -52,0$. Отличие результатов составляет около

4 %, а с приближением x к 1 это отличие еще уменьшается.

Аналогичным образом найдем теперь асимптотику силы, действующей на близко расположенные одноименно заряженные одинаковые шары. Для этого в (13) положим $x_n = n + 1$ и к числителю применим формулу суммирования Эйлера–Маклорена (14) дважды: один раз к нечетному ряду, другой раз к четному. Опуская выкладки, приведем окончательное выражение для числителя (13):

$$I_3 = \frac{1}{2\beta^2} \left\{ (\beta \coth\beta - 1) \ln \left[\frac{\tanh\beta}{\tanh(\beta/2)} \right] - \left(\frac{\beta}{\sinh\beta} - \frac{2\beta}{\sinh 2\beta} \right) \right\} - \frac{1}{2} \frac{\coth\beta - 2 \coth 2\beta}{\sinh 2\beta}.$$

При $\beta \ll 1$ с точностью до квадратичных по β слагаемых имеем

$$I_3 \approx \frac{\ln 2}{6} = 0,116.$$

Численный расчет с удержанием 1985 слагаемых соответствующего ряда при $x = 1,001$ дает значение числителя $I_3 \approx 0,148$.

Так как в знаменателе выражения для силы (13) при $x_n = n + 1$ и $\beta \ll 1$ имеем вновь сумму знакопеременного гармонического ряда, то знаменатель асимптотически стремится к $\ln^2 2$, а сила в единицах кулоновского приближения к

$$F_x \approx \frac{1}{3 \ln 2} = 0,481.$$

Как отмечалось выше, численный расчет дает для соответствующей асимптотики значение $\approx 0,615$. Таким образом, отличие в данном случае составляет $\sim 20\%$.

8. Заключение

Как показывает проведенное исследование, несмотря на то, что эффект притяжения одноименно заряженных проводящих тел практически не обсуждается в учебно-методической литературе, так как считается, по-видимому, неким редким исключением, — это столь же распространенное явление, как и отталкивание. Другими словами, всегда можно указать условия, при которых два произвольных одноименно заряженных шара будут притягиваться. Обсуждаемый нетрадиционный эффект имеет глубокую аналогию в микрофизике: это ван-дер-ваальсово притяжение нейтральных сферически симметричных частиц [10].

В рамках рассмотренного электростатического взаимодействия макроскопических шаров исключение состав-

вил случай, когда заряды шаров относятся как квадраты их радиусов: в этом случае отталкивание реализуется на любых расстояниях между шарами. Но, по-видимому, и в этом случае возможно изменение результата на противоположный (т.е. шары будут притягиваться), если в рамках какой-либо другой постановки задачи ван-дер-ваальсово притяжение окажется конкурентноспособным кулоновскому отталкиванию.

Особый интерес представляет взаимодействие одинаковых одноименно заряженных шаров, которые также отталкиваются всегда. При этом на близких расстояниях между шарами кулоновское приближение, часто используемое при расчете силы, действующей на шары, дает ошибку до 39 %, независимо от размера шаров и величины зарядов на них. То же приближение, используемое при расчете энергии взаимодействия шаров, дает ошибку до 12 %.

В случае разноименно заряженных проводящих шаров при их сближении сила взаимодействия возрастает до бесконечности, тогда как энергия взаимодействия остается конечной, в момент касания в два раза превышающий рассчитанную в кулоновском приближении. Полученный результат тоже не зависит от размеров шаров и величины зарядов на них, т.е. является автономным.

Проводящая плоскость формирует электрическое зеркальное изображение заряженного шара, с которым и происходит взаимодействие реального шара.

Использование формулы суммирования Эйлера–Маклорена позволяет аналитически найти асимптотические соотношения для сил на малых расстояниях между одинаковыми шарами, удовлетворительно согласующиеся с высокоточными машинными расчетами.

Список литературы

1. Смайт В *Электростатика и электродинамика* (М.: ИЛ, 1954)
2. Бухгольц Г *Расчет электрических и магнитных полей* (М.: ИЛ, 1961)
3. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Сборник задач по электродинамике* (М.: Наука, 1970)
4. Говорков В А *Электрические и магнитные поля* (М.: Энергия, 1968)
5. Говорков В А, Купалян С Д *Теория электромагнитного поля в упряжностях и задачах* (М.: Высшая школа, 1970)
6. Миролюбов Н Н и др. *Методы расчета электростатических полей* (М.: Высшая школа, 1963)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
8. Верещагин И П и др. *Основы электродинамики дисперсных систем* (М.: Энергия, 1974)
9. Маделунг Э *Математический аппарат физики* (М.: Наука, 1968)
10. Бараш Ю С *Силы Ван-дер-Ваальса* (М.: Наука, 1988)

On the interaction of two electrically charged conducting balls

V.A. Saranin

V.G. Korolenko State Pedagogical Institute, ul. Pervomaiskaya 25, 427600 Glazov, Russian Federation
Tel. (341-41) 4-77-82. E-mail: saranin@ggpi.glazov.udm.net

Departures from Coulomb's law displayed by two electrostatically interacting conducting balls are examined in detail. By computing forces on the balls as a function of the ball separation, it is found that at short separations a switch from repulsion to attraction occurs in the general case of arbitrary, likely charged balls. The only exception is the case in which the charges of the balls are proportional to the squares of their radii: such balls always repels each other. For identical balls of equal absolute charge, asymptotic short-separation relations for energies and forces are found. For most of the results obtained the self-similarity property is shown to apply.

PACS number: 41.20.Cv

Bibliography — 10 references

Received 28 October 1998