

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Сверхизлучение и некоторые родственные явления

Л.И. Меньшиков

Рассмотрена современная теория сверхизлучения. Это явление возникает в результате установления корреляций атомов (фазировки) под воздействием общего электромагнитного поля. Фазировка определяется конкуренцией ангармоничности движения электронов и диполь-дипольного взаимодействия атомов. Последнее существенно влияет на характер сверхизлучения. Установлена общность природы излучения ансамбля атомов Дикке и коллективных волн в веществе, например, циклотронных волн в замагниченной плазме. Сверхизлучение проявляется в горячей плазме, удерживаемой в магнитном поле и, в частности, может объяснить эффект аномальной теплопроводности, наблюдаемый в токамаках.

PACS number: 42.50.-p, 42.50.Gy, 42.65.-k, 52.35.-g

Содержание

1. Введение (113).
 2. Природа сверхизлучения (114).
 3. Ансамбль атомов в электромагнитном поле. Квантовомеханическое описание (120).
 4. Модель Дикке (121).
 5. Нелинейный механизм фазировки атомов (126).
 6. Уравнения классической модели сверхизлучения. Дипольный механизм фазировки (128).
 7. Эффекты дипольного взаимодействия атомов в модели Дикке (130).
 8. Сверхизлучение в протяженных телах в марковском пределе (134).
8.1. Двухуровневые атомы. 8.2. Классические лоренцевы атомы (классическая модель сверхизлучения).
 9. Осцилляторный режим сверхизлучения (142).
 10. Сверхизлучение в плотной протяженной среде (143).
 11. Затухание коллективных волн (146).
 12. Приложение классической модели сверхизлучения к физике плазмы (147).
 13. Диффузионный режим переноса когерентного циклотронного излучения в неоднородной плазме (150).
 14. Заключение (150).
 15. Приложения (151).
I. Прямой расчет τ_{zf} . II. Доказательство формулы (7.30). III. Волны в замагниченной плазме с $T_{\perp} = 0$, $T_{\parallel} = T$. IV. Прохождение медленной циклотронной волны через границу плазмы.
- Список литературы (153).

Л.И. Меньшиков. Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, пл. Курчатова 1, Россия
Тел. (095) 196-76-76
Поморский государственный университет,
163006 Архангельск, просп. Ломоносова 4, Россия
Тел. (8182) 44-16-13

Статья поступила 17 июня 1998 г.

1. Введение

Сверхизлучение (СИ) — это кооперативное излучение, возникающее вследствие самопроизвольного зарождения и усиления корреляций первоначально независимых атомов (фазировки) [1–8]. Изучение механизмов фазировки началось, по существу, лишь через тридцать лет после пионерской работы Дикке [8], положившей начало исследованиям по СИ. Выяснилось, что в основе фазировки лежат два эффекта: электромагнитное взаимодействие атомов и нелинейность, свойственная движению электронов в атоме. Оба эффекта являются универсальными и фундаментальными, поэтому такие, казалось бы разнородные, явления, как кооперативное излучение микроскопического образца, генерация излучения в лазерах на циклотронном резонансе, гиротронах, коллективные волны, распространяющиеся в газе дипольных излучателей, и т.д. имеют общую природу. Такая достаточно общая точка зрения позволяет, в частности, заключить, что электронные циклотронные волны в замагниченной плазме могут быть основной причиной аномального переноса энергии, наблюдаемого в плазме токамаков.

В режиме СИ система из большого числа N возбужденных атомов излучает в течение времени τ_s много меньшего времени τ_0 излучения изолированного атома [1–8]. Другая особенность СИ, являющаяся следствием первой, состоит в том, что с ростом числа атомов интенсивность I излучения растет пропорционально N^2 . Эти особенности резко отличают СИ от спонтанного излучения системы возбужденных атомов (люминесценции), для которого $\tau \sim \tau_0$, $I \sim N$. Причина состоит в том, что в первом случае между атомами имеются фазовые корреляции, а во втором они отсутствуют. Сама по себе зависимость $I \sim N^2$ не удивительна и вовсе не является основным свойством и отличительной особенностью СИ. Основным свойством СИ, которое привлекает внимание исследователей и ставит это явление в ряд фундаментальных и которое родственно фазовым пере-

ходам, является фазировка. Именно фазировка отличает СИ от других кооперативных излучательных процессов, которые являются результатом изначально созданных за счет внешней накачки корреляций, — распада свободной поляризации, фотонного эха, оптической нутации и т.д. Коррелированный атомный ансамбль можно получить, например, воздействуя на систему коротким резонансным лазерным импульсом. Вследствие начальной корреляции далее возникнет кооперативное излучение с указанными выше свойствами ($I \sim N^2$, $\tau \ll \tau_0$), для чего не требуется фазировка. Можно указать очевидный пример такой ситуации, когда фазировка атомов исключена и, тем не менее, возникает кооперативное излучение. Пусть при $t = 0$ N диполей, сосредоточенных внутри области с характерным размером L , начинают осциллировать, а при $t = \tau$ осцилляции прекращаются. Электромагнитное поле в любой удаленной точке наблюдения равно сумме сигналов от $\Delta N - Nc\tau/L$ атомов, расположенных в слое толщиной $c\tau$. Если $c\tau \ll l$, $\Delta N \gg 1$, где $l = n^{-1/3}$ — характерное расстояние между атомами, то фазировка исключена, но излучение является кооперативным, поскольку $I \sim \Delta N^2 \sim N^2$.

Цель данного обзора — это анализ теории СИ. Особое внимание уделяется механизмам фазировки и изучению роли диполь-дипольного взаимодействия атомов. С единой точки зрения рассматриваются эффекты СИ в различных физических системах, включая малые тела (коллектив атомов Дикке) и протяженные (когерентные волны в замагниченной плазме).

2. Природа сверхизлучения

СИ — один из интереснейших эффектов в физике кооперативного электромагнитного излучения [1–7] — было предсказано Дикке [8]. Пусть в системе из $N \gg 1$ атомов (с номерами $a = 1, 2, \dots, N$) для каких-либо двух состояний $|2\rangle$ и $|1\rangle$ с уровнями энергии E_2 и E_1 создана инверсия населенностей, например, на основе трехуровневой схемы накачки (рис. 1) или в результате пропускания через систему короткого электромагнитного импульса (например, π -импульса, рис. 2). В результате

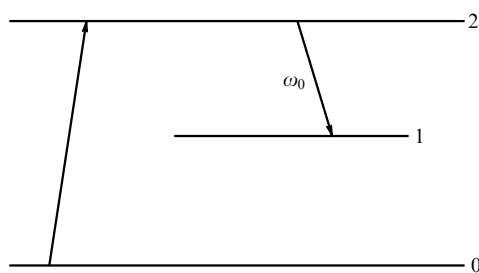


Рис. 1. Трехуровневая схема создания СИ на переходе $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$. Уровень 0 — основное состояние атомов. При накачке за характерное время τ_p атомы совершают переход $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$.

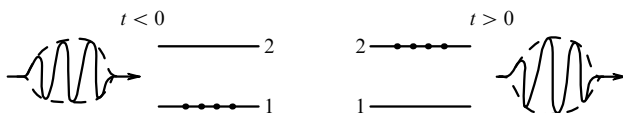


Рис. 2. Накачка π -импульсом в двухуровневой схеме; 1 — основное состояние.

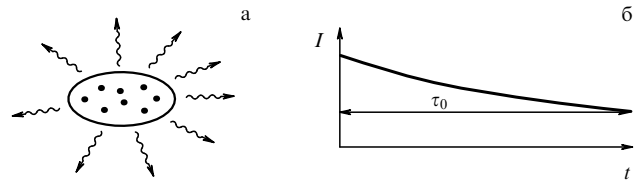


Рис. 3. Флуоресценция системы из N^* инвертированных атомов (а). Атомы совершают независимые спонтанные переходы за характерное время τ_0 с интенсивностью $I \sim N^*$ (б). Излучение изотропно. (Взят из [1].)

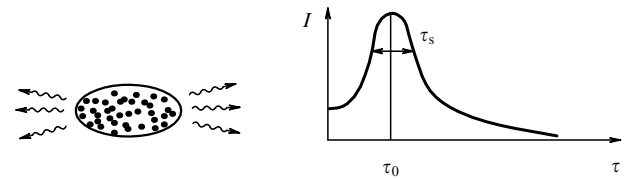


Рис. 4. СИ, возникающее при $N^* > N_c$ в марковском режиме $L < c\tau_s$. (Взят из [2].)

этой накачки за характерное время τ_p вблизи $t = 0$ в состоянии $|2\rangle$ переводится некоторое число атомов $N^* = NW$, где W — доля инвертированных атомов (заметим, что для трехуровневой схемы N — число возбужденных атомов). При определенных условиях, которые обсуждаются ниже, возникает СИ, характерные черты которого поясняются на рис. 3 и 4. При $N^* < N_c$, где N_c — критическое число инвертированных атомов (так называемый порог СИ, см. ниже), происходят обычные спонтанные переходы в состояние $|1\rangle$ (см. рис. 3), длительность которых совпадает с временем τ_0 спонтанного перехода $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ изолированного атома. Характерная интенсивность излучения системой атомов составляет (для простоты полагаем $W \sim 1$)

$$I \sim NI_0, \tag{2.1}$$

где $I_0 = \hbar\omega_0/\tau_0$ — интенсивность излучения изолированного атома, $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ — частота излучения. При $N^* > N_c$ система совершает переход, по всем признакам аналогичный фазовому переходу 2-го рода [1, 3]. Излучение становится резко анизотропным (см. рис. 4) и представляет собой короткий мощный импульс ("импульс СИ") с длительностью и интенсивностью

$$\tau_s \sim \frac{\tau_0}{N}, \quad I \sim N^2 I_0, \tag{2.2}$$

испускаемый по истечении времени ("время задержки")

$$t_0 \sim \tau_s A, \quad A = \ln N \tag{2.3}$$

в направлении наибольшей вытянутости тела.

В основе СИ лежат два эффекта, которые в совокупности и определяют СИ:

- а) фазировка атомов,
- б) коллективное интенсивное излучение системы коррелированных атомов.

Поясним сказанное простым примером. Пусть размер L излучающей системы (далее иногда будем называть ее телом) мал по сравнению с длиной излучаемых

волн $\lambda = 2\pi/k$, $k = \omega_0/c$ ("сосредоточенная модель Дикке" [8]):

$$L \ll \lambda. \quad (2.4)$$

Начнем с классической (лоренцевой) модели атомов. Имеются N зарядов величины e , массы m , закрепленных на концах пружинок с коэффициентом жесткости k . Заряды находятся в точках с координатами $\mathbf{r}_a + \xi_a$. Другие концы пружинок закреплены в точках \mathbf{r}_a , в которых находятся также компенсирующие заряды $-e$. Таким образом, дипольные моменты атомов равны

$$\mathbf{d}_a = e\xi_a = e\mathbf{n}_a \cos(\omega_0 t + \varphi_a), \quad (2.5)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственные частоты атомов-осцилляторов (смысл \mathbf{d}_a , \mathbf{n}_a , φ_a для реальных квантовых атомов поясняется позже). Интенсивность излучения, усредненная по быстрым осцилляциям диполей, равна [9]

$$I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{D}})^2 = I_1 + I_2, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{D} = \sum_{a=1}^N \mathbf{d}_a$ — дипольный момент системы,

$$I_1 = \frac{2}{3c^3} \sum_a \langle \ddot{\mathbf{d}}_a^2 \rangle, \quad I_2 = \frac{2}{3c^3} \sum_{a \neq b} \sigma_{ab}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ab} = \langle \ddot{\mathbf{d}}_a \ddot{\mathbf{d}}_b \rangle = \frac{1}{2} e^2 \omega_0^4 (\mathbf{n}_a \mathbf{n}_b) \cos(\varphi_a - \varphi_b). \quad (2.8)$$

Если амплитуды \mathbf{n}_a и фазы φ_a некоррелированы, меняются от атома к атому случайным образом, то $I_2 \ll I_1$, поэтому $I \approx I_1 \sim N$, что означает режим спонтанного излучения (2.1). Если же между фазами и амплитудами разных диполей (атомов) возникает корреляция (фазировка), то $I_2 \gg I_1$, $I \approx I_2 \sim N^2$, т.е. тело переходит в режим СИ (2.2).

Из этих рассуждений становятся ясными необходимые (но не достаточные) условия возникновения СИ:

$$\tau_p \ll \tau_s \quad (2.9)$$

— кратковременность накачки,

$$\tau_s \ll T_r = \min(\tau_0, T_2) \quad (2.10)$$

— сохранение когерентности атомной подсистемы в течение всего процесса. Здесь

$$T_2 = \min\left(\frac{1}{\Delta\omega_D}, T_f\right) \quad (2.11)$$

— время фазовой памяти, в течение которого сохраняются межатомные фазовые корреляции, $\Delta\omega_D \sim \omega_0 v_T/c$ — доплеровское уширение частоты атомного перехода, v_T — тепловая скорость атомов, T_f — время сбоя фазы атомов, обусловленное их столкновениями [5, 10, 11] (время поперечной релаксации). Поскольку τ_s согласно (2.2) уменьшается с ростом N , условие (2.10) определяет порог СИ, т.е. число N_c .

Рисунок 4 относится к телу малого размера:

$$L \ll c\tau_s. \quad (2.12)$$

В случае (условие Ареки – Куртенса [12])

$$L \gg c\tau_s \quad (2.13)$$

становятся существенными эффекты распространения электромагнитных волн в теле (см. ниже). Когерентность атомов, необходимая для СИ, сохраняется в достаточно коротких телах:

$$L \ll cT_r. \quad (2.14)$$

Следует иметь в виду, что при высокой плотности n атомов в (2.12)–(2.14) вместо c следует подставить групповую скорость волны v_g , которая может оказаться значительно меньше c . Ниже будет показано, что в области (2.14) интенсивность возникающего излучения пропорциональна квадрату числа атомов, поэтому ее следует называть областью СИ. Сформулированные выше условия (2.9), (2.10), (2.14) осуществления СИ будут позже конкретизированы.

При ознакомлении с обширной литературой по СИ не возникает полного понимания (по крайней мере, у автора) наиболее существенных эффектов СИ, например механизма фазировки атомов, роли диполь-дипольного взаимодействия между атомами и т.д. В случае СИ мы имеем дело с неравновесным фазовым переходом 2-го рода, т.е. с возникновением ненулевых средних значений (квазисредних, параметров порядка, ...) от операторных величин. Подобные вопросы стали детально изучаться (см., например, [13] и ссылки в нем) только в последнее время (например, кинетика перехода в состояние сверхтекучести [14]). Вероятно, следует ожидать появления интересных исследований, посвященных этой стороне СИ.

В [8] механизм фазировки атомов не обсуждался: для предсказания СИ оказалось достаточно замечания о симметричности гамильтониана и волновой функции в модели Дикке по отношению к перестановкам координат любой пары атомов. Эта симметрия позволила угадать волновую функцию атомной системы и, не отвечая на сложный (и, вероятно, главный) вопрос о механизме фазировки, вычислить интенсивность излучения. Ограничение малыми размерами тела (2.4), принятое в [8], казалось бы указывало на неосуществимость экспериментов в оптическом диапазоне, т.е. на практическую непривлекательность СИ. В [15–23] была теоретически предсказана возможность осуществления СИ в протяженных телах

$$L \gg \lambda, \quad (2.15)$$

что подтвердил первый эксперимент [24] по СИ на вращательных переходах в молекулах HF (добавим, что предположение о СИ в протяженных телах было высказано уже в [8], однако оно основывалось на некорректном расчете). В этом же эксперименте были обнаружены осцилляции интенсивности СИ во времени (рис. 5),

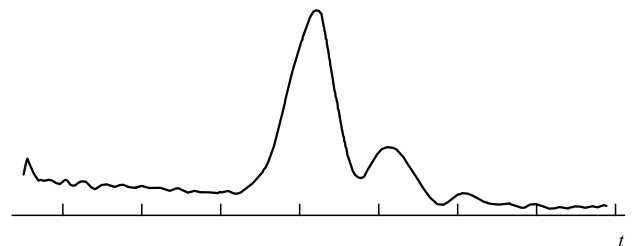


Рис. 5. Осцилляционный режим сверхизлучения [24].

ранее предсказанные теоретически [18] (количественная оценка для частоты осцилляций получена в [25]).

Таким образом, к 1973 г. выяснилось, что СИ является универсальным явлением, которое может быть осуществлено на практике на основе созданной к этому времени техники генерации коротких и мощных лазерных импульсов, необходимых для достижения условий (2.9), (2.10).

Длительность τ_s СИ для протяженного образца отличается от оценки (2.2), относящейся к малым телам (2.4). Для случая (2.12) ее можно оценить из простых соображений [12]. Для оценки достаточно считать, что за время порядка τ_s вся запасенная в стержне сечения $S = \pi R^2$, радиуса R и длины L ($R \ll L$) энергия

$$E_0 = \hbar\omega_0 nLS \quad (2.16)$$

излучилась вдоль оси стержня в виде электромагнитных волн частоты ω_0 , представляющих собой пучок длиной $c\tau_s$. Из баланса энергии ($E_0 \sim S c \tau_s E^2 / 8\pi$) находим амплитуду электрического поля, характерную для импульса СИ:

$$E \sim \left(\frac{\hbar\omega_0 nL}{c\tau_s} \right)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Под действием этого резонансного поля каждый атом совершает половину осцилляции Раби (см., например, [5, 26]) за время

$$\tau_s \sim \frac{\hbar}{V_{21}}, \quad V_{21} = Ed, \quad (2.18)$$

и оказывается в нижнем состоянии $|1\rangle$. Здесь $d = |\mathbf{d}|$, $\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}_{21} = \langle 2|\hat{\mathbf{d}}|1\rangle$ — матричный элемент атомного перехода $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$, ответственный за спонтанное излучение:

$$\frac{1}{\tau_0} \equiv \lambda_0 = \frac{4k^3 d^2}{3\hbar}. \quad (2.19)$$

Из (2.18), (2.19) следуют оценки

$$\tau_s \sim \frac{\hbar}{kd^2 nL} \sim \frac{\tau_0}{\varphi}, \quad \varphi = \frac{3\pi nL}{k^2} \quad (2.20)$$

и основное условие осуществления СИ в протяженных телах (2.15)

$$\varphi \gg 1. \quad (2.21)$$

Условие (2.21) имеет глубокий смысл, который легко понять в случае

$$\lambda \ll l, \quad (2.22)$$

где $l = n^{-1/3}$ — среднее расстояние между атомами. Тогда каждый атом находится в волновой зоне другого и рассеянные атомами электромагнитные волны успевают сформироваться в новые волны, прежде чем достигнут соседних атомов. Электромагнитное поле внутри среды представляет собой в случае (2.22) совокупность независимых фотонов, испытывающих рассеяние на атомах. Разброс электромагнитного поля по частоте составляет $\Delta\omega \sim 1/\tau_s$. Согласно теории Раби его можно считать резонансным, если $\Delta\omega \lesssim V_{12}/\hbar$. Отсюда и из (2.18) заключаем, что поле является резонансным.

Сечение рассеяния резонансного фотона на атоме порядка [9, 27, 28]

$$\sigma \sim \frac{1}{k^2}, \quad (2.23)$$

поэтому согласно (2.20) основное условие (2.21) переписывается в виде

$$\varphi \sim n\sigma L \gg 1. \quad (2.24)$$

Отсюда видно, что число рассеяний, испытываемых фотоном на длине тела, должно быть велико. Это указывает на существенную роль индуцированного излучения в явлении СИ.

Приведенные выше соображения [12], основанные на балансе энергии, позволили определить амплитуду поля (2.17), но в СИ основную роль играют фазы.

Поучительно другое рассуждение. Пусть имеется продолговатое тело длины L (скажем, стержень, цилиндр радиуса R). По механизму фазировки у каждого атома a создается фаза $\varphi_a = \mathbf{k}\mathbf{r}_a$, где вектор \mathbf{k} направлен вдоль тела, $k = \omega_0/c$. Рассмотрим сначала случай (2.22). Колеблющийся диполь в квазистатической зоне создает поле $E \sim d/r^3$, а в волновой зоне $E \sim dk^2/r \exp(ikr)$ (см. [9, 27]). Поле E_b на атоме b равно сумме полей, созданных остальными атомами, поэтому с учетом фаз диполей имеем

$$E_b \sim \sum_{a \neq b} \frac{dk^2}{r} \exp(ikr + i\varphi_a), \quad (2.25)$$

где $r \equiv r_{ab}$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, а в дипольный момент \mathbf{d} включен множитель $\exp(-i\omega_0 t)$. Основной вклад в сумму (2.25) дают атомы a , для которых

$$|\Delta\varphi| \lesssim 1, \quad (2.26)$$

где $\Delta\varphi = kr + \varphi_{ab} = kr_{ab} + \mathbf{k}\mathbf{r}_{ab}$, $\varphi_{ab} = \varphi_b - \varphi_a = \mathbf{k}\mathbf{r}_{ab}$. Эти атомы расположены вблизи оси z , проходящей через атом b в направлении \mathbf{k} (рис. 6). Назовем область конструктивной интерференции (ОКИ): сигналы, поступающие к атому b от атомов a , расположенных в ОКИ, складываются, конструктивно интерферируют.

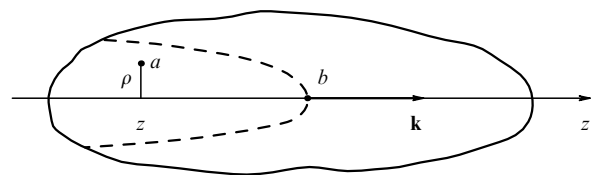


Рис. 6. ОКИ, определяющая поле на атоме b (показана пунктиром). Начало координат $z = 0$ расположено на атоме b .

Далее почти всегда будет рассматриваться практически наиболее интересный случай

$$F \gg 1, \quad (2.27)$$

где

$$F = \frac{kR^2}{L} \sim \frac{R^2}{\lambda L} \quad (2.28)$$

— число Френеля, равное отношению геометрического угла R/L к дифракционному углу $\theta_D = 1/kR \sim \lambda/R$ или,

по-другому, числу зон Френкеля, помещающихся на торце цилиндра. Из (2.26) и (2.27) следует, что радиус ОКИ мал по сравнению с R и L , поэтому имеем

$$z = \frac{\mathbf{rk}}{k}, \quad \rho \ll |z|, \quad |z| \sim L, \quad r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx |z| + \frac{\rho^2}{2|z|},$$

$$\Delta\varphi \approx k(|z| + z) + \frac{k\rho^2}{2|z|}. \quad (2.29)$$

Уравнение границы ОКИ $|\Delta\varphi| = 1$ имеет вид

$$z < 0, \quad \rho = \rho_0|z| = \sqrt{\frac{2|z|}{k}}, \quad (2.30)$$

откуда и из (2.27) следует, что характерная толщина ОКИ,

$$\rho_0 \sim \rho_0(L) \sim \sqrt{\frac{L}{k}}, \quad (2.31)$$

мала по сравнению с поперечником тела,

$$\frac{\rho_0}{R} \sim \frac{1}{\sqrt{F}} \ll 1. \quad (2.32)$$

Объем ОКИ

$$V_0 \sim L\rho_0^2 \sim \frac{L^2}{k}. \quad (2.33)$$

Число атомов, расположенных в ней, вследствие (2.15) и (2.21) велико:

$$N_0 \sim nV_0 \sim \phi kL \gg 1. \quad (2.34)$$

Это позволяет нам заменить суммирование в (2.25) интегрированием:

$$\sum_a \rightarrow n \int d^3r_a = 2\pi \int \rho d\rho dz. \quad (2.35)$$

Вследствие (2.27) интегрирование по ρ можно распространить на весь интервал $(0, \infty)$, поэтому из (2.25), (2.29) и (2.35) получаем

$$E_b \sim dk^2 n \int \frac{dz \rho d\rho}{|z|} \exp \left[ik(|z| + z) + \frac{ik\rho^2}{2|z|} \right] =$$

$$= dk^2 n \int \frac{dz}{|z|} \frac{i|z|}{k} \exp [ik(|z| + z)].$$

Отсюда следует оценка

$$E_b \sim ndkL. \quad (2.36)$$

Она справедлива (а значит, и (2.20)) как в случае (2.22), так и в противоположном:

$$l \ll \lambda, \quad (2.37)$$

когда в ОКИ имеются волновая ($r > \lambda$) и квазистатическая ($r < \lambda$) зоны. Вклад в E_b от квазистатической зоны оценим как поле внутри равномерно поляризованного шара порядка nd . Отсюда и из (2.36) ясно, что в рассматриваемом случае (2.15) вклад от квазистатической зоны пренебрежимо мал, а поле на любом атоме определяется всей ОКИ, связанной с этим атомом.

Располагая оценкой (2.36), из формулы Раби (2.18) получаем (2.20). Можно и не прибегать к формуле (2.18). Интенсивность излучения равна потоку энергии через торцы стержня:

$$I \sim \frac{ScE_b^2}{4\pi}. \quad (2.38)$$

Отсюда, из (2.16) и $\tau_s \sim E_0/I$ снова получаем (2.20).

Теперь ясна вся картина в целом. После импульса накачки атомы обмениваются электромагнитными сигналами. На каждом атоме возникает флуктуирующее поле $\delta E \sim dk^2/l$ (в случае (2.22)). Затем в результате фазировки, обсуждаемой в следующих разделах, устанавливается коллективное поле (2.36). Поскольку заведомо $\delta E/E_b \sim kl^2/L \ll 1$, то флуктуациями можно пренебречь. Позже будет показано, что флуктуирующей частью поля можно пренебречь и в случае (2.37). После фазировки, как уже говорилось, возникает усиленное коллективное излучение.

При увеличении L длительность СИ τ_s уменьшается (см. (2.20)), поэтому при некоторых L (в экспериментах обычно при некоторых n) условие (2.12) нарушается, и картина СИ усложняется. Длину L_0 , при которой это происходит, и характерное время СИ τ_s^0 оцениваем из $L_0 = c\tau_s^0$ и (2.20):

$$L_0 = k \left(\frac{c\tau_0}{n} \right)^{1/2}, \quad \tau_s^0 = k \left(\frac{\tau_0}{nc} \right)^{1/2}. \quad (2.39)$$

Накачку длинного стержня в случае (2.13) можно производить двумя способами: пустив короткий импульс вдоль тела или произведя накачку одновременно всех участков тела (электрический заряд поперек стержня, поперечный лазерный импульс, ...). Далее разные участки стержня размером порядка L_0 начинают излучать независимо от других, поскольку из-за конечности c корреляции между соседними участками отсутствуют. Излучение от каждого участка начинает передвигаться по соседним и вновь переводит часть излучивших атомов в возбужденное состояние, атомы снова излучают и т.д. В теле удлиненной формы возникает [18, 25, 29, 30] осцилляционный режим (см. рис. 5), а в прочих — диффузионный, когда разные участки обмениваются друг с другом энергией (последний случай в достаточной степени не изучался).

Что происходит в случае

$$L \gg cT_r? \quad (2.40)$$

Это режим типичного лазера [5, 31–34], когда атомная система стохастична, а фотонная когерентна. Фотон, испущенный вдоль оси тела, порождает лавину индуцированных фотонов с характерным размером когерентности порядка L . Если тело (активную среду) поместить в резонатор с высокой добротностью Q , то возникает генерация на собственных модах генератора, т.е. неравновесный фазовый переход в подсистеме фотонов [31]. Длина когерентности увеличивается еще в Q раз (и, соответственно, монохроматичность излучения тоже). Недиagonальные элементы матрицы плотности атомов, ответственные за когерентность, в случае (2.40) пренебрежимо малы [5], поэтому атомы описываются диагональными элементами — населенностями W_i ,

$W_2 = 1 - W_1$ (доли атомов в состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$). Населенности и интенсивность излучения J (плотность потока фотонов) описываются стандартными уравнениями лазера [32–34], в которые, в частности, входит сечение рассеяния фотонов на атомах σ . В уравнении для dJ/dx имеется слагаемое $n\sigma JW_2$, которое описывает открытый Эйнштейном эффект индуцированного излучения (другое слагаемое — $n\sigma JW_1$ называют индуцированным поглощением). Генерация возникает, когда эффективная длина активной среды LQ велика по сравнению с длиной свободного пробега фотона $1/n\sigma$ (ср. с (2.24)).

Обсудим роль в СИ индуцированного излучения. Ответ на этот вопрос зависит от определения этого явления. Имея в виду упомянутое выше слагаемое Эйнштейна в уравнении для интенсивности, часто подразумевают, что атомная система должна быть стохастичной (это имеет место у Эйнштейна, который рассматривает тепловое равновесие). Вероятно, по этой причине иногда считают, что индуцированное излучение в системе возбужденных атомов возможно только при условии (2.40), когда атомы подвергаются частым и беспорядочным ударам. По этой причине в СИ оно несущественно. На наш взгляд, более общим является другое определение индуцированного излучения (см. например, [35–37]), из которого следует, что в СИ оно играет ключевую роль. Так, рассеяние электромагнитных волн заряженным осциллятором в классической электродинамике также следует отнести к индуцированным радиационным процессам: индуцированному излучению и поглощению, которые в классической электродинамике невозможно разделить [38, 39]. Под действием поля волны заряд колеблется с амплитудой, которая велика по сравнению с амплитудой нулевых колебаний (поскольку речь идет о классической механике), т.е. осциллятор возбуждается в высокие квантовые состояния. Испытывая дополнительное ускорение под действием волны, заряд испускает тормозное излучение с той же фазой, что и у падающей волны и с интенсивностью, пропорциональной интенсивности падающей волны J , как и должно быть при индуцированном излучении. Если это происходит в резонаторе, то при достаточно большом частотном расщеплении между модами заряд будет излучать только в одну моду, и поэтому интенсивность тормозного излучения будет пропорциональна числу фотонов в данной моде n_i (поскольку $J \propto n_i$) в соответствии с выводами Эйнштейна. Видно, что при таком определении наличие индуцированного излучения никак не связано с частотой атомных столкновений, поэтому оно имеется и в режиме СИ (2.14), а не только в лазерном режиме (2.40). Спонтанное и индуцированное излучение одинаково важны в СИ.

Рассмотрим один из атомов (с номером b). Он находится в суммарном поле \mathbf{E} и в единицу времени в результате излучения отдает ему энергию $I = -e\dot{\xi}\mathbf{E}$. Пусть взаимодействие атома с полем "включается" при $t = 0$, т.е. заряд меняется по закону $e(t) = e\theta(t)$. Следуя [38], считаем заряд малым, тогда $\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)}$, где $\xi^{(0)}$, $\mathbf{E}^{(0)}$ — значения координаты электрона атома b и электрического поля при $e = 0$. Очевидно, $\mathbf{E}^{(1)} = 2e/(3c^3)\ddot{\xi}$ — поле реакции излучения [9, 27]. По отношению к выбранному атому $\mathbf{E}^{(0)}$ играет роль внешнего поля, поэтому $\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E}_b$ (см. (2.36)).

Итак,

$$I \approx I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.41)$$

где

$$I_1 = -e\mathbf{E}^{(0)}\dot{\xi}^{(0)}, \quad I_2 = -e\mathbf{E}^{(0)}\dot{\xi}^{(1)},$$

$$I_3 = -e\mathbf{E}^{(1)}\dot{\xi}^{(0)} = -\frac{2e^2}{3c^3}\dot{\xi}^{(0)}\ddot{\xi}^{(0)}.$$

Если $\mathbf{E}^{(0)} = 0$, то $I_1 = I_2 = 0$, поэтому два первых слагаемых следует отнести к индуцированным процессам (излучения и поглощения), а I_3 — к спонтанному. При отсутствии межатомных корреляций $\langle I_1 \rangle = 0$. В результате фазировки возникает коллективное поле (2.36), рассеяние которого на каждом из атомов усиливает это поле, т.е. возникает индуцированное излучение: $\langle I \rangle > 0$, $\langle I \rangle \approx \langle I_1 \rangle \gg |I_{2,3}|$. Этот важный эффект был впервые указан в работе [36], породившей целое направление в физике и технике, что позволило создать мощные генераторы электромагнитного излучения: гиротроны, мазеры на циклотронном резонансе и др. [37, 40, 41].

Вначале поле отсутствует, поэтому мы должны трактовать СИ как спонтанное излучение всей атомной системы (по терминологии [8] — коллективное спонтанное излучение). Теперь мы видим, что это же излучение вследствие фазировки атомов мы должны трактовать как результирующий эффект индуцированного излучения отдельных атомов. Дипольный момент атома b колеблется в такт (но в противофазе) с коллективным полем (2.36). В единицу времени атом передает полную энергию $e\mathbf{E}_b\dot{\xi} \sim E_b\omega_0 d$, а все атомы вместе — в N раз большую, что согласуется с (2.38).

Важность индуцированного излучения с СИ подтверждается еще одним рассуждением. При условии (2.27) СИ заключено в пределах геометрического телесного угла $\Omega \sim (R/L)^2$ (см. раздел 8.1) и имеет разброс по частотам $\Delta\omega \sim 1/\tau_s$, поэтому число фотонов, пересекающих единицу площади поперечного сечения стержня в единицу времени, порядка $J \sim n_p k^2 \Delta k \Omega$, где $\Delta k = \Delta\omega/c \sim 1/c\tau_s$, n_p — число заполнения фотонных состояний (количество фотонов в одном квантовом состоянии). С другой стороны $J \sim cE_b^2/\hbar\omega_0$. Отсюда из (2.20) и (2.36) следует $n_p \sim N/F^2$, поэтому заведомо $n_p \gg 1$, что является прямым доказательством важной роли индуцированных процессов. Это рассуждение можно было бы провести и по-другому — введя реальный физический объем $(c\tau_s)^3\Omega$, который занимают излученные фотоны. На границах этого объема можно ввести любые, например нулевые граничные условия. Тип этих условий не играет роли, поскольку фотоны достигают границ лишь в конце СИ. Введенные выше n_p представляют собой числа заполнения собственных электромагнитных мод этого объема.

Приведенные выше соображения позволяют исправить слабое место в рассуждениях Ареки и Куртенса, которые привели нас к формуле (2.17): форма цуга излученных волн отличается от цилиндрической. Эти волны за время τ_s проходят через торец стержня, поэтому $I\tau_s \sim E_0$, что снова дает (2.17).

Теория СИ развивалась по нескольким направлениям, среди которых выделяются шрёдингеровский и гейзенберговский подходы, полуклассическое приближение. Каждое из них применимо в своей особой области

значений параметров системы, и поэтому эти подходы дополняют друг друга. Каждое из направлений будет обсуждаться позже. Сейчас же отметим общий методический недостаток этих подходов, который состоит в том, что, как и в [18], механизм фазировки атомов снова остается "за кадром", хотя практически во всех работах по СИ содержатся совершенно правильные, но в методическом отношении бесполезные утверждения вроде "...благодаря общему полю излучения между атомами возникают фазовые корреляции...". Уместно привести цитату из [5] (с. 188) по поводу механизма перехода от случайного к сфазированному состоянию атомов: "Природа этого перехода, обладающего определенными пространственными, временными и статистическими проявлениями полностью не ясна". Причина такой оценки, вероятно, состоит в том, что в упомянутых выше подходах оперируют с квантовыми понятиями: операторами, матрицей плотности, средними по квантовому ансамблю и т.д. Естественно, это наиболее полное описание. Однако, например, любой преподаватель, читающий студентам лекции, знает на практике, что ощущение полного понимания достигается при рассмотрении квазиклассического предела. Хороший пример — проблема невылетаия кварков [42], где продолжают настойчивые поиски классического решения со струной, несмотря на то, что вопрос удовлетворительно разрешен в квантовых численных расчетах на решетках.

Итак, можно надеяться, что природу фазировки атомов позволит лучше понять классическая модель сверхизлучения [43–46] — КМС, в которой атомы заменены классическими осцилляторами Лоренца (вообще говоря, ангармоническими), а поле описывается классическими уравнениями Максвелла.

В шрёдингеровском подходе [19, 20, 47], детали которого суммированы в [2], сначала записывается квантовое уравнение Лиувилля–Неймана для матрицы плотности Φ всей системы (*атом + поле*), затем в приближении Борна–Маркова, справедливом при условии (2.12), из него выводится уравнение для матрицы плотности атомов $\rho = Sp\Phi$, где берется след по переменным поля ("master equation", "управляющее уравнение"). В приближении Борна, справедливом в предельном случае (2.12), $\Phi = \rho\rho_f$, где $\rho_f = |0\rangle\langle 0|$ — матрица плотности поля в исходном (вакуумном) состоянии. Здесь не учитывается искажение ρ и ρ_f , происходящее в результате взаимодействия атомов с полем, что аналогично обычному борновскому приближению в теории рассеяния [26, 48]. При условии (2.12) энергия поля, находящегося внутри среды, мала по сравнению с энергией, запасенной в атомах: их отношение порядка $L/c\tau_s \ll 1$. По этой причине обратное влияние поля на состояние атомной подсистемы пренебрежимо мало, следовательно, при расчетах поведения атомной подсистемы можно полагать, что поле находится в вакуумном состоянии. Ключевая роль находящегося внутри тела поля состоит в фазировке атомов, которая не требует затрат энергии. Можно предположить, что приближение Борна становится справедливым после завершения фазировки.

В приближении Маркова пренебрегают эффектами "памяти", которые появляются при исключении переменных поля в уравнении, описывающем поведение матрицы плотности атомов ρ . Основным из эффектов памяти является запаздывание электромагнитных волн, которое несущественно при условии (2.12). В этом случае

$d\rho/dt$ определяется значением $\rho(t)$ в тот же момент времени, аналогично тому, как очередной скачок броуновской частицы практически не зависит от предыстории.

Как отмечено в [2], недостатком шрёдингеровского подхода является сложность управляющего уравнения и, как следствие, отсутствие физической наглядности. В этом смысле он уступает гейзенберговскому и полуклассическому подходам, которые будут рассмотрены позже и в которых получено больше нетривиальных результатов. Наибольшее продвижение в шрёдингеровском подходе достигнуто в рамках одномодовой модели СИ [19–21], обладающей ограниченной и до конца не ясной областью применимости. Вероятно (хотя строго это не доказано), эта модель справедлива для тонких стержней с $F \ll 1$.

Идея написать данный обзор возникла при подготовке лекций, поэтому одна из его целей — методическая. Обзор можно условно разделить на две части: СИ в атомах и СИ в системе классических осцилляторов (КМС). Первая часть представляет методический интерес, поскольку, как кажется, известные результаты удалось изложить достаточно просто. Здесь представлены и оригинальные результаты, частично опубликованные в [46]. К ним можно отнести нелинейный эффект уменьшения угловой расходимости пучка СИ. Вторая часть обзора является в большей степени оригинальной (детали расчетов можно найти в [46]). Сначала рассмотрен нелинейный механизм фазировки атомов в сосредоточенной модели Дикке [43] и показано, что при достаточно большом разбросе атомных частот фазировка исчезает. Далее анализируются работы [49–51], в которых обращается внимание на противоречивость модели Дикке, не учитывающей диполь-дипольное взаимодействие. Показано, что выводы [49–51] о разрушении СИ в системах малого размера (2.4) диполь-дипольным взаимодействием атомов, некорректны. Для достаточно общего случая эллипсоидальных тел это взаимодействие учтено строгим образом, и доказана осуществимость СИ в таких телах, что может стимулировать эксперименты с малыми телами (2.4). Обнаружены метастабильные неизлучающие состояния, отличающиеся от аналогичных состояний Дикке [8], в которые тело переходит в результате диполь-дипольного взаимодействия атомов. Указано на существование двух механизмов фазировки атомов: нелинейного и линейного диполь-дипольного. Эти механизмы конкурируют друг с другом, действуют как бы в противоположных направлениях: согласно первому из них каждый атом создает себе облако из окружающих атомов, колеблющихся с той же фазой, а согласно второму — в противофазе. Таким образом, в результате диполь-дипольного взаимодействия возникает экранировка СИ, его своеобразное когерентное запираение. Показано, что диполь-дипольное взаимодействие является дальнедействующим, вследствие чего характер СИ существенным образом зависит от формы тела. В телах эллипсоидальной формы происходит своеобразная компенсация дипольных полей, в результате которой СИ происходит в полном соответствии с предсказаниями Дикке [8].

В данной задаче имеются три характерных размера λ , L и $l = n^{-1/3}$. Ниже рассматривается представляющий наибольший интерес случай $N \gg 1$, поэтому всегда $l \ll L$, и имеются лишь три возможности, которые будут

рассмотрены в обзоре:

$$l \ll L \ll \lambda, \quad (2.42a)$$

$$\lambda \ll l \ll L, \quad (2.42б)$$

$$l \ll \lambda \ll L. \quad (2.42в)$$

Наряду с двухуровневыми системами, где нелинейная фазировка играет ключевую роль, рассмотрены слаболинейные системы, например электроны в замагниченной плазме, и для них проведены детальные расчеты в рамках линейной КМС. Показано, что перенос коллективного циклотронного излучения поперек силовых линий магнитного поля, который является одним из проявлений СИ, в принципе, может объяснить не поддающийся теоретическому описанию эффект аномального переноса энергии, наблюдающийся в токамаках, вследствие которого приходится идти на увеличение размеров установок.

В конце статьи подводятся итоги и формулируются неясные, требующие решения вопросы.

Далее везде мы пренебрегаем некогерентной частью излучения среды, предполагая, что выполняются условия, при которых она мала по сравнению с когерентной. Некогерентное излучение возбужденной среды хорошо изучено, описывается уравнением Бибермана–Холстейна (см., например, [11]). Так же, как и когерентное излучение, оно является резонансным.

Приступим теперь к количественному описанию основных эффектов СИ.

3. Ансамбль атомов в электромагнитном поле. Квантовомеханическое описание

Раздел написан в методических целях, посвящен выводу выражения для гамильтониана системы "атом + поле" и обсуждению основных приближений.

Пусть имеется N атомов, ядра которых имеют заряд z и покоятся в точках \mathbf{r}_a ($a = 1, 2, \dots, N$). Поведение атомов в электромагнитном поле $\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) = (\varphi, \mathbf{A})$ описывается гамильтонианом (здесь и далее $\hbar = m_e c = e = 1$)

$$\hat{H} = \sum_{a,s} \left\{ \frac{1}{2} \left[-i\nabla_{as} + \frac{1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{as}, t) \right]^2 - \varphi(\mathbf{r}_{as}, t) \right\} + u,$$

где \mathbf{r}_{as} — координаты электронов, относящихся к атому a (обменом атомов электронами пренебрегаем), $s = 1, \dots, z$, u — потенциальная энергия электронов и ядер. Гамильтониан упрощается в дипольном приближении ($\mathbf{p}_{as} = \mathbf{r}_{as} - \mathbf{r}_a$):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{as}, t) &\approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t); \\ \varphi(\mathbf{r}_{as}, t) &\approx \varphi(\mathbf{r}_a, t) + \mathbf{p}_{as} \nabla_{\mathbf{r}_a} \varphi(\mathbf{r}_a, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

которое справедливо при условии

$$\lambda \gg a_0 = 1 \text{ а.е.}, \quad (3.2)$$

где λ — характерная длина волны.

В уравнении Шрёдингера $i\partial\Psi/\partial t = \hat{H}\Psi$ для волновой функции электронов $\Psi(\mathbf{r}_{as}, t) \equiv \Psi(\mathbf{r}_{1s}, \dots, \mathbf{r}_{Ns}; t)$ произведем калибровочное преобразование

$$\Psi(\mathbf{r}_{as}, t) = \exp \left[-i \sum_{a,s} \mathbf{p}_{as} \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t) - i \int_{-\infty}^t \varphi(\mathbf{r}_a, t') dt' \right] \Psi'.$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что уравнение Шрёдингера для новой волновой функции Ψ' принимает вид $i\partial\Psi'/\partial t = \hat{H}'\Psi'$, где

$$\hat{H}' = \sum_{a,s} \left(-\frac{1}{2} \nabla_{as}^2 \right) + u + \hat{v}, \quad (3.3)$$

$$\hat{v} = - \sum_a \mathbf{d}_a \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t), \quad (3.4)$$

где $\mathbf{d}_a = - \sum_{s=1}^z \mathbf{p}_{as}$ — оператор дипольного момента атома a ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

— электрическое поле. Таким образом, при условии (3.2) для сколь угодно протяженной системы атомов справедливости формулы (3.3), (3.4) (а не при условии $L \ll \lambda$, как иногда считают).

Следуя [8], рассмотрим приближение двухуровневых атомов, когда учитываются только два состояния с волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 и энергиями E_1, E_2 ; $E_2 > E_1$. Уровни E_1, E_2 считаем невырожденными.

Волновая функция двухуровневого атома может быть записана в виде $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ или в виде двухкомпонентного вектора $e = (c_1, c_2)$. Следовательно, оператор любой физической величины может быть представлен в виде комплексной эрмитовой (2×2)-матрицы, действующей на столбец e . Таким образом, описание состояний двухуровневого атома полностью аналогично описанию состояний спина $s = 1/2$, в частности, состояния α и β с $s_z = +1/2$ и $s_z = -1/2$ соответствуют верхнему и нижнему состояниям атома. Состояния системы из N двухуровневых атомов можно классифицировать как собственные состояния операторов τ^2 и τ_z , где $\tau = \sum_{a=1}^N \mathbf{s}_a$ — суммарный (энергетический) спин: $\psi = |\tau, M, \alpha\rangle$. Здесь M — собственное значение τ_z . Смысл квантового числа a поясняется в [1].

Сначала будем пренебрегать столкновениями и доплеровским уширением, связанным с движением атомов. Последний из этих эффектов становится существенным в протяженном теле (2.42в). Он будет строго учтен позже при анализе СИ в плазме.

После стандартного [28, 48] вторичного квантования электромагнитного поля гамильтониан системы "атомы + поле" принимает вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{v}, \quad (3.5)$$

$$\hat{H}_0 = \sum_k \omega_k \hat{c}_k^+ \hat{c}_k + \frac{1}{2} \omega_0 R_3, \quad (3.6)$$

$$\hat{v} = \sum_k (f_k c_k + f_k^+ c_k^+), \quad (3.7)$$

$$f_k = \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{v}} (\mathbf{e}_k, \mathbf{Q}_k) = g_k (R_k^+ + R_k^-),$$

$$\mathbf{Q}_k = \sum_a \hat{\mathbf{d}}_a \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_a) = \mathbf{d}(R_k^+ + R_k^-).$$

Здесь введены обозначения

$$R_3 = R_0^z = \sum_a \sigma_a^z, \quad R_{\mathbf{k}}^z = \sum_a \sigma_a^z \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_a),$$

$$R_{\mathbf{k}}^{\pm} = \sum_a \sigma_a^{\pm} \exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}_a), \quad (3.8)$$

а также \hat{c}_k, \hat{c}_k^+ — операторы уничтожения и рождения фотонов, $k = (\mathbf{k}, \mu)$ — квантовые числа фотонов (импульс, поляризация, $\mu = \pm 1$), $\omega_k = ck$,

$$\sigma_a^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_a = 2s_a^z;$$

$$\sigma_a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_a, \quad \sigma_a^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_a,$$

$g_k = \sqrt{2\pi\omega_k/v}(\mathbf{e}_{k\mu}\mathbf{d})$, v — нормировочный объем, $\mathbf{d} = \langle 2|\mathbf{d}|1\rangle$, $\mathbf{e}_{k\mu}$ — вектор поляризации фотона. При переходе от (3.4) к (3.7) учтено соотношение

$$\hat{\mathbf{d}}_a = \mathbf{d}(\sigma_a^+ + \sigma_a^-) \quad (3.9)$$

и изменен знак \hat{c}_k, \hat{c}_k^+ , что представляет собой каноническое преобразование, не изменяющее наблюдаемые величины. Такой выбор знаков принят практически во всех работах по СИ.

Операторы (3.8) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[R_{\mathbf{k}}^z, R_{\mathbf{k}'}^\pm] = \pm 2R_{\mathbf{k}\pm\mathbf{k}}^\pm, \quad [R_{\mathbf{k}}^+, R_{\mathbf{k}'}^-] = R_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^z. \quad (3.10)$$

Как обычно в системах многих тел за кажущейся простотой гамильтониана (3.5) скрываются многообразные и сложные физические явления, к изучению которых мы теперь приступаем.

4. Модель Дикке

В 1954 г. Дикке [8] рассмотрел спонтанное излучение системы атомов малого размера (2.4), переведенных при $t = 0$ в возбужденное состояние, и обнаружил, что оно резко отличается от обычного спонтанного излучения, когда атомы излучают независимо один от другого (см. (2.1)–(2.3)). В настоящее время это явление называют СИ, хотя первоначальное название, данное Дикке, — коллективное спонтанное излучение — не менее удачно. Позже стало ясно — удивительно в СИ вовсе не то, что оно отличается от обычного спонтанного излучения, а то, что между первоначально независимыми атомами возникают фазовые корреляции (фазировка), которые сродни фазовому переходу второго рода. Эту сторону СИ обсудим позже, а в данном разделе рассмотрим работу Дикке, принятые в ней приближения, а также квантовые свойства СИ.

Эффекты распространения электромагнитных волн, существенные в протяженных телах (2.15), не имеют прямого отношения к механизмам СИ, поэтому, следуя [8], рассмотрим случай (2.4), т.е. (2.42а).

Дикке предположил, что основную роль играют волновые векторы вблизи резонансного значения:

$$k \sim k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sim \frac{1}{\lambda}, \quad (4.1)$$

поэтому вследствие (2.4) в (3.8) можно положить

$$\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_a) \approx 1. \quad (4.2)$$

Это, однако, неверно, поскольку в случае (2.4) важную роль играет диполь-дипольное взаимодействие атомов. Ниже мы убедимся, что это взаимодействие простирается на весь размер тела, т.е. ему соответствуют

расстояния порядка L и волновые векторы

$$k \sim \frac{1}{L} \gg \frac{1}{\lambda}. \quad (4.3)$$

Гамильтониан (3.5)–(3.7) представим в виде $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, где в \hat{H}_1 и \hat{H}_2 включены слагаемые, соответственно, с $k < k_1$ и $k > k_1$, где k_1 удовлетворяет соотношению $k_0 \gg k_1 \gg 1/L$. В первой сумме (\hat{H}_1) справедливо приближение (4.2), которое дает гамильтониан Дикке \hat{H}_D [8]:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_D = \frac{1}{2} \omega_0 R_3 + \sum_k [\omega_k c_k^+ c_k + g_k (R^+ c_k + R^- c_k^+)], \quad (4.4)$$

где $R^\pm = \sum_a \sigma_a^\pm$. Здесь опущены нерезонансные слагаемые $R^+ c_k^+$ и $R^- c_k$. Они дают лэмбовский сдвиг [5], который будем считать уже включенным в ω_0 . Это приближение вращающейся волны (ПВВ) [1, 2, 5, 31]. Кроме того, в \hat{H}_1 положили $k_1 = \infty$. Это приводит к обычным в электродинамике проблемам ультрафиолетовых расходимостей, которые решаются перенормировкой [28] констант, входящих в (4.4). В слагаемом \hat{H}_2 поле является быстрой подсистемой, а атомы медленной, поэтому можно отделить быстрые переменные по известному в теории молекул методу Борна–Оппенгеймера [26, 48]. Имеем $\hat{H}_2 = \sum_{k>k_1} (\omega_k c_k^+ c_k + f_k c_k + f_k^+ c_k^+)$. Согласно указанному методу на первом этапе атомные операторы следует считать c -числами. Выделяем в \hat{H}_2 "полный квадрат", т.е. производим каноническое преобразование

$$c_k = b_k - \frac{f_k}{\omega_k}, \quad (4.5)$$

которое преобразует гамильтониан \hat{H}_2 к виду

$$\hat{H}_2 = \sum_{k>k_1} \omega_k b_k^+ b_k + V_d, \quad (4.6)$$

$$V_d = - \sum_k \frac{1}{\omega_k} f_k^+ f_k = - \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} (\mathbf{d}_a)_\alpha (\mathbf{d}_b)_\beta G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{1}{(r_{ab})^3} [\mathbf{d}_a \mathbf{d}_b - 3(\mathbf{d}_a \mathbf{s})(\mathbf{d}_b \mathbf{s})], \quad (4.7)$$

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) = \frac{3s_\alpha s_\beta - \delta_{\alpha\beta}}{(r_{ab})^3}, \quad (4.8)$$

где здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma \dots = x, y, z$, по повторяющимся индексам идет суммирование, $\mathbf{s} \equiv \mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$. Расчет (4.7) произведен на основе формул

$$\sum_\mu (\mathbf{e}_{k\mu})_\alpha (\mathbf{e}_{k\mu})_\beta = \delta_{\alpha\beta} - \hat{\mathbf{k}}_\alpha \hat{\mathbf{k}}_\beta, \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \\ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \frac{-3\hat{R}_\alpha \hat{R}_\beta + \delta_{\alpha\beta}}{4\pi R^3},$$

где $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$, $\mathbf{R} \neq 0$. Учтено правило

$$\frac{1}{v} \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} F_{\mathbf{k}},$$

а также то обстоятельство, что основной вклад в интеграл по \mathbf{k} дают $k \sim 1/R \sim 1/L$, поэтому интегрирование

можно распространить и на область $k < k_1$. Отметим, что нерезонансные слагаемые несущественны в \hat{H}_1 , но они важны в \hat{H}_2 . Если их опустить в самом начале, в исходных выражениях (3.5)–(3.7), то для V_d получится результат, отличающийся от (4.7) на множитель $1/2$.

Теперь запишем окончательное выражение для гамильтониана системы малого размера (2.4):

$$\hat{H} = \hat{H}_D + \hat{V}_d. \quad (4.9)$$

В (4.9) опущены слагаемые порядка $1/c^2$, удержанные в [49–51]. Это приближение будет позже доказано строго.

Дикке [8] пренебрег дипольным взаимодействием V_d , что неправомерно [49–51, 1]. Действительно, слагаемые с константой связи g_k в (4.4) в классическом пределе описывают радиационное трение (к этому вопросу мы вернемся позже при обсуждении КМС). Электрическое поле, вызывающее радиационное затухание колебаний диполей $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{D}/3c^3$, определяется суммарным дипольным моментом системы $\mathbf{D} = \sum_a \mathbf{d}_a(t)$ и по порядку величины равно: $E_1 \sim \omega_0^3 N d_a / c^3 \sim N d_a / \lambda^3$. Локальное электрическое поле, созданное диполями, порядка $E_2 \sim \sim d_a / l^3 \sim n d_a$. Следовательно, $E_1 / E_2 \sim (L/\lambda)^3 \ll 1$, откуда и видна противоречивость [8]. Как будет показано ниже, учет диполь-дипольного взаимодействия радикально меняет ситуацию. Автору неизвестны работы, в которых аккуратно учтено это взаимодействие, и поэтому ниже будут приведены подробные вычисления. В телах эллипсоидальной формы обнаруживается компенсация дипольного взаимодействия, поэтому в данном разделе обсуждается работа Дикке [8] и следствия из нее в предположении $\hat{H} = \hat{H}_D$:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{v}; & \hat{H}_0 &= \sum_k \omega_k \hat{c}_k^+ \hat{c}_k + \frac{1}{2} \omega_0 R_3; \\ \hat{v} &= \sum_k g_k (R_+ \hat{c}_k + R_- \hat{c}_k^+). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Полный момент τ является сохраняющимся квантовым числом, поскольку $[\tau^2, \hat{H}] = 0$. Он принимает значения $0 \leq \tau \leq N/2$. Оператор \hat{v} изменяет z — проекцию полного спина $\tau_z = (1/2)R_3$ на единицу ($M_f - M_i = \pm 1$) и рождает либо уничтожает один фотон. Если "отключить" \hat{v} , то будем иметь континуум состояний поля и эквидистантный спектр состояний вещества, независимые друг от друга:

$$E_{\tau M} = \omega_0 M, \quad -\tau \leq M \leq \tau.$$

По "золотому" правилу Ферми скорость перехода $(\tau, M) \rightarrow (\tau, M-1)$ равна

$$\begin{aligned} \lambda_M &= \sum_k |\langle 1k, \tau, M-1 | \hat{v} | 0, \tau, M \rangle|^2 2\pi \delta(\omega_k - \omega_0) = \\ &= (\tau - M + 1)(\tau + M)\lambda_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\lambda_0 = 1/\tau_0 = 4\omega_0^3 d^2 / 3c^3$ — скорость спонтанного перехода $2 \rightarrow 1$ изолированного атома. Пусть при $t = 0$ система атомов находится в состоянии $|\tau, M_0\rangle$. В результате излучения средняя энергия $\bar{E} = \omega_0 M$ атомов будет уменьшаться по закону $d\bar{E}/dt = -I$, где $I = \omega_0 \lambda_M \approx \approx I_0(\tau^2 - M^2)$ — полная интенсивность излучения, $I_0 = \omega_0 \lambda_0$ — интенсивность излучения изолированного

атома. Считая дисперсию M малой ($\Delta M \ll \tau$, $M \approx \bar{M}$), отсюда и из (4.11) находим

$$M = -\tau \tanh[\lambda_s \tau(t - t_0)]; \quad (4.12)$$

$$I = I_0 \frac{\tau^2}{\cosh^2[\lambda_0 \tau(t - t_0)]}, \quad (4.13)$$

где t_0 — время задержки импульса, определяемое из начального условия

$$M_0 = \tau \tanh(\lambda_0 \tau t_0). \quad (4.14)$$

Наиболее интересен случай полностью инвертированной при $t = 0$ системы атомов:

$$\tau = \frac{N}{2} = M_0. \quad (4.15)$$

Для нахождения t_0 в (4.14) следует положить $M_0 = \tau - k$, $k \sim 1$ (в этом проявляется ошибка, возникшая при замене $M \rightarrow \bar{M}$). Тогда с логарифмической точностью

$$t_0 = \frac{1}{2\lambda_0 \tau} \ln \tau. \quad (4.16)$$

Из (4.13) видно, что при истечении времени задержки t_0 возникает сильный ($I \sim I_0 N^2$) короткий ($\tau_s \sim 1/\lambda_0 N$) импульс. При этом $t_0 \sim \tau_s \ln N \gg \tau_s$.

Строго говоря, результат (4.13) справедлив только при $k \gg 1$ [2] (при этом выражение под логарифмом в (4.16) следует заменить на τ/k), когда малы флуктуации интенсивности. В случае $k \sim 1$ имеются значительные квантовые флуктуации:

$$\frac{\Delta I}{I} \sim 1, \quad (4.17)$$

т.е. мы имеем дело с макроскопической ($N \gg 1$) квантовой системой. Действительно, согласно (4.12), (4.13) максимум интенсивности достигается в состоянии с нулевой инверсией ($M = 0$), в которое система попадает, проходя через состояния $0 \leq M \leq r$, $r = N/2$. На это затрачивается время $t_0 = \sum_{M=0}^r T_M$, где T_M — длительность перехода $|r, M\rangle \rightarrow |r, M-1\rangle$. Дисперсия t_0 равна

$$\Delta t_0 = [\bar{t}_0^2 - (\bar{t}_0)^2]^{1/2} = \left[\sum_M \overline{(\Delta t_M)^2} \right]^{1/2} \sim \left(\sum_M \lambda_M^{-2} \right)^{1/2} \sim \tau_s, \quad (4.18)$$

откуда и следует (4.17). Расчет среднего времени задержки импульса

$$\bar{t}_0 = \sum_M \bar{T}_M = \sum_M \frac{1}{\lambda_M}$$

снова дает (4.16).

Поучителен прямой квантовомеханический расчет средней интенсивности и ее дисперсии. Пусть тело находится в состоянии $|i\rangle$ с энергией E_i . Тогда классическую формулу (2.6) следует (см. [28]) переписать в виде

$$I = \sum_f \frac{4}{3c^3} (E_f - E_i)^4 |\langle f | \mathbf{D}^- | i \rangle|^2, \quad (4.19)$$

где $\hbar = 1$ и от полного дипольного момента системы $\mathbf{D} = \mathbf{D}^- + \mathbf{D}^+$ ($\mathbf{D}^\pm = \mathbf{d}R_\pm$) оставлена отрицательно-час-

тотная часть \mathbf{D}^- , благодаря чему в сумме (4.19) остаются только слагаемые, соответствующие переходам системы атомов с верхних уровней на нижние, как это и должно быть при излучении в вакуум (см. раздел 1). Используя полноту базиса $|f\rangle$, преобразуем (4.19) к виду

$$\bar{I} = \langle \hat{I} \rangle, \quad (4.20)$$

$$\hat{I} = \frac{4}{3c^3} \mathbf{Q}^+ \mathbf{Q} = I_0 R_+ R_-, \quad (4.21)$$

где $I_0 = \hbar\omega_0\lambda_0$, $\mathbf{Q} = [\hat{H}_a[\hat{H}_a, \mathbf{D}^-]] = \omega_0^2 \mathbf{d}R_-$, $\hat{H}_a = \omega_0 R_3/2$ — гамильтониан атомов. Теперь следует вспомнить, что тело не является замкнутой системой и поэтому обязательно описывается матрицей плотности ρ , к расчету которой сейчас приступим. С гамильтонианом (4.10) коммутирует оператор $(1/2)R_3 + \sum_k c_k^+ c_k$, поэтому сохраняется сумма числа возбужденных атомов и числа фотонов. Пусть для определенности при $t = 0$ все атомы возбуждены, фотоны отсутствуют. Тогда вектор состояния системы запишется в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{M=-r}^{M=r} c_M(t) |r, M\rangle \otimes |r - M \text{ фотонов}\rangle. \quad (4.22)$$

Из ортогональности фотонных состояний следует, что ρ диагональна: $\rho = \text{Sp}_r(|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{diag}(\rho_M)$, где берется след по переменным поля. Числа ρ_M , стоящие на диагоналях матрицы ρ , являются населенностями состояний $|r, M\rangle$ и подчиняются "управляющему" уравнению, которое принимает смысл кинетического:

$$\dot{\rho}_M = -\lambda_M \rho_M + \lambda_{M+1} \rho_{M+1}. \quad (4.23)$$

Отметим, что это уравнение имеет чрезвычайно малую погрешность (порядка $1/\omega_0\tau_s$). В [2] (см. (5.33)) приведено аналитическое решение (4.23), верное в пределе $N \gg 1$, которое позволяет вычислить среднюю интенсивность

$$\bar{I} = \text{Sp}(\rho \hat{I}) = \sum_{M=-r}^r \rho_M I_{MM},$$

где согласно (4.21) $I_{MM} = \hbar\omega_0\lambda_M$, а также дисперсию интенсивности $\Delta I^2 = \text{Sp}[\rho(\hat{I}^2 - (\bar{I})^2)]$ и еще раз убедиться в (4.17).

Может возникнуть сомнение в физическом смысле оператора \hat{I} , поэтому, чтобы еще раз подтвердить квантовый характер сосредоточенной системы атомов Дикке, рассмотрим прямой эксперимент по измерению ее характеристик. На некотором расстоянии ρ от тела для простоты в волновой зоне ($L \ll \rho \ll \lambda$) расположим детектор Унру [52–54], который представляет собой двухуровневый атом с расщеплением ΔE между уровнями $|i\rangle$ и $|f\rangle$ (оператор его дипольного момента обозначим через \mathbf{d}). Система Дикке создает вблизи этого атома поле

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{3\hat{\rho}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{D}}) - \hat{\mathbf{D}}}{\rho^3}, \quad (4.24)$$

которое в результате взаимодействия $-\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{E}}$ (считаем его достаточно слабым) возбуждает атом. Отметим, что это взаимодействие входит в оператор \hat{V}_d . Пусть возбужденный атом в отличие от невозбужденного способен вызвать какую-то цепную химическую реакцию. Это

означает, что нетрудно измерить вероятность W возбуждения атома. По теории возмущений находим

$$W \sim J = \iint_{-\infty}^{\infty} dt dt' \exp[i\Delta E(t - t')] \langle i | \hat{\mathbf{D}}(t) \hat{\mathbf{D}}(t') | i \rangle, \quad (4.25)$$

где $\hat{\mathbf{D}}(t) = \exp(i\hat{H}_D t) \hat{\mathbf{D}} \exp(-i\hat{H}_D t)$ — оператор дипольного момента системы Дикке в гейзенберговском представлении. Если бы система была классической, то в (4.24) оператор $\hat{\mathbf{D}}$ можно было бы заменить на классический дипольный момент \mathbf{D} и тогда вместо (4.25) получим

$$J = \left| \iint_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\Delta E t) \mathbf{D}(t) \right|^2. \quad (4.26)$$

Из (4.25) и (4.26) заключаем, что система является классической (но составленной из квантовых микротома объектов) при условии

$$\langle \mathbf{D}(t) \mathbf{D}(t') \rangle \approx \langle \mathbf{D}(t) \rangle \langle \mathbf{D}(t') \rangle. \quad (4.27)$$

Последнее возможно только при малом разбросе по квантовым числам M :

$$\Delta M \ll N, \quad (4.28)$$

т.е. в состояниях с малыми квантовыми флуктуациями M . В таких состояниях для любых двух физических величин справедливо соотношение

$$\langle AB \rangle \approx \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (4.29)$$

Это пакеты вида

$$\psi = \sum_M c_M |M\rangle, \quad (4.30)$$

где c_M — медленно меняющиеся функции M , локализованные вблизи среднего значения $\bar{M} = \sum_M |c_M|^2 M$; $1 \ll \Delta M \ll N$, $\Delta M^2 = M^2 - (\bar{M})^2$. Впрочем, вместо (4.30) следовало бы писать более строгое выражение, которое получается из (4.22) при замене $|r, M\rangle$ на пакет вида (4.30).

В состоянии СИ (с $\bar{M} = 0$) разброс M велик:

$$\Delta M \sim N, \quad (4.31)$$

и поэтому (4.27) не выполняется. Это видно из (4.12), (4.18). Более того, согласно (4.22) $\langle \mathbf{D} \rangle = 0$, поэтому правая часть (4.27) в отличие от левой вообще равна нулю.

Любопытно проследить за распылением системы по квантовому числу M . Дифференцируя по времени соотношения

$$\bar{M} = \sum_M M \rho_M, \quad \overline{M^2} = \sum_M M^2 \rho_M,$$

из (4.23) получаем

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = - \sum_M \lambda_M \rho_M,$$

$$\frac{d\overline{M^2}}{dt} = - \sum_M (2M - 1) \lambda_M \rho_M \approx - \sum_M 2M \lambda_M \rho_M,$$

$$\frac{d\Delta M^2}{dt} = \sum_M (2\bar{M} - 2M + 1) \lambda_M \rho_M \approx 2 \sum_M (\bar{M} - M) \lambda_M \rho_M.$$

Отсюда и из разложения $\lambda_M \approx \lambda + \lambda'(M - \bar{M})$, $\lambda \equiv \lambda_{\bar{M}}$, $\lambda' = d\lambda_M/dM$ (при $M = \bar{M}$) получаем $d\bar{M}/dt = -\lambda$, $d\Delta M^2/dt = -2\lambda'\Delta M^2$. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\frac{\Delta M^2}{\Delta M_0^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda_{M_0}^2}, \quad (4.32)$$

где ΔM_0^2 — дисперсия M при $t = 0$. Полагая, что в исходном состоянии $\Delta M_0 \sim 1$, из (4.11) и (4.32) находим, что $\Delta M^2 \sim (r^2 - \bar{M}^2)^2/r^2$, откуда следует (4.31).

Итак, система Дикке, заброшенная в верхнее состояние, проявляет себя, как типичный микроскопический квантовый объект. Он отличается от классического объекта в той же степени, что и атом водорода от гипотетического классического атома орбитами Кеплера размером порядка a_0 . Однако опыт по наблюдению этого поведения трудно и даже вряд ли возможно поставить. Дело в том, что в результате слабых случайных внешних воздействий уже в самом начале эволюции система переводится в классическое состояние типа (4.30). Дальнейшая ее эволюция определяется классическими уравнениями движения и характеризуется слабыми флуктуациями согласно (4.32): $\Delta M/N \sim \Delta M_0/k \ll 1$, $k = r - M_0$. Здесь M_0 — квантовое число пакета, в который сколлапсировала система в результате измерения, происходящего при внешнем воздействии. Подобные идеи неявно высказаны в [2]. Возможность измерений без участия наблюдателя обсуждается в [55–57]. "Ответственность" за необратимость, которая должна быть свойственна измерениям, согласно [55–57], возлагается на внешний мир, обладающий большим числом степеней свободы. Предполагается, что механизм необратимости будет выяснен в будущем.

Предположим, что поставлен идеальный опыт при температуре $T \rightarrow 0$ и внешними воздействиями можно пренебречь. В этом случае исходное состояние Дикке возмущается диполь-дипольным взаимодействием, которое не сохраняет кооперативное квантовое число τ :

$$[\tau^2, V_d] \neq 0. \quad (4.33)$$

При $t = 0$ все атомы находятся в состоянии $|2\rangle$. При учете V_d у них появляется малая примесь состояния $|1\rangle$: $|\psi\rangle = |2\rangle + \alpha|1\rangle$, где

$$\alpha \sim \frac{1}{\hbar\omega_0} \sum_b (V_d)_{ab} \sim \frac{nd^2}{\hbar\omega_0},$$

следовательно, при $t = 0$

$$\langle R_- \rangle \sim \langle R_+ \rangle \sim N\alpha. \quad (4.34)$$

Следует заметить, что у диполь-дипольного взаимодействия имеются флуктуирующая и постоянная (дальнодействующая) части (см. ниже). Макроскопические характеристики тела определяются постоянной частью, что и учтено в (4.34); вклад от флуктуирующей части равен нулю.

Теперь обсудим упомянутые выше классические уравнения движения и следствия из них, которые понадобятся нам в дальнейшем. Проще всего их можно получить из операторных уравнений Гейзенберга (такой вывод классических уравнений не должен казаться странным, по-

скольку не существует классического двухуровневого атома). Напомним, что в представлении Гейзенберга любой оператор A удовлетворяет уравнению $i\hbar dA/dt = [A, H]$, где в данном случае $H = H_D$. Искомые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} i\dot{c}_k - \omega_k c_k &= g_k R_-, & i\dot{c}_k^+ + \omega_k c_k &= g_k R_+, \\ i\dot{R}_- &= \omega_0 R_- - \sum_k g_k R_3 c_k, & i\dot{R}_+ &= -\omega_0 R_+ + \sum_k g_k R_3 c_k^+, \\ i\dot{R}_3 &= 2 \sum_k g_k (R_+ c_k - R_- c_k^+). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Следующий шаг состоит в замене операторов в этих уравнениях на c -числа — среднее по пакету (4.30) (обладающие свойством (4.29)). Две первых формулы в (4.35) представляют собой уравнения Максвелла. Замечая, что при $t = 0$ поле отсутствует, находим

$$c_k(t) = -ig_k \exp(-i\omega_k t) \int_0^t \exp(i\omega_k t') R_-(t') dt'. \quad (4.36)$$

Электрическое поле связано с операторами c_k, c_k^+ (теперь — это c -числа):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \mathbf{e}_k \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{v}} [c_k \exp(i\varphi) + c_k^+ \exp(-i\varphi)], \quad (4.37)$$

где $\varphi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t$. В отличие от c_k, c_k^+ поле является наблюдаемой величиной.

Впрочем, по этому поводу уместно следующее замечание. Стоит вспомнить, что "поле есть сила, деленная на заряд" и обратить внимание на любопытную точку зрения (см. [54] и ссылки в ней), согласно которой наблюдаемым является не поле, а отклик детектора на это поле, т.е. вероятности (4.25). Встав на эту точку зрения (по сути дела — это операционализм), легко разрешить парадоксы, содержащиеся в вопросах "излучает ли заряд, висящий над Землей?", "излучает ли равноускоренный заряд?" и т.п. (обсуждение этих вопросов можно найти в [39, 58, 59]). Нетривиальный вывод, который отсюда следует, заключается в неинвариантности и вспомогательном, промежуточном характере понятия частицы [52, 60].

Очевидно, в последние три уравнения (4.35), определяющие поведение атомов, входит электрическое поле в пределах системы ($r \sim L$). Отсюда, после подстановки (4.36) в (4.37) и суммирования по k , становится ясно, что основной вклад в $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ дают частоты ω_k и времена t' такие, что

$$|\omega_k - \omega_0| \lesssim \frac{c}{L}, \quad t - t' \lesssim \frac{L}{c}. \quad (4.38)$$

Это — запаздывание электромагнитных сигналов, а указанная выше подстановка дает ни что иное, как формулу "запаздывающих потенциалов" для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. В асимптотической области $r \rightarrow \infty$ меняется первое из соотношений (4.38): здесь основную роль играют резонансные фотоны $\omega_k \approx \omega_0$, что соответствует сформированным расходящимся электромагнитным волнам.

Согласно третьему и четвертому уравнениям (4.35)

$$R_{\pm}(t) = \exp(\pm i\omega_0 t) F_{\pm}(t), \quad (4.39)$$

где $F_{\pm}(t)$ — функции, медленно меняющиеся по сравнению с экспоненциальным множителем:

$$\left| \frac{1}{F_{\pm}} \frac{dF_{\pm}}{dt} \right| \sim \frac{1}{\tau_s} \ll \omega_0. \quad (4.40)$$

Комбинируя (4.39) с (4.36), получаем

$$c_k(t) = -ig_k \exp(-i\omega_k t) Q, \quad Q = \int_0^t e_1 F_-(t') dt', \quad (4.41)$$

где $e_1 = \exp[i(\omega_k - \omega_0)t']$. Отсюда из (4.38) и (4.40) видно, что при условии (2.12), которое заведомо выполняется в рассматриваемом случае Дикке (2.4), множитель F_- в (4.41) изменяется медленно по сравнению с e_1 . Из второго соотношения (4.38) заключаем, что $F_-(t')$ следует вынести из-под интеграла Q и положить $t' = t$: $Q \rightarrow F_-(t) \int_0^t e_1 dt'$. Если иметь в виду только выражение (4.41), то данная операция некорректна. Тем не менее, как объяснялось выше, она дает правильное значение электрического поля.

Произведя указанные манипуляции и интегрируя по dt' , получаем следующее правило замены:

$$c_k(t) \rightarrow -ig_k R_-(t) f(\omega_k - \omega_0), \quad (4.42)$$

$$f(\Omega) = \frac{1 - \exp(-i\Omega t)}{i\Omega} \approx \pi \delta(\Omega) - iP\left(\frac{1}{\Omega}\right), \quad (4.43)$$

где последнее приближение справедливо при $\omega_0 t \gg 1$ (см. Приложение А в [48]). После подстановки (4.42) в (4.35) последнее слагаемое в (4.43) дает небольшой сдвиг частоты ω_0 (его называют коллективным лэмбовским сдвигом). Знак этого частотного сдвига зависит от R_3 и поэтому различен в начале и конце СИ (это эффект модуляции частоты [1]). Поскольку сдвиг мал по сравнению с ω_0 , в дальнейшем в (4.43) сохраняем только первое слагаемое:

$$\begin{aligned} c_k(t) &\rightarrow -\pi ig_k R_-(t) \delta(\omega_k - \omega_0), \\ c_k^+(t) &\rightarrow \pi ig_k R_+(t) \delta(\omega_k - \omega_0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Аналогичные преобразования можно проделать не только с c -числами, но и с операторами Гейзенберга. Операторные соотношения (4.44) составляют суть метода исключения бозонных переменных, который справедлив, как мы видели, в марковском пределе (2.12).

Во избежание недоразумений необходимо сделать следующее пояснение. Пространство волновых векторов фотонов мы разбили на две части: $k < k_1$ и $k > k_1$. Вторая из них дала диполь-дипольное взаимодействие V_d . Фотоны этой области в дальнейшем ни в каких процессах не участвуют, поэтому первое слагаемое в (4.6) можно отбросить. Тогда остаются только фотоны первой области. Именно для них справедливы формулы (4.44), а вторым нерезонансным слагаемым в (4.43) можно пренебречь. Можно рассуждать по-другому [2, 51] и не вводить две области фотонов. Тогда нерезонансное слагаемое в (4.43) дает V_d (это видно уже из формулы (4.5), которая соответствует (4.43) при $\omega_k \gg \omega_0$), причем основной вклад в V_d вносит область $k > k_1$.

После подстановки (4.44) в последние три уравнения (4.35) получаем уравнения для атомной подсистемы с

исключенным полем:

$$\begin{aligned} \dot{R}_- &= -i\omega_0 R_- + \frac{1}{2} \lambda_0 R_3 R_-, \\ \dot{R}_+ &= i\omega_0 R_+ + \frac{1}{2} \lambda_0 R_3 R_+, \quad \dot{R}_3 = -2\lambda_0 R_+ R_-, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где учтено соотношение

$$\lambda_0 = 2\pi \sum_k g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0) = \frac{4k^3 d^2}{3\hbar}. \quad (4.46)$$

Уравнения (4.45) справедливы и для операторов. Некоммутативность R_3 , R_{\pm} вносит в них пренебрежимо малую погрешность (порядка $1/N$).

Наличие интеграла движения τ^2 (энергетический спин),

$$\tau^2 = \frac{1}{4} R_3^2 + \frac{1}{2} (R_+ R_- + R_- R_+), \quad (4.47)$$

позволяет свести (4.45) к уравнению (для c -чисел слагаемое в скобках в (4.47) равно $2R_+ R_-$) $\dot{R}_3 = -2\lambda_0(\tau^2 - R_3^2/4)$. Его решение с начальными условиями (4.34) определяется формулами (4.12), (4.13), в которых

$$t_0 = \frac{1}{\lambda_0 \tau} \ln \frac{1}{\alpha}. \quad (4.48)$$

Из проведенного анализа заключаем, что опыт по наблюдению квантового поведения системы Дикке вряд ли возможен, поскольку она всегда переходит в классическое состояние.

Эффект СИ имеет красивую электродинамическую аналогию [61]. Рассмотрим классический магнит с магнитным моментом \mathbf{M} , находящийся в невесомости и помещенный во внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 . На него действует вращающий момент $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_0$ и поэтому магнит начнет вращаться, а следовательно, излучать. Теряя энергию на излучение, он, наконец, займет энергетически наиболее выгодное положение $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}_0$. Процесс описывается уравнением [61] $\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})$, где γ — гиромангнитное отношение, $\mathbf{h} = 2\ddot{\mathbf{M}}/3c^3 \approx -2\omega_0^2 \mathbf{M}/3c^3$, $\omega_0 = \gamma |\mathbf{H}_0|$. Уравнение легко интегрируется. Для проекции M_z на направление \mathbf{H}_0 получается формула вида (4.12), а для интенсивности излучения (4.13).

Подведем итоги данного раздела. Пусть в начальный момент времени корреляции между атомами отсутствуют. Затем некоторые атомы совершают спонтанные переходы, в результате которых случайным образом возникают затравочные корреляции фаз атомов. Далее эти корреляции нарастают, и возникает коллективное излучение. Следует заметить, что механизм фазировки содержится в решении Дикке неявным образом и поэтому будет отдельно обсуждаться в следующих разделах. Там же будут рассмотрены эффекты дипольного взаимодействия атомов V_d , которое в [8] неоправданно отброшено. В данном разделе уже указаны некоторые из этих эффектов. Под влиянием V_d , а также слабых внешних возмущений, ансамбль атомов Дикке проявляет себя как классический объект. Как объяснялось выше, причина состоит в том, что дипольное взаимодействие задает малые начальные корреляции и поэтому вместе со спонтанными переходами действует как спусковой механизм, необходимый для фазировки атомов.

5. Нелинейный механизм фазировки атомов

Ранее говорилось, что основу СИ составляет эффект фазировки атомов, т.е. возникновение корреляций между первоначально независимыми атомами. В начале данного раздела уточняется смысл этих корреляций и их связь с фазовыми корреляциями системы классических диполей. В разделе 2 было указано, что имеются два конкурирующих между собой механизма фазировки. На примере сосредоточенной модели Дикке в данном разделе рассматривается первый из них — нелинейный.

Формулы (4.20), (4.21) перепишем в виде

$$\bar{I} = I_0(\sigma + S), \quad (5.1)$$

$$\sigma = \sum_a \langle \sigma_a^+ \sigma_a^- \rangle, \quad S = \sum_{a \neq b} S_{ab}, \quad S_{ab} = \langle \sigma_a^+ \sigma_b^- \rangle. \quad (5.2)$$

Первое слагаемое в (5.1) описывает спонтанные переходы ($\sigma \sim N$). Если $S_{ab} \neq 0$, то $S \sim N^2$, поэтому второе слагаемое описывает коллективное излучение.

В модели Дикке атомы равноправны, поскольку отброшено V_d , следовательно, S_{ab} одинаковы для всех (a, b) , что позволяет вычислить эти корреляторы:

$$\langle R_+ R_- \rangle = (\tau + M)(\tau - M + 1) = N \langle \sigma_1^+ \sigma_1^- \rangle + N(N-1)S_{ab}.$$

Отсюда, отбрасывая малые порядка $1/N$, находим

$$S_{ab} = \frac{1}{N^2}(\tau^2 - M^2), \quad (5.3)$$

где были учтены соотношения

$$\sigma^+ \sigma^- = \frac{1 + \sigma_z}{2}, \quad \langle \sigma_1^z \rangle = \frac{1}{N} \langle R_3 \rangle = \frac{2M}{N}. \quad (5.4)$$

Если $S_{ab} \neq 0$, то это еще не значит, что между атомами имеются корреляции. Так, в состоянии

$$\psi = \prod_{a=1}^N \varphi_a, \quad \varphi_a = c_1 |1\rangle_a + c_2 |2\rangle_a, \quad (5.5)$$

расчет дает $\langle \sigma_a^+ \rangle = c_1^* c_2$, $\langle \sigma_a^- \rangle = c_1 c_2^*$, поэтому $S_{ab} = \langle \sigma_a^+ \rangle \langle \sigma_b^- \rangle \neq 0$, однако корреляции отсутствуют, поскольку $Q_{ab} = \langle (\sigma_a^+ - \langle \sigma_a^+ \rangle)(\sigma_b^- - \langle \sigma_b^- \rangle) \rangle = 0$.

Заметим, что при

$$c_1 = \cos \alpha \exp\left(\frac{i\beta}{2}\right), \quad c_2 = \sin \alpha \exp\left(-\frac{i\beta}{2}\right)$$

при $\beta = \omega_0 t + \varphi$ имеем колеблющиеся дипольные моменты $\langle \mathbf{d}_a \rangle$ из (2.5), откуда видно соответствие между квантовым и классическим описанием атомов. Отметим, однако, что (5.5) представляет лишь частный случай квантовых состояний, согласующихся с классическим описанием.

Состояния Дикке $|\tau, M\rangle$ не относятся к классу (5.5). Для них имеем

$$\langle \sigma_a^+ \rangle = \frac{\langle \sum_a \sigma_a^+ \rangle}{N} = \frac{\langle R_+ \rangle}{N} = 0, \quad \langle \sigma_b^- \rangle = 0,$$

поэтому $S_{ab} = Q_{ab}$, т.е. в случае $S_{ab} \neq 0$ между атомами имеются корреляции. В некотором смысле состояния Дикке и (5.5) являются предельными случаями. В общем случае система двухуровневых атомов описывается мат-

рицей плотности ρ размера $2^N \times 2^N$. В частных случаях она может распадаться на блоки меньшей размерности, быть диагональной и т.п. При сопоставлении с классическим случаем диагональная матрица ρ соответствует полностью случайной атомной системе, т.е. случайным начальным фазам φ_a .

Если при $t = 0$ система переведена в состояние Дикке $|\tau, \tau\rangle$, то, согласно (5.3), корреляции отсутствуют. С течением времени, как мы видели, система переходит в состояния $|\tau, M\rangle$ с $M < \tau$, для которых $S_{ab} \neq 0$, т.е. возникает корреляция, фазировка атомов. Механизм фазировки становится более понятным, если рассмотреть классический предельный случай — КМС, как это пояснялось во втором разделе.

Этот универсальный механизм, предложенный в 1960 г. А.В. Гапоновым-Греховым [36], наиболее детально изложен в [37]. В работе [43] показано, что в системе классических нелинейных осцилляторов по этому механизму возникает их фазировка и, как следствие, СИ. Подчеркнем, однако, что в [43] по традиции отбрасывалось диполь-дипольное взаимодействие, что неправомерно. В данном обзоре показано, что диполь-дипольное взаимодействие приводит к быстрому СИ части энергии и образованию метастабильного состояния (эффект экранировки). В целом ряде случаев, представляющих практический интерес, нелинейность на этом этапе не проявляется. Совместный учет диполь-дипольного взаимодействия и эффекта нелинейной фазировки является сложной задачей, которую следует решить в будущем. Можно предположить, что нелинейная фазировка может разрушить метастабильное состояние и привести к высвечиванию оставшейся части энергии в режиме сверхизлучения. Вероятно, так происходит в системе двухуровневых атомов.

Следуя [43], отбросим диполь-дипольное взаимодействие и рассмотрим одномерные заряженные осцилляторы ($a = 1, 2, \dots, N$), сосредоточенные в квазистатической области $L \ll \lambda$:

$$\ddot{x}_a + \omega_0^2(1 + \gamma x_a^2)x_a = -\frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} \sum_b \dot{x}_b,$$

где правая часть моделирует радиационное трение. После подстановки

$$x_a = b[F_a(t) \exp(-i\omega t) + F_a^*(t) \exp(i\omega t)]$$

и с точностью до вторых производных от F_a получаем

$$\dot{F}_a + i\delta(|F_a|^2 - 1)F_a = -\frac{1}{2} \beta_0 \sum_b F_b, \quad (5.6)$$

где $\omega = \omega_0 + \delta$, $\delta = 3\gamma\omega_0 b^2/2$, $\beta_0 = 2r_0\omega_0^2/3c$, $r_0 = e^2/mc^2$, b — характерная амплитуда колебаний.

Из компонент комплексной безразмерной амплитуды $F_a = R_a + i\tau_a$ удобно образовать трехмерный двухкомпонентный вектор $\mathbf{r}_a = (R_a, \tau_a, 0)$ с равной нулю z -компонентой. Движение системы осцилляторов тогда довольно наглядно изображается N точками, лежащими в плоскости (x, y) , и описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_a) \times \mathbf{r}_a + \mathbf{f}, \quad (5.7)$$

где $\mathbf{v}_a \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$, $\mathbf{f} = -\beta_0/2 \sum_a \mathbf{r}_a$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = (0, 0, -\delta(r^2 - 1))$. Таким образом, точки совершают круговое движение

вокруг начала координат ($x = y = 0$) с угловой скоростью $\omega = \omega(r)$. Кроме того, если центр тяжести системы точек $\mathbf{p}_0 = \sum_a \mathbf{r}_a / N$ смещен из начала координат, то вся система как целое движется со скоростью \mathbf{f} в направлении, противоположном \mathbf{p}_0 .

В случае $N \gg 1$ применимо континуальное приближение. Из сохранения числа осцилляторов $\partial n(\mathbf{r}, t) / \partial t + \nabla(n\mathbf{v}) = 0$ и следующего из (5.7) свойства $\nabla \mathbf{v} = 0$ заключаем, что движение точек подобно течению несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n = 0, \quad (5.8)$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ — плотность точек на плоскости (x, y) .

Скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ выражается согласно (5.7) через эту плотность

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r} + \mathbf{f}(t); \quad (5.9)$$

$$\mathbf{f}(t) = -\frac{1}{2} \beta \int d^2 r \mathbf{r} n(\mathbf{r}, t), \quad (5.10)$$

поэтому уравнение (5.8) для $n(\mathbf{r}, t)$ является нелинейным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(r, \varphi, t)}{\partial t} - \delta(r^2 - 1) \frac{\partial n}{\partial \varphi} + (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) \frac{\partial n}{\partial r} + \\ + (-f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где φ — угол между \mathbf{r} и осью x .

Пусть при $t = 0$ распределение осцилляторов по фазам равномерное ($n(r, \varphi, 0) = n_0(r)$). Тогда из (5.11) следует, что оно будет стационарным: $n(r, \varphi, t) = n_0(r)$. Исследуем устойчивость такого распределения, для чего линеаризуем (5.11) по малому возмущению $n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} n(r, \varphi, t) = n_0(r) + n^{(1)}(r, \varphi, t); \\ \frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} - \delta(r^2 - 1) \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \varphi} + (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) n_0'(r) = 0; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \beta_0 \int d^2 r \mathbf{r} n^{(1)}(\mathbf{r}, t). \quad (5.13)$$

Разложим $n^{(1)}$ по собственным модам:

$$n^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} n_m(r, t) \exp(im\varphi), \quad n_m = n_m^*.$$

Моду с $m = 0$ следует отнести к $n_0(r)$, поэтому $n_0 = 0$. Скорость \mathbf{f} определяется дипольными ($m = \pm 1$) модами: $f_x = (\tau + \tau^*)/2$, $f_y = i(\tau - \tau^*)/2$, где

$$\tau(t) = -\pi \beta_0 \int_0^{\infty} dr r^2 n_1(r, t).$$

Отсюда и из (5.12) получаем

$$\frac{\partial n_1(r, t)}{\partial t} - i\delta(r^2 - 1)n_1(r, t) - \frac{\pi}{2} \beta_0 \tau(t) n_0'(r) = 0; \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial n_m(r, t)}{\partial t} - im\delta(r^2 - 1)n_m(r, t) = 0, \quad m \neq \pm 1. \quad (5.15)$$

Согласно (5.15) $n_m(r, t) = n_m(r, 0) \exp[im\delta(r^2 - 1)t]$, поэтому при $t \rightarrow \infty$ моды $m \neq \pm 1$ дают в $n(\mathbf{r}, t)$ все

быстрее и быстрее осциллирующий при изменении r вклад. Это означает, что моды $m \neq \pm 1$ дают в любую наблюдаемую величину (интенсивность квадрупольного излучения и т.д.) экспоненциально убывающий при $t \rightarrow \infty$ вклад.

Решение (5.14) для дипольной моды ищем в виде $n_1(r, t) = \exp(pt)n_1(r)$, где $p = p' + ip''$ — комплексное число, заранее предполагая, что существует неустойчивость ($p' > 0$). Тогда находим

$$n_1(r) = \frac{\pi \beta_0 n_0'(r)}{2[p - i\delta(r^2 - 1)]} \tau_0; \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} dr r^2 n_1(r).$$

Отсюда следует уравнение $\tau_0 \Delta = 0$, следовательно,

$$\Delta = 1 + \frac{\beta_0 N}{2} (\tau_1 + i\delta \tau_2) = 0, \quad (5.16)$$

$$\tau_1 = \int_0^{\infty} \frac{dr g_0(r)r}{p - i\delta(r^2 - 1)}, \quad \tau_2 = \int_0^{\infty} \frac{dr g_0(r)r^2}{[p - i\delta(r^2 - 1)]^2}. \quad (5.17)$$

Здесь введена функция распределения осцилляторов по энергиям $g_0(r)$: $g_0(r) = (2\pi/N)n_0(r)$, нормированная условием

$$\int_0^{\infty} dr r g_0(r) = 1. \quad (5.18)$$

Исследуем интересный случай малого начального (при $t = 0$) разброса осцилляторов по энергиям $\Delta E/E \ll 1$, когда все точки в плоскости (x, y) сосредоточены вблизи окружности $r = 1$, смещенной относительно окружности $r = 1$ на Δy в положительном направлении оси y (рис. 7). Поскольку $|z| \sim \Delta E/E$, где $z = r - 1$, то

$$|z| \ll 1. \quad (5.19)$$

Формулы (5.17), (5.18) упрощаются:

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz g_0(z)}{p - 2i\delta z}, \quad \tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz g_0(z)}{(p - 2i\delta z)^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz g_0(z) = 1.$$

Пусть

$$g_0(z) = \frac{\Delta z}{\pi} \frac{1}{z^2 + (\Delta z)^2}.$$

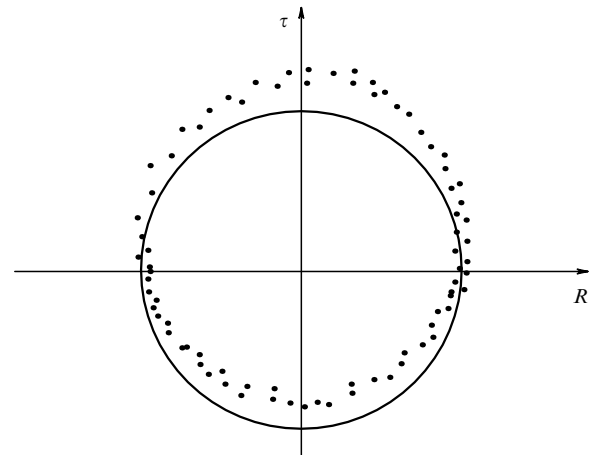


Рис. 7. Фазовое распределение осцилляторов в начальном состоянии.

Тогда

$$\tau_1 = \frac{1}{p + 2\delta\Delta z}, \quad \tau_2 = \frac{1}{(p + 2\delta\Delta z)^2}.$$

Отсюда и из (5.16) получаем

$$p = -2\delta\Delta z - \frac{\beta_0 N}{4} + \frac{\beta_0 N}{4} \sqrt{1 - i\theta}, \quad (5.20)$$

где

$$\theta = \frac{8\delta}{\beta_0 N}, \quad (5.21)$$

а при извлечении корня следует взять его значение с положительной вещественной частью. Случай $p' > 0$ возможен только при выборе знака "+" в (5.20), откуда следует

$$p' = \frac{\beta_0 N}{4} (-\theta\Delta z - 1 + D), \quad (5.22)$$

где

$$D = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \right]^{1/2}.$$

При $\Delta z \neq 0$ вращение точек вокруг начала координат является неравномерным, имеется разброс $\Delta\omega$ по частотам ω . Точки с $r > 1$ движутся по часовой стрелке, а с $r < 1$ — против (для конкретности рассматривается случай $\delta > 0$). Из-за разброса частот возмущение n_1 растягивается в азимутальном направлении (по φ) и вследствие этого затухает, что описывается вторым слагаемым в (5.12). Третье слагаемое описывает эффект фазировки осцилляторов. Пусть при $t = 0$ все точки сосредоточены в верхней части окружности $r = 1$ (см. рис. 7). Тогда в результате излучения в начальный момент времени окружность как целое будет смещаться со скоростью Γ вниз — в отрицательном направлении оси y . Начальное смещение частиц по радиусу r зависит от начального угла φ (фазы): $\Delta r \approx \Delta y \sin \varphi$. Каждая из этих точек начнет вращаться с частотой $\omega = -2\delta\Delta y \sin \varphi$ против часовой стрелки, причем точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ остаются неподвижными и расположены по-прежнему на окружности $r = 1$ (с точностью до Δy^2). Тогда точки начнут сгущаться вблизи $\varphi = \pi$. Это и есть начальная стадия фазовой группировки (рис. 8). В дальнейшем движение точек становится более сложным и уже не сводится к простой группировке по углу φ .

Таким образом, 2-е и 3-е слагаемые в (5.22) описывают формирование сгустков частиц, ведущее к испусканию всей энергии в режиме сверхизлучения. Первое слагаемое описывает противоположный эффект — расщепление сгустков, в результате действия которого сверхизлучение может не возникнуть. Из (5.22) и условия $p' > 0$ заключаем, что нелинейная "раскачка" сверхизлучения возникнет лишь при достаточно малом разбросе осцилляторов по энергиям:

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \Delta z < \frac{D - 1}{\theta}. \quad (5.23)$$

Вспоминая, что диполь-дипольное взаимодействие приводит к когерентному, сохраняющему фазы запирающему излучению (экранировке), приходим к выводу о сложно-

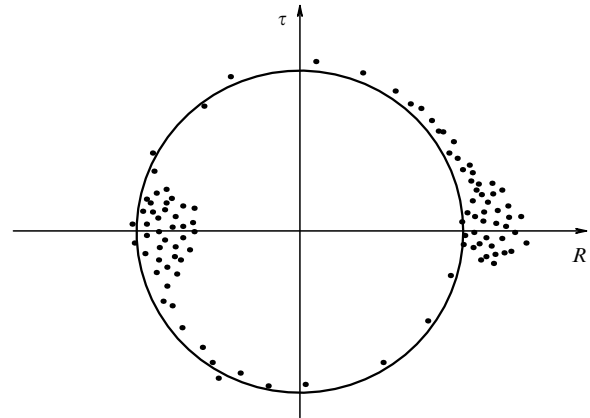


Рис. 8. Нелинейная фазировка осцилляторов.

сти явлений, возникающих при одновременном действии всех рассмотренных эффектов. Это одна из задач, которые предстоит решить в будущем, а теперь на основе линейной КМС проанализируем роль диполь-дипольного взаимодействия атомов.

6. Уравнения классической модели сверхизлучения. Дипольный механизм фазировки

Квантовомеханическая задача о СИ весьма сложна. В рамках, например, гейзенберговского подхода требуется решить систему нелинейных операторных уравнений. Применяемые для их упрощения приближения, которые будут обсуждаться в следующих разделах, обладают ограниченной и чаще неясной областью применимости. Многие трудные вопросы позволяет решить КМС, поэтому классический и квантовый подходы дополняют друг друга. К таким вопросам относится нелинейный механизм фазировки, который в предыдущем разделе стал понятен после отбрасывания дипольного взаимодействия атомов. Для выяснения роли этого взаимодействия рассмотрим другой предельный случай — не будем учитывать эффекты нелинейности и проанализируем лоренцеву модель атомов, представленных заряженными гармоническими осцилляторами.

Будем считать, что в точках с координатами \mathbf{r}_a ($a = 1, \dots, N$) закреплены пружинки и сосредоточены компенсирующие заряды $-e$. На концах пружинок закреплены точечные массы m , несущие заряд e . Координаты a -го заряда, отсчитанные от точки закрепления \mathbf{r}_a , равны ξ_a . Потенциальную энергию пружинки будем считать гармонической: $U_a = m\omega_0^2 \xi_a^2 / 2$. Таким образом, мы не учитываем нелинейные эффекты, а также движение атомов и связанное с ним доплеровское уширение спектральных линий. Такое уширение мало по сравнению с диполь-дипольным и естественным. По поводу последнего заметим, что вследствие кратковременности процесса сверхизлучения оно значительно превосходит обычное естественное уширение для уединенного атома [8]. В случае (2.42в) доплеровское уширение будет строго учтено и оказывается существенным, что связано с большими размерами плазмы, к которой будет применена развитая теория. Движение зарядов считаем нерелятивистским (релятивистские эффекты рассмотрены позже), что позволяет пренебречь влиянием магнитного

поля и записать уравнения движения в виде:

$$m\ddot{\xi}_a + m\omega_0^2\xi_a = e\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t); \quad (6.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{b=1}^N \mathbf{V}_r \times \left[\mathbf{V}_r \times \frac{\xi_b(t - R_b/c)}{R_b} \right], \quad (6.2)$$

где $\mathbf{R}_b = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$. Выражение для электрического поля диполей взято из [9].

При подстановке (6.2) в (6.1) возникает бесконечное слагаемое в $\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)$ с $b = a$. Для корректного расчета этого слагаемого следует "размазать" заряды $+e$ и $-e$ по областям, имеющим конечные размеры. После этого следует разложить $\xi_a(t - R_a/c)$ по степеням $1/c$ до членов порядка $1/c^3$ включительно. Член нулевого порядка дает собственное поле зарядов $-e$ и $+e$. Очевидно, поле заряда $+e$ не может его же и ускорить, поэтому соответствующее слагаемое равно нулю. Поле заряда $-e$ создает силу, действующую на заряд $+e$. Эту силу следует включить в коэффициент жесткости пружинки и формально опустить, считая гармонический потенциал уже окончательным суммарным потенциалом, действующим на заряд $-e$. Таким образом, слагаемое нулевого порядка приводит к перенормировке коэффициента жесткости пружинки. Слагаемое первого порядка по $1/c$, как это видно из (6.2), равно нулю. Слагаемое второго порядка в $\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)$ приводится к виду $-(4/3e)m_f\ddot{\xi}_a$ и должно быть включено в первый член в левой части (6.1). Величина $m_f = \varepsilon_f/c^2$, где ε_f — энергия электромагнитного облака, окружающего диполь, представляет собой массу этого облака и поэтому должна быть включена в массу m (перенормировка массы). Множитель $4/3$ в свое время вызвал оживленные дискуссии, известные как парадокс "4/3". Давно найденное А. Пуанкаре и другими авторами (см., например, [62]) объяснение этого парадокса состоит в том, что следует учесть силы, не описываемые классической электродинамикой (химическая связь, ван-дер-ваальсово взаимодействие и т.д.), которые препятствуют взаимному отталкиванию отдельных частей заряда. Наконец, слагаемое порядка $1/c^3$ равно

$$\mathbf{E}_f = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}_a = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\xi}_a = -\frac{2e\omega_0^2}{3c^3} \xi_a.$$

Это слагаемое соответствует радиационному трению, которое вызывает затухание колебаний диполя в уединенном атоме. Отметим, что в коллективе атомов к такому затуханию приводят и слагаемые с $b \neq a$. Приближение $\ddot{\xi}_a \approx -\omega_0^2\xi_a$ позволяет избежать неправильных решений, соответствующих самоускоряющемуся заряду [9]. Такие решения появляются вследствие приближенного характера принятой процедуры исключения переменных электромагнитного поля из уравнений движения (пренебрежение слагаемыми порядка $1/c^4$ и выше). Таким образом, система (6.1), (6.2) принимает вид

$$\ddot{\xi}_a + \omega_0^2\xi_a + \gamma\dot{\xi}_a = \frac{e^2}{m} \sum_{b \neq a} \mathbf{V}_a \times \left[\mathbf{V}_b \times \frac{\xi_b(t_{ab})}{r_{ab}} \right], \quad (6.3)$$

где $\mathbf{V}_a = \partial/\partial\mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, $t_{ab} = t - r_{ab}/c$, $\gamma = 2r_0\omega_0^2/3c$, $r_0 = e^2/mc^2$. Далее будем считать, что $\gamma \ll \omega_0$ и, более того, $\gamma N \ll \omega_0$, что соответствует наиболее интересным в практическом отношении случаям. Здесь γN есть ни что

иное, как $1/\tau_s$ — величина, обратная характерному времени сверхизлучения τ_s (см. ниже).

Систему (6.3) следует решить при начальном условии

$$t = 0, \quad \xi_a = \eta_a \cos \varphi_a, \quad \dot{\xi}_a = -\omega_0 \eta_a \sin \varphi_a, \quad (6.4)$$

где η_a , φ_a — начальные амплитуды и фазы осцилляторов. Поскольку мы интересуемся решением при $t > 0$, можно считать, что при $t < 0$ $\xi_a = 0$. Начальная энергия a -го осциллятора равна

$$t = 0, \quad E_0^{(a)} = \frac{1}{2} m\dot{\xi}_a^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2\xi_a^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2\eta_a^2. \quad (6.5)$$

В случае уединенного атома правая часть в (6.3) равна нулю:

$$\xi_a(t) = \eta_a \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi_a), \\ E_a(t) = E_0^{(a)} \exp(-\gamma t),$$

откуда видно, что при сравнении классических и квантовых результатов следует принять для уединенного атома $\gamma = \lambda_0 = 1/\tau_0$.

Из (6.2) следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{e}{rc^2} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \sum_b \ddot{\xi}_b \left(t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_b \right) \right], \quad (6.6)$$

где $t' = t - r/c$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, \mathbf{r} — вектор, проведенный из начала координат (расположенного в произвольном месте) к точке наблюдения.

Вычисляя вектор Умова – Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^2 \mathbf{n},$$

находим интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$:

$$dI = d\Omega \frac{e^2 \omega_0^4}{4\pi c^3} \mathbf{Q}^2, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times \sum_a \xi_a \left(t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_a \right), \quad (6.8)$$

где учтено, что $\ddot{\xi}_a \approx -\omega_0^2\xi_a$.

Система (6.3) существенно упрощается после подстановки

$$\xi_a(t) = \mathbf{F}_a(t) \exp(-i\omega_0 t) + \mathbf{F}_a^*(t) \exp(i\omega_0 t), \quad (6.9)$$

где $\mathbf{F}_a(t)$ в соответствии с (4.40) является медленно меняющейся функцией по сравнению с экспоненциальным множителем. Пренебрегая членами с $\ddot{\mathbf{F}}_a(t)$, полагая $\mathbf{F}_b(t - r_{ab}/c) \approx \mathbf{F}_b(t)$, что справедливо в случае (2.12), который будем рассматривать в данном разделе (о противоположном случае см. в конце раздела 8.2), получаем уравнение для \mathbf{F}_a :

$$\dot{\mathbf{F}}_a + \frac{\gamma}{2} \mathbf{F}_a = i\beta \sum_{b \neq a} \mathbf{V}_a \times \left[\mathbf{V}_b \frac{\exp(ikr_{ab})}{r_{ab}} \times \mathbf{F}_b(t) \right], \quad (6.10)$$

где $\beta = e^2/(2m\omega_0)$, $k = \omega_0/c$. Согласно (6.4) и (6.9)

$$\mathbf{F}_a(0) = \mathbf{B}_a, \quad \mathbf{B}_a = \exp(-i\varphi_a) \frac{\eta_a}{2}. \quad (6.11)$$

Имеется ряд процессов, в которых когерентность теряется [10, 11]: столкновительное тушение атомов, в

результате которого атом совершает безызлучательный неупругий переход, сбой фазы атомов при упругих столкновениях и др. Во втором из этих процессов электронные уровни энергии E_n атома возмущаются при сближении с другим атомом ($E_n \rightarrow E_n + \Delta E_n(t)$), поэтому волновая функция n -го состояния умножается на фазовый множитель $\exp(-i\varphi_n)$,

$$\varphi_n = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta E(t) dt.$$

Дипольный момент перехода $n \rightarrow n'$ умножится на множитель $\exp(-i\varphi_n + i\varphi_{n'})$. Поскольку для разных атомов эти множители разные и не коррелируют друг с другом, то когерентность теряется. Эти процессы учитываются путем введения дополнительного затухания $\gamma \rightarrow \Gamma = \gamma + \gamma_c$, где $\gamma_c = 1/T_2$ — эффективная ширина, учитывающая указанные процессы. Ниже мы будем считать, что $\tau_s \gamma_c \ll 1$, и поэтому опускать γ_c .

Уравнения КМС (6.3), (6.11) являются линейными, т.е. сумма их решений, умноженных на произвольные коэффициенты, снова является решением. Это позволяет применить технику функций Грина. Для этого сначала надо отыскать решение (6.3) $\xi_a^{(b)}(t)$ (функцию Грина) с начальным условием

$$t = 0, \quad \xi_a^{(b)} = \mathbf{n}_b \cos(\varphi_b) \delta_{ab}, \quad \dot{\xi}_a^{(b)} = -\omega_0 \mathbf{n}_b \sin(\varphi_b) \delta_{ab}, \quad (6.12)$$

где δ_{ab} — символ Кронекера ($\delta_{ab} = 0$ при $a \neq b$ и $\delta_{ab} = 1$ при $a = b$). Решение с произвольным начальным условием (6.4) равно

$$\xi_a(t) = \sum_b \xi_a^{(b)}(t). \quad (6.13)$$

Рассмотрим случай полностью некоррелированных при $t = 0$ атомов

$$\langle \exp[i(\varphi_a - \varphi_b)] \rangle = 0. \quad (6.14)$$

Вследствие независимых фаз

$$dI = \sum_b dI_b, \quad (6.15)$$

где dI_b определяется формулами (6.7), (6.8), в которые вместо ξ_a следует подставить $\xi_a^{(b)}$.

В следующих разделах показано, что, несмотря на отсутствие корреляций при $t = 0$, в КМС при $t > 0$ возникают корреляции между атомами и, как следствие, развиваются коллективные когерентные эффекты. Это второй механизм фазировки — дипольный. Обсудим его подробнее.

Рассмотрим для определенности случай (2.42а) и оценим интенсивность I_b для точечного начального условия (6.12). Для оценки I_b и τ_s достаточно считать, что атом с номером b колеблется с постоянной амплитудой: $\xi_b = \mathbf{n}_b \cos(\omega_0 t + \varphi_b)$. Атом b в точке нахождения первоначально невозбужденного атома a создает резонансное поле \mathbf{E}_a , которое начинает раскачивать осциллятор a :

$$E_a \sim \frac{e\eta_b}{R_a^3} \cos(\omega_0 t + \varphi_b); \quad \xi_a \sim \frac{e^2 \eta_b}{m\omega_0 R_a^3} t \sin(\omega_0 t + \varphi_b); \quad (6.16)$$

здесь и далее $\mathbf{R}_a \equiv \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$.

Для оценок будем считать, что типичное расстояние между атомами таково:

$$R_a \sim L. \quad (6.17)$$

Через некоторое время начальная энергия атома b перераспределяется по всем атомам активной среды. Их амплитуда становится порядка

$$\xi_a \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \eta_b. \quad (6.18)$$

Теперь сформировался когерентный ансамбль из N атомов. Когерентность дает в интенсивность I_b множитель N^2 (см. раздел 2), но вследствие (6.18) появляется еще один множитель $(1/\sqrt{N})^2 = 1/N$, поэтому $I_b \sim NI_0$, где I_0 — интенсивность излучения уединенного атома. Отсюда следует оценка $\tau_s \sim \varepsilon_b/I_b \sim \tau_0/N$. Согласно (6.15) полная интенсивность излучения среды из первоначально некоррелированных атомов порядка $I \sim NI_b \sim N^2 I_0$.

Эти рассуждения верны в том отношении, что они указывают на существенную роль коллективных эффектов при излучении атома, окруженного резонансными партнерами, однако они не являются точными. Причина состоит в неправильности оценки (6.17). Это видно уже из (6.16): ξ_a довольно быстро спадает с ростом R_a и, как будет показано в следующем разделе, это обстоятельство вносит существенные изменения в описанную выше простую картину. Будет показано, что атом b создает вокруг себя облако дипольных моментов, колеблющихся в противофазе. В результате возникает экранировка, затрудняющая выход излучения. По этой причине дипольную фазировку было бы точнее назвать антифазировкой.

7. Эффекты дипольного взаимодействия атомов в модели Дикке

В этом разделе в рамках линейной КМС будет учтено дипольное взаимодействие атомов в системе малого размера (2.42а) и тем самым произведено уточнение теории Дикке. К сожалению, расчет удастся провести до конца только для тел эллипсоидальной формы, что, впрочем, достаточно интересно в практическом отношении. Значительная часть раздела посвящена эффекту дипольной экранировки. В конце раздела будут критически проанализированы выводы работ [49–51] о разрушении СИ дипольным взаимодействием атомов.

В уравнении (6.10) в случае $l \ll L \ll \lambda$ следует произвести разложение экспоненты до членов порядка k^3 включительно. Слагаемое порядка k равно нулю, чисто мнимое слагаемое порядка k^2 мало по сравнению с мнимым слагаемым нулевого порядка и поэтому его следует опустить. Как показано в конце данного раздела, попытки учесть слагаемое порядка k^2 приводят к недоразумениям. Слагаемое порядка k^3

$$-\frac{\gamma}{2} \sum_{b \neq a} \mathbf{F}_b$$

является вещественным и поэтому его следует сохранить. Уравнение (6.10) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{F}}_a + \frac{\gamma}{2} \mathbf{F} = i\beta \sum_{b \neq a} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab}\mathbf{F}_b) - \mathbf{F}_b}{(r_{ab})^3}, \quad (7.1)$$

где $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$,

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{F}_a(t). \quad (7.2)$$

В индексной записи (7.1) выглядит так:

$$\dot{F}_{\alpha x} + \frac{\gamma}{2} F_x = i\beta \sum_{b \neq a} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) F_{b\beta}, \quad (7.3)$$

где

$$G_{\alpha\beta} = \frac{3S_\alpha S_\beta - \delta_{\alpha\beta}}{(r_{ab})^3}, \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{n}_{ab}, \quad \alpha, \beta = x, y, z.$$

В (7.3) и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Функция Грина $\mathbf{F}_a^{(b)}(t)$ уравнения (6.10) удовлетворяет начальному условию:

$$t = 0, \quad \mathbf{F}_a^{(b)} = \mathbf{V}_b \delta_{ab}. \quad (7.4)$$

Решение с произвольным начальным условием (6.11) аналогично (6.13) имеет вид

$$\mathbf{F}_a(t) = \sum_b \mathbf{F}_a^{(b)}(t). \quad (7.5)$$

Ниже полагаем, что среда имеет форму эллипсоида. Сюда относятся важные частные случаи шара, эллипсоида вращения и тонкого длинного стержня. Рассмотрим сначала "точечное" решение (7.3) $\mathbf{F}_a^{(b)}$. Для упрощения записи формул ниже будем опускать верхний индекс b .

Интенсивность излучения в случае $l \ll L \ll \lambda$ равна

$$I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{D}})^2 \approx \frac{2\omega_0^4}{3c^3} (\mathbf{D})^2, \quad (7.6)$$

где

$$\mathbf{D} = e \sum_a \xi_a = e [\mathbf{F} \exp(-i\omega_0 t) + \mathbf{F}^* \exp(i\omega_0 t)]. \quad (7.7)$$

Суммируя (7.3) по a , получаем

$$\dot{F}_x + \frac{\gamma N}{2} F_x = i\beta \sum_b \tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) F_{b\beta}, \quad (7.8)$$

где

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) = \sum_a G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}). \quad (7.9)$$

Замечательным обстоятельством, характерным только для эллипсоида, является то, что в данном случае $\tau_{\alpha\beta}$ не зависит от \mathbf{r}_b [63–65] (см. также приложение I). Величину $\tau_{\alpha\beta}$ можно рассчитать, решив известную задачу о диэлектрическом эллипсоиде в однородном внешнем электрическом поле \mathbf{E}_0 . Поле внутри эллипсоида равно

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}',$$

где \mathbf{E}' — собственное поле эллипсоида, созданное всеми дипольными моментами эллипсоида:

$$\mathbf{E}'_\alpha = \sum_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) d_{b\beta} = -4\pi Q_{\alpha\beta} P_\beta, \quad (7.10)$$

где \mathbf{P} — вектор поляризации среды (дипольный момент единицы объема),

$$Q_{\alpha\beta} = r^{(x)} i_\alpha i_\beta + r^{(y)} j_\alpha j_\beta + r^{(z)} K_\alpha K_\beta, \quad (7.11)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{K}$ — единичные векторы, направленные вдоль главных осей эллипсоида, соответствующие полуоси равны a, b, c ; $r^{(x)}, r^{(y)}, r^{(z)}$ — деполяризующие факторы:

$$r^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{dS}{(S+a^2)R_S}, \quad (7.12)$$

где $R_S = \sqrt{(S+a^2)(S+b^2)(S+c^2)}$.

Формулы для $r^{(y)}$ и $r^{(z)}$ получаются из (7.12) после замены множителя $S+a^2$ в знаменателе на $S+b^2$ и $S+c^2$ соответственно. Справедлива формула

$$r^{(x)} + r^{(y)} + r^{(z)} = 1. \quad (7.13)$$

В частности, для шара

$$r^{(x)} = r^{(y)} = r^{(z)} = \frac{1}{3}. \quad (7.14)$$

Выделим шар малого радиуса с центром на атоме a . Тогда

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad (7.15)$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ — поля, созданные диполями, находящимися внутри и вне шара соответственно. По физическому смыслу $\sum_{b \neq a} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) d_{b\beta} = E_{2\alpha}$. Учитывая, что для эллипсоида $\mathbf{d}_b = \mathbf{d} = \text{const}$, находим

$$E_{2\alpha} = \tau_{\alpha\beta} d_\beta = \frac{\tau_{\alpha\beta} P_\beta}{n}. \quad (7.16)$$

Поле \mathbf{E}_1 есть не что иное, как поле внутри шара с однородной поляризацией ($\mathbf{P} = \text{const}$) [63–65]: $\mathbf{E}_1 = -4\pi\mathbf{P}/3$. Отсюда из (7.10), (7.15) и (7.16) получаем

$$\tau_{\alpha\beta} = 4\pi n \left(\frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta} \right). \quad (7.17)$$

Как следует из (7.11), (7.14) и (7.18), для шара

$$\tau_{\alpha\beta} = 0. \quad (7.18)$$

Приведенная выше формула для \mathbf{E}_1 требует специального обсуждения. Она выполняется "в простых", гранецентрированных и объемноцентрированных кубических решетках, а также в изотропных средах" (см. [64], с. 81). Последний случай представляет наибольший интерес для экспериментов по СИ, поскольку они становятся или планируются главным образом в газообразных, жидких или аморфных телах. В [63] (§ 35) утверждается, что среду можно считать изотропной, когда "молекулы газа распределены в пространстве хаотически, причем положение каждой из них практически не зависит от положения других". Согласно [63] под \mathbf{E}_1 следует понимать усредненное по времени поле диполей, находящихся внутри выделенного шара малого радиуса.

Формула (7.1) позволяет конкретизировать эти утверждения. В результате движения атомов слагаемые \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в (7.15) флуктуируют. Флуктуациями \mathbf{E}_2 можно

пренебречь, поскольку соответствующие атомы находятся далеко. Флуктуации \mathbf{E}_1 значительны и возникают вследствие движения ближайших к b атомов, которое характеризуется временем порядка l/v_T и прицельными параметрами $\rho \sim l$. Более редкие столкновения с меньшими прицельными параметрами приводят к сбою фазы. Согласно (2.10) ими следует пренебречь. Поскольку $l/v_T \ll \tau_s$, второе слагаемое в левой части (7.1) следует сейчас отбросить. Предполагая, что флуктуации \mathbf{F}_a малы, запишем эти векторы в виде $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}'_a + \mathbf{F}''_a$, где \mathbf{F}'_a — постоянное слагаемое, \mathbf{F}''_a — флуктуирующее ($|\mathbf{F}''| \ll |\mathbf{F}'|$). Согласно (7.1), изменение F''_a за время Δt (где $l/v_T \ll \Delta t \ll \tau_s$) равно

$$\Delta F''_{ax} \approx i\beta v_0 \Delta t \sum_{b \neq a} \langle f_{x\beta} \rangle F'_{b\beta},$$

где $v_0 \sim v_T/l$ — характерная частота столкновений, угловыми скобками обозначено усреднение по всем возможным столкновениям величины $f_{x\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{x\beta} dt$. Интегрирование здесь проводится по прямолинейной траектории атома a относительно b . Нетрудно убедиться, что усреднение по направлениям относительной скорости атомов дает нуль ($\langle f_{x\beta} \rangle = 0$), поэтому $\Delta \mathbf{F}''_a = 0$, что и требовалось доказать. Заодно мы доказали, что при расчете \mathbf{E}' можно применять континуальное приближение (2.35).

Из приведенных выше рассуждений видно, что приближение изотропной непрерывной среды справедливо при условии $\beta|f_{x\beta}| \ll 1$, т.е.

$$\frac{e^2}{m\omega_0 v_T l^2} \ll 1.$$

Это соотношение легко обобщается на квантовый случай (двухуровневых атомов), если вспомнить, что матричный элемент координаты осциллятора по порядку величины равен $\xi_{01} \sim \sqrt{\hbar/m\omega_0}$:

$$\frac{d^2}{\hbar v_T l^2} \ll 1. \quad (7.19)$$

Другими словами, фазы φ_n (см. конец раздела 6) для столкновений с $\rho \sim l$ должны быть малы. В оптическом диапазоне критерий изотропности и непрерывности (7.19) записывается в виде $n \ll 2 \times 10^{21} \text{ см}^{-3}$ и заведомо выполняется.

Из (7.8) и $\tau_{x\beta}(\mathbf{r}_b) = \text{const}$ следует

$$\dot{F}_x + \frac{\gamma N}{2} F_x = i\beta \tau_{x\beta} F_\beta. \quad (7.20)$$

Согласно (7.4) начальное условие для \mathbf{F} имеет вид: $t = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}_b = B_{bx}\mathbf{i} + B_{by}\mathbf{j} + B_{bz}\mathbf{k}$. Отсюда и из (7.4), (7.7), (7.11), (7.7) получаем

$$\mathbf{F}(t) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}; \quad (7.21)$$

$$F_x = B_{bx} \exp\left(-i\omega_x t - \frac{\gamma N}{2} t\right);$$

$$\mathbf{D}_b(t) = D_x^{(b)} \mathbf{i} + D_y^{(b)} \mathbf{j} + D_z^{(b)} \mathbf{k}; \quad (7.22)$$

$$D_x^{(b)} = e \eta_{bx} \cos[(\omega_0 + \omega_x)t + \varphi_b] \exp\left(-\frac{\gamma N}{2} t\right),$$

где $\omega_x = \omega_d [3n^{(x)} - 1]$, $\omega_d = 4\pi\beta n/3$.

Выражения для F_y , F_z и D_y , D_z получаются из (7.21), (7.22) после замены индекса x на y и z соответственно. Выражениями (7.22) определяется дипольный момент для точечного начального условия (6.12), (7.4). Вследствие линейности (см. (7.5)) дипольный момент среды с произвольным начальным условием (6.4), (6.11) получается при суммировании (7.22) по всем атомам b :

$$\mathbf{D} = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k};$$

$$D_x = e \sum_b \eta_{bx} \cos[(\omega_0 + \omega_x)t + \varphi_b] \exp\left(-\frac{\gamma N}{2} t\right). \quad (7.23)$$

Имея в виду, что $(\mathbf{D})^2 = (D_x)^2 + (D_y)^2 + (D_z)^2$, усредним $(D_x)^2$ по быстрым осцилляциям с периодом $2\pi/\omega_0$:

$$\langle D_x^2 \rangle = \frac{1}{2} e^2 \exp(-\gamma N t) \sum_{a,b} \eta_{ax} \eta_{bx} \cos(\varphi_a - \varphi_b).$$

Соответственно

$$\langle \mathbf{D}^2 \rangle = \frac{1}{2} e^2 \exp(-\gamma N t) g,$$

где

$$g = \sum_{a,b} (\boldsymbol{\eta}_a \boldsymbol{\eta}_b) \cos(\varphi_a - \varphi_b). \quad (7.24)$$

Отсюда и из (7.6) получаем:

$$I = \frac{4e^2 \omega_0^4}{3c^3} g \exp(-\gamma N t). \quad (7.25)$$

Следовательно, полная излученная энергия равна

$$E_r = \int_0^\infty I dt = \frac{m\omega_0^2 g}{2N}.$$

Начальная энергия осцилляторов определяется выражением (6.5):

$$E_0 = \sum_a E_0^{(a)} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \sum_a \eta_a^2.$$

Для отношения этих энергий получаем:

$$\xi = \frac{E_r}{E_0} = \frac{g}{N \sum_a \eta_a^2}. \quad (7.26)$$

Докажем, что $\xi \leq 1$. Из (7.24) $g = \sum_{a,b} \eta_a \eta_b q_{ab}$, где η_a , η_b — модули соответствующих векторов, $q_{ab} = \cos(\alpha_{ab}) \times \cos(\varphi_a - \varphi_b)$, α_{ab} — угол между векторами $\boldsymbol{\eta}_a$ и $\boldsymbol{\eta}_b$. Очевидно, $q_{ab} \leq 1$, поэтому $g \leq \sum_{a,b} \eta_a \eta_b$. Поскольку $\sqrt{\eta_a \eta_b} < (\eta_a + \eta_b)/2$, то

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} \eta_a \eta_b &\leq \sum_{a,b} \left(\frac{\eta_a + \eta_b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{a,b} (\eta_a^2 + \eta_b^2 + 2\eta_a \eta_b) = \\ &= \frac{1}{2} N \sum_a \eta_a^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \eta_a \eta_b. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что $\sum_{a,b} \eta_a \eta_b \leq N \sum_a \eta_a^2$, т.е. $\xi \leq 1$.

Теперь покажем, что $\xi \geq 0$. Рассмотрим выражение $b = \langle [\sum_a \boldsymbol{\eta}_a \cos(\varphi_a + \Psi)]^2 \rangle$, где угловыми скобками обо-

значено усреднение по случайной вспомогательной фазе Ψ . Имеем: $b = \sum_{a,b} \boldsymbol{\eta}_a \boldsymbol{\eta}_b \langle \cos(\varphi_a + \Psi) \cos(\varphi_b + \Psi) \rangle = g/2$. Учитывая, что $b \geq 0$, заключаем, что $\xi \geq 0$. Итак, $0 \leq \xi \leq 1$, т.е. излучается только часть энергии. Возникает вопрос: куда девается оставшаяся энергия?

Причина этого явления заключается в том, что в результате диполь-дипольного взаимодействия активная среда переходит в метастабильное когерентное состояние с $\mathbf{D} = 0$. Оставшаяся энергия излучается за гораздо большее время в виде квадрупольного излучения, либо в результате разрушения метастабильного состояния в процессах атомных столкновений.

Рассмотрим предельный случай $N \rightarrow \infty$ (бесконечная среда). Для нахождения метастабильных состояний решение уравнения (7.3) следует искать в виде

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{F}_a(t) = \mathbf{S}_a \exp(-i\omega t). \quad (7.27)$$

Для амплитуд \mathbf{S}_a получаем уравнение

$$-\omega \mathbf{S}_{ax} = \beta \sum_b \mathbf{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) \mathbf{S}_{b\beta}, \quad (7.28)$$

решение которого ищем в виде

$$\mathbf{S}_{ax}^{(b)} = \mathbf{B}_{bx} \delta_{ab} + \mathbf{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) \mathbf{D}_{b\beta}. \quad (7.29)$$

Из (7.28) и (7.29) с учетом формулы (см. приложение II)

$$\sum_b \mathbf{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) \mathbf{G}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_{bc}) = -\frac{4\pi n}{3} \mathbf{G}_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_{ac}) + \frac{32\pi^2 n^2}{9} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{ac} \quad (7.30)$$

получаем систему уравнений:

$$-\omega \mathbf{B} = \frac{8\pi n \omega_d}{3} \mathbf{D}; \quad -\omega \mathbf{D} = \beta \mathbf{B} - \omega_d \mathbf{D}.$$

Приравняв ее определитель к нулю, находим два решения:

$$\omega_1 = -\omega_d, \quad \omega_2 = 2\omega_d. \quad (7.31)$$

Этим двум частотам соответствуют два решения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a^{(b)}(t) &= \left[\mathbf{B}_b \delta_{ab} + \frac{3}{8\pi n} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab}\mathbf{B}_b) - \mathbf{B}_b}{(r_{ab})^3} \right] \exp(i\omega_d t); \\ \mathbf{F}_a^{(b)}(t) &= \left[\mathbf{B}_b \delta_{ab} - \frac{3}{4\pi n} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab}\mathbf{B}_b) - \mathbf{B}_b}{(r_{ab})^3} \right] \exp(-2i\omega_d t), \end{aligned} \quad (7.32)$$

которые описывают локализованные на атоме b возбуждения активной среды.

Формулы (7.30)–(7.32) справедливы (см. приложение II) с точностью до членов порядка $1/N$, которые в бесконечной среде равны нулю. По этой причине, пользуясь (7.32), нельзя рассчитать дипольный момент среды, чтобы, например, убедиться в равенстве его нулю. Так, для шара из (7.18) и (7.32) следует

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_b \exp(-i\omega t) \neq 0.$$

Однако после добавления к $\mathbf{F}_a^{(b)}$ из (7.32) члена

$$-\frac{1}{N} \mathbf{B}_b \exp(i\omega t)$$

дипольный момент среды обратится в нуль. По этой причине в дальнейшем было бы интересно отыскать решение уравнения (7.3) с точностью до слагаемых порядка $1/N$ включительно, причем для среды произвольной формы. Приведенное же выше решение для эллипсоида, вычисленный на его основе дипольный момент и все выводы, которые были сделаны, являются правильными. Действительно, пусть при расчете $\tau_{\alpha\beta}$ была допущена ошибка порядка $1/N$. Тогда для эллипсоида получили бы

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) = \tau_{\alpha\beta} + \frac{n}{N} Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b), \quad (7.33)$$

где $\tau_{\alpha\beta}$ — прежнее выражение (7.17), $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b)$ — безразмерные величины порядка единицы. Из (7.8) и (7.33) тогда следует уравнение (ср. с (7.20)):

$$\dot{F}_\alpha + \frac{\gamma N}{2} F_\alpha = i\beta \tau_{\alpha\beta} F_\beta + \frac{i\beta n}{N} \sum_b Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) F_{b\beta}.$$

Рассмотрим для простоты случай шара: $\tau_{\alpha\beta} = 0$. Ясно, что величины $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b)$ существенно изменяются лишь на характерном размере среды ($r_b \sim L$). Для оценок порядка величины поправок достаточно рассмотреть случай $Q_{\alpha\beta} = Q \delta_{\alpha\beta}$, где $Q \sim 1$. Тогда вместо (7.21) получаем

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}_b \exp\left(-\frac{\gamma N}{2} t + \frac{i\beta n}{N} Q t\right).$$

Поскольку $N \gg 1$, то этими поправками можно пренебречь.

Решения (7.32) являются лишь частными случаями метастабильных состояний. Такое произвольное состояние имеет вид $\mathbf{F}_a(t) = \sum_b \mathbf{F}_a^{(b)}$, причем здесь $\mathbf{F}_a^{(b)}$ является линейной комбинацией двух решений из (7.32). Собственные моды (7.32) имеют ту же физическую природу, что и поляритоны (см. раздел 10), однако вследствие $L \ll \lambda$ они не распространяются по среде. Эти колебания можно было бы назвать квазистатическими поляритонами.

Случай $\xi = 1$ соответствует полностью когерентной накачке (π -импульсом),

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\eta}_2 = \dots = \boldsymbol{\eta}_N,$$

и является классическим аналогом задачи, рассмотренной Дикке [8]. Из (7.25) следует, что в системе классических осцилляторов при накачке π -импульсом экранировка отсутствует, имеется сверхизлучение ($I \sim N^2$). Спецификой осцилляторов является нулевое время задержки импульса сверхизлучения. Эти обстоятельства указывают на справедливость теории Дикке при полностью когерентной накачке среды, имеющей форму эллипсоида, а значит, и на своеобразную компенсацию диполь-дипольного взаимодействия атомов в этом случае. Достаточно очевидно, что для другой формы среды будут наблюдаться значительные отклонения от теории Дикке.

На основании проделанного выше анализа можно сделать несколько важных выводов.

Согласно [8] состояния Дикке $|\tau, \tau\rangle$ являются метастабильными (это видно из (4.11)). Этот вывод, однако, неверен, поскольку согласно (4.33) такие состояния разрушаются диполь-дипольным взаимодействием.

В данном разделе была рассмотрена линейная КМС. В конце раздела 8.1 показано, что вывод о компенсации диполь-дипольного взаимодействия атомов в теле эллипсоидальной формы при однородной накачке остается справедливым и в более реалистичной модели двухуровневых атомов.

Обсуждаемые в данном разделе эффекты экранировки характеризуются, как мы видели, временем $1/\omega_d$. Все полученные здесь выводы справедливы в приближении изотропной непрерывной среды, которое выполняется, если $1/\omega_d \gg l/v_T$. Нетрудно убедиться, что это соотношение эквивалентно (7.19) и поэтому действительно выполняется.

Специального рассмотрения требуют отброшенные в самом начале этого раздела слагаемые порядка k^2 . Согласно [49–51] эти слагаемые приводят к декорреляции атомов и поэтому СИ в системах (2.4) невозможно. Этот вывод, однако, неверен.

Упомянутые слагаемые относятся к релятивистским поправкам ($\sim 1/c^2$) к уравнениям движения атомов. Лагранжиан атомов с этой точностью имеет вид [9] $L = L_0 + L_1 + L_2$, где L_0 — нерелятивистский лагранжиан (куда входит и V_d)

$$L_1 = \sum_a \frac{m(\dot{\xi}_a)^4}{8c^2}, \quad L_2 = \frac{e^2}{4c^2} \sum_{a \neq b} \frac{1}{r_{ab}} [\dot{\xi}_a \dot{\xi}_b + (\dot{\xi}_a \mathbf{n}_{ab})(\dot{\xi}_b \mathbf{n}_{ab})].$$

В [49–51] учитывалось только L_2 и не учитывалась релятивистская поправка к кинетической энергии L_1 . Поскольку в атоме $m\dot{\xi}_a^2 \sim e^2/a_0$, то

$$\frac{L_2}{L_1} \sim \frac{a_0}{l} \ll 1. \quad (7.34)$$

Таким образом, в [49–51] отбрасывалось гораздо большее по величине нелинейное слагаемое L_1 , которое согласно разделу 5 вызывает корреляцию, фазировку атомов. Отсюда видно, что L_2 следует отбросить. Учет L_1 в двухуровневых атомах не имеет смысла, поскольку здесь уже имеется сильная нелинейность. Член L_1 играет ключевую роль в мазерах на циклотронном резонансе [37, 40, 41]. Для переноса циклотронных волн в замагниченной плазме этим слагаемым в лагранжиане можно пренебречь (см. раздел 12).

В качестве главного результата данного раздела следует назвать обоснование осуществимости СИ при однородной накачке малых тел ($L \ll \lambda$) эллипсоидальной формы. Соответствующие опыты могут быть поставлены на основе методики электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) с использованием генератора СВЧ — импульсов с длиной волны 3 см, длительностью 1 мкс и плотностью потока энергии электромагнитного поля порядка 3 Вт см⁻². Еще один результат данного раздела состоит в учете диполь-дипольного взаимодействия атомов, вызывающего эффект экранировки. Другой эффект проявляется в сильной зависимости характера СИ от формы тела. Задачу о СИ из тела произвольной формы необходимо решить в будущем.

8. Сверхизлучение в протяженных телах в марковском пределе

Как говорилось в разделе 2, наибольший практический интерес представляет СИ в протяженных телах ($L \gg \lambda$).

Удивительно то, что несмотря на большой набег фазы на размере тела физика СИ в этом случае существенно не отличается от явлений, происходящих в теле малого размера ($L \ll \lambda$): снова осуществляется фазировка атомов с последующим СИ. Итак, проанализируем явления СИ в марковском пределе $\lambda \ll L \ll c\tau_s$.

Сначала будет рассмотрено СИ в системе двухуровневых атомов. Возникающие в рамках этого квантово-механического подхода трудности в разделе 8.2 будут разрешены на основе КМС.

8.1. Двухуровневые атомы

Чтобы упростить изложение, рассмотрим сначала случай (2.22), когда согласно разделам 2 и 4 после каждого рассеяния на атомах успевают формироваться новые электромагнитные волны (случай $l \ll \lambda$ будет рассмотрен позже). В начале данного раздела будем частично следовать работе [1].

Наша цель состоит в расчете интенсивности излучения

$$I = - \left\langle \frac{d\hat{H}_a}{dt} \right\rangle = - \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \langle \dot{R}_3 \rangle. \quad (8.1)$$

Эта формула верна при условии (2.12), когда излучение не задерживается внутри тела.

Уравнение Гейзенберга для \dot{R}_3 следует из (3.5)–(3.10):

$$i\dot{R}_3 = 2 \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (R_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} - R_{\mathbf{k}}^- c_{\mathbf{k}}^+). \quad (8.2)$$

Здесь (и далее) в соответствии с (2.22) и выводами раздела 4 опускаются нерезонансные слагаемые вида $R^+ c^+$, $R^- c$ и т.д. Теперь нужно замкнуть систему уравнений, для чего выпишем уравнения для фотонных операторов:

$$i\dot{c}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}}^-, \quad i\dot{c}_{\mathbf{k}}^+ = -\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+ - g_{\mathbf{k}} R_{\mathbf{k}}^+,$$

где снова опущены нерезонансные члены. Отсюда по методу исключения бозонных переменных (см. раздел 4), справедливому в марковском пределе (2.12), находим (ср. с (4.44)):

$$c_{\mathbf{k}} = -\pi i g_{\mathbf{k}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) R_{\mathbf{k}}^-, \quad c_{\mathbf{k}}^+ = \pi i g_{\mathbf{k}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) R_{\mathbf{k}}^+. \quad (8.3)$$

Отсюда и из (8.1), (8.2), проведя суммирование по поляризациям фотонов, получим (ср. с (5.1), (5.2)):

$$I = \sum_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}} = \frac{I_0}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (S_0 + S_{\mathbf{k}}), \quad (8.4)$$

$$I_{\mathbf{k}} = 4\hbar\omega_0 p_{\mathbf{k}} (S_0 + S_{\mathbf{k}}),$$

$$S_0 = \sum_a \langle \sigma_a^+ \sigma_a^- \rangle = \frac{1}{2} N(1 + \sigma), \quad (8.5)$$

$$S_{\mathbf{k}} = \sum_{a \neq b} S_{ab} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)], \quad (8.6)$$

$$\dot{\sigma} = -\lambda_0(1 + \sigma) - \frac{\lambda_0}{2\pi N} \int d\Omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}, \quad (8.7)$$

$$p_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi^2 \omega_{\mathbf{k}}}{v} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{d})^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0), \quad (8.8)$$

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{3}{2} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{d}})^2; \quad \hat{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}}{d}; \quad \sigma = \frac{\langle R_3 \rangle}{N}. \quad (8.9)$$

В (8.4) и (8.7) проводится интегрирование по направлениям \mathbf{k} . В (8.4)–(8.9) предполагается, что распределение возбужденных атомов по телу является однородным, а именно, что величины

$$L_{ab} \equiv \langle \sigma_a^z \sigma_b^z \rangle; \quad \sigma \equiv \langle \sigma_a^z \rangle \quad (8.10)$$

не зависят от индексов (a, b) (поскольку $(\sigma_a^z)^2 = 1$, полагаем, что $a \neq b$). Первым необходимым условием однородности (8.10) является однородность накачки атомной системы, что в случае (2.12) легко осуществляется. Вторым условием однородности является (2.27). Далее в данном разделе показано, что СИ представляет собой узкий пучок (точнее два противоположно направленных пучка), направленный вдоль вполне определенной оси, соответствующий наибольшему размеру тела (назовем ее "осью тела"). Область ОКИ, связанная с данным атомом, вытянутая вдоль оси тела, по форме совпадает с аналогичной зоной, связанной с другим атомом, поэтому атомы находятся в одинаковых условиях. Однородность не выполняется лишь для малой доли атомов, расположенных в поверхностном слое тела толщиной R/\sqrt{F} . Исследование показывает, что обсуждаемое условие выполняется в практически интересном случае значительно вытянутых тел ($R \ll L$).

Вместе с условием однородности (8.10) примем условие классичности атомной подсистемы, которое обсуждалось в разделе 4 (ср. с (4.28)):

$$\Delta R_3 \ll N \quad \text{или} \quad \langle R_3^2 \rangle \approx \langle R_3 \rangle^2. \quad (8.11)$$

Суммируя L_{ab} по индексам, из (8.10), (8.11) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{a \neq b} L_{ab} &= N(N-1)L_{ab} = \sum_{a,b} \langle \sigma_a^z \sigma_b^z \rangle - \sum_a \langle (\sigma_a^z)^2 \rangle = \\ &= \langle R_3^2 \rangle - N \approx \langle R_3 \rangle^2; \quad \langle \sigma_a^z \sigma_b^z \rangle \approx \langle \sigma_a^z \rangle \langle \sigma_b^z \rangle = \sigma^2; \\ \langle (R_k^z)^2 \rangle &= \langle R_k^z \rangle^2 + \sum_a (1 - \sigma^2) \exp(2i\mathbf{k}\mathbf{r}_a) \approx \langle R_k^z \rangle^2. \end{aligned}$$

Из этих соотношений заключаем, что операторы σ_a^z и R_k^z можно считать c -числами:

$$\hat{\sigma}_a^z \approx \sigma, \quad \hat{R}_k^z \approx \sigma N p(\mathbf{k}), \quad (8.12)$$

где

$$p(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_a \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_a).$$

Тем самым обосновано принятое в [1] (§ 4.1.4) без доказательства правило расщепления операторов

$$\langle \sigma_a^z \sigma_b^+ \sigma_c^- \rangle \approx \langle \sigma_b^+ \sigma_a^z \sigma_c^- \rangle \approx \langle \sigma_b^+ \sigma_c^- \sigma_a^z \rangle \approx \langle \sigma_a^z \rangle \langle \sigma_b^+ \sigma_c^- \rangle. \quad (8.13)$$

С учетом (8.12) гейзенберговское уравнение для σ_a^+ имеет вид (уравнение для σ_a^- получается эрмитовым сопряжением):

$$\frac{d\sigma_a^+}{dt} = i\omega_0 \sigma_a^+ + \sigma \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a)] \sigma_c^+. \quad (8.14)$$

Отсюда после несложных преобразований находим [1]:

$$\frac{dS_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{1}{2} \lambda_0 f_{\mathbf{k}} \gamma_0(\mathbf{k}) N^2 \sigma (1 + \sigma) + \lambda_0 \varkappa(\mathbf{k}) N \sigma S_{\mathbf{k}}. \quad (8.15)$$

Входящие сюда формфакторы среды определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \varkappa(\mathbf{k}) &= f_{\mathbf{k}} \gamma(\mathbf{k}); \\ \gamma(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} p(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int_V d^3r \frac{\sin kr}{kr} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}); \\ \gamma_0(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} |p(\mathbf{k}' - \mathbf{k})|^2, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где во второй формуле проводится интегрирование по объему тела V . Вследствие резонансного характера соотношений (8.13) в формулах (8.6), (8.7), (8.15) и (8.16) $k = k' = \omega_0/c$. Вывод уравнения (8.15) был основан на свойстве формфактора $p(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$, согласно которому \mathbf{k}' отклоняется от \mathbf{k} не более чем на малый дифракционный угол: $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|/k \lesssim 1/kR$. Это свойство позволяет во всех выражениях, куда входит в качестве множителя и формфактор, положить $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, что верно при условии (2.27).

Уравнения (8.7), (8.15), полученные в [1], образуют замкнутую систему, которая описывает СИ в образце со свойствами $\lambda \ll L \ll c\tau_s$, $F \gg 1$. Функция $S_{\mathbf{k}}$ описывает корреляции атомов, а σ — их инверсию: числа атомов в верхних и нижних состояниях равны соответственно $N(1 \pm \sigma)/2$. Рассмотрим наиболее интересный случай некогерентной накачки

$$\sigma = 1, \quad S_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (8.17)$$

что соответствует полной инверсии атомов и отсутствию начальных корреляций. Из (8.15) видно, что корреляции атомов возникают за счет первого слагаемого в правой части (второе при $t = 0$ обращается в нуль), которое соответствует спонтанному излучению (это видно и из (8.7)), усредненному по начальному состоянию атомов. Строго говоря, первое слагаемое определено лишь с точностью до множителя $\beta \sim 1$, поскольку ранее при подстановке формул (8.3) в (8.2) и другие выражения, содержащие $c_{\mathbf{k}}$ и $c_{\mathbf{k}}^+$, мы пренебрегали некогерентностью атомных операторов. Таким образом, первое слагаемое описывает возникновение порядка из хаоса в результате первоначальной флуктуации. Величина этой флуктуации не столь существенна, поскольку, как видно из обсуждения формулы (4.16), зависимость от β — логарифмическая.

Второе слагаемое в (8.15) описывает нелинейную фазировку двухуровневых атомов. Она происходит только при наличии инверсии ($\sigma > 0$), что указывает на ключевую роль когерентных индуцированных процессов в фазировке атомов (см. раздел 2). Если учесть релаксацию, то справа в (8.15) появится слагаемое $-S_{\mathbf{k}}/T_2$, откуда видно, что аналогично точке фазового перехода при равновесном фазовом переходе 2-го рода, имеется пороговое условие возникновения СИ:

$$\lambda_0 \varkappa_0 N \sigma > \frac{1}{T_2}, \quad (8.18)$$

где $\varkappa_0 \equiv \varkappa(\mathbf{k}_0)$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ — направление максимума $\varkappa(\mathbf{k})$, вдоль которого происходит СИ (см. ниже). Формула (8.18) конкретизирует пороговое условие СИ, указанное на рис. 3 и 4. Далее полагаем $T_2 \rightarrow \infty$ в соответствии с (2.10).

Автору не удалось отыскать в литературе решение уравнений СИ (8.7), (8.15), поэтому оно приводится ниже.

В "области формирования СИ" ($t \ll t_0$) в соответствии с (8.17) из уравнения (8.15) получаем

$$S_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\gamma_0}{\gamma} N(\exp N\lambda_0 \gamma t - 1),$$

следовательно, при $\tau_s \ll t \ll t_0$

$$S_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\gamma_0}{\gamma} N \exp N\lambda_0 \gamma t. \quad (8.19)$$

В "области СИ" $t \gg \tau_s$, которая перекрывается с областью формирования СИ, слагаемые со спонтанными переходами малы, поэтому (8.17) и (8.15) принимают вид:

$$\dot{\sigma} = -\frac{\lambda_0}{2\pi N} \int d\Omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}}, \quad (8.20)$$

$$\dot{S}_{\mathbf{k}} = \lambda_0 \varkappa(\mathbf{k}) N \sigma S_{\mathbf{k}}. \quad (8.21)$$

Решение (8.21) ищем в виде

$$S_{\mathbf{k}} = \exp \varkappa(\mathbf{k}) \Phi(t), \quad (8.22)$$

тогда из (8.20), (8.21) получаем

$$\sigma = \frac{1}{N\lambda_0} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (8.23)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \exp \varkappa(\mathbf{k}) \Phi(t) = 0. \quad (8.24)$$

Домножая уравнение (8.24) на $d\Phi/dt$, получаем его первый интеграл:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \frac{\lambda_0^2}{\pi} S = U_0, \quad (8.25)$$

$$S = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{\gamma(\mathbf{k})} \exp \varkappa(\mathbf{k}) \Phi(t), \quad (8.26)$$

где U_0 — постоянная интегрирования. Забегая вперед, укажем, что для СИ существенна малая окрестность $\Phi \approx \Phi_0 \gg 1$.

Пусть тело имеет продолговатую форму. Тогда в некотором направлении $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ функция $\varkappa(\mathbf{k})$ имеет абсолютный максимум \varkappa_0 . Поскольку $\varkappa(\mathbf{k}) = \varkappa(-\mathbf{k})$, то точно такой же максимум имеется в противоположном направлении. Как убедимся ниже, в этих двух направлениях ($\pm \mathbf{k}_0$) экспонента в (8.26) имеет резкие максимумы и сюда уходит практически все излучение.

Направим ось z вдоль \mathbf{k} . В интересующем нас случае (8.27) основной вклад в $\gamma(\mathbf{k})$ из (8.16) дает область, близкая к оси z (см. (2.29)). При условии (2.27) интегрирование по ρ можно распространить до $+\infty$, откуда аналогично (2.36) получаем

$$\gamma(\mathbf{k}) \approx \frac{\pi L(\mathbf{k})}{V k^2}, \quad (8.27)$$

где $L(\mathbf{k}) \equiv L(\mathbf{k}, \mathbf{r} = 0)$ — толщина тела в том месте, где оно "протыкается" прямой, проходящей через точку $\mathbf{r} = 0$ в направлении \mathbf{k} . Следует отметить очевидный недостаток наших расчетов: физические результаты зависят от выбора точки $\mathbf{r} = 0$. Поэтому на первый взгляд кажется, что излагаемая теория применима только к симметричным телам, имеющим центр инверсии, который из соображений симметрии должен быть выбран в качестве точки $\mathbf{r} = 0$. Простое рассуждение показывает, однако, что теория применима к произволь-

ному телу. Возьмем две какие-то точки на поверхности тела и соединим их прямолинейным отрезком. Существуют две вполне определенные точки, для которых длина отрезка наибольшая и соответствует максимальной толщине тела $L = L_0$. Отрезок перпендикулярен поверхности тела в указанных точках, поскольку в противном случае, сместив одну из точек поверхности, получим другую пару точек с большим расстоянием между ними.

Две выбранные выше точки однозначно определяют направление k_0 . На соединяющем их отрезке где-то посередине выберем точку $\mathbf{r} = 0$. Весь наш расчет будет справедлив с логарифмической точностью ($\sim 1/A$, $A = \ln N$). С этой же точностью положение точки $\mathbf{r} = 0$ на отрезке произвольно. Если переходы происходят между вырожденными по направлениям углового момента уровнями, то основной вклад в СИ дают те состояния, для которых $f_{\mathbf{k}} = \max$, т.е. $\mathbf{d} \perp \mathbf{k}_0$, поэтому далее полагаем $f_{\mathbf{k}} = 3/2$.

Вводя малое безразмерное отклонение $\xi = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/k_0$ ($\xi \ll 1$, $\xi \mathbf{k} \approx \xi \mathbf{k}_0 = 0$) раскладываем $L(\mathbf{k})$ и $\varkappa(\mathbf{k})$ вблизи \mathbf{k}_0 :

$$L(k) = L_0 - \frac{1}{2} L_1 \xi_1^2 - \frac{1}{2} L_2 \xi_2^2; \quad \varkappa(\mathbf{k}) = \varkappa_0 + \Delta \varkappa; \\ \Delta \varkappa(\mathbf{k}) = 1 - \frac{1}{2} \varkappa_1 \xi_1^2 - \frac{1}{2} \varkappa_2 \xi_2^2, \quad (8.28)$$

где ξ_1, ξ_2 — проекции двумерного вектора ξ на главные направления тензора, составленного из производных $\partial^2 L / \partial \xi_z \partial \xi_\beta$, $L_{1,2}$ — главные значения этого тензора, $\varkappa_{1,2} = 3\pi L_{1,2} / (2V k^2)$, $\varkappa_0 = 3\gamma(\mathbf{k}_0) / 2 = 3\pi L_0 / (2V k^2)$.

Для вытянутости эллипсоида вращения с полуосями a, b ($a > b$)

$$L_0 = 2a; \quad L_1 = L_2 = 2a \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right); \quad \gamma(\mathbf{k}_0) = \frac{3}{2k^2 b^2}; \\ \varkappa_0 = \frac{9}{4k^2 b^2}; \quad \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_0 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right). \quad (8.29)$$

Из (8.26)–(8.28), учитывая соотношение $d\Omega_{\mathbf{k}} = d\xi_1 d\xi_2$, получаем:

$$S = \exp(\varkappa_0 \Phi) \frac{\Omega}{\gamma(\mathbf{k}_0)}, \quad (8.30)$$

где

$$\Omega = \frac{4\pi}{\Phi_2 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}} \quad (8.31)$$

— эффективный телесный угол, в который уходит излучение (в Ω положили $\Phi = \Phi_0$). В (8.31) учтен дополнительный множитель 2, соответствующий вкладу от $-\mathbf{k}_0$.

В случае тонкого вытянутого стержня ($L \gg R$) подавляющий вклад в S дают векторы \mathbf{k} , "протыкающие" его торцы, т.е. составляющие с осью стержня углы Θ , не превышающие геометрического $\Theta_0 = 2R/L$. Для стержня $\Omega = \pi \Theta_0^2$,

$$\varkappa \approx \varkappa_0 = \frac{3}{2k^2 R^2} \quad \text{при } \Theta < \Theta_0; \\ \varkappa = \frac{\varkappa_0 \Theta_0}{\Theta} \quad \text{при } \Theta > \Theta_0. \quad (8.32)$$

Строго говоря в подынтегральном выражении (8.26) имеются дифракционные осцилляции, которые стано-

вятся существенными при малых числах Френеля ($F \sim \Lambda$). В представляющих наибольший практический интерес случаях $F \gg \Lambda$, поэтому осцилляциями пренебрегаем.

После подстановки (8.30) уравнение (8.25) принимает вид закона сохранения энергии при одномерном движении в потенциале $U(\Phi) = B^2 \exp \kappa_0 \Phi$, где $B^2 = \lambda_0^2 \Omega / [\pi \gamma(\mathbf{K}_0)]$. Введем "точку поворота" $\Phi = \Phi_0$, в которой $U(\Phi_0) = U_0 = B^2 \exp \kappa_0 \Phi_0$, $d\Phi/dt = 0$. Из аналогии с механическим движением ясно, что сначала $\Phi(t)$ увеличивается, при $t = t_0$ достигает максимума $\Phi = \Phi_0$ и затем уменьшается. Эффективная потенциальная энергия $U(\Phi)$ имеет вид резкого пика, расположенного при $t = t_0$:

$$\exp \kappa_0 \Phi = g(t) \exp \kappa_0 \Phi_0, \quad g(t) = \frac{1}{\cosh^2[(t - t_0)/\tau_s]}, \quad (8.33)$$

где t_0, τ_s — постоянные интегрирования, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{2}{\tau_s} = B \kappa_0 \exp \frac{\kappa_0 \Phi_0}{2}, \quad (8.34)$$

следующему из (8.33) и (8.25)

Из (8.22), (8.28) и (8.33) следует

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{k}} &= \exp \kappa \Phi = \exp[(\kappa_0 + \Delta \kappa) \Phi] \approx \\ &\approx \exp(\kappa_0 \Phi + \Delta \kappa \Phi_0) = g(t) \exp \kappa \Phi_0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Сшивая эту формулу с асимптотикой (8.19), учитывая (8.34) и выражение для $\gamma_0(\mathbf{k})$ (см. ниже) получаем

$$\tau_s = \frac{2}{\lambda_0 \kappa_0 N}, \quad (8.36)$$

$$\exp \kappa_0 \Phi_0 = \frac{\lambda_0^2 N^2}{B^2}, \quad (8.37)$$

$$\Phi_0 \approx \frac{2}{\kappa_0} \Lambda, \quad t_0 \approx \frac{\tau_s}{2} \Lambda. \quad (8.38)$$

Согласно (8.4) и (8.35) угловое распределение интенсивности СИ определяется выражением

$$dI = \frac{3}{2} I_0 g(t) \exp[\kappa(\mathbf{k}) \Phi_0] d\Omega_{\mathbf{k}}, \quad (8.39)$$

откуда и из (8.28), (8.32) видно, что излучение сосредоточено внутри телесного угла Ω . Здесь полезна формула, следующая из (8.27) и (8.38):

$$\exp[\kappa(\mathbf{k}) \Phi_0] = \exp(\kappa_0 \Phi_0) \exp\left[-2\Lambda \frac{L_0 - L(\mathbf{k})}{L_0}\right]. \quad (8.40)$$

Из нее видно, что область СИ для произвольного тела определяется из соотношения $L_0 - L(\mathbf{k}) < L_0/\Lambda$. В частности, интенсивность СИ из стержня практически постоянна под углами $\Theta < \Theta_0$ и $\pi - \Theta < \Theta_0$ (если отвлечься от упомянутых выше дифракционных осцилляций) и резко обрывается за пределами этих областей. В случае сильно вытянутого ($a \gg b$) эллипсоида вращения $\Omega \sim (b/a)^2/\Lambda$. Видно, что для эллипсоида угловая расходимость луча значительно ниже геометрической ($\Theta \sim b/a$). Причина заключается в конкуренции мод, аналогичной лазерной [32, 33]. Согласно (8.21), (8.35) корреляции устанавливаются быстрее всего для направлений \mathbf{k} , близких к $\pm \mathbf{k}_0$. Как следствие, практически вся

энергия успевает высветиться в этих направлениях. Этот эффект становится особенно значителен при уменьшении числа Френеля. Так, при $F \sim 1$ (хотя представленная теория справедлива здесь лишь по порядку величины) угловая расходимость луча существенно меньше дифракционной ($\Theta \sim 1/kR\sqrt{\Lambda}$).

Интенсивность СИ находим, интегрируя (8.39), учитывая (8.37) и дополнительный множитель 2 (ср. с (8.30) и (8.31)):

$$I = \frac{1}{4} I_0 \kappa_0 N^2 g(t) = \frac{\hbar \omega_0}{2\tau_s} N g(t). \quad (8.41)$$

Интегрируя интенсивность (8.41) по времени, убеждаемся, что излучается вся запасенная энергия $\hbar \omega_0 N$.

Теперь рассчитаем формфактор γ_0 в случае (2.27). В последней формуле (8.16) выполним интегрирование сначала по $d\Omega_{\mathbf{k}'}$:

$$\gamma_0 = \frac{1}{V^2 k} \int d^3 r d^3 r' \frac{\sin(kR)}{R} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}_z),$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (ось z направлена вдоль \mathbf{k}). От переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ перейдем к переменным (\mathbf{r}, \mathbf{R}) . После интегрирования по \mathbf{r} , которое дает множитель V , получаем интеграл такого же вида, как и в первой формуле (8.16), но по другой области (поскольку область изменения \mathbf{R} не совпадает с телом). Интегрирование по направлениям перпендикулярным \mathbf{k} , вследствие (2.27) дает тот же множитель, что и в (8.27), однако интеграл по R_z дает $2L(\mathbf{k})$ вместо $L(\mathbf{k})$. Следовательно, при условии (2.27) $\gamma_0 = 2\gamma$.

Изложенный в данном разделе формализм позволяет решить задачу о СИ двухуровневых атомов в эллипсоидальном образце малого размера (2.4) с учетом диполь-дипольного взаимодействия атомов. Рассматривается случай однородной накачки ($\langle \sigma_a^z(t=0) \rangle \equiv \sigma_a = \sigma = \text{const}$) и отсутствия начальных корреляций ($S_{ab}(t=0) = 0$). Уравнения для $d\sigma_a/dt, dS_{ab}/dt$ получаются в результате усреднения уравнений Гейзенберга с гамильтонианом (4.9). Расчет аналогичен проделанному при выводе уравнений (8.7), (8.15), поэтому здесь не приводится. Быстрее всего полученные уравнения решаются, если заранее предположить, что $\sigma_a(t)$ и $S_{ab}(t)$ не зависят от номеров атомов a, b . Отсутствие противоречий в последующих выражениях указывает на правильность предположения. Строгий расчет также возможен, но более сложен. Ключевую роль в этих расчетах играет свойство независимости суммы (7.9) от r_b для эллипсоида. Окончательные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -\lambda_0(1 + \sigma) - 2N\lambda_0 S, \\ \dot{S} &= \frac{1}{2} \lambda_0(1 + \sigma)\sigma + N\lambda_0 \sigma S, \end{aligned} \quad (8.42)$$

где $\sigma = \sigma_a(t)$, $S = S_{ab}(t)$. Видно, что диполь-дипольное взаимодействие выпадает из (8.42), что доказывает справедливость выводов Дикке для эллипсоидальных тел в случае однородной накачки, несмотря на указанную ранее некорректность отбрасывания диполь-дипольного взаимодействия в исходных уравнениях.

8.2. Классические лоренцевы атомы (классическая модель сверхизлучения)

Теория, изложенная в разделе 8.1, относится к случаю $\lambda \ll l$ и основана на соотношениях (8.3), которые справед-

ливы, если можно отбросить нерезонансное (второе) слагаемое в (4.43), (4.42). После этого формулы упрощаются, и расчет можно провести до конца. В литературе, однако, отсутствует обоснование этой возможности. Здесь требуется дальнейшее исследование, в чем и состоит цель данного раздела. Более того, ниже будет показано, что эффекты, связанные с нерезонансным слагаемым, существенно влияют на характер СИ и поэтому теория, изложенная в разделе 8.1, несовершенна. Все, что имеется в литературе по обоснованию указанного приближения, сводится к следующему рассуждению [2]. Диполь-дипольное взаимодействие V_d определяется расстоянием порядка l , т.е. областью волновых векторов фотонов $k \sim 1/l$. При $l \ll \lambda$ объем этой области \mathbf{k} -пространства велик ($k^3 \sim 1/l^3$), поэтому V_d велико по сравнению с радиационным трением (см. раздел 4). Далее отождествляют V_d и нерезонансное слагаемое в (4.43) (в смысле пояснения, приведенного после формулы (4.44)). Наконец, заключают, что, поскольку при $\lambda \ll l$ объем указанной выше области \mathbf{k} -пространства мал, нерезонансное слагаемое можно отбросить.

Некорректность этого рассуждения состоит в том, что при $\lambda \ll l$ основную роль играют асимптотики рассеянных атомами электромагнитных волн (см. (2.25)) при $kr \gg 1$. Асимптотики определяются сингулярностями формулы (4.43), поэтому первое и второе слагаемое в ней одинаково важны, оба они резонансные. Эти слагаемые дают ($k_0 = \omega_0/c$)

$$\int \pi \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0) \exp i\mathbf{k}\mathbf{r} d^3k = \frac{4\pi^2 k_0}{cr} \sin k_0 r;$$

$$i \int \frac{\exp i\mathbf{k}\mathbf{r}}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0} d^3k = \frac{4\pi^2 k_0}{icr} \cos k_0 r.$$

Только их сумма дает правильную рассеянную волну $r^{-1} \exp i k_0 r$ (аналогичное замечание см. в [66]).

Чтобы понять, к каким новым эффектам приводит нерезонансное слагаемое в (4.43), проанализируем в предельном случае (2.426) и (2.12) линейную КМС, в которой указанное слагаемое учитывается точным образом. Естественно, здесь теряется нелинейный эффект фазировки, поэтому в будущем имеет смысл рассмотреть нелинейный вариант КМС.

В предельном случае (2.426), (2.12) в (6.10) следует дифференцировать только экспоненту:

$$\dot{\mathbf{F}}_a + \frac{\gamma}{2} \mathbf{F}_a = -\frac{ir_0\omega_0}{2} \sum_{b \neq a} \frac{\exp ikr_{ab}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{F}_b), \quad (8.43)$$

где $r_0 = e^2/(mc^2)$. Произведем подстановку

$$\mathbf{F}_a(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \mathbf{G}_a(t), \quad (8.44)$$

получим уравнение для \mathbf{G}_a , аналогичное (8.43), в котором отсутствует второе слагаемое в левой части.

Сначала рассмотрим функцию Грина уравнения (8.43). Полагая, что при $t < 0$ $\mathbf{F}_a = 0$, а при $t = 0$ выполняются "точечные" начальные условия (7.4), произведем фурье-преобразование уравнения. Для фурье-компонент

$$\mathbf{N}_a = \int_0^\infty \mathbf{G}_a(t) \exp(i\omega t) dt \quad (8.45)$$

получаем уравнение

$$\mathbf{B}_b \delta_{ab} + i\omega \mathbf{N}_a = \frac{ir_0\omega_0}{2} \sum_{c \neq a} \frac{\exp ikr_{ac}}{r_{ac}} \mathbf{n}_{ac} \times (\mathbf{n}_{ac} \times \mathbf{N}_c). \quad (8.46)$$

Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$\mathbf{G}_a(t) = \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \mathbf{N}_a. \quad (8.47)$$

Таким образом, в (8.45) подразумевается, что частота имеет положительную мнимую добавку: $\omega \rightarrow \omega + i0$. После подстановки в (8.46)

$$\mathbf{N}_a = \frac{i}{\omega} \mathbf{B}_b \delta_{ab} + \mathbf{S}_a \quad (8.48)$$

получаем уравнение

$$-i\omega \mathbf{S}_a = \frac{r_0\omega_0}{2\omega} \frac{\exp ikr_{ab}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{B}_b) - \frac{ir_0\omega_0}{2} \mathbf{\Lambda};$$

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{c \neq a} \frac{\exp ikr_{ac}}{r_{ac}} \mathbf{n}_{ac} \times (\mathbf{n}_{ac} \times \mathbf{S}_c). \quad (8.49)$$

Уравнение (8.49) решаем при помощи подстановки

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{M}_a \frac{\exp ikr_{ab}}{r_{ab}}. \quad (8.50)$$

Множитель

$$\exp ik(r_{ac} + r_{cb}), \quad (8.51)$$

возникающий при расчете $\mathbf{\Lambda}$, остается постоянным для атомов c , находящихся на оси ab (рис. 9), соединяющей атомы a и b . Это означает, что основной вклад в $\mathbf{\Lambda}$ дает область, прилегающая к этой оси. Рассмотрим атом c , находящийся на расстоянии ρ от оси ab . Проведем через атом c плоскость, перпендикулярную к оси ab . Эта плоскость пересекает ось ab в некоторой точке, лежащей на расстоянии z от атома b , причем $0 < z < r_{ab}$. При $\rho \ll r_{ab}$

$$r_{cb} \approx \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}; \quad r_{ac} \approx r_{ab} - z + \frac{\rho^2}{2(r_{ab} - z)};$$

$$r_{ac} + r_{cb} \approx r_{ab} + \frac{r_{ab}}{2z(r_{ab} - z)} \rho^2. \quad (8.52)$$

Отсюда и из (8.51) следует, что основной вклад в сумму $\mathbf{\Lambda}$ дает область $0 < z < r_{ab} \sim L$, $z \sim r_{ab} \sim L$, $\rho \sim \sqrt{r_{ab}/k} \sim \sim \sqrt{L/k}$, где учтено, что типичное значение r_{ab} порядка

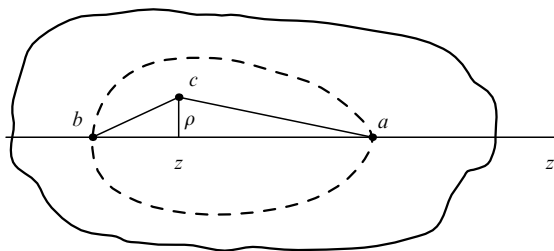


Рис. 9. ОКИ для двух атомов a и b (показана пунктиром). Атому b соответствует координата $z = 0$.

размера среды L (это будет видно ниже). Эту область, следуя разделу 2, будем называть ОКИ. Ее физический смысл заключается в следующем. Фаза сигнала, движущегося от b к a по оси ab , равна $\varphi_1 = kr_{ab}$. Рассмотрим другой путь — bca . Электромагнитные волны, поступающие от b по пути bc , раскачивают осциллятор c , который начинает изучать свои волны, достигающие a . Сигналу, распространяющемуся по пути bca , соответствует фаза $\varphi_2 = k(r_{bc} + r_{ca})$. Эти два сигнала интерферируют конструктивно, если $\varphi_2 - \varphi_1 \lesssim 1$. Объем ОКИ определяется из (2.33). Число атомов, находящихся в ОКИ, велико (см. (2.34)), поэтому суммирование по c можно заменить интегрированием

$$\sum_c \rightarrow n \int d^3 r_c = n \int_0^{r_{ab}} dz \int d^2 \rho; \quad (8.53)$$

$$\Lambda \approx n \int d^3 r_c \frac{\exp[ik(r_{ac} + r_{bc})]}{(r_{ab} - z)z} \mathbf{Q}(z), \quad (8.54)$$

где $\mathbf{Q}(z) = \mathbf{n}_{ab} \times [\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{M}(z)]$. Здесь учтено, что вследствие $\rho \ll z$ в ОКИ $\mathbf{n}_{ac} \approx \mathbf{n}_{ab}$. Кроме того, множитель \mathbf{M}_a в (8.50) изменяется медленно по сравнению с экспонентой и поэтому при расчете Λ можно положить $\mathbf{M}_c \equiv \mathbf{M}(z, \rho) \approx \mathbf{M}(z, 0) \equiv \mathbf{M}(z)$.

Подставляя (8.52) в (8.54), проводим интегрирование по $d^2 \rho = 2\pi\rho d\rho$ (учитываем (2.27)):

$$\Lambda = \frac{2\pi i n \exp ikr_{ab}}{K r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{T}); \quad \mathbf{T}(r_{ab}) = \int_0^{r_{ab}} dz \mathbf{M}(z).$$

Уравнение (8.49) принимает вид

$$-i\omega \mathbf{M}(r) = \frac{r_0 \omega_0}{2\omega} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_b) + \pi r_0 c n \mathbf{m} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{T}(r)], \quad (8.55)$$

где $r \equiv r_{ab}$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$. Подстановка

$$\mathbf{M}(r) = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_b) f(r) \quad (8.56)$$

позволяет перейти от векторной величины \mathbf{M} к скалярной f :

$$-i\omega f(r) = \frac{r_0 \omega_0}{2\omega} - \pi r_0 c n R(r); \quad (8.57)$$

$$R(r) = \int_0^r dr' f(r'). \quad (8.58)$$

Перепишав (8.57) в виде

$$\frac{dR}{dr} + \frac{\pi r_0 c n}{\omega} R = \frac{i r_0 \omega_0}{2\omega^2} \quad (8.59)$$

и учитывая граничное условие $R(0) = 0$, следующее из (8.58), получим решение (8.59):

$$R(r) = \frac{\omega_0}{2\pi c n \omega} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi r_0 c n}{\omega} r\right) \right].$$

Отсюда и из (8.47), (8.48), (8.50), (8.56), (8.58) находим

$$f(r) = \frac{dR}{dr} = \frac{i\omega_0 r_0}{2\omega^2} \exp\left(-\frac{\pi r_0 c n}{\omega} r\right);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_a &= \frac{i}{\omega} \mathbf{B}_b \delta_{ab} + \frac{i\omega_0 r_0}{2\omega^2} \exp\left(-\frac{\pi r_0 c n}{\omega} r_{ab}\right) \times \\ &\times \frac{\exp ikr_{ab}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{B}_b); \end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\mathbf{G}_a(t) = \mathbf{B}_b \delta_{ab} + \frac{i\omega_0 r_0}{4\pi} \frac{\exp ikr_{ab}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{B}_b) K;$$

$$K = \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{d\omega}{\omega^2} \exp\left(-i\omega t - \frac{\pi i r_0 c n}{\omega} r_{ab}\right). \quad (8.61)$$

Чтобы вычислить интеграл K , производим разложение каждой из экспонент в подынтегральном выражении в ряд Тейлора и используем далее теорему о вычетах:

$$K = -2\pi \frac{\sqrt{t}}{\beta} J_1(2\sqrt{\beta t}), \quad (8.62)$$

где $\beta = \pi n c r_0 r_{ab}$, J_1 — функция Бесселя. Из (6.9), (6.11), (8.44), (8.61) и (8.62) находим

$$\begin{aligned} \xi_a(t) &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \left[\mathbf{n}_b \cos(\omega_0 t + \varphi_b) \delta_{ab} - \right. \\ &\left. - \frac{\omega_0 r_0}{2r_{ab}} \sqrt{\frac{t}{\beta}} J_1(2\sqrt{\beta t}) \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_b) \sin(\omega_0 t + \varphi_b - kr_{ab}) \right]. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Теперь приступаем к расчету интенсивности излучения по формулам (6.7), (6.8):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}; \quad (8.64)$$

$$\mathbf{b} = \sum_a \xi_a \left(t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_a \right), \quad (8.65)$$

где $t' = t - r/c$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Начало координат располагаем в точке нахождения атома b , тогда r — расстояние от удаленной точки наблюдения до атома b . Из (8.63), (8.65) находим

$$\mathbf{b} = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \left[\mathbf{n}_b \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) - \frac{\omega_0 r_0}{2} \mathbf{A} \right]; \quad (8.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_a \frac{1}{r_{ab}} \sqrt{\frac{t'}{\beta}} J_1(2\sqrt{\beta t'}) \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{n}_b) \times \\ &\times \sin(\omega_0 t' + \varphi_b + \Psi), \end{aligned} \quad (8.67)$$

где $\Psi = k \mathbf{n} \mathbf{r}_{ab} - kr_{ab}$. Направим ось z вдоль \mathbf{n} . Пусть ρ — расстояние от атома a от оси z . Основной вклад в сумму \mathbf{A} дают атомы a , находящиеся в ОКИ:

$$\rho \sim \sqrt{\frac{r_{ab}}{k}} \sim \sqrt{\frac{L}{k}} \ll L. \quad (8.68)$$

Число атомов в этой области определяется прежней формулой (2.34). В данном случае ОКИ имеет несколько иной смысл, чем ранее (рис. 10). Теперь интерферируют между собой два сигнала, поступающие в точку наблюдения. Один сигнал идет от атома b вдоль вектора \mathbf{r} , т.е. по прямой линии, соединяющей атомы b и точку

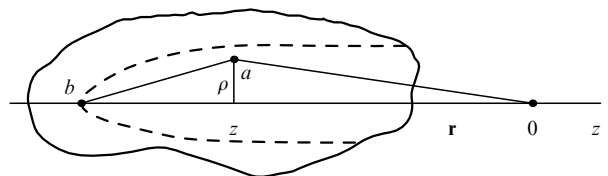


Рис. 10. ОКИ для излучения, приходящего в точку наблюдения 0.

наблюдения. Другой сигнал испускается атомом b и по прямой достигает атома a . Далее он переизлучается атомом a и по прямой достигает точки наблюдения. С учетом этих замечаний имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{nr}_{ab} &= z, \quad r_{ab} = \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}; \\ \Psi &\approx -\frac{k\rho^2}{2z}, \quad \mathbf{n}_{ab} \approx \mathbf{n}; \\ \mathbf{A} &\approx \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) D; \end{aligned} \quad (8.69)$$

$$D = n \int_0^L \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{t'}{\beta_0}} J_1(2\sqrt{\beta_0 t'}) P; \quad \beta_0 = \pi n c r_0 z, \quad (8.70)$$

$$P = \int d^2\rho \sin\left(\omega_0 t' + \varphi_b - \frac{k\rho^2}{2z}\right) = -\frac{2\pi z}{k} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b). \quad (8.71)$$

Здесь $L \equiv L(\mathbf{n})$ — расстояние от атома b до границы среды вдоль вектора наблюдения \mathbf{n} .

Дальнейшее интегрирование по dz в (8.70) производится на основе формулы $J_1(x) = -J_0'(x)$. Для D получаем выражение:

$$D = \frac{2}{\omega_0 r_0} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) [J_0(x_0) - 1]; \quad (8.72)$$

$$x_0 = 2\sqrt{\pi n c r_0 L t'}. \quad (8.73)$$

Из (8.64), (8.66), (8.69) и (8.72) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) [\boldsymbol{\eta}_b - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) (J_0 - 1)]; \\ \mathbf{Q} &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t'\right) \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) (1 + J_0 - 1) = \\ &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t'\right) \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) J_0(x_0), \end{aligned} \quad (8.74)$$

где специально отмечен замечательный факт сокращения двух слагаемых, смысл которого обсудим позже.

Из (6.5), (6.7) и (8.74) получаем следующее выражение для интенсивности излучения:

$$dI \equiv dI_b = d\Omega \frac{3\gamma E_0^{(b)}}{8\pi} \sin^2(\alpha) J_0^2(x_0) \exp(-\gamma t), \quad (8.75)$$

где α — угол между векторами \mathbf{n} и $\boldsymbol{\eta}_b$. Интегрируя интенсивность (8.75) по времени в пределах $(0, \infty)$, находим энергию, излученную в телесный угол $d\Omega$:

$$dE_r = E_0^{(b)} d\Omega \frac{3}{8\pi} F(\varphi) \sin^2 \alpha, \quad (8.76)$$

$$F(\varphi) = \exp(-\varphi) I_0(\varphi), \quad (8.77)$$

где φ определено в (2.20), I_0 — модифицированная функция Бесселя. При интегрировании по времени была применена формула [67]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \exp(-\gamma t) J_0(\alpha\sqrt{t}) J_0(\beta\sqrt{t}) &= \\ &= \frac{1}{\gamma} I_0\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}\right). \end{aligned}$$

Обсудим физический смысл полученных результатов. Сначала исходим из "наивной" точки зрения, изложен-

ной в разделе 6. Итак, энергия атома b через некоторое время распределяется по N атомам среды. Тем самым готовится когерентный ансамбль осцилляторов, которые колеблются с амплитудами (6.18) и фазами $\varphi_a = k r_{ab}$, которые задаются сигналами, поступающими от атома b . Амплитуда поля в произвольной точке наблюдения r , находящейся далеко за пределами среды, будет (см. с (2.25))

$$E \sim \sum_a \frac{e\xi_0}{\sqrt{N}} \frac{k^2}{R_a} \exp(ikR_a + i\varphi_a),$$

где $R_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a| \approx r - \widehat{\mathbf{r}}\mathbf{r}_a$. Начало координат расположен на атоме b . Заменяя суммирование интегрированием, получаем

$$E \sim \sum_a \frac{e\xi_0 k}{\sqrt{N}} \frac{\exp ikr}{r} J,$$

где $J = n \int d^3r_a \exp(-ik\widehat{\mathbf{r}}\mathbf{r}_a + ikr_a) \sim N_0$. Таким образом, из N атомов лишь N_0 определяют поле в произвольной удаленной точке. Поля других атомов деструктивно интерферируют и гасят друг друга.

Согласно полученной выше формуле амплитуда поля в N_0 раз больше той, которую создал бы одиночный атом, колеблющийся с амплитудой ξ_0/\sqrt{N} . Поскольку такой атом излучает с интенсивностью I_0/N , интенсивность излучения средой будет

$$I \sim \frac{I_0}{N} (N_0)^2 \sim I_0 \frac{n^2 L^4}{Nk^2} \sim I_0 \varphi, \quad (8.78)$$

где учтено, что $nL^3 \sim N$.

В действительности, как и в разделе 7, все оказывается сложнее. Приготовленное атомом b когерентное облако атомов среды вместо сверхизлучения вызывает противоположный эффект — экранировку. Это видно из указанного выше сокращения слагаемых в (8.74), а также из свойства $J_0^2 < 1$ и выражения (8.75), которое перепишем в виде

$$dI = dI_s J_0^2(x_0), \quad (8.79)$$

где dI_s — интенсивность спонтанного излучения уединенного атома b . Таким образом, $dI < dI_s$, т.е. среда экранирует даже спонтанное излучение атома b . Степень экранировки ясна из (8.76), (8.77), (8.79). Вследствие (2.21) $F(\varphi) \approx 1/\sqrt{2\pi\varphi} \ll 1$, т.е. $E_r/E_0^{(b)} \sim 1/\sqrt{\varphi} \ll 1$. В выражение (8.79) входят два характерных времени: $\tau_0 = 1/\gamma$, $\tau_s = 1/(ncr_0 L) \sim \tau_0/\varphi$. При $t < \tau_s$ $dI \approx dI_s$, а при $t \gg \tau_s$ $dI \sim dI_s \tau_s/t$.

Рассмотрим теперь произвольное начальное условие (6.4), (6.11). Интенсивность излучения определяется теперь выражением (6.7), в котором согласно (6.13), (8.74) в качестве \mathbf{Q} следует взять величину

$$\mathbf{Q} = \sum_b \exp\left(-\frac{\gamma t_b}{2}\right) \cos(\omega_0 t_b + \varphi_b) (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) J_0(x_b). \quad (8.80)$$

Здесь

$$t_b = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_b| \approx t' + \frac{1}{c} \mathbf{n}\mathbf{r}_b, \quad t' = t - \frac{r}{c},$$

\mathbf{r} , \mathbf{r}_b — радиус-векторы, проведенные к точке наблюдения и атому b , соответственно, из начала координат, распо-

ложенного в произвольной точке: $x_b = 2\sqrt{\pi n c r_0 L_b t_b}$, где $L_b \equiv L_b(\mathbf{r}_b)$. Экспоненциальный множитель в (8.80) и функция $J_0(x_b)$ слабо зависят от координат атома b , поэтому можно положить $\exp(-\gamma t_b/2) \approx \exp(-\gamma t'/2)$, $x_b \approx 2\sqrt{\pi n c r_0 L_b t'}$. Если начальные фазы φ_b разных атомов некоррелированы, то согласно (6.15), (8.75) в этом случае также наступает экранировка. Пусть теперь $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N$. Тогда из (8.80) видно, что вследствие быстрого изменения косинуса и отсутствия корреляции в положениях атомов \mathbf{r}_b снова будет справедливой формула (6.15) и снова наступает экранировка.

Рассмотрим теперь случай накачки среды бегущей волной с волновым вектором \mathbf{K} , например, коротким импульсом лазера. Импульс проходит через атом b в момент времени $T_b = z_b/c = \mathbf{k}\mathbf{r}_b/\omega_0$, и поэтому диполь этого атома колеблется по закону $\Theta(t - T_b) \times \exp[-i\omega_0(t - T_b)]$. Сравнивая вещественную часть этого выражения с (2.5), получаем

$$\varphi_b = -\mathbf{k}\mathbf{r}_b; \quad (8.81)$$

$$\mathbf{Q} = \exp\left(-\frac{\gamma t'}{2}\right) \sum_b \cos(\omega_0 t' + \mathbf{k}\mathbf{r}_b - \mathbf{k}\mathbf{r}_b) \mathbf{m}(\mathbf{r}_b);$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_b) = (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) J_0(x_b). \quad (8.82)$$

Излучение среды будет происходить в этом случае под малыми углами ($1/kL$), близкими к направлению вектора $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}/k$. Положим поэтому $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \boldsymbol{\delta}$, где $\boldsymbol{\delta}$ — малый двумерный вектор, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{n}_0 = 0$, $\delta \ll 1$. Суммирование в (8.82) можно заменить интегрированием (см. (2.35)). Усредняя интенсивность (6.7) по быстрым осцилляциям (с периодом $T = 2\pi/\omega$) и интегрируя по углам с учетом соотношения $d\Omega \approx d^2\delta$, получаем следующее выражение для полной интенсивности (далее $\mathbf{r}_b \equiv \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{b'} \equiv \mathbf{r}'$):

$$I = \frac{e^2 \omega_0^4}{4\pi c^3} \exp(-\gamma t') n^2 \int d^3 r d^3 r' \mathbf{m}(\mathbf{r}) \mathbf{m}(\mathbf{r}') A_0;$$

$$A_0 = \int d^2 \delta \langle \cos(\omega_0 t' + \mathbf{k}\mathbf{r}_\perp \boldsymbol{\delta}) \cos(\omega_0 t' + \mathbf{k}\mathbf{r}'_\perp \boldsymbol{\delta}) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2 \delta \cos[k(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \boldsymbol{\delta}] = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}[k(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] =$$

$$= \frac{2\pi^2}{k^2} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp),$$

где \mathbf{r}_\perp — составляющая вектора \mathbf{r}_b , перпендикулярная \mathbf{n}_0 . Следовательно,

$$I = \frac{\pi e^2 \omega_0^2 n^2}{2c} \exp(-\gamma t') \int dz dz' d^2 r_\perp (\boldsymbol{\eta}_b \boldsymbol{\eta}_{b'}) J_0(x_b) J_0(x_{b'}). \quad (8.83)$$

Здесь z — составляющая \mathbf{r}_b вдоль \mathbf{n}_0 . В (8.83) учтена поперечность электромагнитной волны накачки: $\mathbf{n}_0 \boldsymbol{\eta}_b = 0$. Если импульс накачки слабо затухает на размере среды, то в (8.83) следует положить $\boldsymbol{\eta}_b = \boldsymbol{\eta} = \text{const}$, $\boldsymbol{\eta}_b \boldsymbol{\eta}_{b'} = \eta^2$.

Выражение (8.83) может быть переписано в виде

$$I = \frac{\pi e^2 \omega_0^2 n^2}{2c} \eta^2 \exp(-\gamma t') \int d^2 r_\perp \Phi^2, \quad (8.84)$$

где $\Phi = \int_0^L dz J_0(x)$, $x = 2\sqrt{\pi n c r_0 t' z}$. Здесь $L \equiv L(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_\perp)$ — толщина тела в том месте, где оно "протыкается" прямой

линией, проходящей через точку \mathbf{r}_\perp в направлении \mathbf{n}_0 . Используя формулу $x J_0(x) = [x J_1(x)]'$, вычисляем интеграл Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2\pi n c r_0 t'} x_0 J_1(x_0),$$

где $x_0 = 2\sqrt{\pi n c r_0 t' L}$. С учетом (6.5) выражение (8.84) приводится к виду

$$I = \frac{E_0}{t'} \exp(-\gamma t') Q(t'), \quad (8.85)$$

где $Q(t') = (1/V) \int d^2 r_\perp L J_1^2(x_0)$, V — объем тела, $E_0 = m\omega_0^2 \eta^2 N/2$.

Из (8.85) следует, что в случае (8.81) имеется сверхизлучение. Действительно, при $t \lesssim \tau_s$ $I \sim I_0 \varphi N$, причем время задержки импульса отсутствует. При $t \gtrsim \tau_s$ после окончания главного импульса излучения возникает ряд затухающих по амплитуде по закону t^{-2} импульсов. Поскольку $\gamma \tau_s \sim 1/\varphi \ll 1$, то экспоненту в (8.85) можно положить равной единице.

Используя интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} J_1^2(x) = \frac{1}{2},$$

легко убедиться, что излучается вся запасенная энергия:

$$E_r = \int_0^\infty I dt = E_0 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \eta^2 N.$$

При вычислениях следует учесть соотношение $\int d^2 r_\perp L = V$. Таким образом, как и в разделе 7, в данном случае полностью когерентное состояние не экранируется. Происходит своеобразная взаимная компенсация экранирующих различные диполи облаков.

Как квантовая (раздел 8.1), так и классическая (данный раздел) модели СИ несовершенны, дополняют друг друга. В квантовой модели не учитывается нерезонансное слагаемое (первый член в (4.43)), но учитывается нелинейность, присущая двухуровневым атомам. В рассмотренном линейном варианте КМС отсутствует нелинейность и вытекающий из нее механизм фазировки (на это указывает хотя бы отсутствие задержки импульса СИ), однако нерезонансное слагаемое учитывается строгим образом. Теперь мы можем заключить, что основным эффектом, связанным с этим слагаемым, является экранировка. В случае $l \ll \lambda$ (раздел 7), она обусловлена статическим диполь-дипольным взаимодействием атомов, а при $l \gg \lambda$ — запаздывающим.

Если при $t = 0$ отсутствует корреляция атомов, то из (6.15) заключаем, что полная интенсивность

$$I \sim N I_b, \quad (8.86)$$

где I_b — интенсивность излучения одного возбужденного атома, окруженного невозбужденными. Каждый атом готовит себе когерентный ансамбль. В соответствии с линейной КМС наступает дипольная экранировка. В отличие от линейной КМС у двухуровневых атомов по нелинейному механизму возникает фазировка ансамбля. Тогда интенсивность I_b оценивается из (8.78), а (8.86) согласуется с (8.41). Из последнего следует, что вся энергия высвечивается в режиме СИ. Что же происходит

в действительности, в настоящий момент не ясно. Эксперименты указывают на возникновение СИ при некогерентной накачке, однако полную картину явления тут может выяснить, на наш взгляд, только теория. Возможно, что вследствие экранировки в режиме СИ высвечивается только часть энергии. Ответ на эти вопросы может дать численное решение нелинейной КМС, которая описывается уравнениями (6.3), в левые части которых необходимо ввести нелинейные по амплитудам диполей слагаемые. В данный момент такие работы отсутствуют.

Эффект экранировки в системе нелинейных заряженных осцилляторов достаточно очевиден и поэтому странно, что он не был указан ранее. По сути дела он содержится в [68], являющейся развитием [69]. Так, если проинтегрировать формулу (8.29) упомянутой работы по частотам, то обнаруживается, что среда из одинаковых ядер, содержащая одно возбужденное ядро, излучает лишь малую долю энергии, запасенной в этом ядре (рассматривалась идеальная задача с неподвижными ядрами). Вероятное объяснение этой странности состоит в том, что цель работ [68, 69] заключалась в нахождении ширины излучаемой линии.

Результаты раздела 8.2 легко обобщаются на случай (2.13) (и вообще на произвольное соотношение между L и $c\tau_s$). Для этого в (6.3) следует подставить (6.9), пренебречь вторыми производными, но оставить в правой части запаздывающее время. Полученные уравнения снова решаются по методу преобразования Фурье аналогично уравнению (6.10). Отсутствие времени задержки импульса СИ — существенный недостаток линейной КМС (в нелинейном варианте задержка присутствует [43]). По этой причине мы не приводим здесь соответствующий расчет (впрочем, довольно интересный). Более совершенная модель СИ в случае (2.13) изложена в следующем разделе.

9. Осцилляторный режим сверхизлучения

Осцилляторный режим осуществляется в достаточно протяженных телах $c\tau_s \leq L < cT_r$. Этот режим был обнаружен уже в первом эксперименте по СИ [24]. В длинном образце излучение от одних участков тела, проходя через другие, вызывает их повторное когерентное возбуждение. Вторичное излучение из этих областей порождает осцилляции интенсивности. Эффект осцилляций интенсивности по сути дела уже обсуждался в конце раздела 8.2. Электромагнитные волны, проходя через уже излучившие осцилляторы, снова раскачивают их, т.е. возбуждают. Далее эти осцилляторы вторично излучают. Осцилляторная модель позволяет установить и второй механизм, действующий одновременно. Естественно, он осуществляется и в более реалистическом случае двухуровневых атомов. Суть его — в явлении нестационарной экранировки, которое описывается функцией Бесселя во втором слагаемом (8.63). Видно, что возбуждающий атом b окружен сжимающимися сферическими слоями вещества с противоположной фазой дипольных моментов. Это явление возникает в результате перемещения по телу поляритонов (см. раздел 10).

В случае (2.13) явление СИ в системе двухуровневых атомов наиболее просто и адекватно описывается в рамках полуклассической теории (см., например [1, 2, 5,

31, 33, 34]). В этой теории двухуровневым атомам соответствует одночастичная матрица плотности ρ размера (2×2) , а самосогласованное классическое поле определяется из уравнений Максвелла, в правую часть которых входит поляризация среды $\mathbf{P} = n \text{Sp}(\rho \mathbf{d})$, где \mathbf{d} определен в (3.9). Как и в конце раздела 8.2, рассчитаем СИ, возникающее при накачке коротким π -импульсом лазера, бегущим вдоль оси стержня длиной L радиуса R (вдоль нее направим ось z). Поляризация \mathbf{P} и электрическое поле \mathbf{E} направлены вдоль оси y . Поскольку электрическая индукция равна $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, из уравнения Максвелла следует

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx -4\pi k^2 P, \quad (9.1)$$

где $P = d(\rho_{12} + \rho_{21})$, $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. Матрица плотности подчиняется уравнениям Блоха, т.е. квантовым уравнениям Лиувилля–Неймана с релаксационными слагаемыми, которыми вследствие (2.14) будем пренебрегать:

$$i\hbar \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2dE(\rho_{21} - \rho_{12}), \quad i\hbar \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = dE\sigma + \hbar\omega_0\rho_{21}, \quad (9.2)$$

где $\sigma = \rho_{22} - \rho_{11}$, $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$. В (9.1) отброшены слагаемые, описывающие распространение поля поперек стержня (дифракцию), поэтому поле считается однородным по сечению стержня. Из предыдущих разделов ясно, что однородность нарушается вблизи боковой поверхности стержня на глубине порядка R/\sqrt{F} (поперечник ОКИ), поэтому (9.1) справедливо при условии (2.27).

Теперь выделим быстро меняющиеся множители:

$$E = \frac{i}{2} [E_0 \exp i\varphi - E_0^* \exp(-i\varphi)], \quad \rho_{21} = S \exp i\varphi,$$

$\varphi = kz - \omega_0 t$, $k = \omega_0/c$. После отбрасывания вторых производных от E_0 , быстроосциллирующих слагаемых (ПВВ) и постановки $\sigma = \cos \Theta$, $S = (1/2) \sin \Theta$, из (9.1) и (9.2) получаем систему

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = 2\pi n d k \sin \Theta, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} d E_0,$$

откуда следует уравнение для угла Блоха Θ [15, 21]:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t \partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{2}{L\tau_s} \sin \Theta,$$

где $\tau_s = \hbar/(\pi k n L d^2)$ (см. с (2.20)). В переменных $\tau = 2t'/\tau_s$, $x = z/L$, где $t' = t - z/c$ — запаздывающее время, это уравнение упрощается

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau \partial x} = \sin \Theta. \quad (9.3)$$

Атому в основном состоянии соответствует $\sigma = -1$, т.е. $\Theta = \pi$. Короткий π -импульс накачки движется по траектории $\tau = 0$ ($z = ct$) и переводит атомы в состояние $\sigma = 1$, т.е. $\Theta = 0$. Спонтанные переходы, которые не учитываются в полуклассической теории, дают малую начальную фазировку (см. раздел 8.1). Кроме того, при $t = 0$ $E_0 = 0$. Следовательно, граничные условия задачи имеют вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = 0, \quad \Theta = \Theta_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad (9.4)$$

где $\Theta_0 \ll 1$.

Уравнению (9.3) с граничным условием (9.4) удовлетворяет автомодельное решение

$$\Theta = \Theta(\eta), \quad \eta = 2\sqrt{\tau x} = 2\sqrt{\frac{2t'z}{\tau_s L}}, \quad (9.5)$$

где функция $\Theta(\eta)$ определяется из уравнения

$$\Theta''(\eta) + \frac{1}{\eta} \Theta'(\eta) - \sin \Theta = 0. \quad (9.6)$$

Домножив на Θ' , перепишем его в виде, имеющем простой механический образ:

$$\frac{dE}{d\eta} = -\frac{1}{\eta} (\Theta')^2, \quad E = \frac{1}{2} (\Theta')^2 + U(\Theta). \quad (9.7)$$

Это уравнение описывает одномерное движение частицы массы $m = 1$, в потенциальном поле (рис. 11) $U(\Theta) = \cos \Theta - 1 = -2 \sin^2(\Theta/2)$ при наличии силы трения $-\Theta'/\eta$. Согласно (9.7) из-за диссипации частица скатывается на дно потенциальной ямы ($\Theta = \pi$).

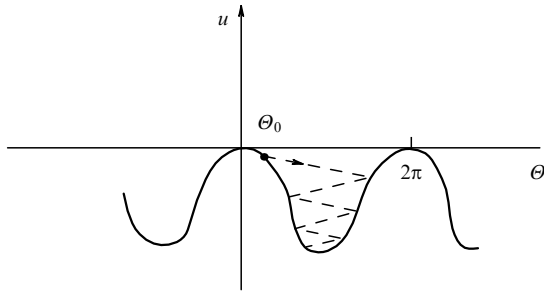


Рис. 11. Механическая аналогия СИ в осцилляционном режиме.

Интенсивность СИ равна

$$I = \pi R^2 C \left\langle \frac{E^2}{4\pi} \Big|_{z=L} \right\rangle. \quad (9.8)$$

Следовательно, она пропорциональна выражению

$$I \sim \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)_{z=L} \sim \left[\frac{\Theta'(\beta)}{\beta} \right]^2, \quad (9.9)$$

где

$$\beta = 2\sqrt{\frac{2z(t - L/c)}{L\tau_s}}.$$

Из (9.9) и рис. 11 ясно, что зависимость интенсивности от времени согласуется с экспериментальной (см. рис. 5) и представляет последовательность уменьшающихся по амплитуде импульсов. Первый, самый сильный импульс запаздывает по сравнению с импульсом накачки на время задержки $t_0 \sim A_0^2 \tau_s$, $A_0 = \ln(1/\Theta_0)$. Характерное число импульсов, в которых излучается основная часть запасенной энергии порядка A_0 . Характерная длительность каждого из них — $A_0 \tau_s$.

Из (9.8) нетрудно убедиться, что $I/I_0 \sim N^2/k^2 R^2$. Пропорциональность интенсивности квадрату числа частиц свидетельствует, что во всей области (2.14) осуществляется СИ.

Результаты данного раздела согласуются с КМС (раздел 8.2) при $A_0 \sim 1$, когда в том и другом случае

отсутствует задержка импульса, а значит, нелинейная фазировка, и уменьшается число осцилляций. Вероятно, именно такой случай реализовался в эксперименте [24] при повышении плотности.

10. Сверхизлучение в плотной протяженной среде

В целях общности анализа теперь следует рассмотреть сверхизлучение в случае (2.42в), который представляет самостоятельный интерес, поскольку может реализоваться на поляритонах в твердом теле [1, 7, 70] или в замагниченной плазме (см. ниже). Теперь диполи находятся на малом расстоянии друг от друга и поэтому, как объяснялось в начале раздела 8.2, наиболее адекватное описание СИ дает КМС (в данной работе, как и в [46], — в линейном варианте).

При $l \ll \lambda \ll L$ физические величины мало меняются на межатомном расстоянии, поэтому применимо приближение сплошной среды: $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}$, $\xi_a(t) \rightarrow \xi(\mathbf{r}, t)$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и т.д. Намагниченность среды представляет собой один из эффектов первого порядка малости по v_a/c , которыми мы пренебрегали с самого начала. По этой причине среду считаем немагнитной и полагаем далее $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Уравнения Максвелла вместе с уравнением движения образуют замкнутую систему КМС в случае (2.41в):

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad (10.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi n \xi; \quad (10.2)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{H} = 0; \quad (10.3)$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}; \quad (10.4)$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}; \quad (10.5)$$

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (10.6)$$

где точкой обозначена частная производная $\partial/\partial t$.

Пусть V — фиксированный объем внутри среды. Преобразуя на основе уравнений (10.1)–(10.6) производную

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \int_V d^3 r n \dot{\xi} m (\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi),$$

где

$$\varepsilon_a = \int d^3 r n \left(\frac{m \dot{\xi}^2}{2} + \frac{m \omega_0^2 \xi^2}{2} \right)$$

— энергия атомов в КМС, получаем уравнение баланса энергии:

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon_a + \varepsilon_f) = - \int_{\Gamma} d\mathbf{f} \mathbf{S}, \quad (9.7)$$

где Γ — граница объема V , $d\mathbf{f}$ — внешний элемент площади этой границы,

$$\varepsilon_f = \int_V d^3 r W, \quad W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad (9.8)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

— плотность потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга). Эффекты спонтанного излучения и влияние столкновений в данном разделе считаются малыми и поэтому не учтены в (10.1)–(10.6), поскольку имеются в виду приложения КМС к разреженной среде типа плазмы токамака. Ниже будет показано, что в этом случае указанные эффекты действительно несущественны.

Таким образом, в данном случае среда является диэлектриком. Подставив в (10.1)–(10.6) ξ , \mathbf{E} и \mathbf{D} в виде $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$; $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$; $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r})$ найдем диэлектрическую проницаемость на частоте ω :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.9)$$

Физическая суть явления СИ в случае (2.42в) состоит в следующем. Пусть в среде при $t = 0$ имеется некое возбуждение, скажем, с начальным условием

$$t = 0, \quad \dot{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \xi = 0, \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = 0. \quad (10.10)$$

Такое начальное условие соответствует, очевидно, случаю, когда первоначально покоящимся массам при $t = 0$ придадут скорости $\dot{\xi}_a = \mathbf{f}(\mathbf{r}_a)$. Если это локализованное где-то внутри среды возбуждение, то по ней начинают распространяться коллективные волны, в результате чего возбуждение "рассасывается". Дойдя до границы среды, эти волны превращаются в электромагнитные, покидающие среду.

Определим вид этих коллективных волн в бесконечной однородной ($n = \text{const}$) среде. Для этого будем искать решение (10.1)–(10.6) в виде $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\omega t)$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\omega t)$ и т.д., где ξ , \mathbf{E} — постоянные амплитуды. Получаем

$$\xi = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E}; \quad (10.11)$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}; \quad (10.12)$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{H} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}.$$

Направим ось z вдоль \mathbf{p} . Тогда из (10.12) получаем

$$\begin{cases} -pE_y = \frac{\omega}{c} H_x, \\ pH_x = -\frac{\omega}{c} \varepsilon E_y; \end{cases} \quad (10.13)$$

$$\begin{cases} pE_x = \frac{\omega}{c} H_y, \\ pH_y = \frac{\omega}{c} \varepsilon E_x; \end{cases} \quad (10.14)$$

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega)E_z = 0, \\ H_z = 0. \end{cases} \quad (10.15)$$

Таким образом, поле \mathbf{H} — поперечное ($H_z = 0$). Поле \mathbf{E} может быть как поперечным ($E_z = 0$), так и продольным ($E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$). Поперечные волны описываются системами (10.13), (10.14), которые соответствуют двум поляризациям. Из условий совместности каждой из этих систем следует дисперсионное соотноше-

ние для поперечных волн:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \quad (10.16)$$

Отсюда и из (10.9) следует, что имеются две ветви поперечных коллективных волн: быстрая (или обыкновенная) —

$$\omega_1^2 = B + \sqrt{A}, \quad (10.17)$$

медленная (или необыкновенная) —

$$\omega_2^2 = B - \sqrt{A}, \quad (10.18)$$

где $B = (\omega_0^2 + \omega_p^2 + p^2 c^2)/2$, $A = B^2 - \omega_0^2 p^2 c^2$. Модуль волнового вектора \mathbf{p} меняется в пределах $(0, +\infty)$. При этом ω_1 монотонно возрастает от $\omega = \omega_a = (\omega_0^2 + \omega_p^2)^{1/2}$ до $\omega = +\infty$, а ω_2 также монотонно возрастает от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$. Таким образом, при любых p $\omega_1 > \omega_a$, $0 < \omega_2 < \omega_0$. Волны с частотами $\omega_0 < \omega < \omega_a$ быстро затухают, поскольку для них $\varepsilon < 0$. При $p \rightarrow 0$ $\omega_1 \rightarrow \omega_a$, $\omega_2 \approx pc\omega_0/\omega_a$. При $p \rightarrow \infty$ $\omega_1 \approx pc$, $\omega_2 \approx \omega_0$.

Таким образом, при больших частотах, когда смещения осцилляторов пренебрежимо малы ($\xi_a \approx 0$), по среде распространяется обычная электромагнитная волна ($\omega_1 \approx pc$). Вторая ветвь (ω_2) при $p \rightarrow \infty$ описывает практически независимые колебания осцилляторов, слегка возмущенные их диполь-дипольным взаимодействием. Следуя, например [70], описанные здесь поперечные волны будем называть поляритами. Они представляют собой своеобразную смесь осцилляторных и электромагнитных колебаний.

Продольные волны представляют собой собственные колебания среды. При $E_z \neq 0$ из (10.15) видно, что $\varepsilon(\omega) = 0$, $\mathbf{D} = 0$, т.е.

$$\omega = \omega_a. \quad (10.19)$$

В этом случае согласно (10.13), (10.14) $E_x = E_y = H_x = H_y = 0$, а согласно (10.11)

$$\xi = -\frac{1}{4\pi n e} \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = 0. \quad (10.20)$$

Продольные волны не распространяются по плазме, так как согласно (10.19) их групповая скорость равна нулю: $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{p} = 0$. В пределе $\omega_0 \rightarrow 0$, соответствующем полностью ионизованной идеальной плазме, эти волны переходят в обычные плазменные колебания.

Решим теперь следующую задачу. Пусть при $t = 0$ в бесконечной однородной среде создается возбуждение (10.10), для которого $\varepsilon_f = 0$, $\varepsilon_a = (1/2)\mathbf{nm} \int d^3r \mathbf{f}^2(\mathbf{r})$. Таким образом, начальная энергия возбуждения равна

$$E_0 = \varepsilon_a + \varepsilon_f = \frac{1}{2} \mathbf{nm} \int d^3r \mathbf{f}^2(\mathbf{r}). \quad (10.21)$$

Рассчитаем теперь энергию, унесенную коллективными волнами:

$$\begin{aligned} E_r &= \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega_r \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{nS}(t, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{c}{8\pi^2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega_r \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{n}(\mathbf{E}_{-\omega} \times \mathbf{H}_\omega) = \\ &= \frac{c}{8\pi^2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega_r \int_0^{\infty} d\omega \mathbf{n}[(\mathbf{E}_\omega^* \times \mathbf{H}_\omega) + (\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{H}_\omega^*)], \end{aligned} \quad (10.22)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ и использованы свойства $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_{\omega}^*$, $\mathbf{H}_{-\omega} = \mathbf{H}_{\omega}^*$, следующие из вещественности \mathbf{E} и \mathbf{H} . Поскольку при $t < 0$ все физические величины равны нулю ($\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$), то к уравнениям (10.1)–(10.6) применяется фурье-преобразование вида (8.45), (8.47). Одновременно произведем фурье-преобразование по пространственным переменным вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \int d^3r \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{p}).$$

Уравнения для фурье-компонент с учетом начального условия (10.10) имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\omega p} = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\omega p}, \\ \mathbf{p} \times \mathbf{H}_{\omega p} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_{\omega p} - \frac{4\pi ne\omega}{c^2(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{f}(\mathbf{p}), \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\xi_{\omega p} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\omega p} + \mathbf{f}(\mathbf{p}). \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{H}_{\omega p} = \frac{4\pi ne\omega}{c(\omega^2 - \omega_0^2)d} [\mathbf{p} \times \mathbf{f}(\mathbf{p})],$$

где

$$d = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - p^2.$$

При $r \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл

$$\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{H}_{\omega p}$$

дают сингулярность $1/d$ (когда производится интегрирование по $d\mathbf{p}$) и направления \mathbf{p} , близкие к $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ (когда производится интегрирование по направлениям \mathbf{p}). По этой причине в несингулярных множителях подынтегрального выражения можно положить

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = q\mathbf{n}, \quad q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad (10.23)$$

и вынести их за интеграл. Оставшийся интеграл вычисляется по формуле

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{p^2 - q^2 - i0} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}) = \frac{\exp iqr}{r}.$$

Примененное здесь правило обхода полюсов следует из замечания, связанного с формулами (8.45), (8.47), согласно которому под ω следует понимать комплексную величину $\omega + i0$. Результат имеет вид:

$$\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{ne\omega}{c(\omega^2 - \omega_0^2)} [\mathbf{q} \times \mathbf{f}(\mathbf{q})] \theta \frac{\exp iqr}{r}, \quad (10.24)$$

где множитель $\theta = \theta[(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_a)]$ возникает вследствие того, что при $\omega_0 < \omega < \omega_a \varepsilon < 0$, поэтому q — чисто мнимое и $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ экспоненциально затухает при $r \rightarrow \infty$. Теперь произведем фурье-преобразование вида (8.45), (8.47) уравнений (10.2), (10.5) и (10.6):

$$\mathbf{V} \times \mathbf{H}_{\omega} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}_{\omega}. \quad (10.25)$$

Отсюда и из (10.24) получаем

$$\mathbf{E}_{\omega} = \frac{ne}{(\omega^2 - \omega_0^2)\varepsilon} \mathbf{q} \times [\mathbf{q} \times \mathbf{f}(\mathbf{q})] \frac{\exp iqr}{r} \theta. \quad (10.26)$$

Тогда из (10.22), (10.24) следует

$$E_{\Gamma} = \frac{n^2 e^2}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\mathbf{n}} \int_0^{\infty} d\omega \rho(\omega) (\mathbf{n} \times \mathbf{f})^2 \theta = \frac{n^2 e^2}{\pi c^3} (\tau_1 + \tau_2),$$

где

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^4 \sqrt{\varepsilon}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}; \quad \tau_1 = \int_{\omega_a}^{\infty} d\omega \rho(\omega) S(q);$$

$$\tau_2 = \int_0^{\omega_0} d\omega \rho(\omega) S(q); \quad S(q) = \langle [\mathbf{n} \times \mathbf{f}(\mathbf{q})]^2 \rangle;$$

угловыми скобками обозначено усреднение по направлениям \mathbf{r} . В каждом из интегралов $\tau_{1,2}$ заменим переменную интегрирования ω на q , причем при преобразовании τ_1 и τ_2 используем, соответственно, ветви ω_1 и ω_2 заменой $p \rightarrow q$ в (10.17) и (10.18). Таким образом, τ_1 определяет энергию, уносимую необыкновенными волнами, τ_2 — обыкновенными. Дифференцируя соотношение (10.23), получаем $\rho(\omega) d\omega = c^3 F(\omega) q^2 dq$, где

$$F(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega_0^2 \omega^2}.$$

Следовательно,

$$E_{\Gamma} = \frac{n^2 e^2}{\pi} \int_0^{\infty} dq q^2 S(q) K(q), \quad (10.27)$$

где $K(q) = F(\omega_1) + F(\omega_2)$. Множитель $K(q)$ является симметричным алгебраическим выражением по корням ω_1^2 и ω_2^2 биквадратного уравнения

$$\omega^4 - (\omega_a^2 + q^2 c^2)\omega^2 + q^2 c^2 \omega_0^2 = 0,$$

следующего из (10.23). Это выражение преобразуем, используя теорему Виета

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_a^2 + q^2 c^2, \quad \omega_1^2 \omega_2^2 = q^2 c^2 \omega_0^2.$$

Результат имеет вид $K(q) = 1/\omega_p^2$. Отсюда и из (10.27) следует

$$E_{\Gamma} = \frac{nm}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 S(q). \quad (10.28)$$

Формула (10.21) для начальной энергии после перехода к фурье-компонентам принимает вид

$$E_0 = \frac{nm}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq q^2 M(q), \quad (10.29)$$

где $M(q) = \langle f^2(q\mathbf{n}) \rangle$.

Поскольку $(\mathbf{n} \times \mathbf{f})^2 \leq f^2$, то из (10.28) и (10.29) следует, что $E_{\Gamma} \leq E_0$. Например, если при $t = 0$ электроны получают толчок в одном направлении, а возбужденные атомы расположены сферически-симметрично ($\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}f(r)$, $|\mathbf{k}| = 1$, $\mathbf{k} = \text{const}$), то $E_{\Gamma} = 2E_0/3$. Таким обра-

зом, и в случае (2.42в) образуются дипольно неизлучающие состояния. Природа этих состояний становится ясной из анализа формулы (10.28), согласно которой $E_r = 0$ при $\mathbf{q} \times \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$, т. е. при

$$\mathbf{V} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0. \quad (10.30)$$

Из (10.4), (10.6) и (10.10) получаем

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_\omega; \quad (10.31)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\xi_\omega = \frac{e}{m} \mathbf{E}_\omega + \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (10.32)$$

а из (10.30) и (10.32) следует

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\mathbf{V} \times \xi_\omega) = \frac{e}{m} (\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\omega). \quad (10.33)$$

Теперь возьмем ротор от (10.25) и учтем (10.31):

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{H}_\omega = 0. \quad (10.34)$$

Уравнения (10.31), (10.33), (10.34) образуют замкнутую систему для трех величин: $\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\omega$, \mathbf{H}_ω , $\mathbf{V} \times \xi_\omega$. Поскольку они являются однородными (ср. с (10.32)), а среда бесконечной, то их решение имеет вид $\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\omega = 0$, $\mathbf{H}_\omega = 0$, $\mathbf{V} \times \xi_\omega = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{V} \times \mathbf{D}_\omega = \mathbf{V} \times (\mathbf{E}_\omega + 4\pi e \xi_\omega) = 0.$$

Отсюда и из (10.1), переписанного в виде $\mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_\omega = 0$, следует, что $\mathbf{D}_\omega = 0$, а значит, $\mathbf{D} = 0$, откуда следует (10.20). Из $\mathbf{H}_\omega = 0$ и (10.25) заключаем, что $\varepsilon = 0$, т. е. частота ω определяется из (10.19). Таким образом, аналогом дипольно неизлучающих состояний в случае (2.42в) являются обсуждавшиеся выше продольные волны. Часть энергии возбуждения на длительное время удерживается этими колебаниями. В дальнейшем эти когерентные состояния разрушаются межатомными столкновениями, и их энергия либо излучается, либо переходит в другие степени свободы.

Рассмотрим теперь аналог фундаментального решения (6.12). В пределе сплошной среды следует произвести замену

$$\delta_{ab} \rightarrow n\delta^{(3)}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \quad (10.35)$$

которая согласуется с правилом (2.35). Однако, как видно из (10.21), при такой замене $E_0 = \infty$, что физически бессмысленно. Причина очевидна: начальное условие вида (10.35) не удовлетворяет условиям применимости приближения сплошной среды:

$$l \ll L_0, \quad q_0 l \ll 1, \quad (10.36)$$

где L_0 — характерный размер начального возбуждения, $q_0 = 1/L_0$. Это затруднение в действительности отсутствует, поскольку в случае (2.42в) нет необходимости в нахождении фундаментального решения (5.12). Вследствие $\lambda \ll L$ задача об эволюции любого начального возбуждения среды может быть решена другими методами: численными, разложением на фурье-гармоники, в приближении геометрической оптики и т.д.

В разделе 12 мы убедимся, что все интересные в практическом отношении случаи могут быть легко проанализированы, если рассмотреть аналог фундамен-

тального решения, для которого

$$\frac{c}{\omega_p} \ll L_0 \ll L, \quad (10.37)$$

причем во всех этих случаях

$$\omega_0 \gg \omega_p, \quad (10.38)$$

т.е. среда является достаточно разреженной. При условиях (10.37), (10.38)

$$\omega_1 \approx qc, \quad \omega_2 \approx \omega_0 - \frac{\omega_0 \omega_p^2}{2c^2 q^2}; \quad (10.39)$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \sim \left(\frac{c}{L_0 \omega_p} \right)^2 \ll 1.$$

Это означает, что такое достаточно сильно локализованное начальное возбуждение составлено главным образом из медленных необыкновенных волн с малыми λ , для которых закон дисперсии (10.18) сводится к более простому выражению (10.39).

Характерная скорость распыливания такого начального возбуждения определяется групповой скоростью этих волн, которая согласно (10.39) равна

$$v_g = \frac{d\omega_2}{dq} = \frac{\omega_0 \omega_p^2}{c^2 q^3} \sim \frac{\omega_0 \omega_p^2 L_0^3}{c^2}. \quad (10.40)$$

Сравнивая выводы данного раздела и раздела 8, мы не обнаруживаем существенной разницы в физике СИ в случаях (2.42б) и (2.42в): и там, и здесь СИ переносится коллективными волнами. Различаются лишь скорости распространения этих волн: в случае (2.42б) она близка к c , а в случае (2.42в) — значительно ниже, что является результатом диполь-дипольного взаимодействия атомов. Благодаря этому взаимодействию в системе атомов устанавливается дальний порядок, необходимый для распространения когерентных волн. Флуктуирующая короткодействующая часть диполь-дипольного взаимодействия не существенна при условии (7.19), которое выполняется практически во всех интересных случаях.

11. Затухание коллективных волн

В предыдущем разделе рассматривалось СИ в плотной среде атомов Лоренца, представленных заряженными гармоническими осцилляторами с одинаковой собственной частотой. Теперь изучим эффекты немонохроматичности частоты осцилляторов. Данный раздел написан главным образом в методических целях и его следует считать введением, которое позволит приступить к изучению проявлений СИ в замагниченной плазме.

Рассмотрим разреженную среду, в которой основным механизмом затухания является доплеровское уширение. Вследствие этого уширения собственная частота осцилляторов в лабораторной системе отсчета, которую далее обозначим через Ω , будет различна. Обозначим функцию распределения по Ω через $f(\Omega)$. Выполняются соотношения:

$$\int_0^\infty d\Omega f(\Omega) = 1, \quad \int_0^\infty d\Omega \Omega f(\Omega) = \omega_0.$$

Пусть $\Delta\Omega$ — характерная ширина распределения $f(\Omega)$. С течением времени нарастает разность фаз отдельных

осцилляторов, поэтому когерентность разрушается за характерное время $\tau \sim 1/\Delta\Omega$, в чем и заключается физический смысл затухания когерентных волн. Естественно, что при этом энергия возбуждения среды остается неизменной. Однако вследствие исчезновения когерентности эта энергия будет излучаться за гораздо более длительное время — время спонтанного излучения, в процессе которого атомы излучают независимо один от другого. Малой интенсивностью спонтанного излучения далее будем пренебрегать. С учетом уширения осцилляторная координата зависит теперь от трех переменных — Ω , \mathbf{r} и t : $\xi = \xi_\Omega(\mathbf{r}, t)$.

Вместо уравнения (10.6) теперь имеем

$$\ddot{\xi}_\Omega + \Omega^2 \xi_\Omega = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (11.1)$$

Вектор поляризации среды равен

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = ne \int_0^\infty d\Omega f(\Omega) \xi_\Omega(\mathbf{r}, t),$$

следовательно, в качестве ξ в (10.2) следует подставить величину

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\Omega f(\Omega) \xi_\Omega(\mathbf{r}, t). \quad (11.2)$$

Найдем длину затухания коллективных волн, для чего решение уравнений (10.1)–(10.5), (11.1), (11.2) будем искать в виде $\xi_\Omega(\mathbf{r}, t) = \xi_\Omega \exp(-i\omega t + ipz)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp(-i\omega t + ipz)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \exp(i\omega t + ipz)$. Тогда получаем уравнения (10.13)–(10.15), в которых

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \int_0^\infty d\Omega f(\Omega) \frac{1}{\Omega^2 - (\omega + i0)^2} = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega);$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \omega_p^2 \int_0^\infty d\Omega f(\Omega) \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}; \quad (11.3)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \pi \omega_p^2 \operatorname{sign} \omega \int_0^\infty d\Omega f(\Omega) \delta(\Omega^2 - \omega^2) = \frac{\pi \omega_p^2}{2\omega} f(|\omega|),$$

где при расчете использована формула Сохоцкого

$$\frac{1}{a \pm i\delta} = p\left(\frac{1}{a}\right) \mp \pi i \delta(a).$$

В частности, при лоренцевой форме уширения

$$f(\Omega) = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \frac{1}{(\Omega - \omega_0)^2 + (\Delta\Omega/2)^2}$$

диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega + i\Delta\Omega/2)^2 - \omega_0^2} = \frac{\omega_a^2 - (\omega + i\Delta\Omega/2)^2}{\omega_0^2 - (\omega + i\Delta\Omega/2)^2}. \quad (11.4)$$

Таким образом, продольные колебания, для которых $\varepsilon(\omega) = 0$, затухают по закону $\xi \sim \exp(-\Delta\Omega t/2)$.

Для нахождения длины затухания поперечных волн представим p в виде $p = q + ip''$. амплитуда волн уменьшается по закону $\xi \sim \exp(-p''z)$, следовательно, длина затухания равна $L_d = 1/(2p'')$. При $\omega \approx \omega_0$ из (11.4) следует

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0(\omega_0 - \omega - i\Delta\Omega/2)}.$$

Отсюда и из (10.16), считая затухание слабым эффектом, получаем

$$q = \frac{\sqrt{\omega_0} \omega_p}{c\sqrt{2(\omega_0 - \omega)}}, \quad L_d = \frac{\omega_0 \omega_p^2}{c^2 q^3 \Delta\Omega} = \frac{v_g}{\Delta\Omega}, \quad (11.5)$$

где v_g определено в (10.40)

12. Приложение классической модели сверхизлучения к физике плазмы

В данном и следующих разделах рассмотрены циклотронные волны в плазме, возможно, с непривычной точки зрения, а именно, как частный случай (2.42в) явления СИ. Такой угол зрения позволит сделать интересные выводы.

Рассмотрим плазменный цилиндр, помещенный в продольное магнитное поле B_0 . Имея в виду приложение к физике токамаков, рассмотрим типичные для них параметры плазмы:

$$n_e = n_i = n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}, \quad T \sim 10^4 \text{ эВ}, \\ B_0 \sim 5 \times 10^4 \text{ Гс}, \quad a \sim 3 \text{ м}, \quad (12.1)$$

где a — радиус плазменного цилиндра (как в проекте ИТЭР [71]). При условиях (12.1) плазма является сильно замагниченной [72, 73]:

$$\omega_H \tau_c \gg 1, \quad (12.2)$$

где $\omega_H = \omega_B/\gamma$ — циклотронная частота электронов, $\omega_B = eB_0/(mc) \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$ — релятивистский фактор электрона, v — его скорость,

$$\tau_c \sim 10^{-4} \text{ с} \quad (12.3)$$

— характерное время электрон-электронных и электрон-ионных столкновений. Таким образом, электроны совершают, в основном, круговое движение вокруг силовых линий магнитного поля и после 10^8 оборотов испытывают удары, резко изменяющие их траектории. Естественно, что в таких условиях роль столкновений мала и должны проявляться когерентные эффекты.

Размер ларморовой орбиты электронов составляет

$$r_H \sim \frac{v_T}{\omega_H} \sim 3 \times 10^{-3} \text{ см}, \quad (12.4)$$

где $v_T \sim 3 \times 10^9 \text{ см}^{-1}$ — тепловая скорость электронов. Поскольку $r_H \ll a$, то магнитное поле на малых масштабах является практически однородным, следовательно, электроны, совершая циклотронное движение, находятся в резонансе друг с другом. В результате диполь-дипольного взаимодействия устанавливаются корреляции между орбитами разных электронов: каждый электрон слегка возмущает циклотронное движение других электронов, причем это возмущение находится в одной фазе с вращением выбранного электрона. Отсюда заключаем, что в циклотронном излучении должны быть существенными коллективные когерентные эффекты, которые могут значительно усиливать это излучение. Оценим интенсивность этого излучения и характерное время потери энергии плазмой τ_E . Такая задача должна ставиться следующим образом. При $t = 0$ в плазме "отключим" все источники энергии, т.е. реакции синтеза и внешний нагрев. Для простоты "отключим" также и

обмен энергией между электронами и ионами. Тогда энергия электронов $\varepsilon \sim T$ за счет излучения будет уменьшаться по закону

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau_E} T. \quad (12.5)$$

Вследствие независимости начальных (при $t = 0$) фаз циклотронного движения разных электронов полную интенсивность I излучения плазмы следует искать по формуле (8.86), где I_b — интенсивность излучения одного электрона с начальной энергией $\varepsilon \sim T$, окруженного другими электронами, имеющими нулевую начальную энергию. Речь здесь, конечно же, идет об энергии, относящейся к осцилляторным (циклотронным) степеням свободы электронов. Именно эти степени свободы находятся в резонансе друг с другом и проявляют коллективные эффекты. В отличие от предыдущих разделов в случае замагниченной плазмы осцилляторы являются двумерными: только компоненты d_x и d_y дипольного момента меняются со временем по гармоническому закону (ось z направлена вдоль \mathbf{B}). Это означает, что при $t = 0$ для всех электронов, кроме одного, следует положить $\varepsilon_{\perp} = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$. В то же время на движение вдоль z , которое не является резонансной степенью свободы, не налагается никаких ограничений. Мы приходим к выводу, что I_b следует вычислять при условии

$$T_{\perp} = 0, \quad T_{\parallel} = T. \quad (12.6)$$

Ниже мы убедимся, что условие (12.6), следующее из достаточно тривиального соотношения (8.86), приведет к довольно нетривиальным выводам. Заметим, что для модели трехмерных изотропных осцилляторов, рассмотренной в предыдущих разделах, условие, при котором рассчитывается I_b , имеет более простой, чем (12.6), вид: $T = 0$. В остальном же характер физических явлений в замагниченной плазме тот же, что и в случае изотропных осцилляторов: вследствие диполь-дипольного взаимодействия между циклотронными орбитами электронов по плазме распространяются коллективные волны, причем снова имеются два типа волн — быстрая и медленная циклотронные волны.

Итак, при $t = 0$ имеется один электрон с $\varepsilon_{\perp} \neq 0$, $\varepsilon_{\perp} \sim \varepsilon_{\parallel} \sim T$, а для остальных электронов $\varepsilon_{\perp} = 0$, $\varepsilon_{\parallel} \sim T$, т.е. при $t = 0$ они движутся только вдоль оси z . Этот выбранный электрон обращается по круговой орбите с радиусом r_H . Отсюда ясно, что характерные значения волновых векторов q таковы:

$$q \sim \frac{1}{r_H}. \quad (12.7)$$

Из формул (10.40) и (12.4), в которых следует теперь положить $L_0 \sim r_H$, $\omega_0 = \omega_H$, получаем

$$v_g \sim 10^7 \text{ см с}^{-1}. \quad (12.8)$$

Сначала (за время r_H/v_g) за счет кулоновского взаимодействия выбранный электрон передает энергию другим электронам, находящимся на расстоянии r_H от него, т.е. в пределах ларморовской орбиты. После этой быстрой стадии в плазме возникает возбуждение с энергией T в области с размером r_H , чем дополнительно поясняется соотношение (12.7).

Поскольку

$$\frac{qc}{\omega_0} \equiv \frac{qc}{\omega_H} \sim \frac{c}{r_H \omega_H} \sim \frac{c}{v_T} \gg 1, \quad (12.9)$$

то это возбуждение составлено главным образом из медленных циклотронных волн. Далее волны начинают распространяться со скоростью v_g и возбуждение "раскашивается". Движение электронов вдоль z приводит к доплеровскому уширению, что вызывает быстрое затухание основной части этих волн, т.е. переход когерентных колебаний в некогерентные, энергия которых, как говорилось в разделе 11, излучается очень медленно. Имеется, однако, малая доля ρ незатухающих волн, которые покидают плазму, унося энергию.

Физический смысл выражения (11.3) для ε'' заключается в том, что δ -функция в подынтегральном выражении выделяет группу электронов, находящихся в резонансе с циклотронной волной частоты ω , которые и поглощают энергию этой волны. Рассмотрим электроны, движущиеся вдоль силовой линии магнитного поля со скоростью v_z (как уже говорилось, $v_x = v_y = 0$). Резонансная с этим электроном волна в его системе покоя имеет частоту $\omega_0 = \omega_B$ и волновой вектор \mathbf{q}' , а в лабораторной — Ω и \mathbf{q} . Поскольку (Ω, \mathbf{q}) — 4-вектор, то имеем соотношение $\omega_B = \gamma(\Omega - v_z q_z)$, где $\gamma = (1 - v_z^2/c^2)^{-1/2}$. Отсюда следует, что при интересующей нас нерелятивистских скоростях частота резонансной с электроном волны в лабораторной системе отсчета равна

$$\Omega = \frac{\omega_B}{\gamma} + q_z v_z \approx \omega_B - \frac{\omega_B}{2c^2} v_z^2 + q_z v_z. \quad (12.10)$$

Приравняв эту частоту к частоте $\omega = \omega(\mathbf{q})$ движущейся по плазме волны, получим условие резонанса, т.е. условие наличия поглощения:

$$\Omega = \omega(\mathbf{q}), \quad (12.11)$$

которое перепишем в виде

$$v_z^2 - 2 \frac{c^2 q_z}{\omega_B} v_z + 2c^2 \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B} = 0.$$

Отсюда находим скорости резонансных электронов

$$(v_z)_{1,2} = \frac{c}{\omega_B} (c q_z \pm \sqrt{D}), \quad D = c^2 q_z^2 - 2\omega_B [\omega(\mathbf{q}) - \omega_B]. \quad (12.12)$$

Очевидно, условие отсутствия поглощения имеет вид

$$D < 0. \quad (12.13)$$

Покажем, что существуют волны, для которых это условие выполняется, и поэтому такие волны не поглощаются. Для этих волн вектор \mathbf{q} вещественный, что и предполагалось при выводе (12.13). Волновые векторы \mathbf{q} этих волн почти перпендикулярны к направлению \mathbf{B} , т.е. $|q_z| \ll q$. Поскольку в (12.12) оба слагаемых в правой части одного порядка величины и q_z мал, то во втором слагаемом достаточно положить $q_z = 0$, т.е. в качестве $\omega(\mathbf{q})$ подставить закон дисперсии $\omega(q)$ волн с $\mathbf{q} \perp \mathbf{B}$, что существенно упрощает расчет. По этой же причине в законе дисперсии $\omega(\mathbf{q})$ из (12.12) можно положить $T_{\perp} = T_{\parallel} = 0$. Более строгий расчет приведен в приложении III.

Система уравнений, описывающая нерелятивистскую плазму в магнитном поле \mathbf{B}_0 , направленном вдоль оси z ,

имеет вид (ср. с (10.1)–(10.6))

$$m\ddot{\xi}_{\perp} = \frac{e}{c} \dot{\xi}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 + e\mathbf{E}_{\perp}; \quad m\ddot{\xi}_z = eE_z; \quad (12.14)$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} ne\dot{\xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где знаком \perp отмечены компоненты, перпендикулярные \mathbf{B}_0 . Рассматривая зависимость от \mathbf{r} и t вида $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t)$, для амплитуд волны из (12.14) получаем систему:

$$-\omega^2 \xi_{\perp} = -i\omega_B \omega \xi_{\perp} \times \mathbf{K} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\perp}; \quad -\omega^2 \xi_z = \frac{e}{m} E_z; \quad (12.15)$$

$$\mathbf{q} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}; \quad \mathbf{q} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D},$$

где \mathbf{B} , \mathbf{E} — поля циклотронной волны, $\mathbf{K} = \mathbf{B}_0/B_0$. Отсюда и из (10.2) следуют уравнения

$$D_x = \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}; \quad (12.16)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}) - q^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (12.17)$$

где

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon = \frac{\omega_B^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_B^2 - \omega^2};$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} \equiv -if, \quad f = \frac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)};$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} \equiv \eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Приравнивая детерминант (12.17) к нулю, с учетом (12.16) получаем дисперсионное уравнение, из которого определяются зависимости $\omega = \omega(\mathbf{q})$ для коллективных волн [74]:

$$\det \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) + q_{\alpha} q_{\beta} - q^2 \delta_{\alpha\beta} \right] = 0. \quad (12.18)$$

При $\mathbf{q} \perp \mathbf{B}_0$ из (12.18) следует уравнение $F_1(\omega)F_2(\omega) = 0$, где

$$F_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \eta - q^2, \quad F_2 = \varepsilon(\varepsilon - N^2) - f^2,$$

$N = qc/\omega$ — показатель преломления. Направим ось x вдоль \mathbf{q} . Согласно (12.15) $B_x = 0$. Из уравнения $F_1 = 0$ следует соотношение $\omega^2 = q^2 c^2 + \omega_p^2$. Последнее определяет волну, у которой $E_x = E_y = B_z = 0$, $\xi_x = \xi_y = 0$. Уравнение $F_2 = 0$ легко приводится к виду

$$\omega^4 - (\omega_B^2 + 2\omega_p^2 + q^2 c^2) \omega^2 + \omega_p^4 + q^2 c^2 (\omega_B^2 + \omega_p^2) = 0. \quad (12.19)$$

Оно описывает быструю и медленную циклотронные волны, у которых $E_z = 0$, $\xi_z = 0$, $B_x = B_y = 0$. Для быстрой волны $\omega^2 = A + \sqrt{D} \equiv \omega_f^2$, где

$$A = \omega_p^2 + \frac{\omega_B^2 + q^2 c^2}{2}, \quad D = \frac{1}{4} (q^2 c^2 - \omega_B^2)^2 + \omega_p^2 \omega_B^2.$$

Для медленной волны $\omega^2 = A - \sqrt{D} \equiv \omega_s^2$.

При $q^2 c^2 - \omega_B^2 \gg \omega_p \omega_B$

$$\omega_f^2 \approx \omega_p^2 + q^2 c^2 + \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{q^2 c^2 - \omega_B^2}; \quad \omega_s^2 \approx \omega_B^2 + \omega_p^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{q^2 c^2 - \omega_B^2}.$$

В частности, в представляющем наибольший интерес случае (12.9)

$$\omega_s^2 \approx \omega_B^2 + \omega_p^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{q^2 c^2}.$$

Поскольку при параметрах (12.1) выполняется условие (10.38), то получаем

$$\omega_s \approx \omega_B + \frac{\omega_p^2}{2\omega_B} - \frac{\omega_p^2 \omega_B}{2q^2 c^2}. \quad (12.20)$$

Сравнение (10.40) и (12.20) подтверждает полученную ранее оценку (12.8)

При подстановке (12.20) в (12.12), (12.13) можно пренебречь последним слагаемым в (12.20). Условие отсутствия поглощения (12.13) принимает вид

$$|q_z| < \frac{\omega_p}{c}. \quad (12.21)$$

Таким образом, не поглощаются волны, у которых волновые векторы \mathbf{q} составляют с плоскостью, перпендикулярной магнитному полю \mathbf{B}_0 , углы из интервала

$$|\alpha| < \alpha_c, \quad (12.22)$$

где

$$\alpha_c = \frac{\omega_p}{qc} \sim \frac{\omega_p r_H}{c} \sim \frac{\omega_p v_T}{\omega_B c} \sim 0,04. \quad (12.23)$$

В градусах $\alpha_c \approx 3^\circ$, а полный угол раствора области прозрачности (12.22) $2\alpha_c \approx 6^\circ$. На единичной сфере область (12.22) образует кольцо (обруч) площадью $4\pi\alpha_c$, поэтому при "расплывании" начального возбуждения (см. рассуждения после формулы (12.8)) все эти коллективные волны поглощаются, кроме малой доли

$$\rho = \frac{4\pi\alpha_c}{4\pi} = \alpha_c. \quad (12.24)$$

Проанализируем полученную картину. Уравнение баланса энергии (12.5) имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = -I_b, \quad (12.25)$$

где I_b — интенсивность излучения при одном возбужденном при $t = 0$ электроне. Незатухающие волны несут энергию ρT и через время $\tau_1 \sim a/v_g \sim 10^{-5}$ с достигают границы плазмы и покидают ее, превращаясь в электромагнитные волны (см. приложение IV). Поскольку $\tau_c \gg \tau_1$ (см. (12.3)), то когерентность при таком движении волн не нарушается. Через время τ_c происходят столкновения и система возвращается к прежней ситуации — такой же, как и при $t = 0$, но с абсолютно другими фазами осцилляторов. Далее каждый электрон опять испускает из плазмы энергию ρT и т.д. Таким образом,

$$I_b \sim \frac{\rho T}{\tau_c}. \quad (12.26)$$

Из сравнения (12.25), (12.26) с (12.5) получаем оценку $\tau_E \sim \tau_c/\rho \sim 3 \times 10^{-3}$ с.

Таким будем время жизни плазмы, не окруженной металлическим кожухом. Испускаемые электронами циклотронные волны миллиметрового диапазона

хорошо отражаются первой стенкой токамака, однако уже после первого отражения из-за практически полной случайности больших фаз когерентность теряется. Энергия этих волн переходит в энергию некогерентного возбуждения плазмы, которая, как было указано ранее, практически не излучается. Однако при первом отражении от стенки будет поглощена доля энергии $R \sim \sqrt{\omega/\sigma} \approx \sqrt{\omega_B/\sigma} \sim 3 \times 10^{-3}$, где $\sigma \sim 10^{17} \text{ с}^{-1}$ — проводимость стенки токамака. Таким образом, интенсивность (12.26) следует домножить на R . Окончательно получаем $\tau_E \sim \tau_c/(\rho R) \sim 1 \text{ с}$, что согласуется с экспериментальным временем, полученным на установках TFTR и JET [71]. Такое совпадение, однако, не следует рассматривать как подтверждение развитой в данной разделе теории, поскольку имеется ряд эффектов, которые в ней не учтены. Они обсуждаются в следующих разделах.

В заключении данного раздела остановимся на обсуждении формул (12.10), (12.13). В (12.10) учтена релятивистская поправка v_z^2/c^2 , которая оказалась существенной в области малых углов α . Таким образом, отсутствие поглощения волн при малых α является релятивистским эффектом. Может возникнуть сомнение в том, что учет квадратичных по скорости членов нарушит линейность КМС, которая существенным образом была использована выше. Очевидно, однако, что линейность не нарушается, поскольку осцилляторной резонансной переменной является ξ_{\perp} , по которой уравнения КМС остаются линейными, а учитываются квадратичные по v_z члены (см. приложение III).

13. Диффузионный режим переноса когерентного циклотронного излучения в неоднородной плазме

В предыдущем разделе был рассмотрен далекий от реальности случай однородной плазмы. Пусть λ — характерный размер неоднородности замагниченной плазмы (например, магнитный остров [75]). Поскольку $r_H \ll \lambda$, то основной эффект, указанный в разделе 12, остается: в плазме осуществляется перенос когерентного циклотронного излучения поперек силовых линий, только теперь в отличие от раздела 12 оно не может уйти на расстояние, большее λ . Таким образом, области размера λ (далее ячейки) обмениваются между собой энергией и весь процесс приобретает характер диффузии энергии на периферию плазмы. Это вовсе не означает, что плазма будет излучать, главным образом, на циклотронной частоте: по мере диффузии упорядоченная коллективная энергия может преобразоваться в энергию хаотического теплового движения частиц плазмы, в обычное тормозное излучение и т.д. Эти вопросы требуют детального изучения, и поэтому все изложенное в данном разделе следует считать не более чем предположением, суть которого состоит в том, что диффузия когерентных циклотронных колебаний дает основной вклад в перенос энергии в токамаке.

Плотность потока энергии q из ячейки оценим из соотношения $q\lambda^2 \sim I_b n \lambda^3$, где $I_b \sim T\rho/\tau_c$ — интенсивность излучения, приходящаяся на один электрон (см. раздел 12). Следовательно,

$$q \sim \frac{nT\lambda}{\tau_c} \rho.$$

Суммарный крупномасштабный поток энергии равен

$$q_D \sim \frac{nT\lambda}{\tau_c} \Delta\rho,$$

где $\Delta\rho$ — разность параметров ρ для соседних ячеек, $\Delta\rho \sim (\lambda/a)\rho_0$, ρ_0 — значение параметра ρ для центра плазмы (см. (12.23), (12.24)). Таким образом,

$$q_D \sim \frac{nT\lambda^2\rho_0}{\tau_c a}.$$

Время жизни энергии τ_E оцениваем из уравнения баланса энергии единицы длины плазменного цилиндра:

$$\frac{nTa^2}{\tau_E} \sim q_D a.$$

Отсюда

$$\tau_E \sim \frac{\tau_c}{\rho_0} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2.$$

Таким образом, по сравнению с τ_E для однородной плазмы (см. раздел 12) в неоднородной плазме время жизни энергии больше в $(a/\lambda)^2$ раз. Подставляя типичные для токамака параметры, находим (в секундах) $\tau_E \sim 3 \times 10^{-3} (a/\lambda)^2$. Согласие с экспериментом достигается при $a/\lambda \sim 10$.

14. Заключение

Сверхизлучение определяют как явление, включающее два механизма: возникновение корреляций между первоначально независимыми возбужденными атомами (фазировка) и последующее усиленное коллективное излучение системы атомов, являющееся следствием фазировки. Из этого определения видно, что СИ — очень общее явление. Если рассматривается система инвертированных атомов, то это сугубо квантовый эффект, родственной генерации лазерного излучения. Таким оно и считалось, начиная с пионерской работы Дикке [8], в которой корреляция атомов возникла как удивительное и простое следствие симметрии их гамильтониана и полной волновой функции. Если речь идет о классических системах, например, электронах, вращающихся в магнитном поле, сгустках электронов, формирующихся в вигглерах, электроннолучевых лампах для микроволн и т.д., то генерируемое излучение — это тоже СИ, поскольку оба указанных выше механизма здесь присутствуют. Коллективные волны в бесстолкновительной плазме или поляритоны в возбужденной среде — тоже СИ, но состоящее из медленно распространяющихся волн, поскольку энергия распределена между полем и частицами.

В одном обзоре невозможно рассмотреть все проявления СИ, которые, если принять изложенное выше определение, стали применяться на практике задолго до работы [8]. По этой причине была выбрана более узкая цель — разобраться в основных теоретических подходах, указать их сильные и слабые стороны, изложить теорию на разных уровнях сложности, по возможности усовершенствовать ее, разрешить или наметить подходы к решению неясных вопросов.

Сначала на качественном уровне был изложен смысл основных работ по СИ и с разных точек зрения разобрана теория Дикке. Затем детально рассмотрен нелинейный

механизм фазировки и его роль в СИ. С целью выяснить роль диполь-дипольного взаимодействия атомов была введена КМС, которая оказалась довольно содержательной. Показано, что взаимодействие в образце малого размера ($L \ll \lambda$) вызывает эффект экранировки, замедляющий выход излучения из вещества. В результате экранировки образуется локализованное возбуждение с нулевым дипольным моментом и поэтому не излучающее. Это когерентное возбуждение в последующем разрушается межатомными столкновениями, и избыточная энергия медленно уходит из вещества в виде некогерентного излучения. Далее показано, что в образце эллипсоидальной формы происходит своеобразная компенсация диполь-дипольного взаимодействия, не имеющая место в образцах другой формы. Это взаимодействие лежит в основе другого — дипольного механизма фазировки атомов, который действует одновременно и конкурирует с нелинейным механизмом. Выяснилось, что выводы ряда работ о дипольной дефазировке атомов и подавлении СИ некорректны, что может стимулировать эксперименты по СИ в малых образцах.

В разделе 8 дан обзор работ по СИ в протяженных образцах ($\lambda \ll L \ll c\tau_s$), получено новое решение известных уравнений СИ и указан эффект нелинейного сужения угловой расходимости пучка СИ. Кроме того, в рамках линейной КМС учтено запаздывающее диполь-дипольное взаимодействие, которое в этом случае снова приводит к экранировке. Предложена нелинейная КМС, которая может оказаться наиболее адекватной моделью СИ. Далее на примере накачки стержня π -импульсом разобран наблюдаемый в экспериментах осцилляторный режим СИ. В разделах 10–13 рассмотрено СИ в плотной среде ($l \ll \lambda$), в которой СИ представляет собой коллективные волны, распространяющиеся внутри тела и на его границе превращающиеся в убегающие электромагнитные волны. Предложена модель диффузионного переноса циклотронных волн, которая может объяснить аномальную теплопроводность, наблюдающуюся в замагниченной плазме [76–79].

В заключение остановимся на проблемах, которые интересно рассмотреть в будущем. Для дальнейшего развития теории СИ принципиально важен численный расчет СИ в рамках нелинейной КМС, одновременно учитывающей как нелинейные эффекты, так и диполь-дипольное взаимодействие атомов. Его следует осуществить в обоих случаях: $L \lesssim \lambda$ и $L \gtrsim \lambda$. Представляет самостоятельный интерес расчет СИ для сферического тела с учетом слагаемых порядка $1/c^2$ в лагранжиане (см. раздел 7). Стоит подумать об эксперименте по СИ для малых образцов на основе техники электронного парамагнитного резонанса (см. раздел 7). Специальной проверки заслуживает предположение о циклотронном переносе энергии в замагниченной плазме. Еще одна интересная задача возникает в приложении к астрофизике, где имеется проблема высокой радиосветимости пульсаров, которую, вероятно, можно объяснить коллективными эффектами СИ [79, 80]. Добавим еще, что углубление теории СИ пополнит наши знания о нестационарных фазовых переходах. Словом, в теории СИ и ее приложениях еще остается много фундаментальных нерешенных задач.

Благодарности. Автор признателен И.Н. Головину, Б.Б. Кадомцеву, С.И. Крючкову, И.Н. Мешкову,

М. Михайлову, Л.И. Пономареву, Б.М. Смирнову и М.П. Файфману за полезные замечания.

15. Приложения

I. Прямой расчет $\tau_{\alpha\beta}$

Основной вклад в тензор $\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b)$, определенный формулой (7.9), вносят области, далекие от атома b . Действительно, выберем точку на поверхности среды, наиболее близкую к b , и проведем касательную сферу с центром в точке b . Тогда сумма (7.9) распадется на два слагаемых, соответствующих атомам a , находящимся внутри указанной сферы и вне ее. Как объяснялось в разделе 7 при условии (7.19), которое выполняется во всех практически интересных случаях, среду можно считать изотропной. Вследствие сферической симметрии первое слагаемое равно нулю, поскольку величины $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab})$ составлены из шаровых функций, соответствующих моменту $l = 2$. Таким образом, остается только второе слагаемое, откуда и следует сформулированное выше утверждение.

Поскольку основной вклад в $\tau_{\alpha\beta}$ дают области среды с масштабом порядка размера самой среды, то сумму по a в (7.9) можно заменить интегралом (см. (2.35)), т.е. перейти к континуальному пределу. Следовательно,

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_a) \approx n \int d^3 r_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}). \quad (I.1)$$

Согласно (7.3) $b \neq a$. Это означает, что при $\mathbf{r} = 0$ сингулярность отсутствует и следует доопределить $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab})$ при $a = b$: $G_{\alpha\beta}(0) = 0$. Отсюда заключаем, что в континуальном пределе

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) = (\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}_{ab}). \quad (I.2)$$

Сингулярное слагаемое в (I.2) уничтожает соответствующее слагаемое, возникающее при расчете первого члена, и поэтому сингулярность при $\mathbf{r}_{ab} = 0$ в (I.2) отсутствует, как и должно быть. Из (I.1) и (I.2) находим

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = n \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{3} n \delta_{\alpha\beta}; \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Отсюда уже нетрудно получить формулу (7.17).

II. Доказательство формулы (7.30)

Рассмотрим бесконечную среду ($N \rightarrow \infty$). Аналогично величине $\tau_{\alpha\beta}$ (см. приложение I) основной вклад в сумму по b в (7.30) вносит область изменения \mathbf{r}_b с характерным размером порядка L , поэтому сумму можно заменить интегралом. При этом, естественно, теряются слагаемые $\sim 1/N$, которые в бесконечной среде равны нулю. С учетом (I.2) получаем

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\gamma} &\equiv \sum_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_{bc}) = \\ &= n \int d^3 r_b \left[(\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}_{ab}) \right] \times \\ &\times \left[(\nabla_b)_\beta (\nabla_b)_\gamma \left(\frac{1}{r_{bc}} \right) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma} \delta(\mathbf{r}_{bc}) \right] = \\ &= n \int d^3 r_b (\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) (\nabla_b)_\beta (\nabla_b)_\gamma \left(\frac{1}{r_{bc}} \right) + \\ &+ \frac{4\pi n}{3} (\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\gamma \left(\frac{1}{r_{ac}} \right) + \frac{4\pi n}{3} G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_{ac}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем выражении преобразуется к виду

$$n(\nabla_a)_z(\nabla_c)_\gamma \int d^3r_b (\nabla_b)_\beta \left[\frac{1}{r_{ab}} (\nabla_b)_\beta \frac{1}{r_{bc}} \right] - \\ - n(\nabla_a)_z(\nabla_c)_\gamma \int d^3r_b \frac{1}{r_{ab}} \nabla_b^2 \left(\frac{1}{r_{bc}} \right).$$

Первое слагаемое этого выражения преобразуется в интеграл по поверхности, охватывающей среду. Поскольку среда бесконечна, то он равен нулю (здесь снова теряются слагаемые порядка $1/N$). Учитывая соотношение $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$, после несложных преобразований получаем (7.30). При этом используется правило замены, справедливое при переходе к континуальному пределу $\delta_{ab} \rightarrow n\delta(\mathbf{r}_{ab})$.

III. Волны в замагниченной плазме с $T_\perp = 0$, $T_\parallel = T$

Покажем, что волны, движущиеся почти поперек магнитного поля, в плазме с $T_\perp = 0$ не затухают.

Следуя разделам 10–12, применим приближение сплошной среды. При $T_\parallel \neq 0$ движение электронов вдоль силовых линий учтем, заменяя в (12.14) вектор $\xi_\perp(\mathbf{r}, t)$ на $\xi_v(\mathbf{r}, t)$, где $v \equiv v_z$, $\xi_v \perp \mathbf{B}$. Кроме того, ξ_\perp следует заменить на выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi_v.$$

Учтем также слабый релятивизм по движению вдоль z . Для этого к левой части первого уравнения из (12.14) добавим множитель γ :

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v_z^2}{2c^2}.$$

Вместо (12.14) получаем уравнения

$$m\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \xi_v = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi_v \times \mathbf{B}_0 + e\mathbf{E}; \quad (\text{III.1})$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi e \xi;$$

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \xi_v f(v_z), \quad (\text{III.2})$$

где $f(v_z)$ — функция распределения электронов по v_z , $\int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) = 1$.

Теперь наша задача состоит в расчете диэлектрической проницаемости плазмы и определении длины затухания распространяющихся по ней волн. Аналогично (12.15) получаем уравнение

$$-(\omega - q_z v_z) \xi_v \approx -\frac{i\omega_B}{\gamma} (\xi_v \times \mathbf{K}) + \frac{e}{m\omega_B} \mathbf{E}.$$

Распишем его по компонентам

$$\xi_{vx} \approx -\frac{e}{m\Delta_0} (E_x + iE_y); \quad \xi_{vy} \approx \frac{ie}{m\Delta_0} (E_x + iE_y);$$

$$\xi_{vz} \approx -\frac{e}{m\omega^2} E_z,$$

где

$$\Delta_0 = (\omega - q_z v_z)^2 - \frac{\omega_B^2}{\gamma^2} \approx 2\omega_B(\omega - \omega_B) - 2q_z v_z + \frac{\omega_B^2 v_z^2}{c^2}.$$

Отсюда и из (III.1), (III.2) для ненулевых компонент получаем (ср. с компонентами (12.16), соответствующими $T_\perp = T_\parallel = 0$):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \omega_p^2 A \equiv \varepsilon;$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -if, \quad f = \omega_p^2 A; \quad \varepsilon_{zz} = \eta,$$

где $A = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) / \Delta_0$. Рассчитывая A , следует произвести обычную замену $\omega \rightarrow \omega + i\delta$, $\delta \rightarrow +0$ [73, 74], что дает затухание:

$$A = A' + iA''; \quad A' \approx \frac{1}{\omega^2 - \omega_B^2};$$

$$A'' = -\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left[(\omega - q_z v_z)^2 - \frac{\omega_B^2}{\gamma^2} \right] \approx \\ \approx -\frac{\pi}{2\omega_B} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left(\omega - q_z v_z - \frac{\omega_B}{\gamma} \right) \approx \\ \approx -\frac{\pi}{2\omega_B} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left(\omega - \omega_B - q_z v_z + \frac{\omega_B v_z^2}{2c^2} \right). \quad (\text{III.3})$$

Поскольку нас интересуют волны, которые распространяются почти перпендикулярно магнитному полю \mathbf{B}_0 , в дисперсионном соотношении (12.18) везде, кроме функции A , можно положить $q_z = 0$, что значительно упрощает расчет. Из (12.18) получаем

$$(1 - \omega_p^2 A) \left(1 - \omega_p^2 A - \frac{q^2 c^2}{\omega^2} \right) - A^2 = 0. \quad (\text{III.4})$$

Вывод об отсутствии затухания для волн из интервала (12.21), (12.22) следует из (III.3), (III.4). Длина затухания $L_d = 1/(2q'')$ получается при подстановке в (III.4) $q = q' + iq''$. Мы ищем условие полного отсутствия затухания, поэтому, преобразуя (III.4), полагаем: $|A''| \ll |A'|$, $q'' \ll q'$. Далее q' обозначим снова через q .

Приравняв к нулю вещественную часть уравнения (III.4), получаем дисперсионное соотношение (12.20), а из равенства нулю мнимой части определяем затухание:

$$q'' = \frac{q^3 \omega_p^2 c^2}{4\omega_B^4} \delta;$$

$$\delta = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left(\frac{v_z^2}{2c^2} - \frac{q_z}{\omega_B} v_z + \frac{\omega_p^2}{2\omega_B^2} \right).$$

При расчете в выражении (3) в соответствии с (12.20) произведена подстановка

$$\omega - \omega_B = \frac{\omega_p^2}{2\omega_B} - \frac{\omega_p^2 \omega_B}{2q^2 c^2} \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_B}.$$

IV. Прохождение медленной циклотронной волны через границу плазмы

Покажем, что волна проходит сквозь границу плазмы практически без отражения. Для этого достаточно границу плазмы считать плоской и рассмотреть нормальное падение волны на границу: $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$. Граница представляет собой плоскость $x = 0$.

Согласно разделу 12 решение уравнений (12.14) ищем в виде

$$\mathbf{E} = (E_x(x), E_y(x), 0) \exp(-i\omega t);$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x)) \exp(-i\omega t);$$

$$\xi = (\xi_x(x), \xi_y(x), 0) \exp(-i\omega t).$$

Отсюда и из (12.14) получаем уравнения (12.16), а также

$$E_x = \frac{if}{\epsilon} E_y; \quad B_z = -\frac{ic}{\omega} E_y'(x);$$

$$E_y''(x) + q^2(x)E_y(x) = 0;$$

$$q^2(x) = \frac{\omega^4 - (\omega_B^2 + 2\omega_p^2)\omega^2 + \omega_p^4}{c^2(\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_p^2)}.$$

При $\omega_p \ll \omega_B$

$$q^2(x) \approx \frac{\omega^2(\omega_B^2 + 2\omega_p^2 - \omega^2)}{c^2(\omega_B^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}.$$

Внутри и снаружи плазмы величина $q(x)$ согласно (12.7) равна q_i и $q = q_e = \omega/c \approx \omega_B/c$ соответственно. Согласно [72] ширина границы плазмы составляет

$$d \sim \frac{c}{\omega_p}. \quad (IV.1)$$

При большом набеге фазы на размере границы движение волны будет квазиклассическим и поэтому отражение будем малым. Поскольку

$$q_i d \sim \frac{c}{v_T} \frac{\omega_B}{\omega_p} \sim 10, \quad q_e d \sim \frac{\omega_B}{\omega_p} \sim 2,$$

то движение волны сквозь границу действительно является квазиклассическим. Отметим, что реальное значение d значительно превышает оценку (IV.1), так как в действительности плотность плазмы плавно уменьшается до нуля при движении от ее центра к границе [78]. Таким образом, реально $d \sim a$, $qa \gg 1$, следовательно, отражением волн можно пренебречь.

Список литературы

1. Андреев А В, Емельянов В И, Ильинский Ю А *Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы* (М.: Наука, 1988)
2. Gross M, Haroche S *Phys. Rep.* **93** 301 (1982)
3. Боголюбов Н Н (мл.), Шумовский А С *Сверхизлучение* (Лекции для молодых ученых, Вып. 38) (Дубна: ОИЯИ, 1987)
4. Stenholm S *Phys. Rep.* **6** 1 (1973)
5. Аллен Л, Эберли Дж *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978)
6. Андреев А В, Емельянов В И, Ильинский Ю А *УФН* **131** 653 (1980)
7. Железняков В В, Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *УФН* **159** 193 (1989)
8. Dicke R H *Phys. Rev.* **93** 99 (1954)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1967)
10. Собельман И И *Введение в теорию атомных спектров* (М.: Физматгиз, 1963)
11. Смирнов Б М *Физика слабоионизованного газа: В задачах с решениями* (М.: Наука, 1985)
12. Arecchi F T, Courtens E *Phys. Rev. A* **2** 1730 (1970)
13. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *УФН* **167** 649 (1997)
14. Каган Ю, Свистунов Б В, Шляпников Г В *ЖЭТФ* **101** 528 (1992)
15. Arecchi F T, Bonifacio R *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-1** 169 (1965)
16. Ernst V, Stehle P *Phys. Rev.* **176** 1456 (1968)
17. Eberly J H, Rehler N E *Phys. Lett. A* **29** 142 (1969)
18. Burnham D C, Chiao R Y *Phys. Rev.* **188** 667 (1969)
19. Bonifacio R, Schwendimann P *Lett. Nuovo Cimento* **3** 512 (1970)
20. Bonifacio R, Schwendimann P, Haake F *Phys. Rev. A* **4** 302 (1971); **4** 854 (1971)
21. Bonifacio R, Lugiato L A *Phys. Rev. A* **11** 1507 (1975); **12** 587 (1975)
22. Banfi G, Bonifacio R *Phys. Rev. A* **12** 2068 (1975)
23. Rehler N E, Eberly J H *Phys. Rev. A* **3** 1735 (1971)
24. Skribanowitz N et al. *Phys. Rev. Lett.* **30** 309 (1973)
25. Емельянов В И, Климонтович Ю Л *Оптика и спектроскопия* **41** 913 (1976)
26. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Наука, 1974)
27. Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
28. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Релятивистская квантовая теория* (М.: Наука, 1968)
29. MacGillivray J C, Feld M S *Phys. Rev. A* **14** 1169 (1976)
30. Herman J P et al., in *Laser Spectroscopy* (Eds R G Brewer, A Mooradian) (New York: Plenum Press, 1974)
31. Хакен Г *Лазерная светодинамика* (М.: Мир, 1988)
32. Карлов Н В *Лекции по квантовой электронике* (М.: Наука, 1988)
33. Звелто О *Принципы лазеров* (М.: Мир, 1984)
34. Клышко Д Н *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986)
35. Файн В М, Ханин Я И *Квантовая радиофизика* (М.: Сов. радио, 1965)
36. Гапонов А В *ЖЭТФ* **39** 326 (1960)
37. Гапонов А В, Петелин М И, Юлпатов В К *Изв. вузов. Радиофиз.* **10** 1414 (1967)
38. Собельман И И, Тютин И В *УФН* **79** 595 (1963)
39. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика* (М.: Наука, 1987)
40. *Гиротрон* (Под ред. А В Гапонова-Грехова) (Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1981)
41. Спрэнгл Ф, Коффи Т *УФН* **146** 303 (1985)
42. Симонов Ю А *УФН* **166** 337 (1996)
43. Ильинский Ю А, Маслова Н С *ЖЭТФ* **94** 171 (1988)
44. Гинзбург Н С, Сергеев А С *ЖЭТФ* **99** 438 (1991)
45. Кобелев Ю А, Островский Л А, Соустова И А *ЖЭТФ* **99** 470 (1991)
46. Меньшиков Л И, Препринт ИАЭ № 6022/1 (М.: ИАЭ, 1997)
47. Agarwal G S *Phys. Rev. A* **2** 2038 (1970); **4** 1791 (1971)
48. Давыдов А С *Квантовая механика* (М.: Наука, 1973)
49. Friedberg R, Hartmann S R, Manassah J T *Phys. Lett. A* **40** 365 (1972)
50. Friedberg R, Hartmann S R *Opt. Commun.* **10** 298 (1974)
51. Friedberg R, Hartmann S R *Phys. Rev. A* **10** 1728 (1974)
52. Unruh W G *Phys. Rev. D* **14** 870 (1976)
53. De Witt B S, in *General Relativity* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge: Cambridge University Press, 1979)
54. Биррелл Н, Девис П *Квантованные поля в искривленном пространстве – времени* (М.: Мир, 1984)
55. Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994); **165** 967 (1995)
56. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *УФН* **166** 651 (1996)
57. Кадомцев Б Б *Динамика и информация* (М.: Ред. журн. УФН, 1997)
58. Гинзбург В Л *УФН* **98** 569 (1969)
59. Болотовский Б М, Столяров С Н *УФН* **162** (3) 195 (1992)
60. Гинзбург В Л, Фролов В П *УФН* **153** 633 (1987)
61. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **13** 33 (1943)
62. Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
63. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т. III *Электричество* Ч. 1 (М.: Наука, 1996)
64. Киттель Ч *Элементарная физика твердого тела* (М.: Наука, 1965)
65. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
66. Ressayre E, Tallet A *Phys. Rev. A* **18** 2196 (1978)
67. Бейтмен Г, Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции. Т. 2* *Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены* (М.: Наука, 1966)
68. Музикарж Ч *ЖЭТФ* **41** 1168 (1961)
69. Подгорский М И, Ройзен И И *ЖЭТФ* **39** 1473 (1960)
70. Давыдов А С *Теория твердого тела* (М.: Наука, 1976)
71. "Проект ИТЭР. Физическое обоснование и концепция" *Атомная техника за рубежом* (3) 3 (1996)
72. Арцимович Л А *Управляемые термоядерные реакции* (М.: Физматгиз, 1963)
73. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)

74. Шафранов В Д "Электромагнитные волны в плазме", в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 3
75. Кадомцев Б Б *УФН* **151** 3 (1987)
76. Кадомцев Б Б, Шафранов В Д *УФН* **139** 399 (1983)
77. Цытович В Н и др. *УФН* **166** 113 (1996)
78. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1988)
79. Бескин В С, Гуревич А В, Истомин Я Н *Физика магнитосфер пульсаров* (М.: Наука, 1993)
80. Манчестер Р, Тейлор Д *Пульсары* (М.: Мир, 1980)

Superradiation and related phenomena

L.I. Men'shikov

*Russian Research Center 'Kurchatov Institute',
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia*

Tel. (7-095) 196-76 76

Pomorskii State University,

prosp. Lomonosova 4, 163006 Arkhangel'sk, Russia

Tel. (7-8182) 44-16 13

The current theory of superradiation is described. The effect is due to interatomic correlations (phase-locking) which form under the action of a general electromagnetic field and are determined by the competition between the electron motion anharmonicity and the interatomic dipole-dipole interaction. The latter affects significantly the nature of the superradiation effect. A common nature of radiations from Dicke's atomic ensemble and from collective waves in a substance (for example, cyclotron waves in a magnetized plasma) is established. Superradiation manifests itself in hot magnetically confined plasmas and accounts, among other things, for anomalous heat conductivity in Tokamaks.

PACS number: **42.50.-p**, 42.50.Gy, **42.65.-k**, **52.35.-g**

Bibliography — 80 references

Received 17 June 1998