

Математика и физика: родитель и дитя или сестры?

В.И. Арнольд

В статье обосновывается мнение о единстве математики и физики. Она частично воспроизводит доклады, прочитанные в 1998 г. на заседаниях Французского математического общества, семинара ИТЭФ РАН и семинара В.Л. Гинзбурга в ФИАНе.

PACS numbers: 01.70.+w, 02.90.+p

Содержание

1. Введение (1311).
2. Объединяющая сила математики (1313).
Волновой фронт. Каустика. Группы отражений. Осциллирующие интегралы. Особенности каустик. Каустики и группы отражений. Перестройки распространяющихся волн. Версальные деформации. Числа Кокстера. Конусы Спрингера и числа Бернулли.
3. Граница между математикой и физикой (1322).
Список литературы (1323).

Я любил и теперь еще люблю математику ради нее самой, как не допускающую лицемерия и неясности, которые мне отвратительны. Стендаль¹

1. Введение

Заявление, что математика — это часть теоретической физики, где эксперименты дешевы [1], немедленно вызвало множество нападок с обеих сторон, включая даже пародию (написанную А.М. Вершиком)².

Начну с терминологии. Слово "математика" почти для всех языков чужое — это заимствованное древнегреческое слово, означавшее "точное знание". Из современных стран, кажется, лишь одна Голландия заменяет чужеродное слово "математика" родным "знание" (*viscunde*). Видимо, произошло это благодаря Стэвину,

вообще протестовавшему против засорения родного языка интернациональными терминами. Треугольник понятнее ромба для каждого, говорящего по-русски. Заставляя детей мучиться с иноязычными "файлами" или "байтами", мы автоматически создаем среду багсов и киллеров, за чем следуют предпосылки технологической отсталости, за которую, возможно, придется платить судьбой Югославии.

Поразительные успехи Стэвина в создании в Нидерландах науки и культуры сказываются до сих пор — страна эта резко выделяется, хоть и не велика. Не только Амстердам, так полюбившийся Петру, но и Утрехт, и Лейден, и Саардам, и Гронинген — крупнейшие математические центры.

Первоначально математика создавалась ради реальных практических задач (в случае Голландии — прежде всего гидравлических и гидротехнических; планировалось даже залить всю страну водой в случае нашествия фашистов, но техника, кажется, подвела).

Я постараюсь описать побольше приложений самой фундаментальной математики, не ограничиваясь техническими подробностями. На первый взгляд математика кажется набором ремесел. Но я постараюсь показать, что здесь всегда идет речь об одном и том же искусстве — искусстве математического описания мира.

Математическое описание мира основано на деликатном взаимодействии непрерывных (плавных) и дискретных (скачкообразных) явлений. Например, у функции, скажем, $y = x^2$, имеется производная $dy/dx = 2x$, описывающая скорость плавного изменения y при плавном изменении x и критическая точка ($x = 0$), где значение функции минимально.

¹ В кн. Л.И. Вольперт *Пушкин и Стендаль* (М., 1998) гл. 12.

В.И. Арнольд, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
117966 Москва, ул. Губкина 6, Российская Федерация
Тел. (095) 938-39-80
Факс (095) 135-05-55
E-mail: arnold@genesis.mian.ras.ru

Статья поступила 14 сентября 1999 г.

² **Пример математической задачи:** на полке стоят 2 тома Пушкина. Каждый том имеет толщину 2 см без обложек, каждая обложка — 2 мм. Червь прогрыз от первой страницы первого тома до последней второго тома по нормали к страницам. Какое расстояние он прогрыз?

Пример физической задачи: лодочник плыл вверх по Неве и под Кировским мостом потерял шляпу. Под Литейным он спохватился и через 30 мин догнал шляпу под Дворцовым мостом. Определить скорость течения Невы. (Физика входит в старинное решение: расстояние от Кировского до Дворцового моста — 1 миля.)

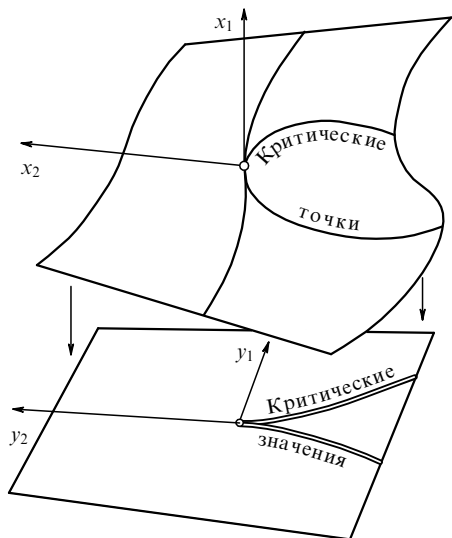


Рис. 1. Отображение Уитни.

В современной математике создана огромная теория особенностей, являющаяся обобщением теории критических точек функций на случай, когда рассматривается сразу несколько функций от сразу нескольких аргументов. Читателю, который хочет сразу почувствовать вкус к этой науке, полезно сравнить изученное американским математиком Х. Уитни [2] отображение

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2, \quad y_2 = x_2 \tag{1}$$

плоскости с координатами (x_1, x_2) на плоскость с координатами (y_1, y_2) с отображением

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = 2x_1x_2 \tag{2}$$

между плоскостями (рис. 1).

Удивительным явлением здесь оказывается следующее: отображение (1) устойчиво (или структурно устойчиво) в том смысле, что всякое достаточно близкое отображение будет иметь (вблизи начала координат) особенности, сходные с особенностями отображения (1).

Для отображения (2) это совершенно не так, как показывает пример отображения

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2 + ax_1, \quad y_2 = 2x_1x_2 - ax_2, \tag{3}$$

где a очень мало (что, впрочем, не обязательно в этом примере).

Для функций одной переменной структурно устойчивой является обычная точка максимума или минимума (скажем, $x = 0$ для функции $y = x^2$). При малой деформации получится другая функция, для которой $x = 0$ уже не будет точкой минимума. Но поблизости точка минимума будет (пример: $y = x^2 + ax$, a мало).

Напротив, критическая точка $x = 0$ функции $y = x^3$ уже не структурно устойчива (пример: $y = x^3 + ax$, критическая точка разбивается на две³ или исчезает, в зависимости от знака a) (рис. 2).

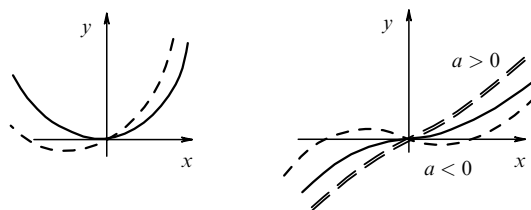


Рис. 2. Структурно устойчивая и неустойчивая критические точки.

Исследование случая $y = x^4$ позволит читателю самостоятельно продвинуться (исчезновения здесь не будет, но бифуркации возможны).

Почувствовать также найти критические точки x и критические значения y для отображения (3). Уравнение критических точек

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

имеет в этом случае вид

$$\begin{vmatrix} 2x_1 + a & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 - a \end{vmatrix} = 0, \quad 4(x_1^2 + x_2^2) = a^2.$$

Следовательно, критические точки образуют окружность $2x_1 = a \cos \varphi, 2x_2 = a \sin \varphi$. Для критических значений получаем из (3)

$$y_1 = \frac{1}{4} a^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} a^2 \cos \varphi,$$

$$y_2 = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{2} a^2 \sin \varphi.$$

Стало быть, вектор y является суммой двух равномерно вращающихся векторов, причем вдвое меньший вращается вдвое быстрее. Отсюда легко вывести, что множество критических значений отображения (3) является маленькой (при малых a) гипоциклоидой с тремя остриями (рис. 3).

Интересно отметить, что при $a = 0$ это отображение может рассматриваться как комплексная функция $w = z^2$ ($z = x_1 + ix_2, w = y_1 + iy_2$) с простейшей критической точкой. Если возмущения не будут нарушать комплексность отображения, то характер ветвления не изменится и критическая точка будет одна и будет структурно устойчивой по отношению к комплексным шевелениям.

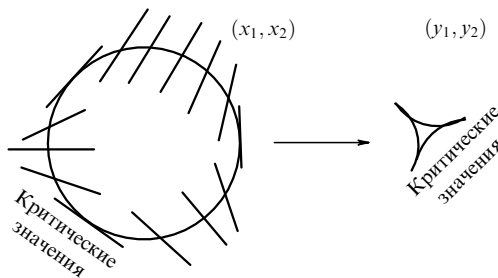


Рис. 3. Критические точки и критические значения отображения (3).

³ Это явление раздвоения называется бифуркацией критической точки.

Если же допускать вещественные шевеления (например, (3)), то, как мы видели, структурная устойчивость теряется и около заданной критической точки возникает критическая кривая, образ которой при отображении имеет три точки возврата.

Оказывается, это уже устойчивое явление — при других шевелениях общего положения будет происходить то же самое распадение сложной критической точки (2) на три точки возврата соединяющей их линии критических значений.

Теория особенностей, в которой все это доказывается, соединяет самые абстрактные части математики (теорию чисел, теорию групп и алгебр Ли, теорию групп отражений Кокстера, алгебраическую и симплектическую геометрию и топологию, вариационное исчисление и комплексный анализ) с такими прикладными областями, как томография, оптимальное управление, асимптотики методов стационарной фазы и перевала, теория распространения волн, оптика, классическая, небесная и квантовая механика, квантовая теория поля и т.д.

Подробно все это изложено в книгах (см., например, [3–6]).

2. Объединяющая сила математики

Здесь я покажу на примерах, как в совершенно разных вопросах приложений математики возникает один и тот же объект (можете считать его линией критических значений отображения (1)).

Волновой фронт

Рассмотрим волны, начавшие распространяться от какой-либо кривой на плоскости со скоростью 1. Через время t волновой фронт будет t -эквидистантой исходной кривой. Рассмотрим, например, случай, когда исходная кривая — эллипс, а возмущение распространяется внутрь эллипса (рис. 4). Поэкспериментировав немного, вы можете убедиться, что, хотя при малых t расположенная внутри эллипса t -эквидистанта гладкая, при больших значениях t на ней появляются четыре точки возврата полукубического типа (в окрестности такой точки кривая задается уравнением $p^2 = q^3$ в подходящей системе гладких координат (p, q) на плоскости).

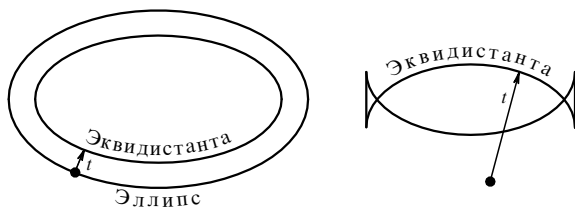


Рис. 4. Распространение волнового фронта внутри эллипса.

Объяснение. Рассмотрим цилиндр \mathbb{C} , являющийся произведением исходной кривой на ось времени t . Распространение волн описывается парой отображений

$$\mathbb{R} \xleftarrow{T} \mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2,$$

первое из которых сопоставляет точке (c, t) цилиндра момент времени t , а второе — точку плоскости, находя-

щуюся от c на расстоянии t в направлении нормали к исходной кривой в точке c .

Кривые $T^{-1}(t)$ — изохроны на цилиндре. Отображение F отображает изохроны на эквидистанты. Особенности отображения F превращают гладкие изохроны в эквидистанты с точками возврата.

Чтобы в этом убедиться, нужно рассмотреть случай $F(p, q) = (p^2, q)$, $T(p, q) = q - p^3$. Тогда изохрона $T = 1$ превращается в плоскую кривую $(p^2, 1 + p^3)$, имеющую полукубическую особенность $p = 0$.

Можно проверить, что и для общих F и T будет происходить примерно такое же складывание гладкой изохроны в эквидистанту с точкой возврата.

Полукубические особенности на эквидистантах — не специальное свойство эллипса. При замене эллипса на другую кривую мы получим аналогичные особенности волнового фронта, как правило, опять полукубические. Но их число не обязательно равно 4.

Каустика

Продолжая рассмотрение распространения волн от кривой, рассмотрим систему лучей на плоскости. Луч, выходящий из точки c исходной кривой, — это образ всей прямой $\{c, t\}$, где c фиксировано, а t любое, при отображении $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ нашего цилиндра на плоскость. Он образован теми точками эквидистант исходной кривой, которые лежат на нормалях к ней в точке c (конечно, в простейшем случае евклидовой плоскости с не зависящей от времени метрикой все эти нормали просто совпадают; но если пользоваться чуть-чуть более осторожной терминологией, введенной выше, то наше определение лучей сохраняется и в гораздо более общей ситуации, например в релятивистской, или в финслеровой, или в теории управления).

Нарисуйте лучи, перпендикулярные эллипсу (направляя их внутрь). Вы обнаружите огибающую этой системы прямых (рис. 5). Она называется *каустикой* (от слова "жгущая", так как вдоль нее энергия распространяющегося процесса концентрируется). Если вы рисуете аккуратно, то заметите у каустики четыре точки возврата (где она "жжет" еще сильнее).

Точное математическое определение: *каустика* — это множество критических значений отображения $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (конечно, можно рассматривать более общие случаи распространения возмущения от источника X до экрана Y , заданного отображением

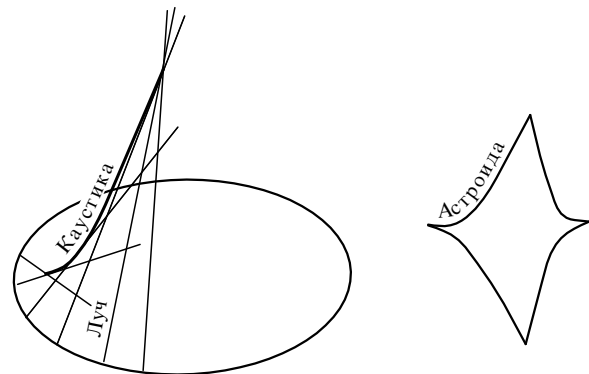


Рис. 5. Система лучей, нормальных эллипсу.

$F: \mathbb{C} \times \mathbf{R} \rightarrow Y$, с любыми размерностями многообразий X и Y ; каустика лежит в Y и обычно имеет размерность, меньшую размерности Y на 1).

Объяснение. Для эллипса отображение $F: S^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ имеет четыре особенности типа 1. На каустике им соответствуют четыре точки возврата полукубического типа, соединенные звездобразной кривой — образом при отображении F "окружности" критических точек.

Замечание. Вычисления (приведенные ниже) показывают, что каустика — огибающая системы нормалей к эллипсу — является астроидой с четырьмя точками возврата.

Астроиду можно определить еще так:

(1) *астроида* — это образ окружности $|z| = 1$ при отображении $z \mapsto z^3 + 3\bar{z}$ (т.е. астроида — это гипоциклоида с четырьмя острями);

(2) *астроида* — это кривая, проективно двойственная "антиокружности": кривой, заданной уравнением

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 1;$$

(3) *астроида* — это кривая, задаваемая в подходящих аффинных координатах уравнением

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Проверкой того, что все эти определения приводят (с точностью до проективных или аффинных преобразований) к одной кривой являются простые выкладки. Например, точка $z^3 + 3\bar{z}$ описывает при $z = \exp(i\varphi)$ гипоциклоиду с четырьмя острями, так как ее движение является качением окружности радиуса 1 внутри неподвижной окружности радиуса 4. Качением это движение оказывается потому, что угловая скорость меньшей окружности втрое больше угловой скорости точки касания, поэтому проскальзывания нет.

При умножении z на i величина $z^3 + 3\bar{z}$ умножается на $-i$. Поэтому образ имеет симметрию порядка 4. Что точке $z = 1$ ($\varphi = 0$) отвечает полукубическая точка возврата на кривой $z^3 + 3\bar{z}$, $z = \exp(i\varphi)$, легко сосчитать:

$$\operatorname{Re}(z^3 + 3\bar{z}) = \cos 3\varphi + 3 \cos \varphi = 4 - 6\varphi^2 + O(\varphi^4),$$

$$\operatorname{Im}(z^3 + 3\bar{z}) = \sin 3\varphi - 3 \sin \varphi = -4\varphi^3 + O(\varphi^5).$$

Значит, особенность полукубическая. Отметим также формулы (вытекающие из формулы Муавра $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$)

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + 3 \cos \varphi &= 4 \cos^3 \varphi, \\ \sin 3\varphi - 3 \sin \varphi &= -4 \sin^3 \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

из которых тоже видно, что особенность полукубическая.

Из полученных формул вытекает свойство (3) гипоциклоиды с четырьмя острями. Действительно, если $z = p + iq$, то $p^2 + q^2 = 1$ на окружности $z = \exp(i\varphi)$, где $p = \cos \varphi$, $q = \sin \varphi$.

Обозначая $z^3 + 3\bar{z}$ через $x + iy$, мы получаем из (4)

$$x = 4p^3, \quad y = -4q^3,$$

и уравнение окружности $p^2 + q^2 = 1$ превращается в уравнение астроиды (3). Из (3) дифференцированием получается (2).

Покажем, что каустика эллипса действительно является астроидой (с точностью до аффинных преобразований).

В соответствии с доказанным свойством (2) это вытекает из следующего факта.

Лемма. Множество нормалей к эллипсу, рассматриваемое как кривая в двойственной плоскости, аффинно эквивалентно антиокружности.

Запишем уравнение эллипса в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Нормаль $px + qy = 1$ проходит через точку эллипса (x_0, y_0) и там параллельна градиенту квадратичной формы (5):

$$px_0 + qy_0 = 1, \quad q = \frac{\lambda x_0}{a^2}, \quad -p = \frac{\lambda y_0}{b^2}, \quad \frac{px_0}{a^2} + \frac{qy_0}{b^2} = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$x_0 = \frac{A}{p}, \quad y_0 = \frac{B}{q},$$

где

$$A = \frac{a^2}{a^2 - b^2}, \quad B = -\frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

Теперь условие принадлежности точки (x_0, y_0) эллипсу дает для (p, q) условие принадлежности стандартной антидвойственной кривой к окружности (при соответствующем выборе масштабов измерения p и q).

Замечание 1. Мне кажется, эта поразительная алгебраическая лемма может быть связана с известным геометрическим свойством эллипса: основания нормалей к касательным эллипса, опущенных из фокальной точки, образуют окружность.

Замечание 2. Хотя мы и доказали выше, что каустикой эллипса является астроида, фокальные точки задачи о распространении волн внутрь эллипса (вершины астроиды) не являются, вообще говоря, фокусами эллипса.

Распространение волн внутрь эллипса легко наблюдать в чашке чая, капнув каплю вблизи центра. Волны, отразившись от стенок, собираются в диаметрально противоположной точке, где замечен даже некоторый всплеск.

Дело в том, что волны, исходящие из фокальной точки эллипса, собираются в другой фокальной точке. Чашку с точкой вблизи центра можно считать эллипсом с фокусом потому, что влияние малого эксцентриситета e эллипса на отношение полуосей — второго порядка малости ($b = a\sqrt{1 - e^2} = a(1 - e^2/2 + \dots)$), поэтому неэллиптичностью чашки можно пренебречь.

Полукубические особенности на каустике — не специальное свойство эллипса. При замене эллипса на другую кривую мы получим аналогичные особенности каустика и, как правило, опять полукубические. Но их число не обязательно равно четырем.

Замечание. Аристофан в "Облаках" (около 450 г. до н.э.) упоминает о практическом (юридическом) использовании каустик⁴, создаваемых линзами, которые можно

⁴ Автор благодарен Ф. Анкарди, обнаружившей это.

было купить в аптеке (со ссылкой на Сократа). Использование состояло в том, чтобы сжечь документ, находящийся в руках противника, во время судебного процесса. Архимедовы каустики двумя столетиями позже были грубее.

Группы отражений

Отражением в евклидовом пространстве называется ортогональное преобразование, множество неподвижных точек которого является гиперплоскостью.

Набор из нескольких гиперплоскостей определяет набор отражений. Порожденная ими группа называется *евклидовой группой отражений*, если она конечна.

Например, две прямые на плоскости определяют группу отражений (обозначаемую $I_2(p)$), если и только если угол между прямыми составляет π/p , где p — целое. Эта группа $I_2(p)$ является группой симметрий правильного p -угольника на плоскости.

Все группы отражений в евклидовых пространствах перечислены, и это составляет одно из основных достижений современной математики. Удивительно, но ответ оказался связанным со всевозможными другими важными математическими объектами, например с простыми и близкими к ним (комплексными или компактными) алгебрами Ли, вроде $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $Spin(n)$ и т.д.

Рассмотрим простейший случай группы симметрий правильного треугольника $I_2(3) = A_2$ (он соответствует алгебре Ли $SU(2)$) (рис. 6).

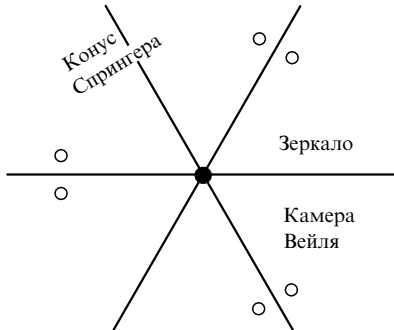


Рис. 6. Зеркала группы отражений A_2 .

Итак, пусть на вещественной евклидовой плоскости три прямые попарно пересекаются в нуле под углами 120° . Группа, порожденная отражениями в них, состоит из шести элементов. С абстрактной точки зрения это просто группа перестановок трех элементов. (Можно посоветовать обращаться к модели группы отражений A_{n-1} всякий раз, когда вам приходится работать с перестановками из n элементов.)

Орбиты группы отражений $I_2(3)$ состоят либо из шести элементов (не лежащих на зеркалах), либо из трех (общие точки на зеркалах), да еще одну орбиту составляет начало координат.

Многообразие орбит изучил основатель алгебры Ф. Виет. Будем считать точки евклидовой плоскости комплексными числами. Мы можем ввести в пространстве \mathbb{C}^3 с координатами (z_1, z_2, z_3) отражения в зеркалах $z_i = z_j$ (переставляющие координаты z_i и z_j). Получаем действие $I_2(3)$ в \mathbb{C}^3 . Диагональ $z_1 = z_2 = z_3$ остается на

месте. Значит, и эрмитово ортогональная плоскость $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ остается на месте.

Мы продолжили действие $I_2(3)$ с \mathbb{R}^2 на \mathbb{C}^2 и будем теперь пользоваться тремя комплексными координатами z_k .

Многочлены $\sigma_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ и $\sigma_3 = z_1z_2z_3$ инвариантны относительно действия группы, как и $\sigma_1 = 0$. Из основной теоремы о симметрических функциях следует, что многообразием орбит нашего действия является плоскость \mathbb{C}^2 с координатами (σ_2, σ_3) . Ее можно отождествить с плоскостью многочленов $\lambda^3 + \sigma_2\lambda - \sigma_3$.

Многообразие регулярных орбит (состоящих из шести элементов каждая) можно отождествить с областью в \mathbb{C}^2 , образованной многочленами без кратных корней. Особые орбиты образуют кривую многочленов с кратными корнями $\lambda^3 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = (\lambda - u)^2(\lambda + 2u)$.

Вдоль этой кривой $\sigma_3 = -2u^3$, $\sigma_2 = -3u^2$, поэтому *многообразию особых орбит группы $I_2(3)$ есть полукубическая парабола* (рис. 7).

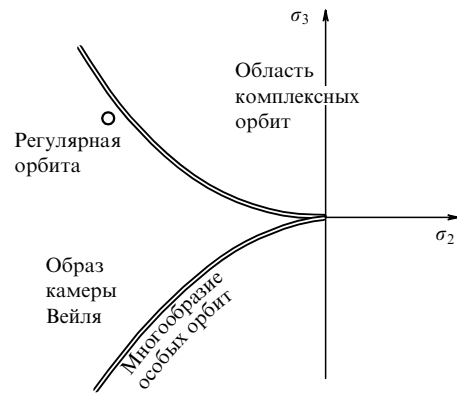


Рис. 7. Многообразие орбит группы отражений A_2 .

Оказывается, связь между группами отражений, каустиками и волновыми фронтами вовсе не ограничивается полукубической особенностью $A_2 = I_2(3)$. Это позволяет использовать мощную алгебраическую технику теории групп отражений для исследования каустик и волновых фронтов в многомерных пространствах (см., например, [6]).

Осциллирующие интегралы

Н.Н. Боголюбов указывал мне, что математики обязаны заниматься квантовой физикой. "Хорошую статью, — говорил он, — все равно прочтет 1000 читателей, опубликуете ли Вы ее как математическую или как физическую. Но эти читатели — математики будут читать ее 100 лет, а физики через 100 дней забудут о статье, даже если будут постоянно ею пользоваться".

Теория осциллирующих интегралов является "квантовым аналогом" теории каустик и волновых фронтов, но возникла она (вместе с "методом стационарной фазы" и "квазиклассическими асимптотиками") в работах Карлуччи и Якоби начала XIX века, посвященных асимптотикам интегралов, нужных для расчета возмущений в небесной механике⁵.

⁵ Автор благодарен С. Граффи, указавшему на эти работы.

Определение. *Осциллирующим интегралом* с фазой S , амплитудой a и длиной волны h называется

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{iS(x)}{h} \right] a(x) dx.$$

Часто рассматривается случай, когда фаза, амплитуда и интеграл зависят от параметров, а аргумент x многомерный ($x \in \mathbf{R}^n$) (рис. 8).

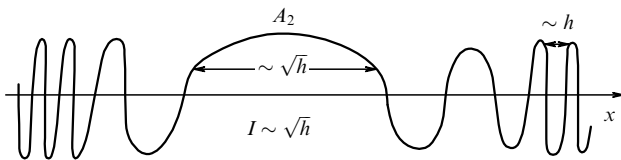


Рис. 8. Интеграл от осциллирующей функции мал.

Пример 1. Интеграл Френеля

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(\frac{x^2}{h} \right) dx \approx Ch^{n/2}.$$

Если фаза не имеет критических точек, то интеграл убывает (при $h \rightarrow 0$) быстрее любой степени h вследствие интерференции вкладов близких точек x . Около обычной (невыврожденной) критической точки создается "область стационарной фазы", где S мало меняется и интерференция ослаблена, радиуса порядка \sqrt{h} , что и приводит в n -мерном случае к интегралу порядка $h^{n/2}$. Это строго доказывается приведением к сумме квадратов (или разности) заменой переменных x (так называемая лемма Морса).

Пример 2. Интеграл Эйри. Если фаза зависит от параметра, то при некоторых значениях параметра критическая точка фазы S может стать вырожденной и лемма Морса там не применима. Простейший случай этого рода — фаза $S(x) = x^3 + \lambda x$, зависящая от параметра λ . При прохождении λ через 0 сливаются две простые критические точки.

Возникающая при критическом значении параметра $\lambda = 0$ критическая точка фазы $S(x) = x^3$ называется *двукратной* и обозначается через A_2 (обычная, невырожденная критическая точка обозначается через A_1).

Соответствующий интеграл

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i(x^3 + \alpha x + \beta)}{h} \right] dx$$

называется *интегралом Эйри*.

Он описывает поведение света вблизи каустики (A_1 отвечает свету в обычной точке).

Точнее, рассмотрим источник света Y и экран X . Пусть оптическая длина пути от точки y источника до точки x экрана равна $S(x, y)$. Источник и экран здесь можно для начала считать подмногообразиями в евклидовом пространстве. В этом случае $S(x, y)$ — просто евклидово расстояние от x до y .

Влияние света из источника y в точке наблюдения x пропорционально $\exp(iS/h)$; коэффициент пропорциональности зависит от интенсивности источника в y и от ослабления распространяющегося света за счет расхож-

дения лучей. Это приводит к амплитудному фактору $a(x, y)$.

Исследование интеграла Эйри приводит к выводу, что при n -мерном источнике $I_{0, \beta}(h) \approx h^{n/2-1/6}$, т.е. что при подходе к каустике ($\alpha = 0$) интенсивность света во много (в $h^{-1/6}$) раз больше обычной.

Показатель $1/6$ называется *показателем особенности* (п.о.) интеграла. В близких к каустике точках интеграл все равно оценивается величиной $Ch^{n/2-1/6}$, где коэффициент C равномерно ограничен в окрестности точки каустики типа A_2 .

Аналогичные оценки получаются для всех общих однопараметрических семейств фазовых функций. Дело в том, что они приводятся к виду $x^3 + \alpha x$ заменой координат x . При числе параметров $k > 1$ возможны более сложные особенности каустик, где интенсивность света еще больше:

- $k = 2, A_3 \quad S = x^4 + \alpha x^2 + \beta x, \quad \text{п.о.} = 1/4,$
- $k = 3, A_4 \quad S = x^5 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x, \quad \text{п.о.} = 3/10,$
- $k = 3, D_4^+ \quad S = x_1^2 x_2 + x_2^3 + \alpha x_2^2 + \beta x_1 + \gamma x_2, \quad \text{п.о.} = 1/3,$
- $k = 3, D_4^- \quad S = x_1^2 x_2 - x_2^3 + \alpha x_2^2 + \beta x_1 + \gamma x_2, \quad \text{п.о.} = 1/3.$

Разумеется, сама величина интеграла имеет асимптотику $Ch^{n/2-(\text{п.о.})}$, зависящую от размерности источника n и, например, при $n = 3$ истинная нормальная форма A_3 имеет вид

$$S = x_1^4 \pm x_2^2 \pm x_3^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_1.$$

Показатель особенности учитывает лишь, *во сколько раз* (в $h^{-(\text{п.о.})}$) асимптотика увеличивается при подходе к каустике и к ее особенностям.

При трехмерном многообразии наблюдения ($k = 3$) в общем типическом семействе лучей от n -мерного источника не наблюдается иных особенностей, кроме перечисленных здесь (мы сейчас опишем, как сказывается вид функции S на форме каустики).

Следовательно, показатель особенности в этом случае нигде не превзойдет $1/3$. Как мы сейчас покажем, значения показателя $1/3$ и $3/10$ будут достигаться лишь в отдельных точках (D_4 и A_4), а значение $1/4$ — на линии A_3 (особенностей каустики).

Именно этот результат, полученный в заметке [7], послужил основой современной теории каустик и волновых фронтов в их связи с группами отражений.

В этой заметке исследовались некоторые модели нагрева электронных схем. Знание того, каков самый высокий локализованный в точке пик нагрева, здесь очень важно, поэтому вопрос и был мне предложен В.П. Масловым в МИЭМ в рамках работы по хозяйствову.

Успех был основан на моем наблюдении неожиданной связи таинственных показателей особенности типичных особенностей с "числами Коксетера" групп отражений (определенными ниже).

Особенности каустик

Рассмотрим световую систему, заданную оптической длиной пути $S(x, y)$ от точки источника (x) до точки многообразия наблюдения (y). Наибольший вклад в освещенность в y дают стационарные точки фазы как функции от x , где $\partial S / \partial x = 0$.

Каустика образована теми точками y , где хотя бы одна из стационарных точек вырождена, т.е. гессиан $\det(\partial^2 S/\partial x^2)$ равен в ней нулю:

$$C = \left\{ y : \exists x : \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) = 0 \right\}.$$

Иными словами, нужно рассмотреть "критическую поверхность" (размерности равной размерности многообразия наблюдения y) в прямом произведении $X \times Y$, образованную критическими точками функций $S(\cdot, y)$, т.е. заданную уравнением $\partial S/\partial x = 0$, и затем спроецировать ее на Y вдоль X . Множество критических значений этого отображения одного k -мерного многообразия на другое называется *каустикой* данной системы волн (или лучей).

Случай A_2 . $S = x_1^3 + x_1 y_1 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_k^2$. Критическая поверхность $3x_1^2 + y_1 = 0, x_2 = \dots = x_k = 0, \partial^2 S/\partial x_1^2 = 6x_1 = 0$. Каустика: $y_1 = 0$ (при $n > 1$ это $(n - 1)$ -мерная поверхность). В случае Френеля ($n = 1$) каустика — одна точка на прямой.

Случай A_3 . $S = x_1^4 + x_1^2 y_1 + x_1 y_2$. Критическая поверхность $4x_1^3 + 2x_1 y_1 + y_2 = 0$. Каустика (ср. случай (1) введения): $y_1 = -6x_1^2, y_2 = 8x_1^3$ — полукубическая парабола $y_1^3 = \text{const } y_2^2$.

В случае $n = 2$ других особенностей, кроме точки возврата, A_3 каустика общей системы лучей не имеет. Особенность A_3 доставляет, например, система нормалей к эллипсу.

В случае $n > 3$ особенность A_3 наблюдается на "ребре возврата" коразмерности 2 (кривой возврата каустики в трехмерном пространстве при $n = 3$) (рис. 9).



Рис. 9. Особенность A_3 как ребро возврата каустики.

Полукубическим это ребро возврата является в том смысле, что трансверсальная ему плоскость пересекает каустик по кривой с полукубической особенностью.

Случай D_4 . $k = 2, n = 3$. В этих двух случаях D_4^+ и D_4^- вычисления, аналогичные проведенным выше, уже длиннее, и их лучше проводить, используя группы отражений, как я объясню ниже.

Ответы топологически довольно просты: в случае D_4^- (пирамида) каустика топологически устроена как двусторонняя трехгранная пирамида, ребра которой — три гладкие касающиеся в вершине параболы — являются направленными наружу полукубическими ребрами возврата (рис. 10).

В случае D_4^+ каустика в комплексной области та же самая, но в вещественной области совершенно другая ("кошелек") (рис. 11). Топологически этот кошелек подобен паре гладких поверхностей $z = \pm xu$, но в действительности каждая из поверхностей не вполне гладкая: одна имеет полукубическое ребро возврата над диаго-

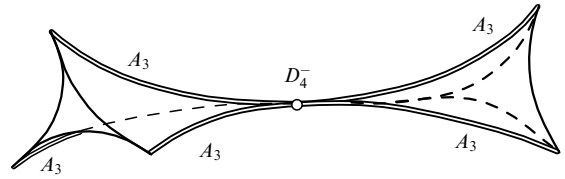


Рис. 10. Пирамида D_4^- .

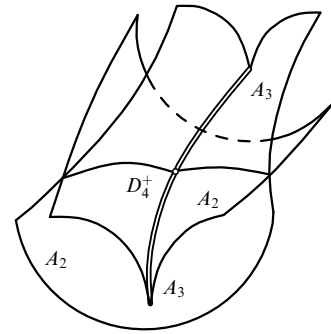


Рис. 11. Кошелек D_4^+ .

налью $x = y > 0$, а вторая для $x = y < 0$. Ребра направлены в обоих случаях ко второй части поверхности.

Интересно отметить, что голоморфно одинаковые поверхности пирамиды и кошелька имеют столь разные группы вещественных симметрий.

Замечание. Представляет интерес (даже с точки зрения теории чисел, где также используются асимптотики осциллирующих интегралов — именно этим прославился И.М. Виноградов) получить возможно более точную оценку поведения осциллирующего интеграла при подходе к каустике.

Асимптотика вне каустики имеет вид суммы френелевских вкладов стационарных точек, коэффициенты амплитуд которых зависят от замены переменной, приводящей фазу к виду суммы квадратов:

$$I(y) \sim (\Sigma(C_s h)^{n/2}), \quad C_s \sim \frac{1}{\det_s \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right)}. \quad (6)$$

При приближении к каустике один из \det_s стремится к 0, так что оценка более не имеет вида $Ch^{n/2}$. Однако Коленде Вердьер высказал гипотезу, что тем не менее выражение (6) остается *равномерной оценкой* вне каустики даже вблизи ее плохих точек. Он доказал это для точек A_2, A_3, A_4, D_4 и вообще для всех особенностей фазовой функции S общего положения, зависящих не более чем от семи параметров y (мы увидим ниже, что именно это условие гарантирует так называемую *простоту* особенностей, а также их связь с простыми алгебрами Ли).

Украинский вагант и философ Г. Скворода давно уже поблагодарил Создателя за то, что он создал все нужное простым, а все сложное — ненужным. Здесь используется безукоризненная в математическом смысле логика, кажется недоступная некоторым физикам (*ЖЭТФ* не принял в свое время интересную статью об адиабатических инвариантах, "так как автор утверждал, что из А следует В, в то время как каждый физик", — по словам зам. гл. ред. *ЖЭТФ*, — "знает, что А из В не следует!").

Каустики и группы отражений

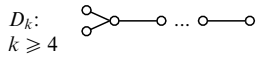
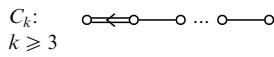
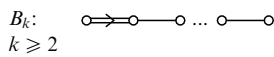
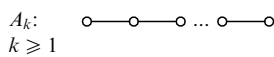
С группой отражений мы связали выше многообразие орбит и в нем подмногообразие (с особенностями) нерегулярных орбит. Само многообразие орбит группы отражений всегда гладкое. Это — обобщение теоремы о симметрических функциях, соответствующей группы симметрий k -мерного симплекса A_k .

Приведу здесь самую классификацию групп евклидовых отражений. Ясно, что прямое произведение группы в \mathbf{R}^m на группу в \mathbf{R}^n является группой отражений в \mathbf{R}^{m+n} . Действие группы отражений в евклидовом пространстве называется *неприводимым*, если у него нет нетривиального подпространства, инвариантного относительно всей группы.

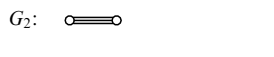
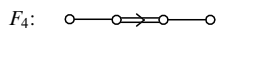
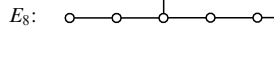
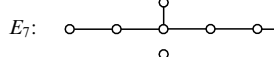
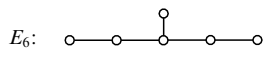
Всякая группа евклидовых отражений является произведением неприводимых, которые и остается описать.

Неприводимые группы отражений делятся на два класса: кристаллографические группы в \mathbf{R}^N , сохраняющие некоторую решетку \mathbf{Z}^N линейных целочисленных комбинаций N линейно независимых векторов, и некристаллографические.

Кристаллографические группы образуют четыре бесконечных серии



и пять исключительных групп



Здесь диаграммы указывают расположение порождающих зеркал. Кружок на диаграмме означает базисный вектор, ортогональный зеркалу. Отрезок между двумя кружками означает угол в 120° , а отсутствие отрезка — угол в 90° , два отрезка — угол в 135° , три — в 150° .

Знак $>$ указывает на длины базисных векторов: по одну сторону от него они в $\sqrt{2}$ раз больше. Индекс k — это размерность пространства (и число кружков в диаграмме).

Диаграммы этого рода заведомо использовались Коксетером и Виттом, поэтому их обычно называют диаграммами Дынкина.

Пример. B_2 и C_2 — группы симметрий квадрата, B_3 и C_3 — куба. Различие B_k и C_k только в решетках, порожденных базисными векторами: сами зеркала (а значит, и группы) одинаковы.

Некристаллографические группы евклидовых отражений:

$I_2(p)$ — группа симметрий правильного p -угольника на плоскости, $p \neq 2, 3, 4, 6$;

H_3 — группа симметрий правильного икосаэдра в \mathbf{R}^3 ;

H_4 — группа симметрий правильного гиперикосаэдра в \mathbf{R}^4 .

Икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин, группу движений из 60 элементов из $SO(3)$, группу симметрий из 120 элементов из $O(3)$.

Гиперикосаэдр имеет 120 вершин и 600 граней (тетраэдров). Чтобы его построить, рассмотрим двулистное спиновое накрытие:

$$\mathbf{R}^4 \supset S^3 = SU(2) = Spin(3) \rightarrow SO(3).$$

Прообраз группы 60 вращений икосаэдра состоит из 120 точек в S^3 . Это и есть вершины гиперикосаэдра.

Замечание. Доказано, что многообразия орбит всех этих и только этих групп гладкие⁶.

Пример. Для A_k начнем с \mathbf{R}^{k+1} с базисом $\alpha_0, \dots, \alpha_k$. Векторы $e_1 = \alpha_0 - \alpha_1, e_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \dots, e_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k$ образуют репер в \mathbf{R}^k (ортогональном диагонали) со скалярными произведениями диаграммы A_k . Зеркало, ортогональное e_j , определяет то же отражение, что и перестановка координат α_{j-1} и α_j . Поэтому группа отражений A_k действует на \mathbf{R}^k как симметрическая группа $S(k+1)$ перестановок координат в \mathbf{R}^{k+1} .

Координатами в многообразии орбит являются базисные инварианты $\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}\alpha_k, \dots, \sigma_k = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$. По основной теореме о симметрических функциях все многочлены в \mathbf{R}^k , инвариантные относительно действия $S(k+1)$, являются многочленами от $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Из этого следует, что $C^k/S(k+1) \approx C^k$ в смысле алгебраической геометрии. В действительности теорема верна даже для гладких функций, и гладкое \mathbf{R} -многообразие $C^k/S(k+1)$ диффеоморфно \mathbf{R}^{2k} .

Многообразие нерегулярных орбит группы отражений называется ее *дискриминантом*. Эта гиперповерхность (вообще говоря, комплексная) в комплексном многообразии орбит обычно имеет особенности.

Пример. Для A_2 дискриминант — полукубическая парабола $\sigma_2^3 = C\sigma_3^2$ в C^2 с особенностью в 0.

Дискриминанты групп отражений доставляют непосредственно особенности волновых фронтов типичных семейств волн. Но оказывается и каустики имеют естественное алгебраическое описание в этих терминах (обнаруженное в [8]).

Пример. Для A_3 дискриминант — поверхность в C^3 , называемая *ласточкиным хвостом* и образованная в пространстве многочленов $z^4 + az^2 + bz + c$ (с координатами a, b, c) многочленами, имеющими кратный корень (рис. 12).

Действительно, орбита точки (z_0, z_1, z_2, z_3) под действием перестановок координат состоит из 24 точек и, следовательно, регулярна, если и только если все четыре корня z_j различны.

Мы получаем удобные формулы, параметризующие дискриминант: на нем

$$x^4 + ax^2 + bx + c \equiv (x - u)^2(x^2 + 2ux + v)$$

⁶ Было бы интересно изучить группы Ли с таким свойством многообразий орбит: теорема Максвелла о сферических функциях дает интересные примеры [9].

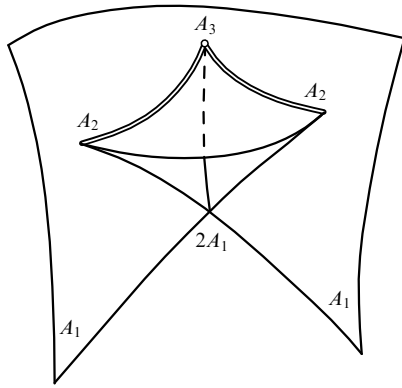


Рис. 12. Ласточкин хвост — дискриминант для A_3 и каустика для A_4 .

(мы использовали, что $\sigma_1 \equiv 0$). Итак,

$$a = v - 3u^2, \quad b = 2u^3 - 2uv, \quad c = u^2v.$$

Чтобы исследовать эту поверхность, удобно пересечь ее плоскостью $a = \text{const}$. Пересечение — кривая

$$b = -4u^3 - 2au, \quad c = au^2 + 3u^4.$$

При $a = 0$ — это парабола степени $3/4$. Особые точки кривой даются уравнением $bu^2 - a = 0$.

Если $a < 0$, то вещественных особых точек нет и в вещественной плоскости кривая гладкая. При увеличении a до 0 в точке 0 возникает особенность степени $3/4$, которая затем при $a > 0$ распадается на две полукубические особенности. В этом случае плоская кривая преобразуется как система эквидистант эллипса при появлении первой особенности в фокальной точке каустики.

Можно показать, что в действительности эти явления не только сходны, но и диффеоморфны: распространяющиеся волны заматают в пространстве — времени поверхность с особенностью типа ласточкин хвост при прохождении фронта через точку возврата каустики.

Разбор этого примера приводит к следующей общей конструкции, которая оказывается приемлемой и в случае общих групп отражений.

Рассмотрим дискриминант группы отражений (как комплексную гиперповерхность в \mathbb{C}^n) с главной особенностью в точке $\sigma = 0$. Предположим, что многообразие орбит \mathbb{C}^n расслоено над \mathbb{C}^{n-1} , т.е. что задано гладкое отображение $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ ранга $n - 1$ в точке $\sigma = 0$.

Оказывается:

1) все такие отображения общего положения локально эквивалентны (переводятся друг в друга локальным голоморфным диффеоморфизмом \mathbb{C}^n вблизи 0, который переводит дискриминант в себя и слои отображения — в слои);

2) проекция ребра возврата дискриминанта является каустикой соответствующей особенности.

Пример. Проектирование ласточкиного хвоста (дискриминанта A_3) эквивалентно забыванию координаты c . Ребро возврата дискриминанта проектируется в полукубическую параболу — каустикой особенности A_3 . Имеем на ребре возврата $a = v - 3u^2$, $b = 2u^3 - 2uv$, $a = bu^2$, так что на проекции $a = 6u^2$, $b = -16u^3$ (рис. 13).

Замечание. Кроме ребра возврата, ласточкин хвост имеет еще линию самопересечения ($b = c = 0$). Проекция

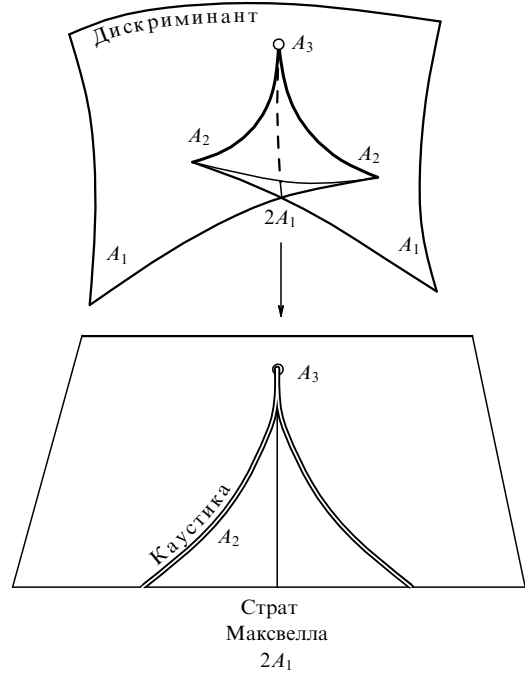


Рис. 13. Типичная проекция ласточкиного хвоста на плоскость.

этой линии на плоскость — гладкая линия. Если считать проектирование $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ дифференцированием многочлена $z^4 + az^2 + bz + c$, то линия самопересечения состоит из множества многочленов с двумя двукратными корнями. Она проектируется в "страт Максвелла", состоящий из кубических многочленов с нулевым интегралом между критическими точками.

Каустика при таком истолковании состоит из кубических многочленов с кратной критической точкой. Все это особенно легко понять, если учесть, что значение координаты c , вдоль оси которой проектирует дифференцирование многочлена, на дискриминанте есть просто критическое значение (со знаком минус) соответствующего многочлена $x^4 + ax^2 + bx$.

Перестройки распространяющихся волн

Систему распространяющихся волн можно описать набором мгновенных волновых фронтов Φ_t в "физическом" пространстве, но можно вместо них рассматривать единый "большой фронт" Φ в пространстве — времени, пересечения которого с изохронами $t = \text{const}$ доставляют мгновенные фронты [10].

Оказывается, большие фронты типичных распространений в n -мерном пространстве имеют такие же особенности, как мгновенные фронты в $(n + 1)$ -мерном пространстве.

Пример. Мгновенные фронты на плоскости — кривые. Распространение их описывается большим фронтом в трехмерном пространстве — времени. Такой фронт имеет в типичной ситуации особенности не сложнее ласточкиного хвоста. Поэтому типичные перестройки распространяющихся на плоскости фронтов — это типичные перестройки сечений ласточкиного хвоста поверхностями $t = \text{const}$, где t — функция общего положения на содержащем хвост трехмерном пространстве (рис. 14).

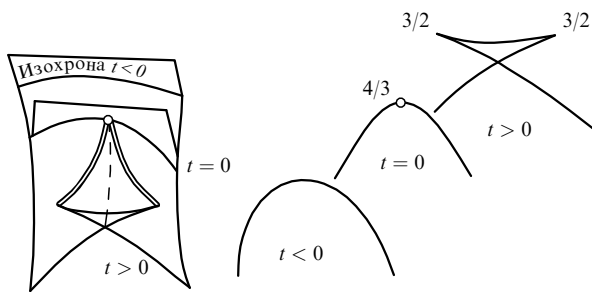


Рис. 14. Перестройка сечений ласточкиного хвоста.

Эти перестройки исчерпываются:

- 1) рождением или смертью двух полукубических точек возврата фронта при прохождении ласточкиного хвоста большого фронта;
- 2) рождением или смертью, или перестройкой двух полукубических точек возврата фронта при касании изохроны с линией возврата большого фронта;
- 3) рождением или смертью, или перестройкой двух ветвей фронта при касании изохроной гладкой части фронта;
- 4) есть еще касания изохроной линии самопересечения фронта.

Интересные примеры перестроек фронтов в \mathbf{R}^3 — перестройки A_4 и D_4 . При перестройке A_4 соединяются два ласточкиных хвоста мгновенного фронта, причем изохрона касается линии возврата большого фронта.

При перестройке D_4 в зависимости от знака могут происходить разные явления. Быть может, наиболее интересное связано с выворачиванием трилистникового узла в \mathbf{R}^3 , при котором его вершины скользят по ребрам возврата пирамиды каустики. Соответствующие картинки имеются в [3, 4, 6].

Построенные здесь теории нашли также приложение при изучении ударных волн и космологических бифуркаций движений пылеобразных сред (см. [4, 6]).

Версальные деформации

Проведенный выше анализ особенностей каустик, волновых фронтов и их перестроек был основан на формулах для фазовых функций из раздела "Осциллирующие интегралы". Теперь я опишу алгебраическую технику, доставляющую эти формулы.

Сама по себе особенность осциллирующего интеграла задается фазовой функцией $F(x)$ (для интеграла Эйри $F(x) = x^3$). Чтобы вычислить кратность критической точки (которую мы будем считать началом координат), надлежит рассмотреть орбиту F под действием группы диффеоморфизмов. Оказывается, бесконечномерное пространство функций в окрестности конечнократной критической точки кратности k можно представить в виде прямого произведения k -мерного пространства, трансверсального орбите, и бесконечномерного пространства, вдоль которого тип особенности не меняется. В случае Эйри конечномерное пространство состоит из функций $x^3 + ax + b$, а бесконечномерное — из функций X^3 , где $X = h(x)$ — замена переменных.

В общем случае кратность определяется следующей алгебраической конструкцией. Сначала берем пространство \mathcal{E} всех функций от x (здесь можно брать функции различной степени гладкости, в нашем случае годятся

даже просто формальные ряды Тейлора $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$, образующие кольцо $\mathcal{E} = \mathcal{C}[[x]]$).

В кольце функций \mathcal{E} рассмотрим *градиентный* идеал, натянутый на частные производные рассматриваемой исходной функции F ,

$$I_F = \left\{ h_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\}$$

(где $h_s \in \mathcal{E}$ — любые функции из \mathcal{E}). Это пространство I_F на самом деле является касательным пространством к орбите F под действием группы диффеоморфизмов, так как

$$\begin{aligned} F(x_1 + \varepsilon h_1, \dots, x_n + \varepsilon h_n) &= \\ &= F(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \left(h_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Пример. Для $f = x^3$ находим

$$I_f = \{hx^2\} = \{h_2x^2 + h_3x^3 + \dots\}.$$

Этот идеал является подпространством коразмерности 2 в пространстве всех степенных рядов от x $\{h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots\}$.

Определение. *Кратностью* критической точки функции F в 0 называется коразмерность градиентного идеала

$$\mu = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_n]]}{\left\{ \sum h_s \frac{\partial F}{\partial x_s} \right\}}.$$

Пример. Для $F = x^3$ находим

$$\mu = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\{h_0 + h_1x + \dots\}}{\{h_2x^2 + \dots\}} = \dim_{\mathcal{C}} \{ax + b\} = 2.$$

Предположим, что критическая точка функции F в 0 конечнократно и что фактор-пространство \mathcal{E}/I_F порождено над \mathbf{C} функциями g_1, \dots, g_μ .

Тогда в качестве μ -параметрической трансверсали к орбите функции F в \mathcal{E} можно взять пространство

$$\{F + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_\mu g_\mu\}, \quad \lambda_s \in \mathbf{C}.$$

Пример. Для $F = x^3$ получаем трансверсаль $\{x^3 + ax + b\}$.

Определение. Функция $S(x, y)$ называется *деформацией* функции $F(x)$, если $S(x, 0) = F(x)$. Построенная выше трансверсаль к орбите является двухпараметрической деформацией функции x^3 с параметрами $y_1 = a, y_2 = b$.

Определение. *Начальными скоростями* деформации S называются функции $g_s(x) = \partial S / \partial y_s |_{y=0}$. В нашем примере — это $g_1 = x$ и $g_2 = 1$.

Правило выписывания трансверсали к орбите (называемой также *версальной деформацией* функции F) состоит в том, что деформация версальна всякий раз, когда ее начальные скорости порождают базис фактор-пространства \mathcal{E}/I_F .

Фазовые функции, использованные в разделе "Осциллирующие интегралы" для построения ласточкиного хвоста, пирамиды и кошелька — это версальные деформации S функций $F = x_1^4 \pm x_2^2, F = x_1^2 x_2 \pm x_2^3$.

Для исследования строения орбит группы диффеоморфизмов вблизи F достаточно изучить лишь конечнопараметрическое семейство — версальную деформацию. В бесконечномерном пространстве ситуация такая же,

только все умножено на гладкое бесконечномерное многообразие, так что каждая орбита имеет вид цилиндра с бесконечномерной гладкой образующей, направляющей же является многообразие функций соответствующего класса в версальной деформации.

Пример. Особенность A_2 (орбита функции x^3) составляет ребро возврата многообразия функций с критическим значением 0.

Замечание. Приведенные выше алгебраические результаты верны как для формальных, так и для аналитических или даже для гладких функций, с естественными поправками: из μ бифурцирующих критических точек вещественными могут быть не все (например, для $x^3 + ax$ при $a > 0$ вещественных критических точек нет, хотя кратность μ есть 2).

Линия самопересечения ласточкиного хвоста соответствует как вещественным, так и комплексным точкам с кратными критическими значениями. В вещественном случае только половина этой линии является настоящей линией самопересечения вещественного ласточкиного хвоста, а вторая половина — ее аналитическим продолжением.

Числа Кокстера

Алгебраическое описание показателей особенности асимптотик осциллирующих интегралов состоит в следующем. Рассмотрим зеркала соответствующей группы евклидовых отражений в вещественном пространстве \mathbf{R}^n . Они делят его на части, называемые камерами Вейля. Каждая камера является конусом с симплицальным основанием. Продолженные стенки камеры (их μ) делят пространство на 2^μ частей, называемых конусами Спрингера. Каждый конус Спрингера состоит из нескольких камер Вейля. Геометрия камер Вейля и составленных из них конусов Спрингера решающим образом сказывается на геометрии волновых фронтов и каустик.

Определение. Преобразованием Кокстера называется произведение отражений в стенках одной камеры Вейля.

Пример. Три зеркала A_2 делят плоскость на шесть камер Вейля — углов по 60° . Каждое преобразование Кокстера — это поворот на 120° .

Собственные числа преобразования Кокстера — это корни различных степеней m из 1. Числом Кокстера группы отражений называется порядок преобразования Кокстера.

Пример. Числа Кокстера m некоторых кристаллографических групп отражений в \mathbf{R}^n даются таблицей

A_n	B_n, C_n	D_n	E_6	E_7	E_8
$m = n + 1$	$2n$	$2n - 2$	12	18	30

Оказывается, эти числа тесно связаны с асимптотиками соответствующих осциллирующих интегралов.

Пример. Для D_n на плоскости x, y

$$I_h = \iint \exp \left[\frac{i(x^2 y + y^{n-1})}{h} \right] dx dy.$$

Сделаем замену координат $x = h^\alpha X, y = h^\beta Y$, уничтожающую деление на h :

$$I_h = \iint \exp [i(X^2 Y + Y^{n-1})] h^{\alpha+\beta} dX dY,$$

$$2\alpha + \beta = (n - 1)\beta = 1.$$

Мы получаем $\beta = 1/(n - 1), \alpha = (n - 2)/(2n - 2), \alpha + \beta = n/(2n - 2)$. Поэтому в точках D_n интеграл I_h убывает как $h^{n/(2n-2)}$ вместо обычной скорости убывания $h^{2/2}$. Например, в точках D_4 получается $h^{2/3}$ вместо h , т.е. происходит ухудшение в $h^{-1/3}$ раз.

Такие же выкладки дают показатели особенности остальных особенностей списка — они очевидным образом повторяют список чисел Кокстера:

A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
$\frac{n - 1}{2n + 2}$	$\frac{n - 2}{2n - 2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{14}{30}$

Аналогичная теория уже построена для особенностей B, C, F, G и должна быть построена для $I_2(p), H_3, H_4$.

Пример. В обычной точке A_1 показатель особенности 0, т.е. степенной множитель в двумерном осциллирующем интеграле пропорционален h . В двойной точке A_2 (обычной точке каустики) показатель особенности равен $1/6$, т.е. степенной множитель имеет вид $h^{1-1/6}$. В тройной точке (точке возврата каустики) свет еще ярче, показатель особенности для A_3 равен $1/4$, степенной множитель $h^{1-1/4}$.

В особых точках D_4 (соответствующих пирамидам и кошелькам каустики) показатель особенности $1/3$, степенной множитель $h^{1-1/3}$. Но эти точки в двумерных системах общего положения появляются лишь при отдельных значениях параметра (например, времени, если речь идет о шуме пролетающего мимо самолета, а не о свете).

Конусы Спрингера и числа Бернулли

Опера превратилась в царство скуки, потому что в ней слишком много музыки. Бомарше, предисловие к "Гарару"

Рассмотрим группу отражений в \mathbf{R}^n , порожденную отражениями в n стенках камеры Вейля. Продолжения этих стенок делят пространство подобно координатным плоскостям на 2^n частей — конусов Спрингера, каждый из которых состоит из нескольких камер Вейля (может быть, одной). Один из этих конусов состоит из наибольшего числа камер — назовем его главным конусом Спрингера.

Пример. Группа A_2 отражений плоскости в трех зеркалах, образующих углы 120° в 0, имеет главные конусы Спрингера, состоящие из двух камер Вейля каждый.

Определение. Числом Спрингера группы отражений называется число камер Вейля в ее главном конусе Спрингера.

Пример. Число Спрингера группы A_2 есть $a_2 = 2$, как мы видели выше. Посчитать следующие числа Спрингера a_m групп A_m уже не так легко (это так называемая теория updown последовательностей). Первые из них таковы: $a_m = 2, 5, 16, 61, 272, 1385, \dots (m = 2, 3, \dots)$.

Появление числа Эйлера 61 подсказывает, что эта последовательность связана с числами Эйлера и Бернулли.

Составим экспоненциальную производящую функцию

$$P(t) = \sum_{k=0} \frac{a_k t^k}{k!}.$$

Оказывается (теорема французского математика Андре),

$$P(t) = \tan t + \sec t.$$

Кроме того, коэффициенты a_k легко вычислять при помощи треугольника типа Паскаля

		1			
		1	0		
	0	1	1		
	2	2	1	0	
0	2	4	5	5	
.

Каждый элемент каждой строки равен сумме чисел предыдущей строки левее или правее данного элемента (в зависимости от четности номера строки).

Вдоль левой стороны треугольника идут (начиная с a_1) коэффициенты ряда Тейлора тангенса, поделенные на $k!$, а вдоль правой — секанса.

Аналогичная теория имеется и для других групп отражений (см. [11]).

Что касается геометрии разбиения конуса Спрингера на камеры Вейля, то удобно начинать со случая A_3 в \mathbf{R}^3 . В этом случае конус является треугольной пирамидой, разбитой на пять камер (рис. 15). Это разбиение (плоскостями симметрии тетраэдра) удобно изобразить в виде разбиения треугольника PQR основания пирамиды на пять треугольников — оснований камер Вейля. Веберем по точке S и T на сторонах RQ и RP и проведем отрезки PS и QT , пересекающиеся в U . Основания камер Вейля — это треугольники PQU , QUS , UST , TSR и PUT .

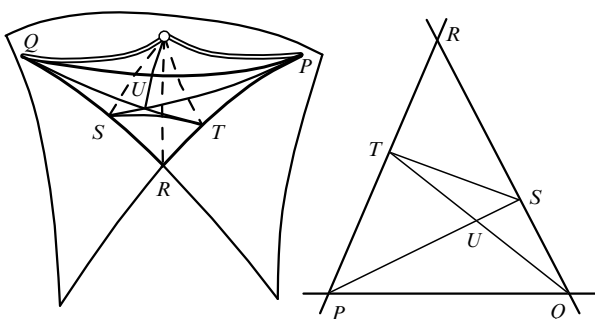


Рис. 15. Разбиение основания конуса Спрингера группы A_3 на камеры Вейля.

Рассмотрим теперь ласточкин хвост как каустику семейства функций от x вида

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx.$$

Точки a, b, c , отвечающие функциям с четырьмя вещественными критическими точками, образуют "пирамиду" между ребром возврата и линией самопересечения хвоста.

Страт Максвелла разбивает эту пирамиду на области, внутри каждой из которых функции топологически эквивалентны друг другу (т.е. порядок критических значений на оси значений одинаков). Оказывается, этих областей пять, они ограничены алгебраическими поверхностями, и все разбиение топологически такое же, как

описанное выше разбиение конуса Спрингера на камеры Вейля.

Причем эта топологическая эквивалентность осуществляется алгебраическим гомеоморфизмом, который осуществляет даже диффеоморфизм внутренности пирамиды на внутренность конуса Спрингера (а также внутренности каждой грани на внутренность соответствующей грани конуса).

Все эти результаты распространяются и на другие группы отражений.

Диффеоморфизм, о котором здесь идет речь, является вещественной формой замечательного отображения Ляшко–Лойенги (см. [12, 13]), сопоставляющего многочлену

$$a(z) = z^{k+1} + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k, \quad a_s \in \mathbf{C},$$

многочлен

$$b(w) = \prod (w - c_s) = w^k + b_1 w^{k-1} + \dots + b_k, \quad b_s \in \mathbf{C},$$

корнями c_s которого являются критические значения многочлена a .

3. Граница между математикой и физикой

Вопрос о соотношениях этих двух наук много обсуждался. Гильберт, например, явно заявил, что геометрия — это часть физики, поскольку нет никакой разницы между тем, как получает свои достижения геометр и как — физик.

Я боюсь, правда, что Гильберт просто не считал геометрию частью математики — ведь он утверждал, что для математики все равно, будут ли ее "точки" пивными кружками, а прямые — "скамьями". Это не вполне бессмысленно, например, в геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре) прямыми считаются окружности, и это полезно.

К сожалению, его последователи, вроде Бурбаки, внедрили эти "безобидные" идеи в преподавание школьной математики, заменив содержательную науку об устройстве мира жонглированием логическими символами. Ненависть к математике распространяется во всем мире, мы даже отстаем.

Недавно один из таких последователей прислал мне письмо, где, критикуя мое утверждение, что математика — часть физики, настаивает на том, что никакого сходства между этими науками нет. Интересно, впрочем, что этот же выдающийся бурбакист отказался принять участие в написании обзорной книги о математике к 2000 году, мотивируя это тем, что "совместные математические предприятия всегда заканчиваются неудачей". Я не знаю, действительно ли бурбакистское предприятие закончено.

Перечислять все замечательные высказывания (Паскаля, Декарта, Ньютона, Гюйгенса, Лейбница) по этому поводу было бы слишком долго, но я не могу удержаться от ссылки на Дирака, заявившего, что физику никогда не следует опираться на физическую интуицию, которая чаще всего — имя для предвзятых суждений. По его мнению правильный путь состоит в том, чтобы взять математическую теорию и последовательно развивать ее, рассматривая одновременно приложения к возможно более важным моделям.

Например, правильная электромагнитная теория получается из уравнений Максвелла, а не из уточнений пород кошек и сортов янтаря. Вопрос о цвете меридиана — злоупотребление "интуицией" предвзятых мнений.

Я надеюсь, что выше показано, к каким результатам приводит следование этому совету Дирака.

Пример недопустимого влияния предвзятых идей там, где следовало бы продумать содержательную математическую теорию, дает обсуждение Декартом барометрических идей Паскаля. Паскаль исходил из опыта Торричелли с ртутным столбом и построил соответствующий прибор с заменой итальянской ртути водой и французским вином (это трудно, так как нужна очень прочная бочка, выдерживающая давление десятиметрового столба вина или воды). Но Паскаль сумел все сделать — сначала на башне св. Якова в центре Парижа, а позже и на горе Пюи де Дом в Оверни — и построил первые водяные барометры (с пустотой над столбом воды). Он пришел к Декарту — крупнейшему ученому (Паскаль был еще совсем молодым) и рассказал ему о своей теории — законе Паскаля и т.д. Декарт, предтеча Бурбаки, изгнавший чертежи из геометрии, счел все это пустой теорией и написал Гюйгенсу: "Лично я все же нигде в природе пустоты не вижу, разве, быть может, в голове у Паскаля". Через несколько месяцев он уже утверждал, что сам всему научил Паскаля. Для Декарта аксиома "природа не терпит пустоты" была дорожкой теории Паскаля (позже он был недоволен и дальностью действия Ньютона, считая, что планеты движут эфирные вихри).

Кроме пустоты в голове у Паскаля, Декарт открыл много замечательного, например, в теории каустик ему принадлежит объяснение радуги и вывод ее раствора (43°) из показателя преломления воды.

Последние годы во всем мире наблюдается общая тенденция наступления на науку и образование со стороны бюрократов и менеджеров. Математика и физика первыми попадают под удар. Упомяну, например, недавние "калифорнийские войны": штат Калифорния под руководством Г. Сиборга принял новые школьные требования, вызвавшие федеральное неодобрение как противоречащие общеамериканским. Сенат возразил.

Вот два примера: новая программа предусматривала сложение простых дробей для десятилетних школьников в курсе математики и учение о трех фазовых состояниях воды в курсе физики. В федеральной программе вода имеет лишь два фазовых состояния (превращающихся друг в друга в холодильнике), пар же считается недоступным незлитарным школьникам как понятие черес-

чур абстрактное. Тестирование школьных учителей показало, что они, как правило, не владеют и простыми дробями, и даже деление 111 на 3 требует компьютера. Попытки изгнания математики (в особенности доказательств) предпринимается и нашими просветителями ("гуманизация").

Подчеркну, что доказательства всегда играли в математике совершенно подчиненную роль, примерно такую, как орфография или даже каллиграфия в поэзии. Математика, как и физика, — экспериментальная наука, и сознательное сложение простых дробей $1/2$ и $1/3$ — стандартный элемент общечеловеческой культуры. Попытки отучить людей думать и остановить всяческий прогресс — естественное, но опасное последствие всемирной бюрократизации и борьбы с культурой.

Римляне пытались оставить от греческой науки только "практически полезную" часть и результатом явилось мрачное мракобесие средневековья.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-01109) и Institut Universitaire de France.

imes-b" > Список литературы

1. Арнольд В И "О преподавании математики" *Успехи матем. наук* **53** (1) 229 (1998)
2. Whitney H "Singularities of mappings of Euclidean spaces I. Mappings of the plane into the plane" *Ann. Math.* **62** 374 (1955)
3. Арнольд В И, Варченко А Н, Гусейн-Заде С М *Особенности дифференцируемых отображений* Т. I, II (М.: Наука, 1982, 1984)
4. Арнольд В И *Теория катастроф* 3-е изд. (М.: Наука, 1990)
5. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* Т. 1, 3–6, 39 (М.: ВИНТИ, 1985–1989)
6. Арнольд В И *Особенности каустик и волновых фронтов* (М.: Фазис, 1998)
7. Арнольд В И "Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий" *Функц. анализ и его прилож.* **6** (3) 61 (1972)
8. Арнольд В И "Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и особые проекции гладких поверхностей" *Успехи матем. наук* **34** (2) 3 (1979)
9. Арнольд В И "Топологическая теорема Максвелла о мультипольном представлении сферических функций" *Успехи матем. наук* **51** (6) 227 (1996)
10. Arnold V I "Wave front evolution and equivariant Morse lemma" *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (6) 537 (1976)
11. Арнольд В И "Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера" *Успехи матем. наук* **47** (1) 3 (1992)
12. Арнольд В И "Критические точки функций и классификация каустик" *Успехи матем. наук* **29** (3) 243 (1974)
13. Looijenga E "The complement of the bifurcation variety of a simple singularity" *Invent. Math.* **23** (2) 105 (1974)

Mathematics and physics: mother and daughter or sisters?

V.I. Arnold

V.A. Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Gubkina 6, 117966 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 938-3980. Fax (7-095) 135-05 55
E-mail: arnold@genezis.mian.ras.ru

The unity of mathematics and physics is emphasized in a paper previously presented, in part, in 1998 at a meeting of the French Mathematical Society, and at the Russian Academy of Sciences (seminar at the Institute of Theoretical and Experimental Physics and V L Ginzburg's seminar at the Physics Institute).

PACS numbers: **01.70. + w**, **02.90. + p**

Bibliography — 13 references

Received 14 September 1999