

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Инфракрасные и коллинеарные расходимости в калибровочных теориях

Л.В. Прохоров

В рамках методов теории возмущений и переопределения оператора рассеяния рассмотрена проблема инфракрасных и коллинеарных расходимостей. Дано описание процессов с инфракрасными расходимостями в электродинамике и гравитации (теория возмущений), построен свободный от инфракрасных расходимостей оператор рассеяния в электродинамике. На примере безмассовой электродинамики представлен рецепт определения оператора рассеяния, свободного от инфракрасных и коллинеарных расходимостей. Обсуждается смысл входящих в окончательные формулы параметров, характеризующих эксперимент. Отмечено, что факторизация S -матрицы (приближенная независимость жестких и мягких процессов) делает тривиальной теорему о сокращении расходимостей в наблюдаемых величинах. Изложен метод выявления расходимостей в теориях с многохвостыми вершинами.

PACS numbers: 11.10.-z, 11.15.-q

Содержание

1. Введение (1199).
2. Инфракрасные расходимости. Метод теории возмущений (1202).
2.1. Квантовая электродинамика. 2.2. Гравитация.
3. Инфракрасные расходимости. Метод переопределения оператора рассеяния (1207).
3.1. Квантовая электродинамика. 3.2. Квантовая хромодинамика. Эффективный гамильтониан.
4. Коллинеарные расходимости (1212).
4.1. КХД. Теории возмущений. 4.2. Безмассовая электродинамика. Переопределение оператора рассеяния.
5. Заключение (1216).
6. Приложения (1217).
6.1. Формулы суммирования по поляризациям. 6.2. Классическое излучение. 6.3. Расходимости в теориях с многочастичными вершинами. 6.4. Кинематика коллинеарных процессов. 6.5. Метод континуального интегрирования.

Список литературы (1220).

1. Введение

Из всех нетривиальных расходимостей, присущих квантовой электродинамике (КЭД), инфракрасные расходимости наиболее безобидные. Они допускают практиче-

ски полное математическое описание и имеют ясное физическое истолкование. Однако подобные расходимости встречаются не только в электродинамике. Общая причина их появления — наличие безмассовых полей. В этом случае амплитуда A' какого-нибудь процесса с излучением безмассовой частицы в длинноволновом пределе отличается от соответствующей амплитуды основного процесса A лишь множителем:

$$A' \sim A \frac{g}{2pq \pm i0}, \quad (1.1)$$

где g — постоянная взаимодействия, p — импульс массивной частицы, $p^2 = m^2$, q — импульс безмассовой частицы ($q^2 = \omega^2 - \mathbf{q}^2 = 0$; подробнее см. раздел 2).

Из (1.1) видно, что при малых $|\mathbf{q}|$ амплитуда A' отнюдь не мала, а при $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности. Следовательно, амплитуды излучения двух и более длинноволновых безмассовых частиц не меньше амплитуды излучения одной, и разложение по степеням g теряет смысл. Но это не все. При вычислении сечений процессов приходится интегрировать квадраты амплитуд $A' \sim A/\omega$ с мерой $d^3q/\omega \sim \omega d\omega$:

$$\int \frac{d^3q}{\omega} |A'|^2 \rightarrow |A|^2 \int_0 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (1.2)$$

что ведет к логарифмической расходимости на нижнем пределе. Это и есть типичная инфракрасная расходимость. Аналогичные бесконечности встречаются при интегрировании по импульсам виртуальных частиц (внутренних линий некоторых диаграмм Фейнмана). В литературе инфракрасные расходимости впервые были отмечены в работах [1–3], хотя бесконечности, обусловленные отсутствием у фотона массы, проявили себя еще раньше, в классической физике, как бесконечность полного сечения резерфордовского рассеяния [4].

Л.В. Прохоров. Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского университета
198904 Санкт-Петербург, Российская Федерация
Тел. (812) 428-75-90. Факс (812) 428-72-40
E-mail: lev.prokhorov@pobox.spbu.ru

Статья поступила 8 апреля 1998 г.,
после доработки 28 апреля 1999 г.

Если знаменатель формулы (1.1) расписать подробно:

$$pq = E_p \omega - \mathbf{p}\mathbf{q} = \omega|\mathbf{p}|(1 - \cos \theta) + \omega \Delta_p, \quad (1.3)$$

где $E_p^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$, $\Delta_p = E_p - |\mathbf{p}|$, $\mathbf{p}\mathbf{q} = |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta$, θ — угол между импульсами массивной и излученной безмассовой частицами, то становится ясно, что при $m \rightarrow 0$ разность $\Delta_p \rightarrow 0$, и при $\theta \rightarrow 0$ амплитуда (1.1) неограниченно возрастает. Следовательно, когда направления импульсов излучающей и излученной частиц совпадают, соответствующие амплитуды процессов обращаются в бесконечность. В этом случае теория возмущений становится непригодной. При вычислении сечений появляются также логарифмические расходимости, поскольку $d^3q \sim \sin \theta d\theta$, $1 - \cos \theta \approx \theta^2/2$, и ввиду того что числитель A' пропорционален θ (см. разделы 4.2 и 6.3), имеем

$$\int d^3q |A'|^2 \sim |A|^2 \int_0 \frac{d\theta}{\theta}. \quad (1.4)$$

Это есть типичная коллинеарная расходимость. Если бы мы стремились массу излучающей частицы к нулю после вычисления интеграла (1.4), то результат оказался бы пропорциональным $\ln m$. Поэтому иногда коллинеарные расходимости называют *массовыми*. Впервые с ними встретились при вычислении радиационных поправок к распаду мюона [5], рассматривая этот процесс в пределе $m_e \rightarrow 0$ (m_e — масса электрона; там же было отмечено их сокращение для наблюдаемых величин). Причина появления коллинеарных расходимостей чисто кинематическая: безмассовая частица может превратиться в две или больше реальные безмассовые частицы, движущиеся в том же направлении. Хотя физическая причина появления коллинеарных расходимостей ясна, их полное описание не столь просто, как инфракрасных, — следствие того, что импульсы излучаемых и излучающих частиц не обязательно малы.

Практическая важность учета инфракрасных расходимостей связана с тем, что регистрирующие излучение приборы всегда обладают порогом чувствительности и не регистрируют квантов с длинами волн, большими некоторой пороговой, т.е. с частотами $\omega \leq E_0$. Такие кванты всегда излучаются и никогда не регистрируются. Между тем в физике высоких энергий этот порог может лежать достаточно высоко (скажем, быть порядка сотен МэВ [6, 7]), и учет подобного излучения, например фотонов, существенно меняет сравниваемые с экспериментом формулы [8]. Энергия, уносимая нерегистрируемым излучением в опытах на коллайдерах, может составлять 10–15 % от полной энергии.

Важность учета коллинеарных расходимостей связана, во-первых, с тем, что в квантовой хромодинамике (КХД) глюоны обладают самодействием, т.е. являются заряженными безмассовыми частицами, а во-вторых, с тем, что в (1.3) разность $\Delta_p \sim m^2/2|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ не только при $m \rightarrow 0$, но и при $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$, т.е. при сверхвысоких энергиях массивные частицы ведут себя как безмассовые (см. также [9]). Но именно такие энергии ($E_p \gg m$) достигнуты на современных ускорителях. Поэтому, если в процессах распада термин "массовая расходимость" уместен, при сверхвысоких энергиях масса ни при чем (теперь $\ln m \rightarrow \ln(m/|\mathbf{p}|)$, $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$); вот почему в обоих

случаях лучше говорить о "коллинеарных расходимостях"¹.

Рецепт учета инфракрасных расходимостей выглядел достаточно экзотично [11–13]. Поскольку вероятность излучения конечного числа фотонов с исчезающей энергией равна нулю (амплитуды соответствующих процессов стремятся к бесконечности, полная же вероятность нормирована на единицу), а длинноволновые виртуальные фотоны также порождают инфракрасные расходимости, предписывалось: 1) совершить инфракрасную регуляризацию (например, путем придания массы фотону); 2) вычислить сечение процесса с учетом нерегистрируемых инфракрасных фотонов; 3) снять регуляризацию. Утверждалось, что результат конечен и не зависит от параметра регуляризации. При этом расходимости, связанные с излучением реальных, но нерегистрируемых инфракрасных фотонов сокращаются с расходимостями от виртуальных инфракрасных фотонов.

Сходным образом рекомендовалось поступать при появлении коллинеарных расходимостей [5, 14–16]: нужно было перейти к сечениям и суммировать вклад всех безмассовых частиц, излученных внутрь некоторого телесного угла; в ответе все коллинеарные расходимости сокращались. Подобное положение вещей не выглядело вполне удовлетворительным: в корректной теории все физические процессы должны описываться амплитудами вероятностей.

Усилия по описанию инфракрасных расходимостей в рамках теории возмущений венчала работа Вейнберга [17]. Собственно, целью статьи [17] было изучение проблемы инфракрасных расходимостей в гравитации — единственной классической теории, помимо электродинамики, с полями нулевой массы. Образцом служила электродинамика, так что изложение обеих теорий велось параллельно.

Однако еще раньше Мурота опубликовал незаслуженно оказавшуюся в тени работу [18], в которой давалась современная трактовка вопроса. Физическая основа этого подхода содержалась уже в классической работе Блоха и Нордсика [19]. Утверждение авторов [19], что при квантовом описании процессов с инфракрасными фотонами достаточно ограничиться взаимодействием электромагнитного поля с классическим током заряженных частиц, является ключом к проблеме. Мурота нашел асимптотический лагранжиан взаимодействия (т.е. лагранжиан, описывающий эффективное взаимодействие мягких фотонов) и построил свободную от инфракрасных расходимостей S -матрицу. Отметим, что, помимо прочего, в [18] был представлен оригинальный подход, опиравшийся на понятие иерархии характерных времен взаимодействия (жесткий процесс протекает быстро, мягкий — медленно), позволявший факторизовать S -матрицу (разделить жесткие и мягкие процессы; подробнее см. раздел 3.1.2). Там же доказана общая формула распутывания T -экспоненты, отличная от формулы Магнуса [20].

Позднее появилась серия работ, содержащих детальный анализ проблемы [21–28] (см. также обзор

¹ Если бы фотоны обладали массой λ , то в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ интеграл (1.2) также был бы пропорционален $\ln \lambda$, поэтому иногда говорят о "массовых инфракрасных" и "массовых коллинеарных" расходимостях [10]. Слово "массовые" впредь будем опускать.

[29]). Существенное добавление к результатам [18] связано с выяснением специфики гильбертова пространства квантовой теории поля применительно к данной задаче (сепарабельные и несепарабельные пространства [21, 25–27]). Заметную роль сыграло замечание Долларда [30] о необходимости переопределения оператора рассеяния для медленно убывающих потенциалов (как $1/r$, и медленнее): влиянием таких потенциалов нельзя пренебречь на сколь угодно больших расстояниях. Отметим, что полученное в [18] представление для S -матрицы эквивалентно представлению [30] (см. раздел 3.1.2); из него, в частности, автоматически вытекает теорема [14–16] о сокращении расходимостей в усредненных сечениях процессов.

Дальнейшие работы по этой проблематике связаны с появлением КХД, обладающей по сравнению с КЭД целым рядом существенных отличий.

1. Неабелева калибровочная группа влечет появление в вершинах диаграмм матриц $\gamma_\mu T^a$ (T^a — генераторы группы), и если в КЭД при низких энергиях матрица γ_μ заменяется числом $2p_\mu$ (см. раздел 2), то некоммутативность матриц T^a сильно усложняет анализ в рамках теории возмущений.

2. Безмассовые глюоны обладают зарядом, поэтому к указанным трудностям добавляется проблема коллинеарных расходимостей.

3. Имеет место конфайнмент, поэтому глюоны в длинноволновом пределе не описываются ни методом теории возмущений, ни методом когерентных состояний.

К счастью, на малых расстояниях ($l_0 < 10^{-14}$ см) бегущая константа связи достаточно мала ($\alpha_s < 0,2$) и применима теория возмущений. Более того, конфайнмент ведет к эффективному обрезанию снизу по энергиям кварков и глюонов, поэтому для практических целей оказывается достаточным использование, во-первых, эволюционных уравнений ГЛАП [31–34] для структурных функций и, во-вторых, теории возмущений. Так, в [35] (см. также [36, 37]) непосредственным вычислением показано, что в согласии с теоремой о сокращении расходимостей [14–16] сечение процесса $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (точнее, $e^+e^- \rightarrow$ две струи) после надлежащих усреднений зависит, конечно, и от характерных экспериментальных параметров: δ — угла раствора порождаемых кварками струй и $(1-\epsilon)$ — доли энергии, уносимой струями ($\delta, \epsilon \ll 1$). Разработка различных аспектов проблемы продолжалась в 80-х годах. В частности, в [38] построены обобщенные когерентные состояния с нелинейными показателями экспонент, описывающие излучение мягких глюонов партонами.

Хотя с практической точки зрения ситуация выглядит приемлемой (см. обзоры [10, 34, 39, 40]), описание инфракрасных расходимостей в неабелевых теориях и особенно коллинеарных расходимостей (даже в безмассовой электродинамике) не поднялось до уровня, достигнутого в КЭД. Причина проста: в обоих случаях предполагалось умение описывать динамику полей при больших временах и на больших пространственных интервалах. Но если в случае инфракрасных расходимостей в КЭД задача сводилась к точно решаемой задаче о взаимодействии электромагнитного поля с внешним током, то в неабелевой теории аналогичная задача точно не решается. Исчерпывающее описание процессов с коллинеарными расходимостями предполагает умение решать нетривиальную теоретико-полевую задачу, по-

скольку в этом случае энергии излученных частиц не обязательно малы и ограничения накладываются лишь на углы разлета (подробнее см. раздел 4).

В разделе 2 изложен традиционный подход (теория возмущений) к описанию инфракрасных расходимостей в КЭД и теории гравитации. В разделе 3 проблема инфракрасных расходимостей рассмотрена в рамках метода переопределения S -матрицы в КЭД и КХД. Раздел 4 посвящен проблеме коллинеарных расходимостей. На примере безмассовой спинорной электродинамики дан рецепт построения свободного от инфракрасных и коллинеарных расходимостей оператора рассеяния.

В разделе 5 отнесены краткие замечания по вопросам, связанным с содержанием статьи. В приложениях приведен материал вспомогательного характера; в частности, выяснено, какие типы взаимодействий безмассовых частиц не порождают инфракрасных и коллинеарных расходимостей.

Обозначения и нормировки. Принята метрика $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} (+ - - -)$; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. По повторяющимся индексам одинаковой вариантности предполагается суммирование с надлежащим метрическим тензором; например, $q_\mu x_\mu = g^{\mu\nu} q_\mu x_\nu = q_\mu x^\mu \equiv qx$.

Используются сокращенные обозначения для оператора дифференцирования $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ и функций $\psi(t) \equiv \psi_t$ и т.п. T -матрица определяется соотношениями $S_{p'p} = 1 + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) T_{p'p}$ в квантовой теории поля, $S_{p'p} = 1 + i2\pi\delta(E' - E) T_{p'p}$ при рассеянии на потенциале. Произведение функций может подразумевать интегрирование по координатам: $JA \equiv \int dx J_\mu(x) A_\mu(x)$, где $dx \equiv d^4x$, или импульсам. Используется хевисайдова (рационализированная) система единиц, e — электрический заряд электрона ($e < 0$); всюду полагается $\hbar = c = 1$. Нормировки спиноров и операторов задаются формулами

$$u_\alpha^\sigma(p) \bar{u}_\beta^\sigma(p) = \frac{1}{2} [(\hat{p} + m)(1 + \gamma_5 \hat{s})]_{\alpha\beta},$$

$$v_\alpha^\sigma(p) \bar{v}_\beta^\sigma(p) = \frac{1}{2} [(\hat{p} - m)(1 + \gamma_5 \hat{s})]_{\alpha\beta}$$

(нет суммирования по поляризациям $\sigma = \pm 1/2$), $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\eta_{\mu\nu}$, $\gamma_5^2 = 1$, $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$ (s_μ — вектор поляризации, $s^2 = -1$, $sp = 0$),

$$[\hat{a}_{p,\sigma}, \hat{a}_{p',\sigma'}^\dagger]_+ = \tilde{\delta}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \delta_{\sigma\sigma'}, \quad [\hat{c}_{q,\lambda}, \hat{c}_{q',\lambda'}^\dagger]_- = \tilde{\delta}(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'},$$

где $\tilde{\delta}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \cdot 2E_p \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, $E_p = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$, $\tilde{\delta}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ есть инвариантная дельта-функция для меры $d\mu(p) = d^3p/[(2\pi)^3 \cdot 2E_p]$ (у фотона $E_q = |\mathbf{q}| = \omega_q$). Операторы полей задаются разложениями

$$\hat{\psi}(x) = \int d\mu(p) [\hat{a}_{p,\sigma} u^\sigma(p) \exp(-ipx) + \hat{b}_{p,\sigma}^\dagger v^\sigma(p) \exp(ipx)], \quad (1.5)$$

$$\hat{A}_\mu(x) = \int d\mu(q) [\hat{c}_{q,\lambda} \varepsilon_\mu^\lambda(q) \exp(-iqx) + \hat{c}_{q,\lambda}^\dagger \varepsilon_\mu^{\lambda*}(q) \exp(iqx)], \quad (1.6)$$

где $\lambda = \pm 1$ — поляризация фотона, $\varepsilon_\mu \varepsilon_\mu^* = -1$, $\bar{u} = u^* \gamma_0$. Знак " \sim " есть символ пропорциональности или асимптотического разложения.

2. Инфракрасные расходимости. Метод теории возмущений

2.1. Квантовая электродинамика

Существенные черты проблемы инфракрасных расходимостей в КЭД проявляются уже в задаче о рассеянии на кулоновом потенциале. Там же берут начало и современные методы ее трактовки. Поэтому мы начнем с краткого экскурса в квантовую механику.

2.1.1. Квантовая механика. Рассеяние на кулоновом потенциале. Пусть гамильтониан частицы есть $H = H_0 + V(\mathbf{r})$, где в нерелятивистском случае $H_0 = \mathbf{p}^2/2m$ (\mathbf{p} — импульс и m — масса частицы), V — потенциальная энергия. Оператором эволюции системы является $\hat{U}_{t,t'} = \exp[-i\hat{H}(t-t')]$, переводящий вектор состояния $\psi_{t'}$ в момент времени t' в вектор ψ_t . Основная задача теории рассеяния — указать рецепт вычисления состояний системы при $t \rightarrow \infty$ по состоянию при $t' \rightarrow -\infty$. Казалось бы, этой цели может служить оператор $\hat{U}_{t,t'}$.

Известно, однако, что предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{U}_{t,-t}$, $t \rightarrow \infty$, не существует (для доказательства этого достаточно взять \hat{H} в собственном представлении). Как следствие, физически интересные матричные элементы оператора $\hat{U}_{\infty,-\infty}$ имеют бесконечную фазу, которая, во-первых, не несет физической информации и, во-вторых, выпадает при вычислении вероятностей. Поэтому для получения корректно определенного и физически значимого предельного оператора просто вычитают соответствующую фазу, учитывая, что на больших расстояниях от рассеивателя частицы движутся как свободные, т.е. переходят к S -матрице:

$$\hat{U}_{t,t'} = \exp(i\hat{H}_0 t) \exp[-i\hat{H}(t-t')] \exp(-i\hat{H}_0 t'),$$

$$\hat{S} = \hat{U}_{\infty,-\infty}. \quad (2.1)$$

Оператор \hat{S} символически записывается в виде T -экспоненты:

$$\hat{S} = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}_I(\mathbf{r}(t)) \right], \quad (2.2)$$

где $\hat{V}_I(\mathbf{r}(t))$ — оператор потенциальной энергии в представлении взаимодействия (отсюда индекс I). Поскольку $\hat{\mathbf{r}}_I(t) = \hat{\mathbf{p}}_I/m + \hat{\mathbf{r}}$ (т.е. \mathbf{r}_I удовлетворяет уравнению $\ddot{\mathbf{r}}_I = 0$, $\dot{\mathbf{r}} \equiv \partial_t \mathbf{r} = \mathbf{p}/m$), интеграл в (2.2) сходится для потенциалов, убывающих при $|\mathbf{r}| = r \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/r$. Формула (2.2) лежит в основе метода теории возмущений и в квантовой теории поля.

Изложенный выше стандартный подход непригоден для потенциалов, убывающих, как $1/r$, и медленнее. Например, для кулонова потенциала α/r показатель экспоненты в (2.2) расходится на верхнем (t) и нижнем ($-t$) пределах, порождая бесконечные фазы в матричных элементах \hat{S} : $\exp[-i(\alpha m/p) \cdot 2 \ln t] \sim \exp[-i(\alpha m/p) \cdot 2 \ln r]$, $r, t \rightarrow \infty$. Это и есть расходящаяся "кулонова фаза" (здесь и далее в этом разделе $p = |\mathbf{p}|$).

К счастью, данная задача допускает точное решение. Асимптотика волновой функции частицы в поле кулонова потенциала есть [41]

$$g(r, \theta) \exp \left[ipz + \frac{izm}{p} \ln \left(2pr \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + \frac{f(\theta)}{r} \exp \left[ipr - \frac{izm}{p} \ln(2pr) \right], \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где

$$g(r, \theta) = 1 - \frac{i\alpha^2 m^2}{2p^3 r \sin^2(\theta/2)},$$

$$f(\theta) = -\frac{\alpha m}{2p^2 \sin^2(\theta/2)} \exp \left[-\frac{2i\alpha m}{p} \ln \sin \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0(p) \right], \quad (2.4)$$

$\sigma_0(p)$ — аргумент гамма-функции $\Gamma(1 + i\alpha m/p)$ (сдвиг фазы кулоновой s -волны [42]). Ясно, что стандартная асимптотика [43] $\psi \sim \exp(ipz) + (f(\theta)/r) \exp(ipr)$, когда на бесконечности движение частицы вдоль оси z описывается плоской монохроматической волной, уже не имеет места.

Становится понятной причина непригодности стандартных формул теории возмущений типа (2.2): согласно (2.3) движение частицы даже на сколь угодно больших расстояниях нельзя считать свободным, т.е. нельзя пренебречь влиянием потенциала. Отсюда — логарифмическая расходимость, фигурирующая в (2.3). Об этом же свидетельствует и асимптотика решения классической задачи $\mathbf{r}(t) \sim \mathbf{p}t/m + (\alpha m \mathbf{p}/p^3) \ln t$, $t \rightarrow \infty$ (вместо $\mathbf{p}t/m + \mathbf{r}_0$); она не удовлетворяет свободному уравнению $\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Согласно (2.4) дифференциальное сечение рассеяния точной задачи совпадает с борновским:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\alpha^2 m^2}{4p^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (2.5)$$

($d\Omega$ — телесный угол), и с формулой Резерфорда классической теории.

Обсуждаемую задачу рассеяния изучали также на модифицированном потенциале, именно на потенциале Юкавы $\exp(-\lambda r)/r$ (или, если угодно, наделяя фотон массой λ). Далитц [44] обнаружил, что поправку к амплитуде рассеяния во втором порядке теории возмущений можно рассматривать как второй член разложения в ряд экспоненты $\exp\{(-2i\alpha m/p) \ln[(2p/\lambda) \sin(\theta/2)]\}$, справедливо (см. выкладки в [17]) соотнося фактор $2p/\lambda$ под знаком логарифма с расходящейся кулоновой фазой во втором слагаемом (2.3).

Итак, оператор (2.2) для кулонова потенциала определен некорректно, но его "регуляризация" (переход к потенциалу Юкавы) позволяет вычислить дифференциальные сечения, которые не зависят от вспомогательного параметра. Все это напоминает ситуацию с оператором эволюции $\hat{U}_{t,t'}$, когда с целью перехода к хорошо определенному оператору удалялась физически неинтересная бесконечная фаза.

Аналогичным образом целесообразно поступить и в данной задаче, т.е. переопределить оператор рассеяния так, чтобы он, не теряя физической информации, приобрел математический смысл. Однако, прежде чем переходить к ее обсуждению (см. раздел 3.1.1), выясним ситуацию в электродинамике.

2.1.2. КЭД. Реальные инфракрасные фотоны. Рассеяние на кулоновом потенциале. Рассмотрим рассеяние на кулоновом потенциале с излучением одного фотона. Для этого в лагранжиане взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ сделаем замену $A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^{\text{ext}}$, где $A_\mu^{\text{ext}}(x) = -g_{\mu 0}Ze/4\pi|\mathbf{r}|$ — внешнее классическое поле, $-Ze$ — заряд рассеивателя. В низшем порядке теории возмущений по внешнему

полно для T -амплитуды имеем

$$T_{p'p}^{\sigma'\sigma} = -e\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \bar{u}^{\sigma'}(p') \gamma_\mu u^\sigma(p) \equiv \bar{u}_\alpha^{\sigma'}(p') M^{\alpha\beta} u_\beta^\sigma(p), \quad (2.6)$$

где $\tilde{A}_0^{\text{ext}}(\mathbf{k}) = -Ze/|\mathbf{k}|^2$, σ фиксирует спиновое состояние электрона. Равенство (2.6) определяет \hat{M} -матрицу.

Переход к процессам с излучением фотона налетающей (in) или рассеянной (out) частицами сводится к умножению \hat{M} соответственно справа или слева на матрицы

$$\frac{i}{\hat{p} - \hat{q} - m + i0} (-ie\hat{\varepsilon}^{\lambda*}(q)), \quad (-ie\hat{\varepsilon}^{\lambda*}(q)) \frac{i}{\hat{p}' + \hat{q} - m + i0}, \quad (2.7)$$

где $\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_\mu \gamma_\mu$, $\varepsilon_\mu^{\lambda*}$ описывает поляризацию фотона, $\varepsilon\varepsilon^* = -1$, $q\varepsilon(q) = 0$. Принимая во внимание равенства $p^2 = m^2$, $q^2 = 0$, в пределе при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ для матриц (2.7) имеем $e(\hat{p} + m)\hat{\varepsilon}^*/(-2pq + i0)$, $e\hat{\varepsilon}^*(\hat{p}' + m)/(2p'q + i0)$. Учитывая в формуле (2.6), что $(\hat{p} + m)\gamma_\mu u(p) = 2p_\mu u(p)$, $\bar{u}(p')\gamma_\mu(\hat{p}' + m) = \bar{u}(p') \cdot 2p'_\mu$, получаем выражения для множителей, отвечающих излучению мягких фотонов соответственно налетающей и рассеянной частицами: $-ep\varepsilon^{\lambda*}/(pq - i0)$, $ep'\varepsilon^{\lambda*}/(p'q + i0)$. Таким образом, излучение мягкого фотона описывается амплитудой

$$T_{p'+q,p}^{\lambda,\sigma'\sigma} = T_{p'p}^{\sigma'\sigma} j\varepsilon^{\lambda*}(q), \quad j_\mu(q) = \frac{ep'_\mu}{p'q + i0} + \frac{-ep_\mu}{pq - i0}. \quad (2.8)$$

Отметим, что формула (2.8) справедлива для заряженных полей с любым спином: излучение мягких фотонов зависит лишь от заряда излучателя [45], что для бозе-полей следует из выражения для электрического тока $j_\mu = ie\phi^* \partial_0 \phi$, а для ферми-полей — из коммутационных свойств спиновых матриц [17]. отождествление суммы в (2.8) с током не случайно. В классической физике 4-вектор тока заряженной частицы есть $j_\mu^{\text{cl}}(x, p) = ev_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$, $v_\mu = p_\mu/E_p$. Очевидно,

$$j_\mu^{\text{cl}}(x, p) \equiv j_{\mu p}^{\text{cl}}(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u_\mu \delta^4(x - u\tau), \quad u_\mu = \frac{p_\mu}{m}. \quad (2.9)$$

Если $u = u(\tau)$, то (2.9) есть ток перехода; предполагается, что уравнение $t = E_p(\tau)\tau/m$ имеет лишь одно вещественное решение $\tau = tm/E_p$.

В нашем случае $u_\mu(\tau) = u_\mu$ при $\tau < 0$, $u_\mu(\tau) = u'_\mu$ при $\tau > 0$, причем

$$\int_{-\infty}^0 d\tau eu_\mu \delta(x - u\tau) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) \frac{-ieu_\mu}{qu - i0},$$

$$\int_0^{\infty} d\tau eu'_\mu \delta(x - u'\tau) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) \frac{ieu'_\mu}{qu' + i0}.$$

Поэтому

$$j_{\mu p}^{\text{cl}}(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) j_\mu^{\text{cl}}(q) =$$

$$= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) \left[\frac{ieu'_\mu}{qu' + i0} + \frac{-ieu_\mu}{qu - i0} \right] \equiv$$

$$\equiv i(j_\mu^+(x, p') + j_\mu^-(x, p)), \quad (2.10)$$

$$j_\mu^\pm(x, p)\theta(\mp t) = 0, \quad j_\mu^{\text{cl}}(q) = ij_\mu(q),$$

т.е. $j_\mu^+(x, p) = 0$ при $t < 0$, а $j_\mu^-(x, p) = 0$ при $t > 0$. С точностью до множителя i ток (2.8) совпадает с током

классической заряженной частицы $j_\mu^{\text{cl}}(q)$ при $q^2 = 0$, движущейся при $t < 0$ со скоростью \mathbf{v} , а при $t > 0$ — со скоростью \mathbf{v}' .

Итак, в полном согласии с утверждением Блоха и Нордсика [19] излучение мягких фотонов определяется классическим током частицы. Но мягкие фотоны могут излучаться не только свободными частицами, но и виртуальными, т.е. фотонные линии могут исходить не только из внешних линий заряженных частиц, но и из внутренних. Амплитуды излучения этих последних, в отличие от (2.8), конечны при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ (пропагатор виртуальной заряженной частицы не имеет особенности $1/qp$). Они не ведут к появлению расходимостей [14, 17] и в дальнейшем не учитываются (понятие "внешняя линия" уточняется в начале раздела 2.1.3).

Нетрудно выписать амплитуду вероятности излучения N фотонов (рис. 1). Множитель, связанный с испусканием инфракрасного фотона можно записать в виде $enp_\mu/(pq + i\eta 0)$, где $\eta = -1(+1)$, если излучает падающая (рассеянная) частица. В случае излучения двух фотонов последовательно с импульсами q_1, q_2 имеем

$$\frac{enp_\mu}{pq_1 + i\eta 0} \frac{enp_\nu}{p(q_1 + q_2) + i\eta 0}. \quad (2.11)$$

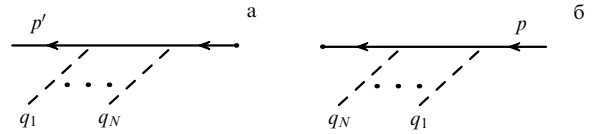


Рис. 1. Излучение инфракрасных фотонов рассеянной (а) и налетающей (б) частицами.

Фотоны могут излучаться в другой последовательности; поэтому к (2.11) следует добавить такое же выражение с заменой $q_1 \leftrightarrow q_2$. В итоге получаем фактор

$$\frac{enp_\mu}{pq_1 + i\eta 0} \frac{enp_\nu}{pq_2 + i\eta 0}.$$

Теперь, используя элементарное тождество

$$\sum \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_1 + a_2} \dots \frac{1}{a_1 + \dots + a_N} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N}, \quad (2.12)$$

в котором суммирование ведется по всем перестановкам a_1, \dots, a_N , находим, что излучение in- или out-частицей N фотонов с импульсами q_1, \dots, q_N влечет появление множителя

$$\frac{enp_{\mu_1}}{pq_1 + i\eta 0} \dots \frac{enp_{\mu_N}}{pq_N + i\eta 0}. \quad (2.13)$$

Важнейшее нетривиальное свойство излучения мягких фотонов — факторизация их вкладов. Отметим, что она имеет место лишь в пределе при $q \rightarrow 0$, ибо только в этом пределе справедлива замена $\gamma_\mu \rightarrow 2p_\mu$, т.е. можно пренебречь некоммутативностью матриц γ_μ . Отметим также, что переход к неабелевым теориям (например, к хромодинамике) ведет к появлению некоммутирующих матриц \hat{T}_a — генераторов соответствующей калибровочной группы; в этом случае простое выражение (2.13) не годится.

Фотоны, однако, не обязательно излучаются только in- или только out-частицами: каждая может излучать лишь часть их общего числа. Например, для $N = 2$, используя тождество

$$\frac{1}{a_1' a_2'} + \frac{1}{a_1' a_2} + \frac{1}{a_2' a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} = \left(\frac{1}{a_1'} + \frac{1}{a_1} \right) \left(\frac{1}{a_2'} + \frac{1}{a_2} \right),$$

вместо (2.8) получаем

$$T = T_0 j_1 \varepsilon_1^* j_2 \varepsilon_2^*,$$

$$j_{i\mu} = \frac{e p_\mu'}{p' q_i + i0} - \frac{e p_\mu}{p q_i - i0} \equiv \sum_a \frac{e_a \eta_a p_\mu^a}{p^a q_i + i \eta_a 0}, \quad (2.14)$$

где T_0 — амплитуда основного (жесткого) процесса. Несложно убедиться, что для произвольного N имеет место формула

$$T = T_0 j_1 \varepsilon_1^* \dots j_N \varepsilon_N^*, \quad (2.15)$$

т.е. фотоны излучаются независимо.

Обобщение на произвольный процесс. Формулы, полученные для рассеяния на кулоновом потенциале, легко обобщаются на произвольный процесс. Действительно, формула (2.8) верна для процесса с произвольным числом заряженных частиц, если записать ток с помощью знакового множителя η , как в (2.14), распространив сумму на все заряженные частицы в начальном и конечном состояниях:

$$j_\mu(q, p) \equiv \sum_a \frac{e_a \eta_a p_\mu^a}{p^a q + i \eta_a 0} \equiv \sum_{a(\text{out})} \frac{e_a p_\mu^a}{p'^a q + i0} - \sum_{a(\text{in})} \frac{e_a p_\mu^a}{p^a q - i0} \equiv j_\mu^+(q, p') + j_\mu^-(q, p). \quad (2.16)$$

Такая запись охватывает не только процессы рассеяния, но и процессы аннигиляции и рождения пар. Токи j_μ^\pm в (2.16) зависят теперь от совокупностей импульсов $\{p'\}, \{p\}$.

Легко видеть, что из закона сохранения заряда следует сохранение тока [17]:

$$j_\mu(q, p) q_\mu = \sum_a e_a \eta_a = \sum_{\text{out}} e_a - \sum_{\text{in}} e_a = 0. \quad (2.17)$$

Этого достаточно для замены в формуле (2.15) тока (2.14) на ток (2.16). Только в качестве T_0 будет фигурировать не функция (2.6), а амплитуда изучаемого процесса. Таким образом, факторизация амплитуды излучения N инфракрасных фотонов имеет место в общем случае. Равенство (2.15) означает, что подобные фотоны испускаются независимо от основного процесса и независимо друг от друга, т.е. вероятности их излучения должны даваться формулой Пуассона. Этого нет в неабелевых теориях ввиду некоммутативности генераторов \hat{T}_a .

Вероятности излучения реальных инфракрасных фотонов. Согласно (2.8) для плотности вероятности излучения право- или левополяризованного фотона (в принятом приближении) имеем

$$\frac{dP_q}{d\mu(q)} = \sum_{\pm} |j\varepsilon^\pm|^2 = -j_\mu(q) j_\mu^*(q)$$

(см. (6.1)). Подсчитаем плотность вероятности рассеяния с суммарной потерей энергии за счет инфракрасного

излучения $\sum \omega_i \leq E$. Используя формулу

$$\theta(E, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin E\tau}{\tau} \exp(i\omega\tau), \quad E > 0, \quad \omega > 0$$

(эта функция четна по ω и нечетна по E ; при $E > 0, \omega > 0$ она идентична $\theta(E - \omega)$), для искомой плотности получаем

$$P_E = |T_0|^2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \int_{\lambda}^E \sum_{\lambda_i} (j(q_i) \varepsilon^{\lambda_i*}) (\varepsilon^{\lambda_i} j^*(q_i)) \times$$

$$\times \theta\left(E, \sum \omega_j\right) d\mu(q_i) =$$

$$= |T_0|^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin E\tau}{\tau} \times$$

$$\times \exp \left[- \int_{\lambda}^E j_\nu(q) j_\nu(q)^* \exp(i\tau\omega) d\mu(q) \right]. \quad (2.18)$$

Здесь пределы относятся к интегралам по $\omega_i = |\mathbf{q}_i|$. Законность интегрирования по всем ω_i вплоть до E на верхнем пределе гарантируется θ -функцией. Фактор $1/N!$ учитывает редукцию фазового пространства вследствие неразличимости фотонов. В (2.18) использована формула суммирования по поляризациям (6.1) и закон сохранения тока (2.17) ($\lambda_\mu = q_\mu/\omega$).

Запишем показатель экспоненты в (2.18) в виде

$$[\dots] \equiv N_\tau(E, \lambda) = A \int_{\lambda}^E \frac{d\omega}{\omega} \exp(i\omega\tau) =$$

$$= A \left(\ln \frac{E}{\lambda} + \int_{\lambda}^E d\omega \frac{\exp(i\omega\tau) - 1}{\omega} \right) \equiv$$

$$\equiv N_0(E, \lambda) + N'_\tau(E, \lambda), \quad (2.19)$$

где

$$A = - \sum_{ab} \frac{e_a \eta_a e_b \eta_b (p_a p_b)}{2(2\pi)^3 E_a E_b} \int d\mathbf{n} \frac{1}{(1 - \mathbf{v}_a \mathbf{n})(1 - \mathbf{v}_b \mathbf{n})} \equiv$$

$$\equiv - \sum_{ab} e_a \eta_a e_b \eta_b \Phi(v_{ab}),$$

$$\Phi(v_{ab}) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{v_{ab}} \ln \frac{1 + v_{ab}}{1 - v_{ab}}, \quad v_{ab}^2 = 1 - \frac{m_a^2 m_b^2}{(p_a p_b)^2}. \quad (2.20)$$

В системе покоя одной из частиц интеграл (2.20) вычисляется элементарно, а инвариантный параметр v_{ab} в этом случае есть скорость второй частицы. Из (2.18)–(2.20) (если взять $\tau = 0$) легко видеть, что для двух и более частиц $A > 0$; поэтому $P_E \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$. Появление в (2.19) обозначения $N_\tau(E, \lambda)$ связано со следующим обстоятельством. Опуская в первом равенстве (2.18) θ -функцию и обозначая

$$N_0(E, \lambda) = \sum_{\pm} \int_{\lambda}^E |j\varepsilon^\pm|^2 d\mu(q) \equiv \bar{N}(E, \lambda),$$

закключаем, что в нем берется сумма членов вида $\bar{N}^N/N!$, т.е. вероятность излучения N мягких фотонов с энергиями $\lambda < \omega < E$ дается формулой Пуассона

$$P_N = \frac{\bar{N}^N}{N!} \exp(-\bar{N}), \quad (2.21)$$

где \bar{N} — среднее число излученных фотонов ($\bar{N} = \sum N P_N$).

В формуле (2.18) отсутствует нормировочный множитель $\exp(-\bar{N})$. Это обусловлено тем, что мы приняли во внимание лишь часть диаграмм теории возмущений: вклад виртуальных фотонов не учитывался. Прежде чем заняться его вычислением, отметим, что из формул (2.19), (2.20) выводятся основные черты физики излучения мягких фотонов: 1) среднее число излученных фотонов $\bar{N}(E, \lambda)$ расходится логарифмически при $\lambda \rightarrow 0$; 2) средняя излученная энергия конечна:

$$\bar{E} = \int_{\lambda}^E \omega \frac{dN}{d\omega} d\omega = A \int_{\lambda}^E \omega \frac{d\omega}{\omega} = \int_{\lambda}^E \frac{dE}{d\omega} d\omega,$$

т.е. $dE/d\omega = \text{const}$ при $\omega \rightarrow 0$.

Конечность полной энергии излученных мягких фотонов при неограниченности их среднего числа свидетельствует о некорректности описания данного процесса по теории возмущений. Очевидно, при описании электромагнитного поля необходимо перейти к коллективным переменным, т.е. к состояниям с неопределенным числом фотонов. Согласно (2.21) вероятность излучения конечного числа инфракрасных фотонов равна нулю, ибо $N_0(E, \lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$. Распределение (2.21) имеет смысл, лишь если $E \ll E_p$ (неограниченность резервуара энергии излучающей частицы).

Обратим внимание на следующее. Может показаться, что полная энергия незарегистрированного излучения E в (2.18) совпадает с E_0 — порогом чувствительности аппаратуры, регистрирующей фотоны. Это разные параметры. Экспериментатор, не регистрирующий мягкие фотоны, может обнаружить потерю энергии за счет их излучения. Очевидно, величина параметра E должна быть такой, чтобы были справедливы формулы (2.8), (2.15).

2.1.3. КЭД. Виртуальные инфракрасные фотоны. Инфракрасные расходимости встречаются и при вычислении диаграмм с петлями — при интегрировании по импульсам виртуальных фотонов. Однако не каждый виртуальный фотон порождает расходимости, а лишь связывающий "внешние линии". Здесь необходимо уточнить терминологию. К виртуальным инфракрасным фотонам отнесем фотоны с энергией $\omega \leq \Lambda$, где Λ — некоторый параметр, гарантирующий справедливость формул (2.8), (2.15). Его физический смысл обсуждается ниже. Под внешними линиями будем понимать линии, сопоставляемые частицам на массовой поверхности и частицам, излучившим реальные или виртуальные инфракрасные фотоны. Для придания формулам математического смысла вводят инфракрасную регуляризацию, наделяя фотон массой λ или обрезая снизу интегралы по фотонным импульсам, $|\mathbf{q}| > \lambda$. Мы предпочтем последний способ. Очевидно, $\lambda \ll \Lambda$.

Для того чтобы вычислить вклад N виртуальных инфракрасных фотонов, необходимо амплитуду основного процесса T_0 умножить на фактор

$$\begin{aligned} \frac{1}{N!2^N} \int_{\lambda}^{\Lambda} \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4} \prod_{i=1}^N j_{\mu}(q_i) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q_i^2 + i0} j_{\nu}(-q_i) = \\ = \frac{1}{N!} \left[\frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\Lambda} d^4 q A(q) \right]^N, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$A(q) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{j_{\mu}(q) j_{\mu}(-q)}{q^2 + i0}. \quad (2.23)$$

Поясним коэффициент перед интегралами (2.22). В амплитуде излучения $2N$ реальных инфракрасных фотонов произведем замену $q_{N+i} \rightarrow -q_i$ ($i = 1, \dots, N$), и результат умножим на произведение N фотонных пропагаторов. Это дает подынтегральное выражение (2.22). Исходная амплитуда (2.15) получена суммированием по перестановкам всех $2N$ фотонов. Ясно, что после отождествления $q_{N+i} \equiv -q_i$ перестановка $q_{N+i} \leftrightarrow q_i$ эквивалентна замене импульса виртуального фотона $q_i \rightarrow -q_i$ под интегралом и не дает нового состояния — отсюда множитель 2^{-N} . Фактор $1/N!$ учитывает неразличимость фотонов. В (2.22) указаны пределы интегрирования по $|\mathbf{q}|$; распространение интеграла по q_0 на всю ось вносит погрешность в пределах принятой точности $O(\Lambda/m)$ и во всяком случае не влияет на вероятности.

Суммирование по N дает окончательные формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 &= T_0 \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\Lambda} d^4 q A(q) \right], \\ \frac{|\tilde{T}_0|^2}{|T_0|^2} &= \exp \left[\text{Re} \int_{\lambda}^{\Lambda} d^4 q A(q) \right] = \\ &= \exp \left[- \int_{\lambda}^{\Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \frac{\delta(q^2)}{2} j_{\mu}(q) j_{\mu}(-q) \right] = \\ &= \exp \left[\int_{\lambda}^{\Lambda} d\mu(q) j_{\nu}(q) j_{\nu}^*(q) \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

где \tilde{T}_0 есть амплитуда основного (жесткого) процесса с радиационными поправками от виртуальных инфракрасных фотонов. В (2.24) учтено, что

$$j_{\mu}(-q) = -j_{\mu}^*(q) \quad (2.25)$$

(это равенство тривиализует вычисление $\text{Re } A(q)$). Убеждаемся, что в показателе экспоненты (2.24) стоит $-N_0(\Lambda, \lambda) = -\bar{N}(\Lambda, \lambda)$ (см. (2.19), $N'_0 = 0$).

Подставляя в (2.18) $|\tilde{T}_0|^2$ вместо $|T_0|^2$, находим плотность вероятности жесткого процесса с потерей энергии E на излучение ($\lambda = 0$, A дается (2.20)) [17]:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_E &= |T_0|^2 b(A) \exp \left[\int_{\Lambda}^E d\mu(q) j_{\nu}(q) j_{\nu}(-q) \right] = \\ &= |T_0|^2 b(A) \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^A, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} b(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} \exp \left[A \int_0^1 d\omega \frac{\exp(i\omega\tau) - 1}{\omega} \right] = \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{12} A^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

— стандартная функция [11, 17]. Формула (2.26) воспроизводит судаковский формфактор [46]; например, для e^+e^- -рассеяния имеем $d\sigma = d\sigma_0 \exp[(2\alpha/\pi) \ln(s/m^2) \times \ln(E/\Lambda)]$. Из (2.26) видно, что вероятность процесса T_0 с излучением энергии $\sum \omega_i \leq E$ конечна и не зависит от нефизического параметра обрезания λ . Но появился

новый параметр Λ . В [11] он выбирался равным E , в [17] его рекомендовалось приравнять характерной массе процесса.

В действительности смысл параметра Λ прост. Формула (2.26) фактически свидетельствует о том, что фотоны с энергиями $\omega < \Lambda$ не излучаются, а расходимости, связанные с излучением реальных мягких фотонов, сокращаются с расходимостями от виртуальных инфракрасных фотонов. Для каких Λ это верно? Вспомним, что реально каждый эксперимент ограничен во времени, т.е. длится в течение некоторого времени T . В силу соотношения неопределенностей фотоны с энергией $\omega < 1/T$ не могут быть отнесены ни к реальным, ни к виртуальным инфракрасным фотонам: их судьба определится лишь по истечении времени $t > \omega^{-1} > T$. Следовательно, они вообще не могут влиять на результат эксперимента.

Таким образом,

$$\Lambda \sim T^{-1}. \quad (2.28)$$

В случае короткодействующих сил было бы разумно считать $T^{-1} \sim m$, что соответствовало бы рекомендации [17]. Но в электродинамике следует, очевидно, ожидать $\Lambda < m$. Впрочем, нужно иметь в виду, что зависимость от этих параметров логарифмическая, т.е. слабая.

Важно и то, что поправочный фактор в (2.26) есть бесконечный ряд по степеням α ; следовательно, и T_0 в (2.26) нужно вычислять с той же точностью. Но тогда T_0 необходимо заменить на амплитуду $T_{0\Lambda}$, в которой учтены поправки от виртуальных фотонов с энергиями $\omega > \Lambda$. В принципе, из $T_{0\Lambda}$ можно выделить фактор, отвечающий вкладу фотонов с энергиями $E_0 > \omega > \Lambda$ (или $E > \omega > \Lambda$), при условии, что формулы типа (2.15) все еще остаются в силе. Это приведет к замене в (2.26) $\Lambda \rightarrow E_0$, $T_0 \rightarrow T_{0E_0}$ (или $\Lambda \rightarrow E$, $T_0 \rightarrow T_{0E}$).

Итак, из четырех параметров λ , Λ , E_0 , E , фигурировавших выше, λ является вспомогательным параметром, выпадающим из окончательных формул, Λ характеризует экспериментальную установку (фотоны с частотами $\omega \leq \Lambda$ не излучаются), параметр $E_0 \gg \Lambda$ определяет разрешающую способность аппаратуры (фотоны с энергиями $\omega \leq E_0$ не регистрируются), E в (2.18), (2.26) есть энергия, уносимая нерегистрируемым излучением.

2.2. Гравитация

2.2.1. Лагранжиан взаимодействия и пропагатор гравитона. Хотя общая теория относительности (ОТО) является достаточно сложной дисциплиной, а гравитационный гамильтониан радикально отличается от электромагнитного, проделанный анализ почти полностью переносится на теорию тяготения. Изменения имеют чисто кинематический характер и связаны с тем обстоятельством, что спин гравитона равен двум, т.е. в диаграммах ОТО по сравнению с КЭД необходимо изменить вершинные функции и пропагаторы [17]. Однако, чтобы прийти к такому заключению, требуется проделать определенную работу. Остановимся лишь на некоторых принципиальных моментах.

Лагранжиан спинорного и гравитационного полей записывается в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\bar{\psi} (i\gamma_\mu(x) D_\mu - m) \psi + \frac{1}{\kappa^2} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma) \right] \equiv \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{гр}}, \quad (2.29)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - (1/4) \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g^{\lambda\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma$, $[\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)]_+ = 2g_{\mu\nu}(x)$, $\gamma_\mu(x) = \gamma_\alpha e_\mu^\alpha(x)$, $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_+ = 2\eta_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta} e_\mu^\alpha(x) e_\nu^\beta(x) = 2g_{\mu\nu}(x)$ (т.е. $e_\mu^\alpha(x)$ — тетрада, $\eta_{\alpha\beta}$ — метрика пространства Минковского), $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = (1/2) g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ — символы Кристоффеля. Поле гравитонов $h_{\mu\nu}$ определяется равенством $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$, $\kappa^2 = 8\pi G$, G — постоянная Ньютона ($V = Gm_1 m_2 / r$). Уравнение Дирака в гравитационном поле было получено еще Фоком и Вейлем [47, 48].

Легко видеть, что в стандартной калибровке с фиксатором $\mathcal{L}_F = (1/2) [\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})]^2$ (аналог калибровки Фейнмана; условие $\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$ фиксирует гармонические координаты) разложение \mathcal{L} по степеням κh имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial_\mu - i\kappa h_{\mu\nu} \gamma_\mu \partial_\nu - m + O(h^2)] \psi + \frac{1}{8} [\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial_\lambda h_{\rho\sigma} g_{\mu\nu\rho\sigma} + \dots] + \mathcal{L}_{\text{gh}}. \quad (2.30)$$

Здесь свертывание по индексам одинаковой вариантности производится с тензором $\eta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}$, \mathcal{L}_{gh} — лагранжиан фиктивных полей. Из (2.30) получаем выражения для трехчастичной вершины и пропагатора гравитона:

$$\kappa \gamma_\mu p_\nu, \quad \frac{1}{2} \frac{i g_{\mu\nu\rho\sigma}}{q^2 + i0} \quad (2.31)$$

(вместо $e\gamma_\mu$ и $-ig_{\mu\nu}/(q^2 + i0)$ в КЭД). Главной особенностью лагранжиана (2.30) является, во-первых, появление вершин вида $\bar{\psi} \gamma \partial \psi (\kappa h)^n$, $n \geq 2$, и, во-вторых, вершин вида $(\partial h)^2 (\kappa h)^n$, $n \geq 1$, описывающих самодействие частиц со спином 2. Другими словами, теория невообразимо усложняется.

Оказывается, однако, что для описания процессов с мягкими гравитонами достаточно учесть только выписанные члены. Действительно, фиктивные бозе-поля с аномальной статистикой не ведут к появлению инфракрасных расходимостей [49], поскольку они проявляются лишь в петлях (к расходимостям ведет лишь излучение из внешних линий, т.е. лишь излучение свободных частиц). Далее, чем больше гравитонов содержит вершина, тем быстрее убывает соответствующее слагаемое в гамильтониане взаимодействия: из теории асимптотических разложений известно [50], что чем больше кратность интеграла Фурье, тем быстрее при прочих равных условиях он убывает. Следовательно, вершинами с более чем одним гравитоном можно пренебречь (см. также раздел 6.3).

Наконец, взаимодействие гравитонов с безмассовыми полями (а значит, и самодействие гравитонов) не ведет к дополнительным коллинеарным расходимостям [17], и здесь достаточно принять во внимание лишь тройные вершины. Последние же в длинноволновом приближении имеют универсальный вид, не зависящий от спина "поля материи", поэтому их анализ сводится к изучению основного процесса с вершинами (2.31) в пределе при $m \rightarrow 0$.

2.2.2. Инфракрасные расходимости в гравитации. Массивные частицы. Из раздела 2.2.1 ясно, что переход от КЭД к гравитации в теории длинноволнового излучения связан с заменами тока перехода

$$j_\mu(q, p) \rightarrow j_{\mu\nu}(q, p) = \kappa \sum_a \frac{\eta_{a\mu} p_a^\mu p_a^\nu}{p_a^\mu q + i\eta_a 0} \quad (2.32)$$

и вектора поляризации $\varepsilon_\mu^\lambda(q) \rightarrow \varepsilon_{\mu\nu}^h(q)$, $h = \pm 2$. Поэтому амплитуда излучения мягкого гравитона получается из (2.8) заменой (2.32):

$$T' = T j_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}^*(q). \quad (2.33)$$

Амплитуда излучения N гравитонов записывается аналогично (2.15). Формула для вклада N виртуальных гравитонов выглядит аналогично (2.22) с учетом указанных изменений, т.е. с заменой $A(q) \rightarrow B(q)$:

$$B(q) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \frac{j_{\mu\nu}(q) g_{\mu\nu\rho\sigma} j_{\rho\sigma}(-q)}{q^2 + i0} = \frac{i\kappa^2}{(2\pi)^4} \sum_{ab} \frac{\eta_a \eta_b [(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 / 2]}{(p_a q + i\eta_a 0)(p_b q + i\eta_b 0)(q^2 + i0)}. \quad (2.34)$$

Вещественная часть интеграла $\int dq B$ отличается от таковой $\int dq A$ лишь коэффициентами при стандартной функции (2.20) $\Phi(v_{ab})$, а в формуле (2.26) совершается замена A (см. (2.20)) на

$$B = -\kappa^2 \sum_{ab} \frac{\eta_a \eta_b [(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 / 2]}{p_a p_b} \Phi(v_{ab}) = -\frac{\kappa^2}{2} \sum_{ab} \eta_a \eta_b m_a m_b \frac{1 + v_{ab}^2}{(1 - v_{ab}^2)^{1/2}} \Phi(v_{ab}). \quad (2.35)$$

Таким образом, ситуация с инфракрасными расходимостями в гравитации полностью аналогична положению в КЭД: суммирование по состояниям инфракрасных гравитонов в начальном и конечном состояниях ведет к инфракрасно-регулярным выражениям для вероятностей и сечений процессов.

Безмассовые частицы. Из (2.35) легко получить упоминавшееся в разделе 2.2.1 утверждение [17], что стремление к нулю масс жестких частиц, в отличие от КЭД, не ведет к дополнительным коллинеарным расходимостям. Действительно, пусть $m_a = M_a \xi^{r_a}$, где M_a — некоторые массы, ξ — параметр, $r_a \geq 0$. При $\xi \rightarrow 0$ массы m_a стремятся к нулю по разным законам; полагая, например, $r_a = 0$, мы оставляем массу m_a конечной.

Выделим в (2.35) при $\xi \rightarrow 0$ две частичные суммы:

$$1) a \neq b, \quad v_{ab} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{v_{ab}} \ln \frac{1 + v_{ab}}{1 - v_{ab}} \rightarrow \ln \frac{4(p_a p_b)^2}{m_a^2 m_b^2},$$

$$2) a = b, \quad v_{aa} = 0, \quad \frac{1}{v_{aa}} \ln \frac{1 + v_{aa}}{1 - v_{aa}} \rightarrow 2,$$

где $v_{ab} = (1 - m_a^2 m_b^2 / (p_a p_b)^2)^{1/2}$.

Учитывая, что $\ln [4(p_a p_a)^2 / m_a^4] = \ln 4$, имеем

$$B|_{m_a \rightarrow 0} = -\frac{\kappa^2}{8\pi^2} \sum_{ab} \eta_a \eta_b (p_a p_b) \left[\ln \frac{4(p_a p_b)^2}{m_a^2 m_b^2} + \delta^{ab} (2 - \ln 4) \right]. \quad (2.36)$$

При $r_a > 0$ вклад второго слагаемого в квадратных скобках равен нулю, поэтому

$$B \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} -\frac{\kappa^2}{8\pi^2} \sum_{ab} \eta_a \eta_b (p_a p_b) \left[\ln \frac{4(p_a p_b)^2}{M_a^2 M_b^2} - \ln \xi^{2(r_a + r_b)} \right], \quad (2.37)$$

и логарифмически расходящийся при $\xi \rightarrow 0$ член исчезает ввиду сохранения 4-импульса $\sum \eta_a p_a = 0$. (Этот прием не

проходит в КЭД и КХД, поскольку в данном случае роль e^2 и g^2 играет $\kappa^2 p^2$.)

Таким образом, стремление к нулю нескольких или всех масс гравитирующих полей не порождает коллинеарных расходимостей (в согласии с результатами раздела 6.3). Если же все кванты мягкие, то в длинноволновом пределе теория безмассовых гравитирующих полей свободна как от инфракрасных, так и от коллинеарных расходимостей (без учета самодействия "полей материи"): заменяя в (2.37) $p \rightarrow \xi p$, находим, что $B \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Первые отсутствуют ввиду исчезновения их эффективного взаимодействия с гравитонами (в этом пределе постоянная взаимодействия пропорциональна $E_p \rightarrow 0$), вторые — ввиду пропорциональности амплитуд излучения гравитонов θ^2 , где θ — угол излучения (см. раздел 6.3).

3. Инфракрасные расходимости.

Метод переопределения оператора рассеяния

Анализ раздела 2.1 выявил исключительно простую структуру механизма излучения мягких фотонов. Это наводит на мысль, что длинноволновая область КЭД допускает описание в рамках более простого и более общего формализма, нежели теория возмущений. Основной результат анализа: для описания процессов с участием инфракрасных фотонов достаточно учесть взаимодействие электромагнитного поля с классическим током [19]. Но КЭД с классическим током есть точно решаемая модель (см., например, [51]). Принимая во внимание особенности рассеяния на кулоновом потенциале (см. раздел 2.1.1), а именно необходимость учитывать его влияние на сколь угодно больших расстояниях, можно ожидать аналогичного эффекта и в квантовой теории поля. В данном разделе эта программа реализуется в КЭД и КХД.

3.1. Квантовая электродинамика

3.1.1. Квантовая механика. Рассеяние на кулоновом потенциале. Согласно формуле (2.2) S -матрица не определена для медленно убывающих потенциалов (ввиду появления бесконечно растущих при $t - t' \rightarrow \infty$ фаз). Естественный способ обойти трудность — переопределить оператор рассеяния [18, 30]. По аналогии с тем, как совершался переход от оператора эволюции $\hat{U}_{t,t'}$ к оператору рассеяния $\hat{U}_{t,t'}$ (2.1), переопределим сначала свободный гамильтониан:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}, \quad (3.1)$$

добавив к нему главный член асимптотики потенциала при $r \rightarrow \infty$ (у величин с тильдами крышечку при операторах опускаем).

Например, для кулонова поля в представлении взаимодействия имеем

$$V_I(\mathbf{r}(t)) = \frac{\alpha}{|\hat{\mathbf{p}}t/m + \hat{\mathbf{r}}|} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha m}{|t||\hat{\mathbf{p}}|} = \frac{\alpha m}{|t|(-\Delta)^{1/2}}, \quad (3.2)$$

где Δ — оператор Лапласа; поэтому постулируем

$$\tilde{H}_0 = H_0 + \frac{\alpha m}{|t|(-\Delta)^{1/2}}, \quad \tilde{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|} - \frac{\alpha m}{|t|(-\Delta)^{1/2}}. \quad (3.3)$$

Затем изменим представление взаимодействия ($I \rightarrow \tilde{I}$):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{I}} &= \exp \left[i \int_0^t dt \tilde{H}_0 \right] \hat{\mathbf{r}} \exp \left[-i \int_0^t dt \tilde{H}_0 \right] = \\ &= \hat{\mathbf{r}}_I - \frac{\alpha m \mathbf{p}}{|\hat{\mathbf{p}}|} \epsilon(t) \ln |t|, \quad \hat{\mathbf{p}}_{\tilde{I}} = \hat{\mathbf{p}}_I \end{aligned} \quad (3.4)$$

($\epsilon(t)$ — знаковая функция), а оператор рассеяния (2.1) заменим оператором

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{t,t'} &= \exp(i\tilde{H}_0 t) \exp[-i\tilde{H}(t-t')] \exp(-i\tilde{H}_0 t'), \\ \tilde{S} &= \tilde{U}_{\infty, -\infty}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В [30] показано, что существуют сильные пределы операторов $\tilde{U}_{0,t'}$, $t' \rightarrow -\infty$, $\tilde{U}_{t,0}$, $t \rightarrow \infty$, т.е. доказано существование \tilde{S} -матрицы

$$\tilde{S} = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{V}_{\tilde{I}}(\mathbf{r}(t)) \right]. \quad (3.6)$$

Новый потенциал убывает быстрее, чем $1/t$:

$$\tilde{V}_{\tilde{I}} = \frac{\alpha}{|\hat{\mathbf{r}}_{\tilde{I}}|} - \frac{\alpha m}{|t||\hat{\mathbf{p}}|} = O\left(\frac{\ln |t|}{t^2}\right). \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что интеграл в (3.6) сходится.

Переопределив оператор рассеяния, мы избавились от несущественной логарифмически расходящейся фазы, расчистив тем самым путь к математически корректной теории рассеяния. В [52] указывалось, что изложенный метод пригоден и для более медленно убывающих потенциалов (как $r^{-\mu}$, $\mu \geq 3/4$). Там же отмечалось, что новый оператор \tilde{S} определен с точностью до некоторого унитарного оператора (следствие того, что фактически из бесконечности вычиталась бесконечность).

Последнее обстоятельство существенно для интерпретации формул (3.4)–(3.7), поскольку следует определить соответствующие интегралы в нуле, например интегрировать в пределах $[t_0, t]$, $t_0 > 0$. При этом логарифм в (3.4) заменится на $\ln |t|/t_0$. Это и есть проявление отмеченной неоднозначности. Она не влияет на физику. Изложенная идея работает и в квантовой теории поля [18, 26].

3.1.2. КЭД. Произвольный процесс. *Эффективный гамильтониан взаимодействия.* Следуя идеям раздела 3.1.1, найдем асимптотику гамильтониана взаимодействия при $|t| \rightarrow \infty$ [18]. Подставляя в него фермионные операторы $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}$, где $\psi^{(+)}$ ($\bar{\psi}^{(+)}$) содержит оператор уничтожения электрона (позитрона), получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(t) &= e \int d^3x \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A_{\mu} = e \int d^3x [\bar{\psi}^{(+)} \gamma_{\mu} \psi^{(+)} + \\ &+ \bar{\psi}^{(-)} \gamma_{\mu} \psi^{(-)} + \bar{\psi}^{(+)} \gamma_{\mu} \psi^{(-)} + \bar{\psi}^{(-)} \gamma_{\mu} \psi^{(+)}] A_{\mu}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Интегралы от соответствующих слагаемых в (3.8) будем обозначать $H_{\text{int}}^{\pm\pm}$.

Для выяснения существа дела достаточно изучить асимптотики H_{int}^{++} и H_{int}^{--} . Используя в них разложения

(1.5), (1.6) и интегрируя по координатам, находим

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}^{++} &= (2\pi)^3 e \int d\mu(p', p, q) b_{\sigma'}(p') a_{\sigma}(p) \bar{v}^{\sigma'}(p') \gamma_{\mu} u^{\sigma}(p) \times \\ &\times [\exp(-i(E_{p'} + E_p + \omega)t) \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p} + \mathbf{q}) c_{\mu}(q) + \\ &+ \exp(-i(E_{p'} + E_p - \omega)t) \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p} - \mathbf{q}) c_{\mu}^{+}(q)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}^{--} &= (2\pi)^3 e \int d\mu(p', p, q) b_{\sigma'}(p') b_{\sigma}^{+}(p) \bar{v}^{\sigma'}(p') \gamma_{\mu} v^{\sigma}(p) \times \\ &\times [\exp(-i(E_{p'} - E_p + \omega)t) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{q}) c_{\mu}(q) + \\ &+ \exp(-i(E_{p'} - E_p - \omega)t) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) c_{\mu}^{+}(q)], \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $c_{\mu} = c_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{\lambda}$, $d\mu(p', p, q)$ есть произведение соответствующих одночастичных мер, $\omega = |\mathbf{q}|$. Асимптотики подобных выражений при $|t| \rightarrow \infty$ определяются особыми точками подынтегральных функций и стационарными точками показателей экспонент [50]. Интегрируя в (3.9), (3.10) по \mathbf{p}' , приходим к функциям импульсов в экспонентах (здесь $E_p \equiv E_p$)

$$f_{++} = E_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}} + E_p \pm \omega, \quad f_{+-} = E_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}} - E_p \mp \omega. \quad (3.11)$$

Найдем асимптотику интегралов по \mathbf{p} при $|t| \rightarrow \infty$. Стационарные точки функций (3.11) определяются уравнениями

$$\nabla_{\mathbf{p}} f_{++} = \frac{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}}{E_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}}} + \frac{\mathbf{p}}{E_p} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{p}} f_{+-} = \frac{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}}{E_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}}} - \frac{\mathbf{p}}{E_p} = 0. \quad (3.12)$$

При $m \neq 0$ первое уравнение имеет решения $\mathbf{q} = \mp 2\mathbf{p}$, второе — произвольное \mathbf{p} при $\mathbf{q} = 0$. Согласно (3.11) первое уравнение при $|t| \rightarrow \infty$ дает быстро осциллирующую экспоненту, т.е. в этом случае преобладает асимптотика слагаемого (3.10).

Итак, в массивной электродинамике из двух членов H_{int}^{++} и H_{int}^{--} главный вклад в асимптотику H_{int} (3.8) дает слагаемое (3.10). Это связано с тем, что в экспонентах H^{+-} фигурирует разность $E_{p'} - E_p$, т.е. (3.10) описывает процессы излучения и поглощения фотонов позитронами. Напротив, слагаемое (3.9) содержит в экспонентах сумму $E_{p'} + E_p$, что отвечает аннигиляции пары электрон–позитрон. Очевидно, энергия фотона в этом случае не может быть меньше $2m$. Ясно, что из оставшихся двух членов H^{--} и H^{++} главный вклад в асимптотику дает последний, описывающий процессы излучения и поглощения фотонов электроном:

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}^{+-} &= (2\pi)^3 e \int d\mu(p', p, q) a_{\sigma'}^{+}(p') a_{\sigma}(p) \bar{u}^{\sigma'}(p') \gamma_{\mu} u^{\sigma}(p) \times \\ &\times [\exp(i(E_{p'} - E_p - \omega)t) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) c_{\mu}(q) + \\ &+ \exp(i(E_{p'} - E_p + \omega)t) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{q}) c_{\mu}^{+}(q)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Итак, $H_{\text{int}} \sim H_{\text{int}}^{+-} + H_{\text{int}}^{--}$ при $|t| \rightarrow \infty$. В окрестности критической точки ($\mathbf{q} \rightarrow 0$) имеем

$$E_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}} - E_p \mp \omega \approx E_p \left(1 \pm \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}}{E_p^2}\right) - E_p \mp \omega = \mp \frac{pq}{E_p}. \quad (3.14)$$

В выражениях (3.10), (3.13) после интегрирования по \mathbf{p}' проделаем следующие операции:

1) в коэффициентах при квадратных скобках положим $\mathbf{q} = 0$ (подынтегральная функция берется в критической точке [50]);

2) пользуясь тождествами Гордона $P_\mu = \pm 2m\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}q_\nu + (\hat{p}' \mp m)\gamma_\mu + \gamma_\mu(\hat{p} \mp m)$, где $P = p' + p$, $q = p' - p$, $\sigma_{\mu\nu} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, и условиями ортогональности $\bar{u}^{\sigma'}(p)u^\sigma(p) = 2m\delta^{\sigma'\sigma}$, $\bar{v}^{\sigma'}(p)v^\sigma(p) = -2m\delta^{\sigma'\sigma}$, совершив замены $\bar{u}^{\sigma'}(p')\gamma_\mu u^\sigma(p) \rightarrow \delta^{\sigma'\sigma} \cdot 2p_\mu$, $\bar{v}^{\sigma'}(p')\gamma_\mu v^\sigma(p) \rightarrow \delta^{\sigma'\sigma} \cdot 2p_\mu$;

3) в интеграле по \mathbf{q} ограничимся областью $|\mathbf{q}| < Q$ — подставим в (3.10), (3.13) функцию $\theta(Q - |\mathbf{q}|)$, где $Q \leq E_0$ (выделяется область инфракрасных фотонов).

В результате получаем представление для $H'_{\text{int}} = H_{\text{int}}^{+-} + H_{\text{int}}^{-+}$ в виде

$$\begin{aligned} H'_{\text{int}} &= \int d\mu(p) \frac{p_\mu}{E_p} \hat{\rho}(p) \int_{|\mathbf{q}| < Q} d\mu(q) \left[c_\mu(q) \exp\left(-\frac{ipq}{E_p}\right) + \right. \\ &\quad \left. + c_\mu^+(q) \exp\left(\frac{ipq}{E_p}\right) \right] = \\ &= \int d^3x \int d\mu(p) \frac{p_\mu}{E_p} \hat{\rho}(p) \delta\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{E_p}t\right) \int_{|\mathbf{q}| < Q} d\mu(q) \times \\ &\quad \times [c_\mu(q) \exp(-iqx) + c_\mu^+(q) \exp(iqx)], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\hat{\rho}(p) = e[a_\sigma^+(p)a_\sigma(p) - b_\sigma^+(p)b_\sigma(p)]$$

($qx = \omega t - \mathbf{q}\mathbf{x}$). Вспоминая выражения для тока точечной частицы (2.9), (2.10) и вводя обозначения

$$\hat{j}_\mu(\mathbf{x}, t) = \int d\mu(p) \frac{p_\mu}{E_p} \hat{\rho}(p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \equiv \int d\mu(p) \hat{N}(p) j_\mu(x, p), \quad (3.16)$$

где $j_\mu(x, p) = e(p_\mu/E_p)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$, $e\hat{N}(p) \equiv \hat{\rho}(p)$, и

$$\hat{A}_\mu^Q(x) = \int_{|\mathbf{q}| < Q} d\mu(q) [\hat{c}_\mu(q) \exp(-iqx) + \hat{c}_\mu^+(q) \exp(iqx)], \quad (3.17)$$

записываем (3.15) в окончательном виде:

$$H'_{\text{int}} = \int d^3x \hat{j}_\mu(x) \hat{A}_\mu^Q(x). \quad (3.18)$$

Гамильтониан (3.18) имеет ясный смысл: излучение фотонов малых энергий описывается взаимодействием с "оператором классического тока" $\hat{j}_\mu(x)$. Соответствующее действие обладает свойством калибровочной инвариантности: так как ток $\hat{j}_\mu(x)$ сохраняется ($\partial_\mu j_\mu = 0$), действие $\int d^4x j_\mu A_\mu^Q$ не меняется при замене $A_\mu^Q \rightarrow A_\mu^Q + \partial_\mu \chi$. Состояния с определенным числом заряженных частиц являются собственными векторами оператора \hat{j}_μ :

$$\begin{aligned} \hat{j}_\mu(x)|p\rangle &= \sum_a j_{\mu p}^{(a)}(x)|p\rangle, \\ j_{\mu p}^{(a)}(x) &= e_a \frac{p_\mu^a}{E_p^a} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_a t) = j_\mu^{\text{cl}}(x, p_a). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь суммирование ведется по всем частицам, образующим состояние $|p\rangle$. Замечая, что $p_\mu/E_p = dx_\mu/dt$, отвечающее (3.18) действие для одной частицы можно

записать как

$$\begin{aligned} e \int dt \int d^3x \hat{A}_\mu^Q(x) \frac{dx_\mu}{dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) &= e \int \hat{A}_\mu^Q(x) dx^\mu = \\ &= e \int \hat{A}_\mu^Q(x^{(0)} + u\tau) u_\mu d\tau, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где одномерные интегралы берутся по прямой, задаваемой p_μ , $u_\mu = p_\mu/m$, τ — инвариантное время. Гамильтониан (3.18) описывает эффективное взаимодействие мягких фотонов. Он нарушает закон сохранения импульса, как это бывает в задачах рассеяния на потенциалах или в процессах с участием массивных частиц.

Переопределение оператора рассеяния. Гамильтониан взаимодействия КЭД представим в виде (крышечки при операторах в очевидных случаях опускаем)

$$H_{\text{int}}(t) = H'_{\text{int}} + \int d^3x [e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu - J_\mu A_\mu^Q] \equiv H'_{\text{int}} + \tilde{H}_{\text{int}}, \quad (3.21)$$

и в соответствии с общей идеологией перейдем к новому оператору рассеяния (см. (3.1), (3.5)) и новой S -матрице

$$\tilde{S} = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{H}_{\text{int}}^I \right], \quad (3.22)$$

где значок \tilde{I} указывает на то, что все операторы берутся в новом представлении взаимодействия (далее этот значок будем выписывать лишь в случае необходимости). Последние явным образом выражаются через исходные операторы. Их зависимость от времени определяется теперь оператором $\tilde{H}_0 = H_0 + H'_{\text{int}}$. Оператор \tilde{S} очевидным образом свободен от инфракрасных расходимостей: матричные элементы оператора \tilde{H}_{int} в инфракрасном пределе стремятся к нулю. Впрочем, в этом можно убедиться и прямым вычислением.

Уравнения движения (поляризационные индексы у операторов \hat{a}, \hat{b} опускаем²)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_I^\pm(p, t) &= \pm i (E_p + A_I(p, t)) \hat{a}_I^\pm(p, t), \\ \dot{\hat{b}}_I^\pm(p, t) &= \pm i (E_p - A_I(p, t)) \hat{b}_I^\pm(p, t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{c}}_{\mu I}^\pm(q, t) &= \pm i \left[\omega c_{\mu I}^\pm(q, t) - \right. \\ &\quad \left. - \int d^3x J_{\mu I}(x, t) \exp(\pm i\mathbf{q}\mathbf{x}) \theta(Q - |\mathbf{q}|) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$A(p, t) = \int d^3x A_\mu^Q(x) j_{\mu p}(x), \quad (3.25)$$

переходят в уравнения движения свободных полей при $e \rightarrow 0$ и легко интегрируются. Учитывая, что при $t = 0$ все представления совпадают, имеем (T символизирует упорядочение по времени)

$$\begin{aligned} \hat{a}_I^\pm(p, t) &= T \exp \left[\pm i \left(E_p t + \int_0^t A_I(p, t) dt \right) \right] \hat{a}^\pm(p), \\ \hat{b}_I^\pm(p, t) &= T \exp \left[\pm i \left(E_p t - \int_0^t A_I(p, t) dt \right) \right] \hat{b}^\pm(p), \end{aligned} \quad (3.26)$$

² У операторов a, b, c иногда удобно ставить знак "-": $\hat{a}^-(p)$ и т.д.

$$c_{\mu l}^{\pm}(q, t) = \exp(\pm i\omega t) \left[c_{\mu}^{\pm}(q) \mp i \int_0^t dt \int d^3x \hat{J}_{\mu}(\mathbf{x}, t) \times \right. \\ \left. \times \exp(\mp i q x) \theta(Q - |\mathbf{q}|) \right]. \quad (3.27)$$

В (3.24), (3.27) выписаны уравнения и решения только для полей A_{μ}^Q . Для полей с $|\mathbf{q}| > Q$ уравнения и решения идентичны соответствующим выражениям для стандартного представления взаимодействия. В формуле (3.27) использовано вытекающее из уравнений (3.15), (3.16), (3.23) равенство $\hat{J}_{\mu}^I = \hat{J}_{\mu}$.

Обсудим полученные результаты. Из представления (3.20) и формул (3.25)–(3.27) вытекает следующее выражение для ферми-поля:

$$\psi_{\tilde{I}}(x) = \int d\mu(p) T \exp \left[-ie \int^x A_{\mu}^Q(y) dy^{\mu} \right] \times \\ \times [\hat{a}_{p,\sigma} u^{\sigma}(p) \exp(-ipx) + \hat{b}_{p,\sigma}^+ v^{\sigma}(p) \exp(ipx)], \\ y^{\mu} = u^{\mu} \tau, \quad dy^{\mu} = u^{\mu} d\tau.$$

Как и при выборе калибровки [53], смысл появления фазы $e \int A_{\mu}^Q dy^{\mu}$ у заряженных полей ("экспоненциации") прост: соответствующие степени свободы поля A_{μ} изымаются из динамики. Согласно анализу в конце раздела кванты с энергиями $\omega < \Lambda$ фактически не излучаются в процессе эксперимента и не влияют на его результат (см. (2.26)), но именно они порождают проблему инфракрасных расходимостей. Теперь их эволюция во времени целиком определяется уравнениями движения для заряженных полей (частиц), которым они сопутствуют. У частицы, движущейся в направлении \mathbf{n} , в калибровке $A_0 = 0$ поле A^Q сосредоточено вне цилиндра с осью \mathbf{n} и радиусом Q^{-1} , $Q \sim \Lambda$ (см. конец раздела).

Операторы рождения и уничтожения в новом представлении обладают теми же перестановочными соотношениями, что и в старом. Именно они порождают in- и out-состояния в новой теории рассеяния. По сравнению со старым представлением взаимодействия у заряженных частиц появляются фазовые множители с показателями

$$\chi_{\text{out}} = \int_0^{\infty} dt \int d^3x A_{\mu}^Q(x) j_{\mu}^{(+)}(x, p), \\ \chi_{\text{in}} = \int_{-\infty}^0 dt \int d^3x A_{\mu}^Q(x) j_{\mu}^{(-)}(x, p), \quad (3.28)$$

где $j_{\mu}^{(\pm)} = i j_{\mu}^{\pm}$, токи определены равенством (2.10). Учитывая их свойства, интегрирование по времени в (3.28) распространим на всю ось.

Разлагая экспоненты в ряды по степеням токов, убеждаемся, что они описывают процессы излучения инфракрасных фотонов in- и out-частицами (ср. (2.8), (2.15)) — следствие того, что в \tilde{I} -представлении заряженные частицы рассматриваются вместе с сопровождающими их инфракрасными фотонами. Далее, токи $j_{\mu}^{(\pm)}(x)$ классические вещественные, поэтому переход от a^{\pm}, b^{\pm} к $\tilde{a}^{\pm}, \tilde{b}^{\pm}$ осуществляется с помощью унитарного оператора (отсюда неизменность перестановочных соотношений). Если, однако, вычислить проекцию старого одночастичного состояния на новое, то получим нуль.

Пусть $\chi^{(\pm)}$ содержат операторы рождения (+) или уничтожения (–) фотонов, т.е. $\chi = \chi^{(+)} + \chi^{(-)}$ (для χ_{in} и

χ_{out}). Тогда для $U_{\chi} \equiv T \exp(i\chi)$ имеем

$$U_{\chi} = \exp(i\chi^{(+)}) \exp(i\chi^{(-)}) \exp \left[-\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \times \right. \\ \left. \times \int d^3x_1 d^3x_2 j_{\mu}^{(+)}(x_1, p) (-g_{\mu\nu}) \Delta_c^Q(x_1 - x_2) j_{\nu}^{(+)}(x_2, p) \right]. \quad (3.29)$$

Здесь $-g_{\mu\nu} \Delta_c^Q$ — пропагатор поля A_{μ}^Q и учтена формула Хори [54] для распутывания T -экспоненты

$$T \exp(ij\varphi) = \exp \left[-\frac{1}{2} j \Delta_c j \right] : \exp(ij\varphi) :, \quad (3.30)$$

где Δ_c есть причинный пропагатор свободного скалярного поля φ и введены сокращенные обозначения $j\varphi \equiv \int dx j(x) \varphi(x)$, $dx = d^4x$ и т.д. Пользуясь определениями (2.8), (2.10), находим показатель последней экспоненты в (3.29):

$$-\frac{1}{2} \int_Q \frac{dq}{(2\pi)^4} j_{\mu}^{(\pm)}(-q) \frac{-i}{q^2 + i0} j_{\mu}^{(\pm)}(q) \equiv -\frac{1}{2} \int_Q d^4q A^{(\pm)}(q) \quad (3.31)$$

(см. (2.23), интегрирование по области $|\mathbf{q}| < Q$).

Удвоенная вещественная часть (3.31) совпадает с показателем экспоненты в (2.24), если в ней опустить значки (\pm) . Легко видеть, что она отрицательна и расходится (см. (2.19), (2.20)):

$$\frac{i}{2} \int_Q \frac{dq}{(2\pi)^4} j_{\mu}^{(\pm)}(-q) (-i \cdot 2\pi) \frac{\delta(q^2)}{2} j_{\mu}^{(\pm)}(q) = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} e_a e_b \int_Q d\mu(q) \frac{p^a p^b}{(p^a q)(p^b q)} = \\ = -\ln \frac{Q}{\lambda} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{2} \Phi(v_{ab}). \quad (3.32)$$

Для одной частицы ($v_{aa} = 0$, $\Phi(0) = 1/4\pi^2$) имеем $-(\alpha/2\pi) \ln(Q/\lambda) \rightarrow -\infty$, $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\int d\mu(p_1, p_2) \psi_1^*(p_1) \psi_2(p_2) \langle 0 | a(p_1) \tilde{a}^+(p_2) | 0 \rangle = \\ = \int d\mu(p) \psi_1^*(p) \psi_2(p) \left(\frac{\lambda}{Q} \right)^{\alpha/2\pi} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (3.33)$$

(поляризационные индексы опущены), т.е. состояния заряженных частиц в представлении \tilde{I} ортогональны таковым в обычном представлении взаимодействия.

Смысл полученного результата прост. Как известно [55], гильбертово пространство квантовой теории поля несепарабельно (множество базисных векторов несчетно). Используемое в стандартной теории возмущений пространство есть сепарабельное гильбертово пространство (пространство Фока). Оператор U_{χ} , порождающий облако мягких фотонов, будучи применен к вектору из пространства Фока, выводит его из этого пространства — отсюда ортогональность (3.33). Это, казалось бы, противоречит формальной унитарности оператора U_{χ} : $U_{\chi}^+ U_{\chi} = 1$. Дело в том, что оператор U_{χ} унитарен в несепарабельном гильбертовом пространстве (пространстве фон Неймана). Пространство Фока является его подпространством [56, 57, 21, 26]. Разобран-

ный пример иллюстрирует теорему фон Неймана [58] о возможности унитарно-неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений в квантовой теории поля (коммутаторы операторов a и \tilde{a} идентичны).

Вместе с тем проясняется смысл сокращения инфракрасных расходимостей в методе теории возмущений: учет вклада виртуальных инфракрасных фотонов порождает множитель, который сокращает соответствующий бесконечный множитель, появляющийся при суммировании по состояниям реальных инфракрасных фотонов — подобно тому, как сокращаются аналогичные множители при вычислении нормы состояния $U_\chi|0\rangle$ (ср. (3.32) и (2.24)). Проясняется и смысл матрицы \tilde{S} : инфракрасные фотоны здесь изъяты из динамики.

Факторизация S -матрицы. Используя идею работы [18] о временной иерархии процессов (см. раздел 1), легко получить теорему о факторизации S -матрицы. Поскольку время жесткого столкновения много меньше времени излучения длинноволнового кванта, S -матрица представляется инфракрасно-регулярной матрицей S^h , описывающей жесткие процессы, в обрамлении операторов, отвечающих движению заряженных частиц до и после такого столкновения, т.е. рассеянию с участием мягких фотонов [18]:

$$S^M = U_{\infty,0} S^h U_{0,-\infty}. \quad (3.34)$$

Действительно, по определению

$$S = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} (H'_{\text{int}} + \tilde{H}_{\text{int}}) dt \right] \quad (3.35)$$

(см. (3.18), (3.21)). Слагаемое H'_{int} описывает процессы с мягкими квантами и связано с малыми изменениями энергии системы в акте взаимодействия. Следовательно, существенный вклад в экспоненту (3.35) дает интеграл от H'_{int} по большому интервалу времени; небольшие изменения интервала интегрирования мало меняют результат. Напротив, оператор \tilde{H}_{int} описывает жесткие процессы с большими изменениями энергии (импульса), т.е. интеграл от \tilde{H}_{int} по времени в (3.35) можно взять в конечных пределах. Распространение интеграла на всю временную ось вносит лишь небольшую поправку, поскольку при больших временах частицы далеки друг от друга и их взаимодействием можно пренебречь (из \tilde{H}_{int} удалена медленно убывающая часть).

С учетом сказанного оператор (3.35) для конечных времен можно представить в виде

$$S^M_{TT'} = U_T S^h_{TT'} U_{T'T'}, \quad T \gg t, \quad |T'| \gg |t'|, \quad (3.36)$$

$$S^h_{TT'} = T \exp \left(-i \int_{t'}^t \tilde{H}_{\text{int}} dt \right), \quad (3.37)$$

$$U_T = T \exp \left(-i \int_t^T H'_{\text{int}} dt \right)$$

(операторы взяты в стандартном представлении взаимодействия I). Поскольку, как мы убедились, в первой экспоненте (3.37) можно перейти к пределам $t \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$, а во второй — к пределам $T \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ (пределам $T' \rightarrow -\infty$, $t' \rightarrow 0$ в $U_{T'T'}$), получаем представление (3.34).

Несложно убедиться, что представление (3.36) эквивалентно соответствующему выражению для свободной

от инфракрасных расходимостей S -матрицы в подходе [30]. В самом деле,

$$S^h_{TT'} = \exp(iH_0 t) \exp[-i(H_0 + \tilde{H}_{\text{int}})(t - t')] \exp(-iH_0 t'), \quad (3.38)$$

$$U_T = \exp(iH_0 T) \exp[-i(H_0 + H'_{\text{int}})(T - t)] \exp(-iH_0 t). \quad (3.39)$$

Подставляя эти операторы и аналогичное представление для $U_{T'T'}$ в (3.36), находим

$$S^M_{TT'} = \exp(iH_0 T) \exp(-i\tilde{H}_0 T) \tilde{S}_{TT'} \exp(i\tilde{H}_0 T') \times \\ \times \exp(-iH_0 T') \equiv U_T \tilde{S}_{TT'} U_{T'}^+, \quad (3.40)$$

где $\tilde{S}_{TT'}$ есть оператор рассеяния в представлении \tilde{I} (см. (3.22)). Оператор U_T связывает представления I и \tilde{I} : $A_I = U_T A_{\tilde{I}} U_T^+$. Как и в (3.36), в (3.38) можно перейти к бесконечным временам для $\tilde{S}_{TT'}$, т.е. перейти к \tilde{S} -матрице (3.22).

Теорема Киношита–Ли–Науэнберга [15, 16]. Представление (3.34) делает очевидным сокращение инфракрасных расходимостей после усреднения по ансамблям фотонов в начальном и конечном состояниях [16] (ввиду $UU^+ = 1$) и инфракрасную регулярность S -матрицы (3.22) или матрицы S^h (3.34), (3.37). Действительно, из оператора взаимодействия \tilde{H}_{int} (3.21) фактически удалены инфракрасные поля, и амплитуда излучения фотона стремится к нулю, если его импульс $q \rightarrow 0$.

Отметим, что от величины параметра Q в определении H'_{int} зависит смысл матрицы \tilde{S} . При $Q \sim E$ (см. конец раздела 2.1.3) \tilde{S} можно отождествить с S^h , т.е. с оператором рассеяния для жестких процессов. Если же $Q \sim A$, то \tilde{S} по-прежнему свободна от инфракрасных расходимостей, но описывает и процессы с участием инфракрасных фотонов ($\omega > A$).

3.2. Квантовая хромодинамика.

Эффективный гамильтониан

Определенности ради в этом разделе речь будет идти о квантовой хромодинамике, т.е. о калибровочной теории с группой $SU(3)$; все формулы автоматически обобщаются на любую полупростую группу. Как отмечалось во введении, переход к неабелевым калибровочным теориям порождает целый ряд проблем. Самая очевидная из них связана с некоммутативностью генераторов группы T_a , т.е. с отсутствием в инфракрасном пределе факторизации (2.15), ибо глюоны, обладая цветом, не могут испускаться независимо. Самая неприятная связана с появлением заряженных безмассовых полей (глюонов), ибо трудности с некоммутативностью матриц T_a усугубляются появлением коллинеарных расходимостей. Наконец, феномен конфайнмента делает, казалось бы, задачу безнадежной, поскольку проблема динамики полей на больших расстояниях (проблема конфайнмента) не решена [59–61].

В действительности отмеченные особенности КХД в известном смысле упрощают задачу. Во-первых, конфайнмент ведет к эффективному обрезанию импульсов кварков и глюонов снизу: $|\mathbf{p}| > r_h^{-1}$ (где r_h — размер адрона), т.е. коллинеарные расходимости появляются лишь при $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ (см. раздел 1), когда все частицы

ведут себя как безмассовые. Но теперь, и это во-вторых, ввиду асимптотической свободы КХД становится возможным применение теории возмущений. Поскольку современные эксперименты в основном связаны с высокими энергиями (в частности, с изучением инклюзивных процессов), это предопределяет направление исследований. Исследуются асимптотики амплитуд жестких процессов, например формфактора пиона [40, 62], и ядер эволюционных уравнений ГЛАП [10, 40, 63] (см. также цитированную в этих работах литературу). В данном разделе изложенный выше метод переопределения S -матрицы применяется к КХД. Чтобы познакомиться со спецификой задачи, начнем с проблемы некоммутативности генераторов группы.

На первый взгляд попытка обобщения метода, изложенного в разделе 3.1, на КХД абсурдна, ибо свободных кварков не существует и учет их взаимодействия с глюонами малых энергий не имеет смысла (не существуют возбуждения полей с длинами волн больше радиуса конфайнмента). Однако с точки зрения иерархии характерных времен взаимодействия задача имеет смысл. В этой трактовке важны лишь относительные пространственно-временные масштабы процессов. В КЭД масштабы определялись размерами лаборатории ($L \sim T$) и характерным временем жесткого процесса ($1/Q_h$, где Q_h — переданный импульс, $L \gg 1/Q_h$). В КХД возможно сопоставление $L \leftrightarrow r_h$, где r_h — размер адрона (порядка 10^{-13} см), т.е. изучаются процессы рассеяния кварков внутри адронов. При достигнутых энергиях (порядка 1 ТэВ) $Q_h r_h \sim 10^3 - 10^4$, и постановка задачи о рассеянии выглядит разумной. Калибровочная инвариантность S -матрицы для кварков и глюонов гарантирует сохранение калибровочной инвариантности состояний в процессе столкновения. Тем самым приобретает смысл перенесение анализа, представленного в разделе 3.1, на КХД. При этом мягкими считаются глюоны с энергиями $\omega \sim r_h^{-1}$.

Анализ почти буквально воспроизводит изложенное в разделе 3.1. В стандартном лагранжиане КХД

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_f \bar{\psi}_f(i\hat{D} - m_f)\psi_f \quad (3.41)$$

ограничимся вторым членом с одним ароматом f . В формуле (3.41) $F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu]/g$, $D_\mu = \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu$, $\hat{D} = D_\mu\gamma_\mu$, $\hat{A}_\mu = A_\mu^a T_a$, $T_a = (1/2)\lambda_a$ — генераторы группы $SU(3)$, λ_a — матрицы Гелл-Манна³. Рассуждения, ведущие к формуле (2.8), не меняются. Меняются лишь ток и поляризационный вектор:

$$j_\mu(q) \rightarrow j_\mu^c(q) = j_\mu(q)T^c, \quad \varepsilon^\lambda(q) \rightarrow \varepsilon^{c\lambda}(q) = \varepsilon^\lambda(q)\chi^c, \quad (3.42)$$

где χ^c описывает цветное состояние глюона, $c = 1, \dots, 8$.

Ввиду некоммутативности T_c формула (2.14) неверна (нужно упорядочивать токи). В принципе, анализ, представленный в разделе 2.1.2, можно было бы обобщить и на случай КХД, но проще воспользоваться методом, изложенным в разделе 3.1. Все существенные черты формул (3.8)–(3.15) сохраняются в КХД, поэтому сразу выпишем искомый гамильтониан (ана-

лог (3.15)–(3.18)):

$$H'_{\text{int}} = \int d\mu(p) \frac{p_\mu}{E_p} \hat{\rho}^a(p) \int_Q d\mu(q) \left[c_\mu^a(q) \exp\left(-\frac{itpq}{E_p}\right) + c_\mu^{a+}(q) \exp\left(\frac{itpq}{E_p}\right) \right] = \int d^3x \hat{J}_\mu^a(x) \hat{A}_\mu^{aQ}(x), \quad (3.43)$$

$$\hat{\rho}^a = -g[a_\sigma^+(p)T^a a_\sigma(p) - b_\sigma^+(p)T^a b_\sigma(p)],$$

$$\hat{J}_\mu^a(x) = \int d\mu(p) \frac{p_\mu}{E_p} \hat{\rho}^a(p) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \equiv \int d\mu(p) \hat{N}^a(p) j_\mu(x, p). \quad (3.44)$$

Все ключевые формулы раздела 3.1, например (3.26), (3.36), (3.37), сохраняют свой вид после очевидной модификации — включения матриц T_a и упорядочения по ним в T -экспонентах.

Глюонный сектор требует учета коллинеарных расходимостей; поэтому приведем гамильтониан, описывающий эффективное взаимодействие лишь жестких ($|\mathbf{p}| \gg Q$) и мягких ($|\mathbf{q}| < Q$) глюонов [64]. Трехглюонный оператор взаимодействия $H'_{\text{int}}^{(3)}$ получается из (3.43), (3.44) заменой

$$\hat{J}_\mu^c \rightarrow -ig \int_{|\mathbf{p}|>A} d\mu(p) \frac{p_\mu}{E_p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) f^{abc} \hat{c}_\sigma^{a+}(p) \hat{c}_\sigma^b(p),$$

$$A \gg Q, \quad (3.45)$$

а биквадратичный $H'_{\text{int}}^{(4)}$ выглядит так:

$$H'_{\text{int}}^{(4)} = \frac{g^2}{2} \int_{|\mathbf{p}|>A} \frac{d^3x d\mu(p)}{E_p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) f^{abc} f^{ade} \times$$

$$\times [\hat{c}_{p,\mu}^{b+} \hat{c}_{p,\nu}^c \hat{A}_{x,\mu}^{dQ} \hat{A}_{x,\nu}^{eQ} + (e \leftrightarrow c) + \hat{c}_{p,\mu}^{b+} \hat{c}_{p,\mu}^d \hat{A}_{x,\nu}^{cQ} \hat{A}_{x,\nu}^{eQ}], \quad (3.46)$$

где f^{abc} — структурные постоянные группы. Формулы (3.45), (3.46) позволяют построить уравнения движения для жестких глюонов и получить в символическом виде их асимптотические состояния. Данный метод применим и в гравитации.

4. Коллинеарные расходимости

4.1. КХД. Теория возмущений

Формула Стермана–Вейнберга. Теория коллинеарных расходимостей разработана не столь хорошо, как теория инфракрасных. На то есть серьезные причины. Во-первых, данный вопрос не был особенно актуальным. Эти расходимости могут появиться в теориях с безмассовыми заряженными полями, такими как гравитационное или глюонное. В отношении первого из них усилия теоретиков были сосредоточены в основном на проблеме перенормируемости, поскольку при достигнутых энергиях изучение особенностей взаимодействия гравитонов лежит за пределами экспериментальных возможностей. Второе же поле не наблюдается в свободном виде (конфайнмент), поэтому, будучи заключенным в ограниченном объеме, оно ведет себя, как безмассовое, лишь при энергиях, много больших обратного радиуса адронов. Изучался академический вопрос об электродинамике электрона с нулевой массой [5], что и выявило проблему.

³ Крышечка символизирует свертку как с матрицами γ_μ , так и с матрицами λ_a или с обеими вместе. Это не приводит к недоразумениям, если выписывать несвернутый индекс.

Во-вторых, задача описания коллинеарных расходимостей несравненно труднее задачи описания "инфракраса". Для решения последней достаточно уметь описывать взаимодействие поля с классическим источником, тогда как первая требует точного решения двумерной полевой модели. Проблематика приобрела актуальность при переходе к физике сверхвысоких энергий, когда лептоны и кварки ведут себя как безмассовые частицы. Практический выход был найден в рамках стандартной теории возмущений: асимптотическая свобода КХД гарантирует малость постоянной взаимодействия, а теорема Киношита–Ли–Науэнберга [15, 16] гарантирует сокращение расходимостей в любом порядке теории возмущений.

Рассмотрение процессов $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q, \bar{q}qg$ (q, g — кварк, глюон) в низшем нетривиальном порядке теории возмущений подтвердило общее утверждение работ [14–16]. В работе [35] вычислялось парциальное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow$ две струи. Были подсчитаны сечения: $\sigma_a(e^+e^- \rightarrow \bar{q}(qg), (\bar{q}g)q)$, где жесткий глюон вместе с кварком q (или \bar{q}) образует одну из струй (кварк и глюон коллинеарны); $\sigma_b(e^+e^- \rightarrow \bar{q}qg)$, где инфракрасный глюон не обязательно принадлежит одной из струй; $\sigma_c(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q)$, где в отличие от первых двух случаев, кроме древесной диаграммы, учитывается и однопетлевая. Под "струей" понимаются кварк (антикварк) или кварк (антикварк) и глюон, излученные внутри конуса с углом раствора $\delta \ll 1$ (конус вырезает на единичной сфере окружность радиусом δ). Предполагается, что на струи приходится практически вся энергия E системы e^+e^- , т.е. $(1 - \epsilon)E$, где $\epsilon \ll 1$, $E \rightarrow \infty$.

Оказывается, что все три сечения расходятся логарифмически при снятии инфракрасной регуляризации (при $\lambda \rightarrow 0$, где λ — масса глюона). Однако их сумма σ конечна (см. замечание в разделе 6.5):

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \Omega \left[1 - \frac{g_E^2}{3\pi^2} \left(3 \ln \delta + 4 \ln \delta \ln 2\epsilon + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

(формула Стермана–Вейнберга [35]), где

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = \frac{\alpha^2}{4E^2} (1 + \cos^2 \vartheta) \sum 3 \left(\frac{e_q}{e} \right)^2 \quad (4.2)$$

есть дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$ в низшем порядке теории возмущений ($\alpha = e^2/4\pi$, e_q — электрические заряды кварков, g_E — бегущая константа связи КХД, ϑ — угол между направлениями струи и пучка электронов; в (4.2) суммирование ведется по ароматам кварков). В формулу (4.1) входит еще параметр Ω . Роль параметров δ и Ω аналогична роли Λ и $E \sim E_0$ в (2.26); малость первого из них гарантирует применимость используемых формул, а второй ($\pi\delta^2 \ll \Omega \ll 1$) характеризует угловое разрешение аппаратуры (точность фиксирования направления струи). Разумеется, данный метод применим к любому процессу в произвольном порядке теории возмущений.

Сокращение расходимостей в сумме (4.1) наводит на мысль о том, что здесь должен существовать общий метод описания подобных процессов. Оказывается, что и в случае коллинеарных расходимостей имеет место иерархия времен (см. конец раздела 3.1.2) и факториза-

ция S -матрицы, хотя соответствующие переходы не обязательно связаны с малыми изменениями энергии. Формально — потому, что полюсы в пропагаторе всегда определяют асимптотики при больших временах. Физически — потому, что излучение вперед (на малый угол $\theta \ll 1$) предполагает формирование состояния с малым поперечным импульсом k_\perp ($k_\perp/k \approx \theta$), т.е. состояния с поперечным размером порядка k_\perp^{-1} , а это требует времени порядка $k_\perp^{-1} = t_{\text{col}}$. Если характерное время жесткого процесса $t_h \sim 1/k$, то $t_h/t_{\text{col}} \sim \theta \ll 1$. Следовательно, и в этом случае мы вправе ожидать факторизации типа (3.34) с новыми окаймляющими матрицами U , которые теперь описывают процессы с малыми поперечными импульсами.

Наделение фотонов квантовыми числами (переход к неабелевым теориям) не меняет общую схему описания инфракрасных и коллинеарных расходимостей, поскольку ее основные черты связаны с разделением процессов на быстрые и медленные, что не зависит от внутренних квантовых чисел частиц. Главное отличие здесь — невозможность распутать T -экспоненты, которые отвечают ведущим к расходимостям процессам. И если в случае инфракрасных расходимостей в КЭД построение операторов U не представляло особого труда, то построение U_{col} фактически предполагает знание точного решения соответствующей двумерной теории поля (в общем виде этот вопрос остается неисследованным). Из факторизации S -матрицы следует теорема Киношита–Ли–Науэнберга, гарантирующая конечность вероятностей процессов после суммирования по ансамблям безмассовых частиц в начальном и конечном состояниях. В следующем разделе изложен метод построения свободного от коллинеарных расходимостей оператора рассеяния на примере безмассовой электродинамики.

4.2. Безмассовая электродинамика.

Переопределение оператора рассеяния

Эффективный гамильтониан. Итак, общая стратегия решения проблемы коллинеарных расходимостей идентична стратегии, разработанной для инфракрасных расходимостей (см. раздел 3): необходимо найти эффективный гамильтониан взаимодействия, отвечающий за коллинеарные расходимости, и вычесть его из гамильтониана взаимодействия (как в (3.21)). Оператор рассеяния с новым взаимодействием свободен от коллинеарных расходимостей.

Прежде чем вычислять эффективное взаимодействие, преобразуем гамильтониан (3.8). Подставляя в него разложения (1.5), (1.6) для безмассовых полей и интегрируя по x , обнаруживаем, что имеются всего два типа зависящих от времени экспонент: в двух случаях энергии частиц в показателях экспонент входят с одинаковыми знаками (это коэффициенты при операторах $\hat{a}^+\hat{b}^+\hat{c}^+$ и $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$, пример — первое слагаемое в (3.9)), а в остальных шести случаях два слагаемых в показателях всегда входят с одинаковыми знаками (примером служат второе слагаемое в (3.9) и оба слагаемых в (3.10)). Члены первого типа содержат осциллирующие экспоненты (тривиальный случай $\mathbf{p}' = \mathbf{p} = \mathbf{q} = 0$ относится к вакуумным переходам) и не могут описывать асимптотическую динамику безмассовых частиц.

Оставшиеся шесть членов преобразуем следующим образом. Обычно импульсы p', q ассоциируются с

полями ψ , A_μ . Переопределим переменные интегрирования p' , p , q так, чтобы импульс p' ассоциировался с полем, знак энергии которого в экспоненте отличается от двух других. Во втором слагаемом (3.9) меняются местами q и p' , в первом слагаемом (3.10) — p и p' , тогда как во втором обозначения не меняются. Теперь после интегрирования по \mathbf{p}' все показатели экспонент выглядят единообразно: $\pm i f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) t$, где

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - E_p - E_q = |\mathbf{p} + \mathbf{q}| - |\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|. \quad (4.3)$$

Интегрирование ведется лишь по \mathbf{p} и \mathbf{q} , поэтому критические точки функции $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ находятся из уравнений $\nabla_p f = 0$, $\nabla_q f = 0$. Ввиду симметрии f относительно замены $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ достаточно ограничиться одним из них:

$$\nabla_q f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} - \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = 0. \quad (4.4)$$

Оно удовлетворяется при $\mathbf{q} = a\mathbf{p}$, где a подчиняется уравнению $(1+a)/|1+a| = a/|a|$, т.е. $a > 0$ или $a < -1$.

Подставляя найденное решение в f , находим $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_p \varphi(a)$, где значение $\varphi(a) = |1+a| - 1 - |a| = \{0 \text{ при } a > 0; 2a \text{ при } -1 \leq a \leq 0; -2 \text{ при } a < -1\}$. Ясно, что осциллирующая экспонента не появится при $a > 0$, т.е. множество критических точек задается условием $\mathbf{q} = a\mathbf{p}$, $a \geq 0$. В окрестности критических точек имеем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sqrt{(E_p + E_q)^2 - 2pq} - E_p - E_q \approx \\ &\approx \frac{-pq}{E_p + E_q} = \frac{-(p+q)q}{E_p + E_q}, \quad pq \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ в экспонентах следует заменить приближенным выражением (4.5), а предэкспоненциальные множители взять в критических точках. В действительности (см. раздел 6.4) предэкспоненциальные множители исчезают в этих точках. Поэтому импульсам нужно придать малые поперечные добавки q_\perp (например, $q = ap + q_\perp$, $q_\perp = (0; \mathbf{q}_\perp, 0)$; см. (6.22)) и при переходе к пределу $\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0$ удерживать в них только линейные по $|\mathbf{q}_\perp|$ члены.

Получающийся асимптотический гамильтониан

$$\begin{aligned} H'_{\text{int}} &= \frac{e}{2} \int \frac{d\mu(p, q)}{E_p + E_q} \left\{ [\hat{a}_{\sigma'}^+(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \hat{a}_\sigma(\mathbf{p}) \bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma_\mu u^\sigma(\mathbf{p}) + \right. \\ &+ \hat{b}_{\sigma'}(\mathbf{p}) \hat{b}_\sigma^+(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \bar{v}^{\sigma'}(\mathbf{p}) \gamma_\mu v^\sigma(\mathbf{p} + \mathbf{q})] \hat{c}_\lambda(\mathbf{q}) \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{q}) + \\ &+ \hat{b}_{\sigma'}(\mathbf{q}) \hat{a}_\sigma(\mathbf{p}) \bar{v}^{\sigma'}(\mathbf{q}) \gamma_\mu u^\sigma(\mathbf{p}) \hat{c}_\lambda^*(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \varepsilon_\mu^{\lambda*}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \left. \right\}_{q_\perp \rightarrow 0} \times \\ &\times \exp\left(\frac{-itpq}{E_p + E_q}\right) + \text{H. c.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

подвергнем дальнейшим преобразованиям.

1. Окрестность K^+ критических точек $q \rightarrow ap + q_\perp$, $p \rightarrow p - q_\perp$ определим как множество

$$\{\mathbf{q} \in K^+ : |\mathbf{q}_\perp| \leq K, \quad a \geq 0\}, \quad (4.7)$$

где K есть некоторая положительная постоянная ($K \ll E$, если E — характерная энергия процесса). В (4.6) интегрируем по области K^+ :

$$\int_{K^+} d\mu(q) \equiv \int_0^\infty \frac{da}{4\pi a} \int_{|\mathbf{q}_\perp| \leq K} \frac{d^2 \mathbf{q}_\perp}{4\pi^2}; \quad (4.8)$$

для придания единообразия формулам в некоторых членах можно произвести замену переменных $\mathbf{q}_\perp \rightarrow -\mathbf{q}_\perp$.

2. Ввиду обращения предэкспоненциальных множителей в нуль при $q_\perp \rightarrow 0$ используем приближение

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma_\mu u^\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{q}_\perp) \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{q} + \mathbf{q}_\perp) &\approx \\ &\approx \bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma_\mu u^\sigma(\mathbf{p}) \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{q} + \mathbf{q}_\perp) + \\ &+ \bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma_\mu u^\sigma(\mathbf{p} - \mathbf{q}_\perp) \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

в первом члене (4.6) и аналогичные соотношения в остальных членах. В предэкспоненциальных множителях пренебрегаем членами $O(q_\perp^2)$.

3. В силу симметрии подынтегрального выражения (4.6) относительно замены $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ все функции, содержащие q_\perp , считаем зависящими от q (например, второй член в (4.9) переписываем в виде $\bar{u}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma_\mu u(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\perp) \varepsilon_\mu(\mathbf{p})$), после чего всюду полагаем $\mathbf{q} = a\mathbf{p}$, $a \geq 0$.

4. Как и в (3.15), переписываем экспоненту в виде

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-it(p+q)q}{E_p + E_q}\right) &= \int d^3 x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} t) \exp(-igx), \\ v_{p+q}^\mu &= \frac{p^\mu + q^\mu}{E_p + E_q} \end{aligned} \quad (4.10)$$

($q^2 = 0$). При $\mathbf{q} = a\mathbf{p}$, очевидно, $v_{p+q}^\mu = v_p^\mu$.

5. Наконец, следует позаботиться об инфракрасных расходимостях: дополнительная к K^+ коллинеарно-регулярная область $\{\bar{K}^+ : \mathbf{q} \in K^+\}$ содержит точки, ведущие к инфракрасным расходимостям. Эта область характеризуется малыми $|\mathbf{q}_\perp|$ и малыми $|a|$, т.е. область $\mathbf{q}^2 \leq Q^2$, включая $\mathbf{q}\mathbf{p}/E_p < 0$. Соответствующий член также должен входить в асимптотический гамильтониан. Цель достигается модифицированием области интегрирования в (4.8): $K^+ \rightarrow K_Q^+$ (рис. 2), где

$$\{\mathbf{q} \in K_Q^+ : |\mathbf{q}_\perp| \leq K, \quad a \geq 0; |\mathbf{q}| \leq Q, \quad a < 0\}, \quad Q < K, \quad (4.11)$$

$$\{\mathbf{q} \in K_Q^+ : |\mathbf{q}_\perp| \leq K, \quad aE_p \geq Q; |\mathbf{q}| \leq Q, \quad aE_p < Q\}, \quad Q > K. \quad (4.12)$$

В итоге приходим к следующему представлению для эффективного гамильтониана (рис. 3; крышечки над операторами токов и полей $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$ опускаем, $b = 1 + a$):

$$H'_{\text{int}}(t) = \int d^3 x [J_\mu^{(+)} A_\mu^{(+K)} + \bar{\psi}^{(+K)} \mathcal{J}^{(+)} + \bar{\mathcal{J}}^{(+)} \psi^{(+K)} + \text{H. c.}], \quad (4.13)$$

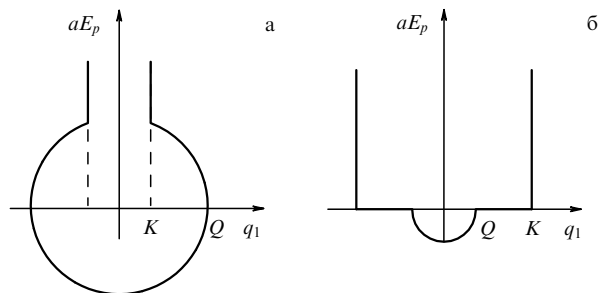


Рис. 2. Области интегрирования K_Q^+ : $Q > K$ (а), $Q < K$ (б); $E_p = |p|$, $q_\perp = (q_1, q_2)$. Изображены сечения $q_2 = 0$ соответствующих областей.

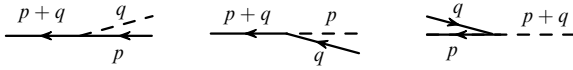


Рис. 3. Диаграммы, сопоставляемые некоторым характерным слагаемым в гамильтониане (4.13). К ним необходимо добавить диаграммы с обращенными стрелками и еще шесть аналогичных диаграмм с фотонами в конечных состояниях.

где, например,

$$J_{\mu}^{(+)} A_{\mu}^{(+K)} = \int_{-\epsilon_1}^{\infty} \frac{da}{4\pi a} \int d\mu(p) J_{\mu}^{(+)}(x, \mathbf{p}, a) A_{\mu}^{(+K)}(x, \mathbf{p}, a),$$

$$\epsilon_1 E_p \sim Q, \quad (4.14)$$

$$A_{\mu}^{(+K)}(x, \mathbf{p}, a) = \int_{|\mathbf{q}_{\perp}| \leq K} \frac{d^2 \mathbf{q}_{\perp}}{4\pi^2} \hat{c}_\lambda(a\mathbf{p} + \mathbf{q}_{\perp}) \times$$

$$\times e_{\mu}^{\lambda}(a\mathbf{p} + \mathbf{q}_{\perp}) \exp(-iqx), \quad (4.15)$$

$$J_{\mu}^{(+)}(x, \mathbf{p}, a) = e V_{\mu}^{\sigma' \sigma}(\mathbf{p}, a) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}} t) \times$$

$$\times [\hat{a}_{\sigma'}^{+}(b\mathbf{p}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{p}) - \hat{b}_{\sigma}^{+}(b\mathbf{p}) \hat{b}_{\sigma'}(\mathbf{p})], \quad (4.16)$$

$$V_{\mu}^{\sigma' \sigma}(\mathbf{p}, a) = \frac{\bar{u}^{\sigma'}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \gamma_{\mu} u^{\sigma}(\mathbf{p})}{2E_p + 2E_q} =$$

$$= \frac{\bar{v}^{\sigma'}(\mathbf{p}) \gamma_{\mu} u^{\sigma}(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{2E_p + 2E_q}, \quad q = ap.$$

Пользуясь (6.27), ток V_{μ} можно упростить: $V_{\mu}^{\sigma' \sigma} \sim p_{\mu} \delta^{\sigma' \sigma}$. Остальные два члена (4.13) также даются интегралами типа (4.14) с полями и токами

$$\psi^{(+K)}(x, \mathbf{p}, a) = \int_{|\mathbf{q}_{\perp}| \leq K} \frac{d^2 \mathbf{q}_{\perp}}{4\pi^2} \hat{a}_{\sigma}(a\mathbf{p} + \mathbf{q}_{\perp}) u^{\sigma}(a\mathbf{p} + \mathbf{q}_{\perp}) \times$$

$$\times \exp(-iqx), \quad (4.17)$$

$$\bar{\mathcal{J}}^{(+)}(x, \mathbf{p}, a) = \frac{e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}} t)}{2(E_p + E_g)} [\bar{u}^{\sigma'}(b\mathbf{p}) \hat{e}^{\lambda}(\mathbf{p}) \hat{a}_{\sigma'}^{+}(b\mathbf{p}) \hat{c}_{\lambda}(\mathbf{p}) +$$

$$+ \bar{v}^{\sigma'}(\mathbf{p}) \hat{e}^{\lambda*}(b\mathbf{p}) \hat{b}_{\sigma'}(\mathbf{p}) \hat{c}_{\lambda}^{+}(b\mathbf{p})] \quad (4.18)$$

в $\bar{\mathcal{J}}^{(+)} \psi^{(+K)}$ и аналогичные выражения в $\bar{\psi}^{(+K)} \mathcal{J}^{(+)}$ с очевидными изменениями. Именно, $\bar{\psi}^{(+K)}$ получается из (4.17) заменами $\hat{a} \rightarrow \hat{b}$, $u \rightarrow \bar{v}$, а $\mathcal{J}^{(+)}$ — из (4.18) заменами $\hat{a}^{+} \rightarrow \hat{b}^{+}$, $\hat{b} \rightarrow \hat{a}$, $\bar{u} \rightarrow v$, $\bar{v} \rightarrow u$ с надлежащими перестановками. Ток (4.16) сохраняется, а гамильтониан (4.13) инвариантен относительно калибровочных преобразований $\varepsilon_{\mu}(q) \rightarrow \varepsilon_{\mu}(q) + q_{\mu} A(q)$. Кстати, из (4.13) следует, что коллинеарные расходимости, так же как и инфракрасные, порождаются лишь свободными частицами. Представление (4.14) допускает интерпретацию (4.13) как совокупности одномерных теорий, зависящих от параметра \mathbf{p} .

Переопределение оператора рассеяния. Свободная от инфракрасных и коллинеарных расходимостей S -матрица строится стандартным образом (см. раздел 3). Согласно (3.1), (3.21) определяем новый оператор взаимодействия $\tilde{H}_{\text{int}} = H_{\text{int}} - H'_{\text{int}}$, где H'_{int} дается (4.13). Искомая матрица \tilde{S} задается формулой (3.22), в которой представление взаимодействия \tilde{I} определяется "свободным" гамильтонианом $\tilde{H}_0 = H_0 + H'_{\text{int}}$ (аналогично (3.4)). \tilde{S} -матрица свободна от инфракрасных и коллинеарных расходимостей по построению, в чем можно убедиться непосредственно. Для этого достаточно показать, что

операторы $\int_{-\infty}^0 H'_{\text{int}} dt$ и $\int_0^{\infty} H'_{\text{int}} dt$ воспроизводят амплитуды излучения инфракрасных и коллинеарных квантов соответственно in- и out-частицами.

С этой целью в формулах (2.7) положим $m = 0$:

$$\frac{\hat{p} - \hat{q}}{-2pq + i0} e\hat{\varepsilon}^{*}(q), \quad e\hat{\varepsilon}^{*}(q) \frac{\hat{p}' + \hat{q}}{2p'q + i0}, \quad p^2 = q^2 = p'^2 = 0. \quad (4.19)$$

Матрицы (4.19) действуют соответственно слева и справа на спиноры $u(p)$, $\bar{u}(p')$. Учитывая равенства $\hat{p}u(p) = \bar{u}(p')\hat{p}' = q\varepsilon(q) = 0$, обнаруживаем, что при $q = ap$, $q = ap'$, $a > 0$ числители в (4.19) исчезают. Чтобы выделить главные члены разложений, воспользуемся представлением (6.22) и аналогичными формулами для p' . При $q_{\perp} = 0$ импульсы p и q коллинеарны. Поскольку $pq \sim q_{\perp}^2$ (см. (6.23)), в числителях амплитуд (4.19) необходимо удерживать члены $O(|\mathbf{q}_{\perp}|)$. Используя представление $q = q_{\perp} + (q\bar{p})p/p\bar{p} + O(q_{\perp}^2)$, находим интересные нас амплитуды:

$$e \frac{-2(p\bar{p}/q\bar{p}) q_{\perp} \varepsilon^{*}(q) + \hat{\varepsilon}^{*}(q) \hat{q}_{\perp}}{-2pq + i0} u(p),$$

$$\bar{u}(p') \frac{-2(p'\bar{p}'/q\bar{p}') q_{\perp} \varepsilon^{*}(q) - \hat{q}_{\perp} \hat{\varepsilon}^{*}(q)}{2p'q + i0} e : \quad (4.20)$$

(здесь можно заменить $\varepsilon(q) \rightarrow \varepsilon(p)$).

Приведем аналогичные (4.19) амплитуды с образованием пар в начальном (позитрон виртуальный) и конечном состояниях. Вместо (4.19) для характерных процессов (с заменой $p' \rightarrow q$) имеем

$$e\bar{u}(q)\hat{\varepsilon}(p) \frac{1}{\hat{p} - \hat{q} + i0}, \quad e\bar{u}(p)\gamma_{\mu} v(q) \frac{-g_{\mu\nu}}{(p+q)^2 + i0}. \quad (4.21)$$

Используя представление импульсов (6.22), (6.23), получаем амплитуды (4.21) в пределе при $\mathbf{q}_{\perp} \rightarrow 0$:

$$e\bar{u}(q) \frac{(p\bar{p}/q\bar{p}) \hat{q}_{\perp} \hat{\varepsilon}(p) - 2q_{\perp} \varepsilon(p)}{-2pq + i0}, \quad -e \frac{\bar{u}(p)\gamma_{\nu} v(q + q_{\perp})}{2pq + i0}. \quad (4.22)$$

Амплитуды (4.20), (4.22) должны воспроизводиться асимптотическим гамильтонианом взаимодействия. Опустим детальное доказательство этого. Отметим лишь, что интегрирование по t в пределах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ дает правильные знаменатели дробей в (4.20), (4.22) и что матричные элементы операторов H_{int} и H'_{int} между состояниями из критической области с точностью до членов $O(q_{\perp}^2)$ совпадают по построению. При этом, например, слагаемое (4.14) воспроизводит первый член в числителе первой дроби (4.20), а слагаемое $(\bar{\psi}^{(+K)} \mathcal{J}^{(+)})^{+}$ — второй член числителя (см. (6.26)). Гамильтониан $\tilde{H}_0 = H_0 + H'_{\text{int}}$ правильно воспроизводит вероятности излучения квантов в критической области, поскольку от вспомогательного вектора h в (6.26), (6.27) зависят только фазы токов перехода. Угол раствора конуса (струи) δ определяется, очевидно, параметром K ($\delta \sim K/E_p$), а уносимая нерегистрируемым излучением энергия E может быть связана с параметром $\epsilon \sim E/E_p$ (аналогично (4.14)). Роль параметра Q в (4.11), (4.12) аналогична роли Λ (см. конец раздела 2.1.3).

5. Заключение

В заключение коснемся некоторых вопросов, связанных с обсуждаемой проблемой.

1. *Эйконал.* Используемое в разделе 2 приближение идентично так называемому *эйкональному приближению* в квантовой теории поля [65, 66]. Существо последнего заключается в модификации пропагаторов высокоэнергетических частиц: $(2pk + k^2)^{-1} \rightarrow (2pk)^{-1}$ ($|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$, \mathbf{k} — импульс или сумма импульсов виртуальных квантов). Его эквивалентность приближению (2.11), (2.13) очевидна. Разница между обеими теориями (в их традиционном понимании) заключается в следующем.

1) В эйкональном подходе мягкие кванты всегда виртуальные, тогда как в теории инфракраса рассматриваются и процессы их излучения.

2) В теории инфракраса всегда имеется жесткий процесс, фиксирующий "точку" (нуль) на временной оси (время протекания этого процесса много меньше времени излучения мягких квантов); вот почему можно говорить о длинноволновом излучении in- и out-частиц. Этого нет в эйкональных теориях, где все процессы излучения (обмена) равноправны, а налетающие и рассеянные частицы не излучают и не поглощают виртуальных квантов.

Поясним сказанное на примере кулонова рассеяния. В разделе 2 изучался жесткий процесс с излучением N мягких фотонов. Допустим, требуется найти амплитуду рассеяния частицы на малые углы. С этой целью в амплитуде (2.15) необходимо заменить $\varepsilon_\mu^*(q_i)$ на $\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(q_i)$, т.е. на амплитуду обмена фотоном с внешним током. Все фотоны теперь виртуальные, основной процесс не выделен по сравнению с прочими ($\mathbf{p}' - \mathbf{p} \sim q_i$), поэтому нужно проинтегрировать по импульсам фотонов q_i ($i = 1, \dots, N$), учесть неразличимость фотонов (фактор $1/(N+1)!$) и просуммировать по всем N . В итоге из (2.6), (2.15) получаем

$$\begin{aligned} T_{p'p}^{\sigma'\sigma} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)!} \left[-e \bar{u}^{\sigma'}(p') \gamma_\mu \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') u^\sigma(p) \right] \times \\ &\times \int \prod_{i=1}^N \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4} j_\mu(q_i, p) \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(q_i) = \\ &= -e \int d^3 x \exp[i(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{x}] \bar{u}^{\sigma'}(p') \times \\ &\times \gamma_\mu \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{x}) u^\sigma(p) \frac{\exp(-i j^{\text{cl}} \tilde{A}^{\text{ext}}) - 1}{-i j^{\text{cl}} \tilde{A}^{\text{ext}}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(q) = 2\pi\delta(q_0) \tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{q})$ и $j_\mu^{\text{cl}}(q, p) = i j_\mu(q, p)$ (см. (2.10)).

В стандартной эйкональной формулировке [65] берется сумма вида

$$-e \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!(N-k)!} (j_{\text{out}} A)^k A (j_{\text{in}} A)^{N-k}. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) получается из (5.1) применением бинома Ньютона $(jA)^N = (j_{\text{in}} A + j_{\text{out}} A)^N$ (в (2.10) токи out (in) обозначались знаком + (−)). В соответствии с идеологией разделов 2, 3 в (5.1) следовало бы интегрировать по области $|\mathbf{q}| < Q$ (как, например, в (3.15)). В эйкональных теориях принято интегрировать по всем импульсам виртуальных частиц. Совершаемая при этом погрешность не оценивается.

2. *Модель Блоха–Нордсика и метод континуального интегрирования.* В разделах 2, 3 говорилось, что динамика длинноволновых фотонов описывается точно решаемой моделью Блоха–Нордсика [19]. Особенно изящно эта задача (как, впрочем, и многие другие) формулируется в рамках метода континуального интегрирования [66–68] (см. раздел 6.5). На модели Блоха–Нордсика с пропагатором $1/pq$ и модифицированной вершиной ($\gamma_\mu \rightarrow v_\mu$) недавно изучалась проблема инфракрасных расходимостей при конечных температурах [69–71].

3. *Унитарность.* Унитарность накладывает нетривиальные ограничения на взаимодействие безмассовых полей: в локальном пределе эффективные взаимодействия перенормируемого типа должны обладать комплексными постоянными связи [72]. В недавней работе [73] изучались амплитуды "распадов" безмассовых частиц.

4. Некоторое время тому назад изучалась задача гравитационного рассеяния пробной частицы при планковских энергиях $E: GE^2 \approx 1$ [74–78]. В [74] вычислялась амплитуда рассеяния частицы на фоновой метрике рассеивателя. Авторы работы [75] получили эквивалентный результат в рамках эйконального приближения для реджизованного гравитона, тогда как в струнном подходе [76, 77] пересуммировалось разложение по числу петель при высоких энергиях. В [78] метрический тензор разбивался на продольные и поперечные двумерные компоненты (по отношению к импульсу налетающей частицы). При этом 2D-теория, описывающая продольные высокоэнергетические процессы, решалась точно, а обмен поперечными квантами учитывался по теории возмущений. Отметим, что при существующих энергиях эффекты длинноволнового гравитационного излучения пренебрежимо малы [45], а при планковских энергиях следует ожидать существенного изменения наших представлений о пространстве-времени.

5. Весьма актуальной является задача описания высокоэнергетического рассеяния в рамках КХД. Состояние этой области физики отражено в обзоре Липатова [79], в котором процессы с малыми передачами импульса описываются теорией с точно решаемым двумерным гамильтонианом.

6. *Итоговые замечания.* Сущность феноменов инфракрасных и коллинеарных расходимостей заключается в неограниченном росте амплитуд излучения безмассовых частиц при стремлении к нулю их энергий или углов излучения. Это обстоятельство ведет к расходимости сечений и других физических величин при вычислении последних по теории возмущений. Успех описания данных процессов связан с понятием иерархии времен взаимодействий: жесткие процессы (процессы с обменом большими импульсами) протекают быстро и в малых объемах, мягкие процессы (когда переданные импульсы или их поперечные компоненты малы) — медленно. Следствием иерархии времен является факторизация S-матрицы (см. (3.34), (3.40)): операторы, описывающие мягкие процессы и порождающие расходимости, фигурируют в виде окаймляющих множителей при операторе жесткого рассеяния. Отсюда немедленно вытекает теорема о сокращении расходимостей в наблюдаемых величинах, поскольку при возведении модулей амплитуд в квадрат и суммировании по состояниям квантов из критической области (например, по состояниям мягких

нерегистрируемых фотонов) проявляется изометричность okayмляющих операторов. Матричные элементы их произведений на сопряженные уже не порождают расходимостей. Именно поэтому в теоретические формулы входят только параметры, характеризующие конкретный эксперимент, — его длительность и чувствительность регистрирующей аппаратуры.

6. Приложения

6.1. Формулы суммирования по поляризациям

Если спины частиц не регистрируются, то по ним ведется суммирование в конечном состоянии и усреднение в начальном. Приведем соответствующие формулы.

Фотоны, глюоны ($J = 1$). Выберем базис $\varepsilon_\mu^\pm(q) = (0; 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$, $\lambda_\mu = (1; 0, 0, 1)$, $\tilde{\lambda}_\mu = (1; 0, 0, -1)$, тогда $q_\mu = \omega\lambda_\mu$ — стандартный вектор. В псевдоевклидовом пространстве базис с изотропными ортами $\lambda^2 = \tilde{\lambda}^2 = 0$ не ортогонален: $\lambda\tilde{\lambda} = 2$. Для ортогонального базиса ε_μ^\pm , $\varepsilon_\mu^3 = (\lambda_\mu - \tilde{\lambda}_\mu)/2$, $\varepsilon_\mu^0 = (\lambda_\mu + \tilde{\lambda}_\mu)/2$ имеем условие полноты

$$\sum_{\pm} \varepsilon_\mu^\pm \varepsilon_\nu^{\pm*} + \varepsilon_\mu^3 \varepsilon_\nu^{3*} - \varepsilon_\mu^0 \varepsilon_\nu^{0*} = -g_{\mu\nu},$$

откуда следует формула суммирования по спинам

$$\sum_{\pm} \varepsilon_\mu^\pm(q) \varepsilon_\nu^{\pm*}(q) = -g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\lambda_\mu \tilde{\lambda}_\nu + \tilde{\lambda}_\mu \lambda_\nu) \equiv P_{\mu\nu}. \quad (6.1)$$

Гравитоны ($J = 2$). Поляризационный тензор гравитонов $\varepsilon_{\mu\nu}^\pm(q)$ должен обладать свойствами: $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$, $\varepsilon_{\mu\mu} = 0$, $q_\mu \varepsilon_{\mu\nu}(q) = 0$. Кроме того, должно выполняться условие нормировки $\varepsilon_{\mu\nu}^\pm \varepsilon_{\mu\nu}^{\pm*} = 1$, а S -матрица должна быть инвариантна относительно преобразования $\varepsilon_{\mu\nu}^\pm(q) \rightarrow \varepsilon_{\mu\nu}^\pm(q) + q_\mu f_\nu(q) + q_\nu f_\mu(q)$, $q_\mu f_\mu = 0$. Перечисленным требованиям удовлетворяет тензор [45]

$$\varepsilon_{\mu\nu}^\pm(q) = \varepsilon_\mu^\pm(q) \varepsilon_\nu^\pm(q). \quad (6.2)$$

Интересующая нас сумма по поляризациям должна, ввиду (6.2), выражаться через тензор $P_{\mu\nu}$ (6.1):

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu\rho\sigma}(q) &= \sum_{\pm} \varepsilon_{\mu\nu}^\pm(q) \varepsilon_{\rho\sigma}^{\pm*}(q) = \\ &= aP_{\mu\nu}P_{\rho\sigma} + b(P_{\mu\rho}P_{\nu\sigma} + P_{\mu\sigma}P_{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из $\varepsilon_{\mu\mu} = 0$ с учетом равенств $P_{\mu\mu} = -2$, $P_{\mu\rho}P_{\mu\sigma} = -P_{\rho\sigma}$ имеем $P_{\mu\rho\mu\sigma} = -2(a+b)P_{\rho\sigma} = 0$, т.е. $a = -b$. Далее, поскольку гравитон имеет лишь два поляризационных состояния, находим нормировочный множитель b : $\sum_{\mu\nu} P_{\mu\nu\mu\nu} = 4b = 2$. Итак, фигурирующий в числителе гравитонного пропагатора тензор (6.3) есть [45]

$$P_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(P_{\mu\rho}P_{\nu\sigma} + P_{\mu\sigma}P_{\nu\rho} - P_{\mu\nu}P_{\rho\sigma}). \quad (6.4)$$

При непосредственной проверке (6.4) необходимо учесть, что $\varepsilon_\mu^{\pm*} = \varepsilon_\mu^\mp$.

6.2. Классическое излучение

Амплитуда излучения длинноволнового фотона (2.8) непосредственно связана с излучением классической заряженной частицы. Запаздывающее решение полевых

уравнений

$$\begin{aligned} A_\mu(\mathbf{x}, t) &= - \int d^4y D_{\text{ret}}(x-y) j_\mu^{\text{cl}}(q) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{j_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{y}, t-R)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $D_{\text{ret}}(x) = -\theta(t)[\delta(t-r) - \delta(t+r)]/4\pi r$, переписываем для компонент Фурье:

$$A_\mu(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\omega R + i\mathbf{q}\mathbf{y}) j_\mu^{\text{cl}}(\mathbf{q}, \omega). \quad (6.6)$$

Предположим, что заряды распределены в ограниченной области пространства. Тогда, учитывая, что $\max |\mathbf{y}|/r \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| = r \rightarrow \infty$ и что $R \approx r - \mathbf{y}\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$), находим асимптотику

$$A_\mu(\mathbf{x}, \omega) \sim \frac{1}{4\pi r} \exp(i\omega r) j_\mu^{\text{cl}}(\omega\mathbf{n}, \omega), \quad \mathbf{q} = \omega\mathbf{n}. \quad (6.7)$$

Поскольку вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{n}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)/2$, для энергии $d\mathcal{E}$, излучаемой за время столкновения в интервале частот $d\omega$, имеем $d\mathcal{E} = 2 \int dS \mathbf{H}^2 d\omega/2\pi$, где $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_\omega$, dS — элемент площади сферы радиусом r , множитель 2 перед интегралом учитывает то обстоятельство, что система излучает и при отрицательных временах, а интегрирование подразумевается по области $\omega > 0$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\mathbf{n} |\mathbf{q} \times \mathbf{j}^{\text{cl}}|^2 = \frac{\omega^2}{16\pi^3} \int d\mathbf{n} [|\mathbf{j}|^2 - |\mathbf{n}\mathbf{j}|^2], \\ j_\mu^{\text{cl}} &= i j_\mu. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В силу сохранения тока $q_\mu j_\mu(q) = 0$ выражение в квадратных скобках (6.8) есть $-j_\mu(q) j_\mu^*(q)/\omega^2$; поэтому

$$d\mathcal{E} = \int d\mathbf{n} \left((-j_\mu j_\mu^*) \omega \frac{d\mu(q)}{d\mathbf{n}} \right) \quad (6.9)$$

(в согласии с формулой для плотности вероятности излучения фотона; см. раздел 2.1.2). В нерелятивистском пределе для тока перехода точечной частицы (2.10) имеем

$$j_\mu(q, p) = e \left(\frac{p'_\mu}{p'q} - \frac{p_\mu}{pq} \right) \sim e \frac{v'_\mu - v_\mu}{\omega}, \quad v_\mu = \frac{p_\mu}{E_p}; \quad (6.10)$$

следовательно [80],

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{8\pi}{3} (\mathbf{v}' - \mathbf{v})^2 = \frac{2\alpha}{3\pi} (\mathbf{v}' - \mathbf{v})^2. \quad (6.11)$$

Разность $e(\mathbf{v}' - \mathbf{v})/2\pi = \ddot{\mathbf{d}}_\omega$ есть вторая производная по времени от компоненты Фурье дипольного момента \mathbf{d} системы при $\omega \rightarrow 0$. Полученное выражение есть спектральная плотность излучения точечной частицы при $\omega \rightarrow 0$.

Разумеется, выражение (6.7) получается и из асимптотики потенциалов Лиенара – Вихерта при $r \rightarrow \infty$:

$$A_\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{R - \mathbf{v}\mathbf{R}} \frac{p_\mu}{E_p} \approx \frac{e}{4\pi r} \frac{p_\mu}{E_p - \mathbf{p}\mathbf{n}} = \frac{e\omega}{4\pi r} \frac{p_\mu}{pq}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E_p}, \quad (6.12)$$

если считать, что $A_\mu(\mathbf{x}, \omega)$ вычисляется в пределе при $\omega \rightarrow 0$, а $p_\mu(t) = p_\mu(p'_\mu)$ при $t \rightarrow -\infty (\infty)$.

6.3. Расходимости в теориях с многочастичными вершинами

Если заряженная частица может локально излучить две или более безмассовые частицы, то ситуация с инфракрасными и коллинеарными расходимостями меняется. В этом случае расходимости порождаются амплитудами вида $A_n \sim TR_n$ (ср. с (2.7), (2.8)), где

$$R_n^\pm = \frac{1}{(p \pm \sum q_i)^2 - m^2} = \frac{1}{\pm 2p \sum q_i + (\sum q_i)^2}. \quad (6.13)$$

Обсудим следующие возможности: 1) инфракрасные расходимости ($m \neq 0$, $\omega_i = |\mathbf{q}_i| \rightarrow 0$); 2) инфракрасные и коллинеарные расходимости ($m = 0$, $\omega_i \rightarrow 0$, $E_p = |\mathbf{p}| \gg \omega_i$); 3) коллинеарные расходимости ($m = 0$, а \mathbf{q} и \mathbf{p} произвольны). Случай 2) выделен из методических соображений.

1) Вероятность P_n излучения n фотонов с энергиями $0 < \omega_i < A$ записывается как

$$P_n \propto \int_0^A |R_n|^2 \prod_i d\mu(q_i) \propto \int_0^A \frac{\prod \omega_i d\omega_i d\mathbf{n}_i}{|E_p \sum \omega_i - \mathbf{p} \sum \mathbf{q}_i|^2} \propto \int_0^A \frac{\prod \omega_i d\omega_i}{|\sum \omega_i|^2} \equiv I_n \quad (6.14)$$

(опущены заведомо сходящиеся интегралы и слагаемые $O(\omega^2)$, $\mathbf{n}_i = \mathbf{q}_i/\omega_i$). Интеграл (6.14) сходится при $n > 1$. Действительно, вспоминая известное неравенство [81]

$$\left(\frac{\sum p_i \omega_i}{\sum p_i} \right)^{\sum p_i} \geq \prod \omega_i^{p_i}, \quad \omega_i \geq 0, \quad p_i > 0, \quad (6.15)$$

и полагая в (6.15) $p_i = 1$, т.е. используя неравенство $\sum \omega_i/n \geq \prod \omega_i^{1/n}$, имеем

$$I_n \leq \int_0^A \frac{\prod \omega_i d\omega_i}{n^2 \prod \omega_i^{2/n}} < \infty, \quad n > 1. \quad (6.16)$$

2) Второй случай включает, помимо инфракрасных, также и коллинеарные расходимости ($m = 0$) при условии, что можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе второй дроби (6.13). Ответ зависит от спина частиц. Если излученная частица обладает спином $J = 0, 1, 2, \dots$, то в амплитуде обычно появляется дополнительный множитель $(p\epsilon(q_i))^J$. Векторы $\epsilon^\pm(q)$ лежат в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{q} (см. раздел 6.1). Если θ есть угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} , то угол между векторами \mathbf{p} и $\epsilon^\pm(q)$ заключен в интервале $[\pi/2 + \theta, \pi/2 - \theta]$, откуда имеем

$$|p\epsilon(q_i)|^J \leq |E_p \sin \theta_i|^J.$$

Используя равенства $p \sum q_i = E_p (\sum \omega_i - \sum \mathbf{n}_i \omega_i)$ и $d\mathbf{n}_i = \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$, где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/E_p$, $\mathbf{n}^2 = 1$, $\mathbf{n}_i = \cos \theta_i$, находим

$$P_n \propto \int_0^A \frac{\prod \omega_i d\omega_i |p\epsilon(q_i)|^{2J} d\mathbf{n}_i}{|\sum \omega_i - \sum \omega_i \cos \theta_i|^2} \propto \int_0^A \frac{\prod \omega_i d\omega_i \theta_i^{2J+1} d\theta_i}{|\sum \omega_i \theta_i^2|^2} \equiv K_n. \quad (6.17)$$

Вновь используя (6.15), получаем оценку

$$K_n \leq \frac{1}{n^2} \int_0^A \prod \omega_i^{1-2/n} \theta_i^{2J+1-4/n} d\omega_i d\theta_i, \quad (6.18)$$

т.е. интеграл (6.17) сходится, если выполняются неравенства

$$n > 1, \quad n > \frac{2}{J+1}. \quad (6.19)$$

Нарушение первого из них влечет появление инфракрасных расходимостей (ИР), нарушение второго — коллинеарных расходимостей (КР). Итак, согласно (6.19) при $n = 1$ для $J = 0, 1$ имеют место инфракрасные и коллинеарные расходимости, при $n = 2$ для $J = 0$ — коллинеарные расходимости. При $n \geq 3$ инфракрасные и коллинеарные расходимости отсутствуют. Если $J = 2$, то коллинеарные расходимости отсутствуют в теориях с фактором $(p\epsilon(q_i))^2$ в амплитудах излучения, как в гравитации.

3) В общем случае, когда $m = 0$, а E_p и ω_i произвольны, воспользуемся тем обстоятельством, что в окрестности особенности (6.13), т.е. при $\sum \theta_{ij}^2 > 0$, где $\cos \theta_{ij} = (\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j)$, имеет место неравенство

$$\delta = p \sum q_i \pm \left(\sum q_i \right)^2 > 0, \quad (6.20)$$

поскольку в этом случае всегда можно выбрать систему отсчета, в которой $\sum \mathbf{q}_i = 0$, и $\delta = E_p \sum \omega_i \pm (\sum \omega_i)^2 > 0$, если выполняется неравенство $E_p > \sum \omega_i$ (нижний знак отвечает излучению падающей частицы). Таким образом,

$$|R_n| = \frac{1}{|p \sum q_i + \delta|} \leq \frac{2}{E_p \sum \omega_i \theta_i^2}, \quad (6.21)$$

т.е. мы приходим к интегралам типа (6.17) и неравенствам (6.19). При $J > 0$ интегрирование в (6.14) еще и по p не ведет к новым расходимостям.

Итак, расходимости появляются в следующих теориях с $n + 2$ частицами в вершинах и фактором $(p\epsilon)^J$ в амплитудах:

ИР: $J = 0, 1, 2, \dots$ при $n = 1$;

КР: $J = 0, 1$ при $n = 1$ и $J = 0$ при $n = 2$.

В пространстве-времени $D + 1$ вместо неравенств (6.19) имеем

$$n > \frac{2}{D-1}, \quad n > \frac{4}{2J+D-1},$$

откуда вытекает, что при $D = 2$ расходимости появляются в следующих случаях:

ИР: $J = 0, 1, 2, \dots$ при $n = 1, 2$;

КР: $J = 0$ при $n = 1, 2, 3, 4$ и $J = 1$ при $n = 1$.

При $D = 4$ имеются лишь коллинеарные расходимости с $J = 0$. Полученные формулы неприменимы при $D = 1$. Если фактор $(p\epsilon)^J$ отсутствует, то теория эквивалентна таковой с $J = 0$ (как, например, в случае с $\mathcal{L}_{\text{int}} \sim (A_\mu^2)^2$). Получаемые оценки полезны при исследовании излучения виртуальными частицами, в частности при работе с эффективными лагранжианами.

6.4. Кинематика коллинеарных процессов

Векторы. В безмассовой КЭД из трех изотропных коллинеарных векторов p', p, q первый выражается через остальные ввиду сохранения 4-импульса в вершине,

причем в силу (4.4) $\mathbf{q} = a\mathbf{p}$, $a > 0$. В предэкспоненциальных множителях (4.6) необходимо учитывать "слабо неколлинеарные процессы", т.е. учитывать члены $O(|\mathbf{q}_\perp|)$, где $\mathbf{q}_\perp \mathbf{p} = 0$. Поэтому для векторов выбираем стандартное представление

$$\begin{aligned} p &= E_p(1; 0, 0, 1), \quad \tilde{p} = E_p(1; 0, 0, -1), \\ q &= (\omega; \mathbf{q}_\perp, |\mathbf{q}_\parallel|), \quad \omega^2 = \mathbf{q}_\parallel^2 + \mathbf{q}_\perp^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Вектор $q_\perp = (0; \mathbf{q}_\perp, 0)$ выражается через p , \tilde{p} и q : $q_\perp = q - (q \cdot \tilde{p} p + q \cdot p \tilde{p}) / (p \cdot \tilde{p}) \equiv q - q_\parallel$. Здесь и далее скалярное умножение 4-векторов обозначается посредством точки. Имеем соотношения ($\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} q_\perp \cdot p &= q_\perp \cdot \tilde{p} = 0, \quad p \cdot \tilde{p} = 2E_p^2, \\ q \cdot p &= E_p(\omega - |\mathbf{q}_\parallel|) \approx E_p \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2\omega}, \quad q \cdot \tilde{p} \approx 2E_p \omega. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Поляризации. Для фотона $q \cdot \varepsilon^\lambda(q) = 0$, поэтому встречающиеся в формулах (4.6), (4.9) выражения типа

$$\begin{aligned} p \cdot \varepsilon(a\bar{p} + q_\perp) &= -q_\perp \cdot \frac{\varepsilon(a\bar{p} + q_\perp)}{a} = \\ &= -q_\perp \cdot \frac{\varepsilon(ap)}{a} + O(\mathbf{q}_\perp^2), \quad \varepsilon(aq) = \varepsilon(q), \quad a > 0, \end{aligned} \quad (6.24)$$

имеют порядок $O(|\mathbf{q}_\perp|)$. В формуле (6.24) через \bar{p} обозначен вектор с компонентами $(E_p; \mathbf{p})$, $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}_\perp^2/a^2$, поскольку $(a\bar{p} + q_\perp)^2 = 0$.

Для фермионов аналогичные формулы не столь просты. Типичное выражение в (4.6) таково: $\bar{u}(p) \times \gamma_\mu u(a\bar{p} + q_\perp) \varepsilon_\mu(ap)$. Обнаружить его пропорциональность $|\mathbf{q}_\perp|$ можно с помощью соотношений (см. весьма полезную статью [82])

$$\begin{aligned} u_\pm(p') &= C\hat{p}'\hat{u}_\pm(p), \quad C^{-2} = 4p' \cdot hp \cdot h - 2p' \cdot ph^2, \\ u_{+/-} &\equiv u_{L/R}, \quad u_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} u. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Здесь h — некоторый 4-вектор, а $p' \cdot h$, $p \cdot h \neq 0$. Полагая $h \cdot q_\perp = 0$, находим

$$\begin{aligned} u(a\bar{p} + q_\perp) &= C(\hat{a}\hat{p} + \hat{q}_\perp)\hat{u}(ap) + O(\mathbf{q}_\perp^2), \\ C^{-1} &\approx 2\sqrt{a}p \cdot h + O(\mathbf{q}_\perp^2), \end{aligned}$$

т.е. с точностью до членов $O(\mathbf{q}_\perp^2)$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}(p)\hat{\varepsilon}^\lambda(ap)u(a\bar{p} + q_\perp) &\approx \frac{1}{2\sqrt{a}p \cdot h} \times \\ &\times [\bar{u}(p)\gamma_\mu(2ap \cdot h + \hat{q}_\perp\hat{h})u(ap)]\varepsilon_\mu^\lambda(p) \approx \\ &\approx \frac{1}{2\sqrt{a}p \cdot h} \bar{u}(p)\hat{\varepsilon}^\lambda(ap)\hat{q}_\perp\hat{h}u(ap), \end{aligned} \quad (6.26)$$

поскольку $\bar{u}(p)\gamma_\mu u(ap) \sim p_\mu$, а $p \cdot \varepsilon(p) = 0$. Действительно, согласно [82]

$$\bar{u}_\pm(p')\gamma_\mu u_\pm(p) = \frac{2(p'_\mu p \cdot h + p_\mu p' \cdot h - h_\mu p' \cdot p \pm i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p'_\nu p_\rho h_\sigma)}{(4p' \cdot hp \cdot h - 2p' \cdot ph^2)^{1/2}}, \quad (6.27)$$

где $\varepsilon_{0123} = 1$, и пропорциональность $\bar{u}(p)\gamma_\mu u(ap)$ вектору p_μ вытекает из (6.27) и разложения $\bar{u}\gamma_\mu u = \bar{u}_+ \gamma_\mu u_+ +$

$+ \bar{u}_- \gamma_\mu u_-$. Из (6.26), (6.27) следует, что предэкспоненциальные множители в (4.6) исчезают при $\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0$. Вектор h выпадает из произведений токов $j_\mu^* j_\nu$ [82] и, следовательно, из вероятностей процессов.

6.5. Метод континуального интегрирования

Метод континуального интегрирования, широко применяемый в современной теории квантованных полей, используется и при описании процессов с инфракрасными расходимостями [67, 68, с. 368] или в эйкональных вычислениях [66]. Отметим, однако, что если в полномасштабной квантовой теории поля этот метод позволяет развить принципиально новую схему вычислений — квазиклассическое приближение, то в задачах с участием длинноволновых квантов и в теории эйконала успех достигается за счет упрощенного описания процессов. Так, в модели Блоха — Нордсика [19] γ -матрицы Дирака заменяются c -числами, а в более содержательной модели (см. раздел 3) ток заменяется на "оператор классического тока" (3.16), что обеспечивает их точную решаемость. Тем не менее метод континуального интегрирования может оказаться полезным и в этих случаях.

Прежде всего найдем представление S -матрицы континуальным интегралом. Оператор рассеяния задается T -экспонентой (2.2) (или (3.22)). Главная техническая трудность — перейти к нормально упорядоченному оператору. Исходным пунктом служит формула Хори (3.30). С ее помощью можно распутать любой причинно упорядоченный оператор $TF[\hat{\phi}]$, т.е. добиться его нормального упорядочения. С этой целью воспользуемся функциональным преобразованием Фурье [68, гл. 8]

$$F[\phi] = \int d[\chi] \exp(i\chi\phi) \tilde{F}[\chi] \quad (6.28)$$

(в обозначениях (3.30)); необходимые постоянные множители включены в меру функционального интегрирования $d[\chi]$. Тогда, используя (3.30), имеем

$$TF[\hat{\phi}] = \int d[\chi] \tilde{F}[\chi] \exp\left(-\frac{1}{2}\chi\Delta_c\chi\right) : \exp(i\chi\hat{\phi}) : . \quad (6.29)$$

Подставляя в (6.29) обратное преобразование Фурье

$$\tilde{F}[\chi] = \int d[\eta] \exp(-i\chi\eta) F[\eta],$$

совершая сдвиг $\eta \rightarrow \eta + \hat{\phi}$ и интегрируя по χ , находим

$$\begin{aligned} TF[\hat{\phi}] &= \int d[\eta] : \exp\left(i\chi\hat{\phi} - i\chi\eta - \frac{1}{2}\chi\Delta_c\chi\right) : F[\eta] = \\ &= \int d[\eta] \exp\left(-\frac{1}{2}\eta\Delta_c^{-1}\eta\right) : F[\eta + \hat{\phi}] : \end{aligned}$$

(все появляющиеся постоянные множители включаем в меру интегрирования). Далее, вспоминая определение причинного пропагатора $\Delta_c = i/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$ и учитывая, что $\eta\Delta_c^{-1}\eta = -i \int d^4x \eta(-\partial_\mu^2 - m^2 + i\varepsilon)\eta = -2iS_0[\eta]$, где S_0 — действие свободного поля, получаем искомое представление

$$TF[\hat{\phi}] = \int d[\eta] \exp(iS_0[\eta]) : F[\eta + \hat{\phi}] : . \quad (6.30)$$

Для S -матрицы формула (6.30) записывается в виде

$$\hat{S} = \int d[\eta] : \exp(iS_0[\eta] + iS_{\text{int}}[\eta + \hat{\phi}]) : , \quad (6.31)$$

где $\hat{\phi}$ — операторы свободных полей. Вклад вакуумных диаграмм исключается делением оператора (6.31) на вакуумное среднее от \hat{S} . Представление (6.31) справедливо и для ферми-полей с учетом особенностей интегрирования по последним [61, 68, с. 354]. Впредь под $d[\eta]$ будем понимать меру интегрирования по всем квантованным полям (например, в спинорной электродинамике $d[\eta] \rightarrow d[\bar{\psi}\psi A]$).

В рамках представления (6.31) излучение реальных инфракрасных фотонов описывается следующим образом. Учитывая (3.18), (3.19), (3.36) и свойства токов (2.10), (2.16), убеждаемся, что излучение реальных инфракрасных фотонов в жестком процессе $\alpha \rightarrow \beta$ дается оператором

$$\hat{S}_{\beta\alpha}^{\text{IR}} = \int d[\eta_\mu] : \exp \left(i S_0[\eta_\mu] + i S'_{\beta\alpha}[\eta_\mu + \hat{A}_\mu^Q] \right) :, \quad (6.32)$$

где

$$\begin{aligned} S'_{\beta\alpha}[\eta_\mu] &= - \int d^4x j_{\mu\beta\alpha}(x) \eta_\mu(x), \\ j_{\mu\beta\alpha}(x) &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) j_{\mu\beta\alpha}(q, p) = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) \left[\sum_\beta \frac{ie_\beta p_\mu^\beta}{p^\beta q + i0} - \sum_\alpha \frac{ie_\alpha p_\mu^\alpha}{p^\alpha q - i0} \right]. \end{aligned}$$

Предполагается, что в S_0 включен фиксирующий калибровку член [53] (используется калибровка Фейнмана).

Интегрируя в (6.32) по η_μ , находим

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\beta\alpha}^{\text{IR}} &= \exp \left[-\frac{1}{2} j_{\mu\beta\alpha} \Delta_{Qc}^{\mu\nu} j_{\nu\beta\alpha} \right] : \exp \left[-i \int d^4x j_{\mu\beta\alpha}(x) \hat{A}_\mu^Q(x) \right] : \equiv \\ &: \equiv \exp \left(-\frac{1}{2} N \right) : \exp(-ij_{\beta\alpha} A^Q) : . \quad (6.33) \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{Qc}^{\mu\nu}$ — пропагатор поля A_μ^Q (3.17), $\text{Re } N (= \bar{N} = N_0(Q, \lambda))$ — среднее число излученных фотонов (см. (2.23), (2.24); в (6.33) предполагается инфракрасная регуляризация). Нетрудно убедиться, что

$$\langle q_1 \varepsilon_1, \dots, q_N \varepsilon_N | \hat{S}_{\beta\alpha}^{\text{IR}} | 0 \rangle = j_1 \varepsilon_1^* \dots j_N \varepsilon_N^* \exp \left(-\frac{1}{2} N \right) \quad (6.34)$$

воспроизводит произведение множителей при амплитуде основного процесса $T_0 (\equiv T_{\beta\alpha})$, описывающих рождение реальных (2.15) и виртуальных (2.24) фотонов.

Плотность вероятности жесткого процесса $\alpha \rightarrow \beta$ с суммарной потерей энергии за счет инфракрасного излучения $\sum \omega_i \leq E$ дает (согласно (2.18)–(2.20), (2.27)) фактор $b(A) (E/\lambda)^A$, тогда как $\text{Re } N = A \ln(Q/\lambda)$ (согласно (2.19)). В итоге получаем выражение (2.26) с заменой $A \rightarrow Q$:

$$\tilde{P}_E = |T_{\beta\alpha}|^2 b(A) \left(\frac{E}{\lambda} \right)^A \left(\frac{\lambda}{Q} \right)^A = |T_{\beta\alpha}|^2 b(A) \left(\frac{E}{Q} \right)^A, \quad (6.35)$$

регулярное при $\lambda \rightarrow 0$.

Гораздо более примитивная модель Блоха — Нордсика [19] (в ней отсутствует рождение пар) получается

заменой в спинорной электродинамике $\gamma_\mu \rightarrow u_\mu$, где u_μ — постоянный единичный вектор, $u^2 = 1$. Это эквивалентно замене, например, в (2.13) или в (6.12) $p_\mu \rightarrow u_\mu$. Вычисление в данной модели пропагатора заряженного фермиона методом континуального интегрирования дано в [67, 68, с. 368]. Ясно, что при $u = p/m$ модель Блоха — Нордсика правильно описывает инфракрасное излучение падающими или рассеянными частицами.

Модель с гамильтонианом (4.13), описывающая коллинеарные процессы, также представляется континуальным интегралом (6.31), однако вопрос о возможности его явного вычисления остается открытым.

Замечание. В теории возмущений мультипликативное сокращение расходимостей в (6.35) становится аддитивным (например, $(1 + A \ln(E/\lambda))(1 + A \ln(\lambda/Q)) \approx 1 + A \ln(E/Q)$, $A = O(\alpha)$). У неискушенного читателя может возникнуть вопрос: каким образом сумма трех положительных расходящихся при $\lambda \rightarrow 0$ величин (4.1) оказывается конечной? Выпишем расходящиеся при $\lambda \rightarrow 0$ слагаемые в отношениях $d_{a,b,c} = \sigma_{a,b,c} / [\Omega(d\sigma/d\Omega)_0]$ [35]:

$$\begin{aligned} d_a &= g_R^2 (-4 \ln 2\epsilon - 3) \ln \frac{E}{\lambda} > 0 \quad (\epsilon \ll 1), \\ d_b &= g_R^2 \left(2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} + 4 \ln 2\epsilon \ln \frac{E}{\lambda} \right) > 0, \\ d_c &= 1 + g_R^2 \left(-2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} + 3 \ln \frac{E}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

($g_R^2 = g_E^2/3\pi^2$, g_E — ренормированная константа связи). Сумма выписанных членов равна единице. Последнее выражение положительно при условии $2g_R^2 \ln^2(E/\lambda) < 1$, т.е. лишь при условии применимости теории возмущений. В конечности суммы положительных сечений (4.1) при $\lambda \rightarrow 0$ нет ничего удивительного: каждое сечение положительно лишь при конечном (достаточно большом) значении λ , а из их суммы масса глюона λ выпадает.

Примечание при корректуре. В связи с подготовкой материалов к 100-летию со дня рождения В.А. Фока (22.12.1998) выяснилось, что задача о рассеянии в кулоновом поле (см. раздел 2.1.1) была решена также В.А. Фоком в феврале 1928 г. (опубликовано в книге: *Начала квантовой механики* (Л.: Кубуч, 1932)) и В. Гордоном (Gordon W. *Zs. Phys.* **48** 180 (1928)). Подробнее см. Прохоров Л.В. *ЭЧАЯ* **31**, вып. 1 (2000).

Список литературы

1. Mott N F *Proc. Camb. Phil. Soc.* **27** 255 (1931)
2. Sommerfeld A *Ann. Phys. (Leipzig)* **11** 257 (1931)
3. Bethe H, Heitler W *Proc. R. Soc. London Ser.* **146** 83 (1934)
4. Rutherford E *Philos. Mag.* **21** 669 (1911)
5. Kinoshita T, Sirlin A *Phys. Rev.* **113** 1652 (1959)
6. Aubert J J et al. *Phys. Rev. Lett.* **33** 1404 (1974)
7. Arnison G et al. *Phys. Lett. B* **126** 398; **129** 273 (1983)
8. Липатов Л Н, Хозе В А *Материалы X зимней школы ЛИЯФ по физике ядра и элементарных частиц* Ч. II (Л.: Изд-во ЛИЯФ, 1975) с. 409
9. Грибов В Н *ЯФ* **5** 399 (1967)
10. Bassetto A, Ciafaloni M, Marchesini G *Phys. Rep.* **100** 201 (1983)
11. Jauch J M, Rohrlich F *Helv. Phys. Acta* **27** 613 (1954)
12. Yennie D R, Frautschi S C, Suura H *Ann. Phys.* **13** 379 (1961)
13. Горшков В Г *ЖЭТФ* **40** 1481 (1961)
14. Nakanishi N *Prog. Theor. Phys.* **19** 159 (1958)
15. Kinoshita T *J. Math. Phys.* **3** 650 (1962)
16. Lee T D, Nauenberg M *Phys. Rev. B* **133** 1549 (1964)
17. Weinberg S *Phys. Rev. B* **140** 516 (1965)
18. Murota T *Prog. Theor. Phys.* **24** 1109 (1960)

19. Bloch F, Nordsieck A *Phys. Rev.* **52** 54 (1937)
20. Magnus W *Comm. Pure Appl. Math.* **7** 649 (1954)
21. Chung V *Phys. Rev. B* **140** 1110 (1965)
22. Фрадкин Е С *Тр. ФИАН* **29** 7 (1965)
23. Storgow B *Nuovo Cimento A* **54** 15 (1968)
24. Kibble T W B *J. Math. Phys.* **9** 315 (1968)
25. Kibble T W B *Phys. Rev. B* **173** 1527; **174** 1882; **175** 1624 (1968)
26. Кулиш П П, Фаддеев Л Д *ТМФ* **4** 153 (1970)
27. Zwanziger D *Phys. Rev. D* **7** 1082 (1973)
28. Zwanziger D *Phys. Rev. D* **11** 3481; 3504 (1975)
29. Papanicolaou N *Phys. Rep.* **24** 229 (1976)
30. Dollard J J *Math. Phys.* **5** 729 (1964)
31. Грибов В Н, Липатов Л Н *ЯФ* **15** 781; 1218 (1972)
32. Липатов Л Н *ЯФ* **20** 181 (1974)
33. Altarelli G, Parisi G *Nucl. Phys. B* **126** 298 (1977)
34. Altarelli G *Phys. Rep.* **81** 1 (1982)
35. Sterman G, Weinberg S *Phys. Rev. Lett.* **39** 1436 (1977)
36. Sterman G *Phys. Rev. D* **17** 2773; 2789 (1978)
37. Libby S L, Sterman G *Phys. Rev. D* **18** 3252 (1978)
38. Catani S, Ciafaloni M *Nucl. Phys. B* **249** 301 (1985)
39. Dokshitzer Yu L, Dyakonov D I, Troyan S I *Phys. Rep.* **58** 270 (1980)
40. Mueller A H *Phys. Rep.* **73** 237 (1981)
41. Temple G *Proc. R. Soc. London Ser.* **121** 673 (1928)
42. Тэйлор Дж *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений* (М.: Мир, 1975) с. 315
43. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1963) с. 544
44. Dalitz R *Proc. R. Soc. London Ser.* **206** 509 (1951)
45. Weinberg S *Phys. Rev. B* **138** 988 (1965)
46. Судаков В В *ЖЭТФ* **30** 87 (1956)
47. Fock V A Z. *Phys.* **57** 261 (1929)
48. Weyl H *Proc. Natl. Acad. Sci.* **15** 323 (1929)
49. De Witt B *Phys. Rev.* **162** 1239 (1967)
50. Федорюк М В *Асимптотика: Интегралы и ряды* (М.: Наука, 1987)
51. Прохоров Л В, Фурсаев Д В, Шабанов С В *ТМФ* **97** 373 (1993)
52. Amrein W O, Martin Ph A, Misra B *Helv. Phys. Acta* **43** 313 (1970)
53. Прохоров Л В *ЭЧАЯ* **27** 1399 (1996)
54. Hori S *Prog. Theor. Phys.* **7** 578 (1952)
55. Neumann J *Comp. Math.* **6** 1 (1938)
56. Bargmann V *Comm. Pure Appl. Math.* **14** 187 (1961)
57. Bargmann V *Proc. Natl. Acad. Sci.* **48** 199 (1962)
58. Neumann J *Math. Ann.* **76B** 428 (1931)
59. Prokhorov L V, Shabanov S V *Int. J. Mod. Phys. A* **7** 7815 (1992)
60. Прохоров Л В *ЭЧАЯ* **25** 559 (1994)
61. Прохоров Л В, Шабанов С В *Гамильтонова механика калибровочных систем* (Л.: Изд-во СПбГУ, 1997)
62. Радюшкин А В *ЭЧАЯ* **20** 97 (1989)
63. Korchemsky G P *Mod. Phys. Lett. A* **4** 1257 (1989)
64. Юдин О Г "Длинноволновое излучение и асимптотические состояния в КЭД и КХД", Дипломная работа (Л.: ЛГУ, 1991)
65. Levy M, Sucher J *Phys. Rev.* **186** 1656 (1969)
66. Барбашов Б М, Нестеренко В В *Приближение эйконала для процессов высокоэнергетического рассеяния частиц* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977)
67. Свидзинский А В *ЖЭТФ* **31** 324 (1956)
68. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* 3-е изд. (М.: Наука, 1976)
69. Weldon H A *Phys. Rev. D* **44** 3955 (1991)
70. Jackiw R, Nair V P *Phys. Rev. D* **47** 5601 (1993)
71. Blaizot J-P, Iancu E *Phys. Rev. D* **56** 7877 (1997)
72. Прохоров Л В *ТМФ* **10** 264 (1972)
73. Fiore G, Modanese G *Nucl. Phys. B* **477** 623 (1996)
74. 't Hooft G *Phys. Lett. B* **198** 61 (1987)
75. Muzinich L, Soldate M *Phys. Rev. D* **37** 353 (1988)
76. Amati D, Ciafaloni H, Veneziano G *Int. J. Mod. Phys. A* **3** 1615 (1988)
77. Amati D, Ciafaloni H, Veneziano G *Nucl. Phys. B* **347** 550 (1990)
78. Verlinde E, Verlinde H *Nucl. Phys. B* **371** 246 (1992)
79. Lipatov L N *Phys. Rep.* **286** 131 (1997)
80. Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 3-е изд. (М.: Наука, 1969)
81. Харди Г Г, Литтлвуд Дж Е, Поля Г *Неравенства* (М.: ИЛ, 1948) с. 29
82. Криворученко М И *УФН* **164** 643 (1994)

Infrared and collinear divergences in gauge theories

L.V. Prokhorov

Institute of Physics, St.-Petersburg State University

198904 St.Petersburg, Russian Federation

Tel. (812) 428-75 90. Fax (7-812) 428- 72 40

E-mail: lev.prokhorov@pobox.spbu.ru

The problem of infrared and collinear divergences is considered within the framework of perturbation theory and the scattering operator redefinition method. IR divergent processes in electrodynamics and gravitation (perturbation theory) are described, and for the case of electrodynamics a scattering operator free from IR divergences is constructed. For the massless electrodynamics model, a recipe for the construction of a scattering operator free from both IR and collinear divergences is given. The meaning of experimental parameters entering the final formulas is discussed, and it is shown that the S matrix factorization (i.e., the approximate independence of hard and soft processes) makes trivial the theorem on the cancellation of divergences in observables. A method for finding divergences in theories with multiparticle vertices is presented.

PACS numbers: **11.10.-z, 11.15.-q**

Bibliography 82 — references

Received 8 April 1998, revised 28 April 1999