Январь 1999 г. **Том 169, № 1**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс?

Ю.Л. Климонтович

Понятие "стохастический резонанс" (СР) было введено в 1981 г. в связи с исследованием периодичности наступления ледников в северном полушарии Земли. Для описания этого явления используется релаксационная модель — передемпфированный бистабильный осциллятор. СР проявляется при действии периодического сигнала и шума в немонотонной зависимости отклика при изменении интенсивности шума. Это явление более естественно назвать "стохастическая фильтрация" (СФ), так как фактически рассматривается зависимость ширины полосы пропускания фильтра от интенсивности шума. Показано, что при малом затухании в бистабильном осцилляторе при действии сигнала и шума существует и обычный СР при совпадении частоты сигнала с эффективной частотой бистабильного осциллятора, зависящей от интенсивности шума. Это дает возможность управлять резонансом путем изменения интенсивности шума.

PACS numbers: 02.50.Ey, **05.40.+j**, **05.45.+b**, **87.70.+c**

Содержание

Ю.Л. Климонтович. Московский государственный университет, физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы, Россия
Тел. (095) 939-38-25
Факс (095) 143-85-47
E-mail: ylklim@hklim.phys.msu.su

Статья поступила 18 марта 1998 г.,
после доработки 22 сентября 1998 г.

1. Введение

В 1981 – 1982 гг. в связи с исследованием периодичности наступления ледников на Земле в работах [1 – 3] был введен новый термин "стохастический резонанс" (СР). Этот термин означает, что при одновременном действии на систему периодического сигнала и шума настройка на "резонанс" достигается благодаря немонотонной зависимости отклика рассматриваемой системы от интенсивности шума, например температуры.

При теоретическом исследовании СР чаще других используется релаксационная модель — бистабильный передемпфированный осциллятор. Слово "передемпфированный" означает, что коэффициент трения много больше характерной собственной частоты осциллятора. Термин "резонанс" имеет здесь, однако, нестандартный смысл. Он отражает немонотонную ("резонансную") зависимость отклика бистабильного элемента на внешнее воздействие от интенсивности шума.

Передемпфированный осциллятор — релаксационная система, поэтому резонанс в обычном физическом понимании здесь не может иметь места. Рассматриваемое явление представляет собой, фактически, немонотонную зависимость ширины полосы пропускания фильтра от интенсивности шума, поэтому более адекватен для него термин "стохастическая фильтрация" (СФ).

Неадекватность термина "резонанс" для процесса в передемпфированном осцилляторе неоднократно отмечалась (см., например, [4, 5]). Однако термин СР в указанном выше смысле продолжает широко использоваться в литературе.

Первые два обзора теоретических и экспериментальных исследований по "стохастическому резонансу" [6, 7] были опубликованы в 1994 г., более подробный обзор опубликован в январе 1998 г. [8]. Наконец, самый свежий обзор по СР публикуется в настоящем выпуске УФН [9]. Он отнюдь не дублирует работу [8] и содержит изложение новых вопросов, в исследование и решение которых многое внесли и авторы последнего обзора.

Что же все-таки служит основанием для использования термина СР при исследовании воздействия периодического сигнала и шума на передемпфированный бистабильный осциллятор?

Начиная с самых первых работ (см. [8, 9]) используется следующее представление о резонансе. Предполагается, что в бистабильном передемпфированном осцилляторе "резонанс" наблюдается при совпадении частоты периодического сигнала с частотой переключения двумя состояниями бистабильной системы — частотой Крамерса. Однако, как мы увидим, в передемпфированном осцилляторе имеет место другое явление. Процесс при этом условии релаксационный. Используя электромеханическую аналогию, можно сказать, что мы имеем дело с электрической цепью из сопротивления и конденсатора (RC-цепочкой) с нелинейной емкостью. Такую цепочку можно рассматривать как электрический фильтр, характеризуемый откликом на внешнее периодическое воздействие. Ширина полосы пропускания фильтра зависит от интенсивности шума. Существенно, что зависимость является в общем случае немонотонной. Это и открывает возможность управления полосой пропускания путем изменения интенсивности шума. Такой процесс естественно называть не "стохастический резонанс", а "стохастическая фильтрация".

Представляет интерес исследование влияния периодического сигнала и шума на бистабильный осциллятор в другом предельном случае, когда коэффициент трения много меньше характерной собственной частоты — "эффективной частоты" бистабильного осциллятора. Резонанс имеет место при совпадении частоты сигнала и эффективной частоты. Поскольку эффективная частота зависит от интенсивности шума, то возможно управление резонансом с помощью шума. Это и оправдывает применение в данном случае термина "стохастический резонанс".

В настоящей статье рассматриваются явления как СФ, так и СР. Описание СФ проводится на основе уравнения Эйнштейна – Смолуховского для функции распределения значений обобщенной координаты и времени [10 – 13]. Явление СР описывается на основе более общего уравнения — уравнения Фоккера – Планка для функции распределения обобщенных координаты и скорости, а также времени [10 – 13].

Отмечено также, что возможно и единое описание как СФ, так и СР на основе обобщенного уравнения Фоккера – Планка [12, 13].

Оба явления (СФ и СР) описываются двумя альтернативными способами. Один из них основан на самосогласованных уравнениях для первого и второго моментов координаты и скорости осциллятора. Такое приближение использовалось [12 – 14] при расчете флуктуаций в автоколебательных системах (в генераторе Ван-дер-Поля и в лазерах), а также в теории фазовых переходов второго рода. Другой близок к традиционному, когда существенную роль играют переходы Крамерса между двумя состояниями бистабильного осциллятора.

Выявлены условия, при которых оба альтернативных способа описания дают с точностью до постоянных множителей совпадающие результаты. Это возможно, когда высота барьера, разделяющего состояния бистабильного осциллятора, мала. При высоких барьерах два рассматриваемых способа приводят к разным результатам. Преимущество того или иного способа описания существенно зависит от условий эксперимента.

Явление СФ (или СР в традиционном понимании) обнаружено и исследовано во многих физических, химических и биологических системах. Результаты этих исследований детально обсуждаются в двух последних обзорах [8,9] по СР (в традиционном понимании). Отметим, что последний обзор [9] носит название "Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка". Обсуждение этого интереснейшего аспекта теории СР требует отдельного рассмотрения.

2. Обобщенное уравнение Фоккера – Планка для бистабильного осциллятора

2.1. Общий случай

Запишем обобщенное уравнение Фоккера – Планка (см. (17.1.4) в [13]) для одномерного бистабильного осциллятора — осциллятора Дуффинга в термостате с температурой T:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F(x,t)}{m}\,\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(D_{(v)}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}(\gamma v f) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{(x)}\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F(x,t)}{\gamma m}\,f\right), \qquad \int f(x,v,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 1\,. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что средняя скорость среды, в которой совершается броуновское движение бистабильного осциллятора, равна нулю.

Поясним использованные в этом уравнении обозначения.

Сила представляется в виде суммы двух частей:

$$F(x,t) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + F(t)\,, \tag{2}$$

где $U(x)$ — потенциальная энергия осциллятора с нелинейной жесткостью:

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\left(1 - a + \frac{ab}{4}\,x^2\right). \tag{3}$$

Здесь ω_0 — собственная частота линейного осциллятора; b — коэффициент нелинейности; a — управляющий параметр.

2.2. Выбор управляющего параметра

Выделим два случая.

1. Система переключения. Допустим, что управляющий параметр задается системой переключения: по мере увеличения a от 0 до 2 коэффициент линейной жесткости уменьшается от его максимального положительного значения $m\omega_0^2$ до максимального отрицательного значения $-m\omega_0^2$. При этом условии значения управляющего параметра заключены в пределах

$$0 \leqslant a \leqslant 2\,. \tag{4}$$

Ниже мы выделим три характерных значения управляющего параметра: $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$.

2. Управление температурой. Жесткость зависит от температуры. При некоторой "критической температуре" она обращается в нуль и при дальнейшем понижении температуры становится отрицательной. Такая зависимость возможна, если бистабильность возникает, например, в электрическом контуре при фазовом переходе второго рода в диэлектрике конденсатора. При качественном рассмотрении температурную зависимость можно задать выражением

$$1 - a = \tanh \frac{T - T_{\mathrm{c}}}{\Delta T} . \tag{5}$$

Величина ΔT характеризует "ширину" критической области по температуре.

Таким образом, в этом случае имеются две возможности управлять бистабильным элементом: путем изменения интенсивности шума (температуры) и путем изменения управляющего параметра a.

2.3. Равновесное решение и коэффициенты диффузии

Вернемся к обобщенному кинетическому уравнению (1). При $F(t) = 0$ оно имеет равновесное решение в виде канонического распределения Гиббса (или совместного распределения Максвелла – Больцмана) с соответствующей функцией Гамильтона:

$$f(x, v) = C \exp\left(-\frac{H(x, v)}{k_{\mathrm{B}} T}\right), \qquad H(x, v) = \frac{mv^2}{2} + U(x) . \tag{6}$$

Потенциальная энергия определяется выражением (3).

В уравнении (1) диссипация обусловлена диффузией как по скорости, так и по координате. Для линейного (при $a = 0$) осциллятора соответствующие коэффициенты диффузии определяются соотношениями Эйнштейна

$$D_{(v)} = \gamma \frac{k_{\mathrm{B}} T}{m} ; \qquad D_{(x)} = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\gamma m} . \tag{7}$$

При $F(t) = 0$ два диффузионных члена описывают установление равновесия как по скорости, так и по координате.

3. Диффузионное приближение

3.1. Диффузионное уравнение

При $a = 0$ времена релаксации $\tau_{(v)}$ и $\tau_{(x)}$ определяются выражениями

$$\tau_{(v)} \approx \frac{1}{\gamma} , \qquad \tau_{(x)} \approx \frac{\gamma}{\omega_0^2} \equiv \frac{1}{\Gamma} ; \qquad \Gamma = \frac{\omega_0^2}{\gamma} . \tag{8}$$

Отсюда следует, что в зависимости от значения безразмерного параметра γ/ω_0 можно выделить два предельных случая.

Первый, когда выполняется неравенство

$$\frac{\tau_{(x)}}{\tau_{(v)}} \approx \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \gg 1 \qquad \text{при} \quad \gamma \gg \omega_0 . \tag{9}$$

В этом случае пространственная диффузия является значительно более медленным процессом, чем диффузия по скоростям.

Это делает возможным переход от обобщенного уравнения Фоккера – Планка к уравнению Эйнштейна – Смолуховского для функции распределения $f(x, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{(x)} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F(x, t)}{\gamma m} f\right); \qquad \int f(x, t)\, \mathrm{d}x = 1 . \tag{10}$$

Будем называть этот случай "диффузионным приближением". Равновесным решением уравнения (10) является распределение Больцмана.

3.2. Три характерных значения управляющего параметра

В зависимости от значения управляющего параметра можно выделить три характерных состояния:

1) линейный осциллятор ($a = 0$);

2) критическая точка ($a = 1$). При этом значении управляющего параметра линейная жесткость осциллятора обращается в нуль и потенциальная энергия определяется выражением

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2}{8}\, bx^4 ; \tag{11}$$

3) бистабильный осциллятор ($1 \leqslant a \leqslant 2$). При максимальном отрицательном значении линейной жесткости, т.е. при $a = 2$, нелинейный потенциал определяется выражением

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\left(-1 + \frac{b}{2}\, x^2\right) \tag{12}$$

и высота барьера, разделяющего две потенциальные ямы, максимальна. Она зависит от двух параметров ω_0 и b. При $F(t) = 0$ высота барьера выражается как

$$\Delta U = U(x_{\max}) - U(x_{\min}) , \qquad x_{\max} = 0 , \qquad x_{\min} = \pm\sqrt{\frac{1}{b}} . \tag{13}$$

Наряду с характерными временами (9) в области бистабильности возникает дополнительное характерное время — время, за которое осуществляется переход между двумя бистабильными состояниями. Принято называть его "время Крамерса". При небольших интенсивностях шума (небольших значениях температуры) оно экспоненциально зависит от высоты барьера и значительно превышает времена релаксации для линейного осциллятора.

При определении отклика на малое внешнее воздействие (только такие воздействия и будут рассматриваться ниже) для выделения стационарного состояния необходимо, чтобы время наблюдения превышало бы все характерные времена релаксации, следовательно, и время Крамерса. При этом условии можно рассматривать переходы через барьер при наличии шума (температуры) как медленный диффузионный процесс.

Приведем еще некоторые характерные параметры. Это амплитуда тепловых смещений, а также безразмерный параметр ε:

$$x_T^2 = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{m\omega_0^2} , \qquad \varepsilon \equiv x_T^2 b < 1 . \tag{14}$$

Оценим также время пространственной диффузии при малых значениях управляющего параметра:

$$\tau_{D_{(x)}} \approx \frac{x_T^2}{D_{(x)}} \approx \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{1}{\Gamma} \approx \tau_{(x)} \,. \tag{15}$$

По мере роста управляющего параметра a возникнет еще одно характерное время — время Крамерса. Оно характеризует процесс переключения состояний бистабильного осциллятора.

3.3. Расчет дисперсии. Самосогласованное приближение по второму моменту

Точное значение дисперсии в равновесном состоянии определяется выражением

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f_0(x)\,\mathrm{d}x \,. \tag{16}$$

В нем $f_0(x)$ — распределение Больцмана с бистабильным потенциалом (9). Для физического анализа снова выделим три значения управляющего параметра и рассмотрим самосогласованное приближение по второму моменту. Такое приближение использовалось при расчете флуктуаций в генераторе Ван-дер-Поля и в лазерах, а также в теории фазовых переходов второго рода [12–14].

Предположим, что при $F(t)=0$ имеется ансамбль невзаимодействующих бистабильных осцилляторов. При этом заполнение двух потенциальных ям одинаково вероятно и, следовательно, первый момент равен нулю, т.е. $\langle x \rangle = 0$. Таким образом, надо обратиться к уравнению для второго момента.

Введем обозначение для квадрата смещения: $x^2 = E$ и используем самосогласованное приближение по второму моменту переменной x

$$\langle x^4 \rangle \equiv \langle E^2 \rangle \to \langle E \rangle \langle E \rangle \,. \tag{17}$$

Тогда из диффузионного уравнения получим замкнутое уравнение для $\langle E \rangle$

$$\frac{\mathrm{d}\langle E \rangle}{\mathrm{d}t} = 2\left[D_{(x)} - \Gamma\left(1 - a + \frac{ab}{2}\, b\langle E \rangle\right)\langle E \rangle\right]. \tag{18}$$

Заметим, что релаксация второго момента к стационарному состоянию при $a=0$ происходит за время, характерное для пространственной диффузии (см. (15)). Покажем, что при наличии внешней силы, когда среднее значение $\langle x \rangle$ уже не равно нулю, его время релаксации может быть значительно больше, чем для второго момента. На этом основании в уравнении для $\langle E \rangle$ можно пренебречь временно́й производной и переписать его в виде

$$\langle E \rangle \left[(1-a) + \frac{ab}{2}\,\langle E \rangle\right] = \frac{D_{(x)}}{\Gamma} = x_T^2 \,, \qquad \langle E \rangle = \langle x^2 \rangle \,. \tag{19}$$

Значения дисперсии по этому уравнению для трех выделенных значений управляющего параметра близки к тем, которые следуют из точного выражения (16).

3.4. Эффективное приближение Гаусса

Аналитическое решение диффузионного уравнения (10) для бистабильного осциллятора при произвольных значениях управляющего параметра невозможно. В связи с этим полезны более простые модельные уравнения.

Будем рассматривать переходы через барьер при наличии шума как диффузионный процесс с соотношением Эйнштейна $\langle x^2 \rangle = D_{(x)}\tau_{(x)}$. Тогда вместо уравнения (10) имеем более простое модельное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D_{(x)}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{1}{\tau_{(x)}}\,x - \frac{F(t)}{\gamma m}\right) f\right], \qquad \langle x^2 \rangle = D_{(x)}\tau_{(x)} \,. \tag{20}$$

Его равновесным решением при $F(t)=0$ является распределение Гаусса

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\langle x^2 \rangle}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}\right). \tag{21}$$

Дисперсия $\langle x^2 \rangle$ в самосогласованном приближении по второму моменту определяется формулой (19) для произвольных значений управляющего параметра. Вторым параметром служит температура (интенсивность шума). Модельное диффузионное уравнение (20) справедливо при произвольных значениях этих двух параметров. Удобно представить распределение Гаусса (21) в более привычной форме распределения Больцмана для эффективного линейного осциллятора

$$f(x) = \sqrt{\frac{m\omega_{\mathrm{eff}}^2}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}}\,\exp\left(-\frac{m\omega_{\mathrm{eff}}^2 x^2}{2k_{\mathrm{B}} T}\right). \tag{22}$$

Влияние нелинейности учитывается введением эффективной частоты ω_{eff}^2. Сопоставляя распределения (21), (22), получаем следующее соотношение между квадратом эффективной частоты и дисперсией:

$$\omega_{\mathrm{eff}}^2 = \omega_0^2\,\frac{x_T^2}{\langle x^2 \rangle}\,; \qquad x_T^2 = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{m\omega_0^2} \,. \tag{23}$$

С помощью приведенных выше формул находим значения ω_{eff}^2 для трех выделенных значений управляющего параметра.

4. Стохастическая фильтрация

4.1. Релаксация первого момента в самосогласованном приближении по второму моменту

Чтобы получить уравнение для описания эволюции первого момента при условии малой силы, используем приближенное диффузионное уравнение (20). В результате для бистабильного осциллятора при наибольшем произвольном значении управляющего параметра и при наличии слабого внешнего поля имеем следующее уравнение для $\langle x \rangle$:

$$\frac{\mathrm{d}\langle x \rangle}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_{(x)}}\,\langle x \rangle = \frac{F(t)}{m\gamma} \equiv f(t) \,, \qquad \frac{1}{\tau_{(x)}} \equiv \Delta\omega_{(x)} = \frac{D_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \,. \tag{24}$$

Дисперсия $\langle x^2 \rangle$ (для малых значений внешней силы) при всех значениях управляющего параметра определяется решением уравнения (19).

Таким образом, мы имеем замкнутую систему уравнений для первого и второго моментов. Напомним, что в (19) не учитывается временно́е изменение. Это оправдано для значений управляющего параметра в области $1 \leqslant a \leqslant 2$.

4.2. Отклик на внешнее воздействие. Стохастическая фильтрация

Уравнение для первого момента учитывает роль нелинейности исходного уравнения для передемпфированного осциллятора через определение времени релаксации.

Запишем выражение для соответствующего отклика на внешнее воздействие:

$$\langle x \rangle_\omega = \chi(\omega)\,\frac{F(\omega)}{\gamma m}\,, \qquad \chi(\omega) = \frac{1}{-\mathrm{i}\omega + 1/\tau_{(x)}}\,. \tag{25}$$

Реальная часть восприимчивости представляет пример спектральной линии Рэлея:

$$\operatorname{Re}\chi(\omega) = \frac{1/\tau_{(x)}}{\omega^2 + \left(1/\tau_{(x)}\right)^2}\,, \qquad \frac{1}{\tau_{(x)}} = \frac{D_{(x)}}{\langle x^2 \rangle}\,. \tag{26}$$

Приведенные формулы определяют ширину этой линии при всех значениях управляющего параметра в пределах $0 \leqslant a \leqslant 2$.

Зададим сигнал на входе в виде

$$F(t) = A\cos\Omega t\,, \qquad F(\omega) = \pi A\left[\delta(\omega+\Omega) + \delta(\omega-\Omega)\right]. \tag{27}$$

Тогда отклик $\langle x(t) \rangle$ на частоте Ω определяется выражением

$$\langle x(t) \rangle_\Omega = A\operatorname{Re}\chi(\Omega)\cos\Omega t\,. \tag{28}$$

Отсюда после усреднения по периоду $2\pi/\Omega$ имеем

$$\sqrt{\left\langle \left\langle x(t) \right\rangle_\Omega^2 \right\rangle^{2\pi/\Omega}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\operatorname{Re}\chi(\Omega)\,. \tag{29}$$

Ширина линии $\operatorname{Re}\chi(\Omega)$ (полоса фильтра $\Delta\omega_{\langle x\rangle} = D_{(x)}/\langle x^2 \rangle$) через значения $\langle x^2 \rangle$ зависит как от управляющего параметра a, так и от интенсивности шума (температуры). Среднее значение $\langle E \rangle = \langle x^2 \rangle$ находим, решая уравнения (19). Рассмотрим три характерных значения управляющего параметра.

1. Линейный осциллятор ($a = 0$). В этом случае

$$\langle E \rangle = x_T^2\,, \qquad \frac{1}{\tau_{\langle x\rangle}} = \frac{D_{(x)}}{x_T^2} = \Gamma\,. \tag{30}$$

Естественно, что в этом случае время релаксации для первого момента совпадает с соответствующим временем для линейного осциллятора. Существенные изменения происходят в критической точке.

2. Критическая точка ($a = 1$). В этом случае решение уравнения (19) записывается в виде

$$\langle E \rangle = x_T^2\sqrt{\frac{2}{x_T^2 b}}\,, \qquad \frac{1}{\tau_{\langle x\rangle}} = \sqrt{\frac{x_T^2 b}{2}}\,\frac{D_{(x)}}{x_T^2} < \frac{D_{(x)}}{x_T^2}\,. \tag{31}$$

Мы видим, что в критической точке возникает зависимость времени релаксации первого момента от интенсивности шума (температуры). При этом с понижением температуры ширина полосы фильтра уменьшается, а соответствующее время релаксации растет.

3. Бистабильный осциллятор при максимальном значении управляющего параметра ($a = 2$). Решение уравнения (19)

$$\langle E \rangle = \frac{1}{b}\,, \qquad \frac{1}{\tau_{\langle x\rangle}} \equiv \Delta\omega_{\langle x\rangle} = \Gamma x_T^2 b \ll \Gamma\,. \tag{32}$$

Мы видим, что в рассматриваемом здесь самосогласованном приближении по второму моменту ширина полосы фильтра с понижением температуры уменьшается по линейному закону.

В этом разделе при расчете использовалось соотношение Эйнштейна $\langle x^2 \rangle = D_{(x)}\tau_{\langle x\rangle}$ и для бистабильного осциллятора. Это естественно в критической области, в которой высота барьера, разделяющего два возможных состояния, мала. Чтобы продвинуться в сторону высоких барьеров, используем ниже и другое приближение, основанное на определении времени релаксации как времени перехода через барьер. Это приведет нас к известной формуле Крамерса. Прежде, однако, рассмотрим вопрос о "резонансной" зависимости отклика на регулярное воздействие и спектральной плотности флуктуаций от интенсивности шума.

4.3. "Резонанс" при стохастической фильтрации

Вернемся к формуле (25), которая определяет отклик на периодическое воздействие. Эта же функция определяет и спектральную плотность флуктуаций δx при $F(t) = 0$:

$$(\delta x\delta x)_\omega = \frac{2/\tau_{(x)}}{\omega^2 + \left(1/\tau_{(x)}\right)^2}\,\langle x^2 \rangle \equiv 2\operatorname{Re}\chi(\omega)\langle x^2 \rangle\,. \tag{33}$$

Рассмотрим для примера зависимость функции $\operatorname{Re}\chi(\omega)$ от интенсивности шума в случае бистабильного состояния при $a = 2$. С помощью выражения (19) находим

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\chi(\omega) = \frac{\Gamma x_T^2 b}{\omega^2 + (\Gamma x_T^2 b)^2}\,; \qquad x_T^2 = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m\omega_0^2}\,. \tag{34}$$

Мы видим, что при фиксированном значении частоты ω зависимость от температуры (интенсивности шума) немонотонная. Максимальное значение наблюдается при условии

$$\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{res}}}{m\omega_0^2} = \omega^2\,. \tag{35}$$

Поскольку через функцию $\operatorname{Re}\chi(\omega)$ выражается и отклик на периодическую силу, то и для него имеет место "резонансная" зависимость от интенсивности шума. Этот эффект естественно назвать "стохастическая фильтрация", поскольку речь идет, фактически, о зависимости полосы пропускания фильтра от интенсивности шума. Термин же "стохастический резонанс" является здесь слишком условным и его целесообразней использовать при описании не релаксационных, а колебательных процессов в бистабильном осцилляторе в "термостате".

Заметим, что зависимость приведенных характеристик от интенсивности шума в "резонансной" области не является симметричной. При малых интенсивностях шума и заданной частоте $\omega = \Omega$ средний отклик пропорционален T, а при больших — $1/T^2$. Это качественно согласуется с результатами численных экспериментов, приведенных в обзоре [8].

До сих пор явление стохастической фильтрации рассматривалось при использовании самосогласованного приближения по второму моменту. Рассмотрим теперь приближение, основанное на теории Крамерса. Именно оно служит основой для построения традиционной теории "стохастического резонанса".

5. Теория Крамерса и стохастическая фильтрация

5.1. Вводные замечания

Проблеме Крамерса посвящено большое число работ и несколько обзоров. Отметим, в частности, подробный обзор [15], написанный в связи с 50-летием классической работы Крамерса [16]. Справедливости ради отметим, что основополагающая работа этого направления была опубликована тремя авторами: Л. Понтрягиным, А. Андроновым и А. Виттом в 1933 г. [17], т.е. задолго до работы самого Крамерса.

Решить задачу о времени перехода через барьер возможно двумя путями: на основе решения временнóго уравнения (10) для бистабильного осциллятора и на основе решения стационарного диффузионного уравнения с соответствующим "источником" и "стоком", при наличии которых возможен постоянный поток броуновских частиц. Относительно простой способ решения стационарной задачи использован в разделе 17.6 книги [13]. Приведем необходимые здесь результаты.

Используем уравнение (10) для стационарного состояния. Выполним в нем одно интегрирование и введем обозначение для постоянного потока частиц $j_0 \equiv 1/\tau_{\rm tr}$. Здесь учтено, что поток имеет размерность обратного времени и введено обозначение для времени перехода (transition time). В результате получаем уравнение первого порядка

$$D_{(x)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\gamma m} \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} f = \frac{1}{\tau_{\rm tr}} , \tag{36}$$

где по-прежнему $D_{(x)} = k_{\rm B}T/m\gamma$ — коэффициент пространственной дисперсии, а $\tau_{\rm tr}$ — время перехода через барьер. Решение этого уравнения приводит к следующему определению времени перехода:

$$\tau_{\rm tr} = \frac{1}{D_{(x)}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{U(x)}{k_{\rm B}T}\right) \left(\int_{x}^{0} \exp \frac{U(x')}{k_{\rm B}T}\, \mathrm{d}x'\right) \mathrm{d}x . \tag{37}$$

Рассмотрим снова три характерных случая.

1. Линейный осциллятор ($a = 0$)

$$\frac{U(x)}{k_{\rm B}T} = \frac{x^2}{2x_T^2} , \qquad \tau_{\rm tr} \approx \frac{x_T^2}{D_{(x)}} . \tag{38}$$

Сравнивая этот результат с выражением (37), получаем следующее предельное значение времени перехода:

$$\tau_{\rm tr} \approx \frac{x_T^2}{D_{(x)}} = \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{1}{\Gamma} = \tau_{D_{(x)}} = \tau_{(x)} . \tag{39}$$

Таким образом, в пределе моностабильного осциллятора время перехода совпадает с определенным выше (см. (15)) временем диффузии.

2. Критическая точка ($a = 1$)

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2}{8}\, bx^4 , \qquad \tau_{\rm tr} \approx \sqrt{\frac{1}{x_T^2 b}\, \frac{x_T^2}{D_{(x)}}} . \tag{40}$$

Таким образом, время перехода в критической точке того же порядка, что и время диффузии (31) в самосогласованном приближении по второму моменту. Однако по мере продвижение в глубь бистабильной области (по мере $a \to 2$) расхождение результатов расчета времен релаксации двумя способами возрастает по экспоненциальному закону.

3. Бистабильный осциллятор при максимальном значении управляющего параметра ($a = 2$). В этом случае выражение (37) можно преобразовать к виду

$$\tau_{\rm tr} \approx \sqrt{2}\,\pi\, \frac{x_T^2}{D_{(x)}} \exp \frac{1}{4x_T^2 b} . \tag{41}$$

Соответствующее выражение для времени перехода записывается как

$$\tau_{\rm tr} \approx \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma} \exp \frac{1}{4x_T^2 b} \gg \frac{1}{\Gamma} . \tag{42}$$

Используем полученные результаты для формулировки модельного уравнения пространственной диффузии.

5.2. Отклик на внешнее воздействие. Стохастическая фильтрация

По теории Крамерса уравнение для первого момента

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_{\rm tr}} \langle x\rangle = \frac{F(t)}{\gamma m} . \tag{43}$$

Оно отличается от соответствующего уравнения (24) заменой

$$\frac{1}{\tau_{(x)}} = \frac{D_{(x)}}{\langle x^2\rangle} \to \frac{1}{\tau_{\rm tr}} . \tag{44}$$

Напомним, что в самосогласованном приближении по второму моменту величина $\langle x^2\rangle$ при всех значениях управляющего параметра определяется решением уравнения (19).

Уравнение (43) учитывает роль нелинейности исходного уравнения для передемпфированного осциллятора через время Крамерса, при расчете которого нелинейность бистабильного осциллятора играет принципиальную роль.

Проведем замену (44) в выражениях (25), (26). В результате получим необходимые формулы для описания стохастической фильтрации при использовании теории Крамерса:

$$\langle x\rangle_\omega = \chi(\omega)\, \frac{F(\omega)}{\gamma m} , \qquad \chi(\omega) = \frac{1}{-\mathrm{i}\omega + 1/\tau_{\rm tr}} . \tag{45}$$

Отсюда следует выражение для реальной части восприимчивости, которая представляет пример спектральной линии Рэлея:

$$\mathrm{Re}\,\chi(\omega) = \frac{1/\tau_{\rm tr}}{\omega^2 + (1/\tau_{\rm tr})^2} . \tag{46}$$

Формулы (38) – (41) определяют полосу фильтра, а также форму соответствующей "резонансной кривой" передемпфированного осциллятора при всех значениях управляющего параметра в пределах $0 \leqslant a \leqslant 2$.

Полоса фильтра, а также и форма "резонансной кривой" зависят как от управляющего параметра a, так и от интенсивности шума (температуры). При заданной интенсивности шума полоса пропускания фильтра сужается по мере увеличения управляющего параметра. При заданном же значении управляющего параметра сужение полосы фильтра происходит при уменьшении температуры.

В бистабильной области при наибольшем значении управляющего параметра $a = 2$ различие результатов, полученных на основе рассмотренных двух альтернативных подходов, зависит лишь от значения одного безразмерного параметра $x_T^2 b$, который определяет высоту барьера в формуле Крамерса

$$\frac{U(x_{\max}) - U(x_{\min})}{D_{(x)}} = \frac{1}{4x_T^2 b}\,. \tag{47}$$

При значениях безразмерного параметра $4x_T^2 b \geqslant 1$ ("высокие" температуры) оба рассмотренных способа описания стохастической фильтрации приводят к близким результатам. В случае же "низких" температур, когда параметр $4x_T^2 b \ll 1$, мы попадаем в область столь низких частот, что становится уже существенным фликкер-шум.

Из изложенного следует, что широко распространенное мнение о существовании "стохастического резонанса" в передемпфированном бистабильном осцилляторе при наличии шума не имеет достаточных оснований. Традиционное понятие "резонанс", характерное для колебательных систем, используется здесь при описании немонотонной зависимости отклика в релаксационной системе от интенсивности шума. Это отнюдь не означает, что стохастический резонанс вообще не имеет места. Дело лишь в том, что для его проявления необходимы условия, противоположные рассмотренным выше. Именно, надо рассматривать не передемпфированный бистабильный осциллятор, а осциллятор с малым трением. Для этого вместо диффузионного уравнения будем использовать уравнение Фоккера – Планка для функции распределения $f(x, v, t)$.

6. Стохастический резонанс

Для описания реального стохастического резонанса используем уравнение Фоккера – Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F(x,t)}{m}\,\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left[D_{(v)}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\,[\gamma v f]\,. \tag{48}$$

При условии $F(t) = 0$ первые моменты равны нулю, а в слабом поле уравнения для первых моментов имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle v\rangle\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\langle v\rangle}{\mathrm{d}t} + \gamma\langle v\rangle + \omega_{\mathrm{eff}}^2\langle x\rangle = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{49}$$

Здесь снова введено обозначение для эффективной частоты (или эффективной жесткости). В самосогласованном приближении по второму моменту при произвольном значении управляющего параметра величина ω_{eff}^2 определяется выражением

$$\omega_{\mathrm{eff}}^2 = \omega_0^2\left(1 - a + \frac{ab}{2}\,\langle E\rangle\right). \tag{50}$$

Система уравнений для $\langle x\rangle$, $\langle v\rangle$ не является замкнутой, так как эффективная частота зависит от $\langle E\rangle \equiv \langle x^2\rangle$. Покажем, как замкнуть эти уравнения в приближении слабого поля, когда произведения первых моментов $\langle x\rangle$, $\langle v\rangle$ можно считать пренебрежимо малыми.

С помощью уравнения Фоккера – Планка (48) находим систему двух уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle}{\mathrm{d}t} = 2\langle x\rangle\langle v\rangle\,, \qquad \langle x^2\rangle = \langle E\rangle\,, \tag{51}$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle\langle v\rangle}{\mathrm{d}t} - \langle v^2\rangle + \omega_0^2\left(1 - a + \frac{ab}{2}\,\langle E\rangle\right)\langle E\rangle - \gamma\langle x\rangle\langle v\rangle = \frac{\langle x\rangle F(t)}{m}\,. \tag{52}$$

В первом уравнении правая часть имеет второй порядок малости. В рассматриваемом приближении она пренебрежимо мала. Следовательно, пренебрежимо мала и производная второго момента $\langle x^2\rangle$. В этом же приближении во втором уравнении можно опустить все члены, которые содержат первые моменты $\langle x\rangle$, $\langle v\rangle$. Тогда, учитывая, что $\langle v^2\rangle = k_{\mathrm{B}}T/m$, получим следующее уравнение:

$$\left(1 - a + \frac{ab}{2}\,\langle E\rangle\right)\langle E\rangle = x_T^2\,. \tag{53}$$

Мы пришли к уравнению, которое совпадает с (19).

Уравнения (49), (50), (53) составляют замкнутую систему уравнений. Рассмотрим снова решение уравнения (53), как ранее уравнения (19), для трех характерных значений управляющего параметра и найдем соответствующие значения для квадрата эффективной частоты ω_{eff}^2.

1. Линейный осциллятор ($a = 0$). В этом случае

$$\langle E\rangle = x_T^2\,, \qquad \omega_{\mathrm{eff}}^2 = \omega_0^2\,. \tag{54}$$

2. Критическая точка ($a = 1$). В этом случае

$$\langle E\rangle = x_T^2\sqrt{\frac{2}{x_T^2 b}}\,, \qquad \omega_{\mathrm{eff}}^2 = \omega_0^2\sqrt{\frac{x_T^2 b}{2}}\,. \tag{55}$$

3. Бистабильный осциллятор при максимальном значении управляющего параметра ($a = 2$). В этом случае решение

$$\omega_{\mathrm{eff}}^2 = \omega_0^2 x_T^2 b\,, \qquad x_T^2 = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m\omega_0^2}\,. \tag{56}$$

В результате для бистабильного осциллятора получаем следующее уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2\langle x\rangle}{\mathrm{d}x^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_T^2 b\langle x\rangle = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{57}$$

Найдем выражение для соответствующей комплексной восприимчивости. Определим ее равенством

$$\langle x\rangle_\omega = \chi(\omega)\,\frac{F(\omega)}{m}\,. \tag{58}$$

В результате получим

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 x_T^2 b - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}\,. \tag{59}$$

Из приведенных формул следует, что настройку на резонанс можно проводить путем изменения температуры (интенсивности шума). Обозначим T_{res} температуру, при которой имеет место равенство, выражающее условие резонанса,

$$\omega^2 = \omega_{\text{eff}}^2(T_{\text{res}}) \,. \tag{60}$$

В частности, при значении $a = 2$ условие резонанса определяется выражением

$$\omega^2 = \omega_0^2 x_{T_{\text{res}}}^2 b \,, \qquad x_{T_{\text{res}}}^2 = \frac{k_{\text{B}} T_{\text{res}}}{m\omega_0^2} \,. \tag{61}$$

При температурах выше или ниже T_{res} условие резонанса нарушается. Таким образом, действительно имеет место условие стохастического резонанса.

Заметим, что формально учет влияния диффузии Крамерса на явление стохастического резонанса можно учесть путем замены

$$x_T^2 b \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4x_T^2 b}\right) = \frac{1}{\Gamma\tau_{\text{tr}}} \tag{62}$$

в последней из приведенных выше формул. С учетом этого условие стохастического резонанса при наибольшем значении управляющего параметра (при $a = 2$) можно записать как

$$\omega^2 = \frac{1}{\Gamma\tau_{\text{tr}}} \,. \tag{63}$$

Заметим также, что для модели передемпфированного осциллятора условие стохастического резонанса задается (без достаточного обоснования) в виде

$$\omega \approx \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \,. \tag{64}$$

Обычно предполагается, что стохастический резонанс имеет место, когда частота сигнала порядка частоты переходов Крамерса. В рассматриваемой теории стохастического резонанса (при формальном использовании, путем замены (62), теории Крамерса) стохастический резонанс проявляется при условии

$$\omega \approx \omega_0 \sqrt{\frac{1}{\Gamma\tau_{\text{tr}}}} \approx \sqrt{\frac{\gamma}{\tau_{\text{tr}}}} \gg \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} \,. \tag{65}$$

Это условие не совпадает с (64). Стохастический резонанс имеет место на частотах, значительно превышающих частоту Крамерса.

Хотя в обзорах [8, 9] приведены результаты сопоставления теории с экспериментом для многих физических, химических и биологических систем, все же полезно продолжить это сопоставление с учетом приведенных альтернативных способов описания как СФ, так и СР.

7. Заключение

Итак, прошло уже более 20 лет с тех пор, как для объяснения периодического движения ледников в северном полушарии Земли было введено понятие "стохастический резонанс". Смысл этого названия, как мы видели, состоит в том, что отклик системы на суммарное воздействие гармонического сигнала и шума немонотонно зависит от интенсивности шума. Сочетание отклика "резонансного типа" на шумовое воздействие и определило появление термина "стохастический резонанс". На примере передемпфированного бистабильного осциллятора была предложена и "колебательная" интерпретация такого "резонанса": он имеет место при совпадении частоты сигнала и частоты Крамерса — частоты перехода через барьер, разделяющий два минимума потенциальной энергии бистабильного осциллятора.

В такой картине, однако, больше фантазии, чем физической реальности. Действительно, передемпфированный осциллятор представляет собой чисто релаксационную систему, в которой нет собственных частот и, как следствие, невозможен и резонанс в классическом понимании этого слова.

Поскольку, как мы видели, передемпфированный бистабильный осциллятор соответствует по электромеханической аналогии RC-цепочке с нелинейной емкостью, т.е. нелинейному фильтру, то явление, представляемое традиционно как стохастический резонанс, более естественно называть "стохастическая фильтрация". Этим термином подчеркивается, что отклик передемпфированного бистабильного осциллятора при наличии сигнала и шума немонотонно зависит от интенсивности шума. При этом управление стохастической фильтрацией возможно путем изменения двух независимых параметров интенсивности внешнего шума и температуры, например, сегнетоэлектрика в конденсаторе. Второй способ управления особенно эффективен в области температур, близких к температуре фазового перехода в веществе, заполняющем конденсатор.

Стохастический же резонанс возможен лишь в обратном передемпфированному бистабильному осциллятору случае, когда коэффициент трения много меньше эффективной частоты осциллятора. Было показано, что эффективная частота зависит от интенсивности шума. Это и определяет возможность настройки на резонанс путем изменения интенсивности шума. Это явление и было названо здесь "стохастический резонанс".

Изложенное в настоящих методических заметках затрагивает лишь один, хотя и принципиальный вопрос теории управления нелинейными системами путем изменения интенсивности шума. В обзорах [8, 9] читатель найдет много интересного как экспериментального, так и теоретического материала, демонстрирующего богатство явлений, которые имеют место при совместном воздействии сигналов и шумов на нелинейные системы самой различной природы. К наиболее интересным относится, несомненно, явление индуцированной шумом упорядоченности, которая возникает при стохастической синхронизации.

Данная статья возникла в результате обсуждений явления стохастического резонанса с В.С. Анищенко и А.Б. Нейманом. Я благодарен им за стимулирующие критические замечания.

Примечание при корректуре

Специальный выпуск журнала *Chaos* (сентябрь, 1998) посвящен в значительной мере проблеме стохастического резонанса. Оригинальным работам предпослан краткий обзор "The Constructive Role of Noise in Fluctuation Driven Transport and Stochastic Resonance". Его авторы R. Dean Astumian и Frank Moss. Последний является одним из авторов обзора [9], публикуемого в настоящем номере журнала *УФН*.

Список литературы

1. Benzi R, Sutera A, Vulpiani A *J. Phys. A* **14** L453 (1981)
2. Nicolis C *Sol. Phys.* **74** 473 (1981)
3. Benzi R et al. *Tellus* **34** 10 (1982)
4. Fox R F *Phys. Rev. A* **39** 4148 (1989)
5. Dykman M I et al. *J. Stat. Phys.* **70** 479 (1993)
6. Moss F, in *Stochastic Resonance: from the Ice Ages to the Monkey's Ear.* (Contemporary Problems in Statistical Physics, Ed. G Weiss) (Phyladelfia: SIAM, 1994) p. 205
7. Moss F, Pierson D, O'Gorman D *Intern. J. Bifurc. Chaos* **6** 1383 (1994)
8. Gammaltoni L et al. *Rev. Mod. Phys.* **70** 223 (1998).
9. Анищенко В С, Нейман А Б, Мосс Ф, Шиманский-Гайер Л *УФН* **169** 7 (1999)
10. Рытов С М *Введение в статистическую радиофизику*. Т. 1 *Случайные процессы* (М.: Наука, 1966)
11. Стратонович Р Л *Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике* (М.: Сов. радио, 1961)
12. Климонтович Ю Л *УФН* **164** 811 (1994)
13. Климонтович Ю Л *Статистическая теория открытых систем* (М.: Янус,1995) [Klimontovich Yu L *Statistical Theory of Open Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995)]
14. Климонтович Ю Л *Статистическая физика* (М.: Наука, 1982)
15. Hanggi P, Talkner P, Borkovec M *Rev. Mod. Phys.* **62** 251 (1990)
16. Kramers H A *Physica* **7** 284 (1940)
17. Понтрягин Л, Андронов А, Витт А *ЖЭТФ* **3** 165 (1933)

What are stochastic filtration and stochastic resonance?

Yu.L. Klimontovich
Department of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 939-38 25
Fax (7-095) 143-85 47
E-mail: ylklim@hklim.phys.msu.su

The concept of stochastic resonance (SR) was introduced in 1981 in the study of ice-age periodicity in northern hemisphere. To describe this phenomenon, a relaxation model — the overdamped bistable oscillator — is used. SR is caused by the simultaneous action of a periodic signal and noise and appears as a nonmonotone response to noise intensity variations. Since the subject of the study is actually the filter passband width as a function of noise intensity, 'stochastic filtration' (SF) seems to be a more appropriate term to describe the phenomenon. It is shown that when driven by a signal and noise, a low-attenuation bistable oscillator also displays an ordinary SR when the signal frequency equals the effective noise-intensity-dependent frequency of the oscillator. Thus the possibility of the resonance being controlled by varying the noise intensity arises.

PACS numbers: 02.50.Ey, **05.40.+j**, **05.45.+b**, **87.70.+c**

Bibliography — 17 references

Received 18 March 1998, revised 22 September 1998