

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка

В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер

Стохастический резонанс (СР) является одним из ярких примеров индуцированных шумом переходов в нелинейных системах, возбуждаемых информационным сигналом и шумом одновременно. В режиме СР характеристики информационного сигнала (усиление, отношение сигнал/шум, степень когерентности и упорядоченности и др.) на выходе системы существенно улучшаются при некотором оптимальном уровне шума. СР реализуется только в нелинейных системах, для которых с помощью вариации интенсивности шума возможно управление одним из характерных времен. В обзоре кратко обсуждаются физический механизм и методы теоретического описания СР. Исследуются особенности СР, обусловленные структурой информационного сигнала, статистикой шума и свойствами конкретных систем, демонстрирующих эффект. Детально анализируется нетривиальное явление стохастической синхронизации как захвата мгновенной фазы и частоты переключений бистабильной системы внешней периодической силой. Стохастическая синхронизация исследуется в одиночных и связанных бистабильных осцилляторах, включая ансамбли. Эффекты СР и стохастической синхронизации ансамблей стохастических резонаторов исследуются как в случае отсутствия связи между элементами, так и с учетом их взаимодействия. СР рассматривается в динамических и в нединамических (пороговых) системах. Проводится анализ явления СР с точки зрения информационных и энтропийных характеристик сигнала, определяющих степень порядка или самоорганизации системы. Обсуждается применение концепции СР для объяснения результатов ряда биологических экспериментов.

PACS numbers: 02.50.Ey, **05.40.+j**, **05.45.+b**, **87.70.+c**

Содержание

1. Введение (8).
2. Отклик на слабый сигнал. Теоретические подходы (10).
2.1. Теория двух состояний. 2.2. Теория линейного отклика.
3. Стохастический резонанс для сигналов сложного спектрального состава (14).
3.1. Отклик стохастической бистабильной системы на многочастотный сигнал. 3.2. Стохастический резонанс для сигналов с

конечной шириной спектральной линии. 3.3. Аперiodический стохастический резонанс.

4. Нединамический стохастический резонанс. Стохастический резонанс в хаотических системах (15).
4.1. Стохастический резонанс как фундаментальный пороговый эффект. 4.2. Стохастический резонанс в хаотических системах.
5. Синхронизация стохастических систем (19).
5.1. Синхронизация стохастического бистабильного осциллятора. 5.2. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта. 5.3. Взаимная стохастическая синхронизация связанных бистабильных систем. 5.4. Внешняя и взаимная синхронизация переключений в хаотических системах.
6. Стохастический резонанс и синхронизация ансамблей стохастических осцилляторов (25).
6.1. Теория линейного отклика для ансамблей стохастических резонаторов. 6.2. Синхронизация ансамбля стохастических резонаторов слабым периодическим сигналом. 6.3. Эффект стохастического резонанса в цепочке при конечной связи между элементами.
7. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок (30).
7.1. Динамическая энтропия и энтропия источника в режиме стохастической синхронизации. 7.2. Стохастический резонанс и энтропия Кульбака. 7.3. Рост степени порядка в ансамбле стохастических осцилляторов в режиме стохастического резонанса.

В.С. Анищенко. Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, физический факультет, 410026 Саратов, ул. Астраханская 83, Россия
Тел./Факс (8452) 51-45-49. E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

А.Б. Нейман. Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, физический факультет, 410026 Саратов, ул. Астраханская 83, Россия
University of Missouri at St. Louis, Department of Physics and Astronomy, St. Louis, MO 63121 USA

Ф. Мосс (F. Moss). University of Missouri at St. Louis, Department of Physics and Astronomy, St. Louis, MO 63121 USA
Tel. (1-314) 516-6150. Fax (1-314) 516-6152
E-mail: mossf@umslvma.umsl.edu

Л. Шиманский-Гайер (L. Schimansky-Geier). Humboldt University at Berlin, Invalidenstr., 110, Berlin, D-10115, Germany
Tel. (49-30) 2093-7624. Fax (49-30) 2093-7638
E-mail: als@summa.physik.hu-berlin.de

Статья поступила 26 июня 1998 г., после доработки 6 августа 1998 г.

8. Стохастический резонанс и обработка информации живыми организмами (33).

- 8.1. Стохастический резонанс в механорецепторах речного рака.
8.2. Фоторецепторная система речного рака. 8.3. Стохастический резонанс и количественная оценка зрительного восприятия информации человеком.

9. Заключение (36).

Список литературы (37).

1. Введение

С понятием "шум" в обыденном сознании ассоциируется термин "помеха", наличие которой может только ухудшить функционирование любой системы. Хорошо известны классические проблемы радиофизики, связанные с ограничением чувствительности усилителей и конечностью ширины спектральной линии генераторов, что обусловлено воздействием естественных и технических шумов [1–3]. В силу дискретности строения материи флуктуационные явления присущи всем реальным системам и принципиально неустранимы. Со времен Больцмана стала ясной ограниченность чисто детерминистского описания эволюционных процессов, и это ускорило развитие статистической физики. Основатели теории нелинейных колебаний также сознавали ограниченность детерминированного описания. Уже в 1933 г. ими был поставлен вопрос о статистическом рассмотрении динамических систем, что послужило основой для развития исследований в области статистической радиофизики [4].

Было установлено, что наличие источников шума в нелинейных динамических системах может индуцировать принципиально новые режимы функционирования, которые не могут быть реализованы в отсутствие шума, например, индуцированные шумом незатухающие колебания [5]. Эффекты указанного типа получили название индуцированных шумом переходов [6]. Многообразие и сложность типов таких переходов в нелинейных динамических системах вызвали постановку удивительных до недавнего времени вопросов: всегда ли воздействие шума приводит к ухудшению характеристик динамических систем и возможны ли случаи, когда действие шума вызывает увеличение степени упорядоченности движений в системе или улучшение ее рабочих характеристик? Исследования последних лет убедительно показали, что в нелинейных системах воздействие шума может индуцировать новые более упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать рост усиления и увеличение отношения сигнал/шум и т.д. Другими словами, шум в нелинейных системах может играть конструктивную роль, вызывая рост степени порядка в системе.

Одним из наиболее ярких и относительно простых примеров указанного типа поведения нелинейных систем при воздействии шума является эффект стохастического резонанса (СР). Эффект СР определяет группу явлений, при которых отклик нелинейной системы на слабый внешний сигнал заметно усиливается с ростом интенсивности шума в системе. При этом интегральные характеристики процесса на выходе системы, такие как коэффициент усиления и отношение сигнал/шум, имеют отчетливо выраженный максимум при некотором оптимальном уровне шума. В то же время энтропия как мера

степени беспорядка достигает минимума, свидетельствуя о возрастании степени индуцированного шумом порядка.

Термин "стохастический резонанс" был введен авторами работ [7–9] в 1981–1982 гг. на основе исследований модели бистабильного осциллятора, предложенной для описания периодичности в наступлении ледниковых периодов на Земле. Модель описывала движение частицы в симметричном двухъямном потенциале под действием периодической силы в условиях большого трения. Устойчивые положения частицы соответствовали ледниковому периоду и нормальному климату Земли. Периодическая сила соответствовала колебаниям эксцентриситета орбиты Земли. Расчеты показали, что реальная амплитуда периодической силы оказалась малой и не обеспечивала переключений системы из одного состояния в другое. Возможность переключений была достигнута путем введения дополнительной случайной силы, индуцирующей переходы через потенциальный барьер.

В 1983 г. эффект СР был исследован в триггере Шмитта, где для описания явления впервые использовано отношение сигнал/шум [10]. В этой работе установлено, что отношение сигнал/шум на выходе триггера при возбуждении его слабым периодическим и шумовым сигналами возрастает с ростом шума, достигает максимума и затем убывает. Таким образом, существует некий оптимальный уровень интенсивности шума, при котором периодическая компонента сигнала усиливается максимально.

Впоследствии эффект СР был обнаружен и исследован во многих бистабильных системах: в кольцевом лазере [11], в магнитных системах [12], в пассивных оптических бистабильных системах [13], в системах с электронным парамагнитным резонансом [14], в экспериментах с броуновскими частицами [15], в экспериментах с магнито-упругой лентой [16], в туннельном диоде [17], в сверхпроводящих квантовых интерферометрах (SQUID) [18], в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках [19–21], СР наблюдался не только в физических, но и в химических системах [22–24] и даже в социологических моделях [25].

Исследования показали, что эффект СР представляет собой фундаментально общее физическое явление, типичное для нелинейных систем, в которых с помощью шума можно контролировать один из характерных временных масштабов системы. Физическая картина явления СР достаточно наглядна и проста. Для иллюстрации рассмотрим модель стохастического бистабильного осциллятора.

Физические основы эффекта СР. Рассмотрим качественно движение броуновской частицы в системе с симметричным бистабильным потенциалом типа $U(x) = -0,5x^2 + 0,25x^4$ в условиях действия слабого периодического возмущения $A \sin \omega t$. Система имеет два характерных временных масштаба: один обусловлен случайными блужданиями частицы в окрестности одного из состояний равновесия (внутриямная динамика), другой временной масштаб характеризует среднее время перехода через потенциальный барьер (глобальная динамика). Отметим, что амплитуда периодического воздействия предполагается малой настолько, что исключает переходы через барьер в отсутствие шума. Второму временному масштабу в частотной области отвечает

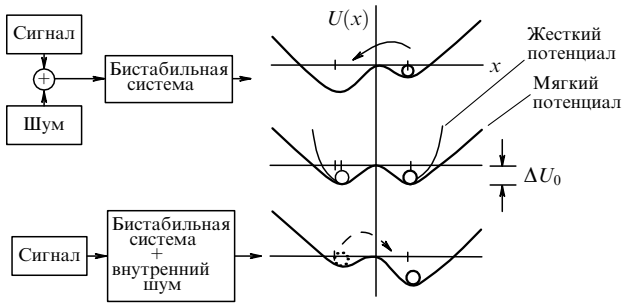


Рис. 1. Бистабильный потенциал под действием слабой периодической модуляции. Потенциал может иметь как "жесткую", так и "мягкую" форму. Частица, отмеченная шариком, может преодолеть потенциальный барьер ΔU_0 только в присутствии внешнего или внутреннего шума.

средняя скорость (или частота) выхода из метастабильного состояния — скорость Крамерса [26, 27].

Для случая белого шума, параболических потенциальных ям и относительно высоких потенциальных барьеров скорость Крамерса дается законом Аррениуса:

$$r_K = \frac{1}{2\pi} [U''(0)|U''(c)]^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta U_0}{D}\right),$$

где $U'' = d^2U(x)/dx^2$, c — координата минимума потенциала, ΔU_0 — потенциальный барьер, D — интенсивность шума. Скорость Крамерса будет определять и вероятности переходов.

В присутствии периодической силы потенциальные ямы будут периодически колебаться (рис. 1), вероятности перехода также станут периодическими функциями времени, и выходной сигнал будет включать периодическую компоненту.

На рисунке 2 представлены сигналы на выходе бистабильной системы с учетом внутриямной динамики (а) и с учетом исключения моментов времени пересечения барьера (приближение двух состояний) (б), а также спектр мощности (в) сигнала, показанного на графике (б).

Периодическая модуляция потенциала приводит к периодической модуляции как высоты потенциального барьера $\Delta U \simeq \Delta U_0 + A \sin \omega t$, так и вероятности перехода. В итоге в спектре мощности выходного сигнала регистрируется δ -пик на частоте модуляции и ее нечетных гармониках (в случае симметричного потенциала). Предположим, что потенциальный барьер ΔU_0 , амплитуда и частота модуляции фиксированы. Частота Крамерса r_K будет зависеть только от интенсивности шума D . При малой интенсивности шума время перехода чрезвычайно велико и намного превышает период сигнала модуляции. При высоком уровне шума за время одного периода сигнала система с высокой степенью вероятности совершит многократные переключения. Варьируя интенсивность шума, можно обеспечить режим, когда среднее время переходов через барьер близко к периоду сигнала модуляции. Переключения системы будут происходить в среднем в фазе с внешней периодической силой. Таким образом, варьируя интенсивность шума, можно настроить стохастическую бистабильную систему в режим максимального усиления сигнала модуляции и отношения сигнал/шум. Теоретиче-

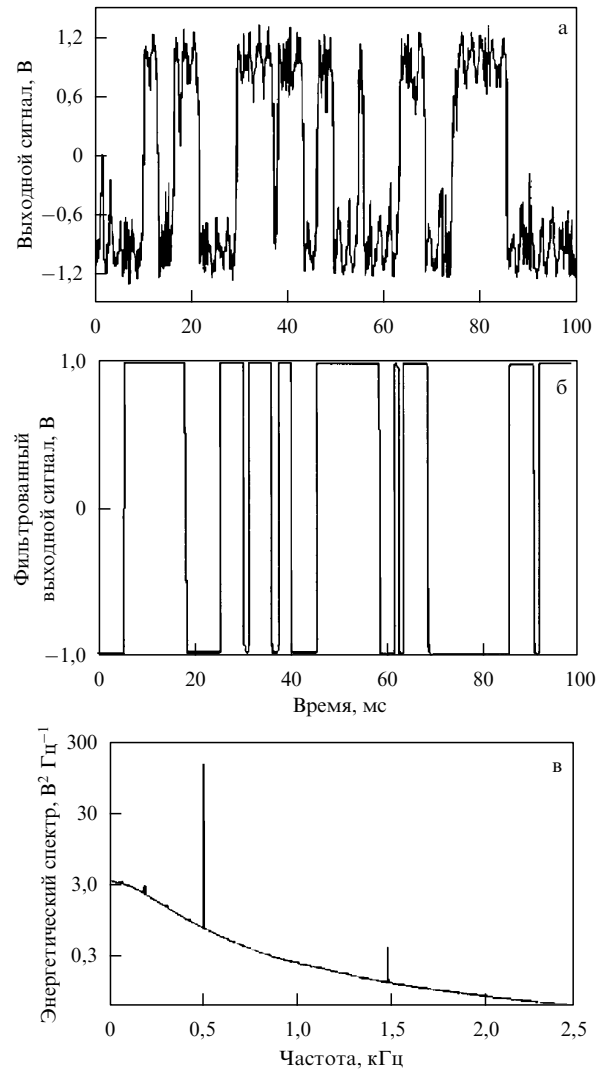


Рис. 2. Полный сигнал на выходе бистабильной системы (а), отфильтрованный методом двух состояний сигнал (б) и спектр мощности отфильтрованного сигнала (в).

ские и экспериментальные исследования это подтвердили.

Характеристики эффекта СР. Траекторка физического механизма явления и определение СР во многом зависят от того, какие количественные характеристики СР вычисляются аналитически, моделируются на компьютере или измеряются в физическом эксперименте. В настоящей работе в качестве основных характеристик СР используются коэффициент усиления по энергии η , отношение сигнал/шум и плотность распределения времен пребывания частицы в одной из потенциальных ям $p(\tau)$. В экспериментах энергия сигнала определяется как интеграл от спектральной плотности мощности в полосе измеряемых частот [28].

Отношение сигнал/шум (SNR) определяется как отношение спектральных плотностей мощности сигнала и шума на частоте сигнала. В работе использовано определение SNR, принятое в радиотехнике как отношение энергии сигнала к энергии шума P_S/P_N . При гармоническом сигнале на входе такому определению в эксперименте отвечает отношение высоты спектральной линии сигнала модуляции над шумовым основанием к

высоте шумового основания спектра выходного сигнала.

В результате случайных переключений сигнал на выходе стохастической бистабильной системы без учета движений внутри потенциальной ямы представляет собой случайный телеграфный процесс (рис. 2б). Время пребывания в одной из потенциальных ям есть случайная величина, плотность распределения вероятностей которой $p(\tau)$ в отсутствие модуляции есть экспоненциально спадающая функция [29]. Введение сигнала модуляции приводит к структурированию плотности распределения $p(\tau)$, которая приобретает вид последовательности гауссообразных пиков, максимумы которых расположены над значениями времени $\tau = nT_c/2$, $n = 1, 3, 5, \dots$, где T_c — период сигнала модуляции. Максимумы $p(\tau)$ экспоненциально спадают с ростом n , и в режиме СР наибольшему максимуму отвечает условие $n = 1$. При этом среднее время пребывания $\langle \tau \rangle$ будет наиболее близко к полупериоду сигнала модуляции. Описание СР на основе распределения времен пребывания отражает процесс синхронизации переключений системы внешней периодической силой [30, 31].

Так как статистические свойства телеграфного сигнала зависят от интенсивности шума, структурой плотности распределения можно управлять путем вариации шума. Отсюда возникает иной, альтернативный подход к анализу механизмов эффекта СР, основанный на исследовании статистики времен пребывания. Безусловно, физика и механизм явления СР не зависят от способов описания.

Как уже указывалось, основным свойством стохастических систем, реализующих эффект СР, является наличие характерного временного масштаба, управляемого изменением интенсивности шума. Совершенно ясно, что как качественные, так и количественные характеристики СР будут во многом определяться свойствами конкретных нелинейных систем. СР можно реализовать в бистабильных [7, 32] и моностабильных [33] динамических системах, в генераторах периодических и хаотических колебаний [34, 35]. Эффект СР наблюдается в нединамических или так называемых пороговых системах [36, 37]. Характеристики и свойства СР, безусловно, должны зависеть от структуры сигналов, воздействующих на нелинейную систему. Это в одинаковой степени относится как к информационному сигналу, так и к шумовому. Сигнал модуляции может быть гармоническим или многочастотным, а может представлять собой узкополосный случайный процесс [38]. Шумовой сигнал может по своим статистическим свойствам быть близким к белому шуму, а может иметь конечное время корреляции и ограниченный спектр [39, 40]. В зависимости от свойств сигнала, шума и конкретных параметров нелинейных систем эффект СР будет характеризоваться специфическими свойствами. В то же время, независимо от характеристик системы и структуры сигналов, явлению СР присущи общие фундаментальные свойства, проявляющиеся в увеличении степени порядка в выходном сигнале при оптимальном уровне шума. Целью настоящего обзора является последовательное и, по возможности, краткое изложение всех вышеуказанных аспектов явления СР.

Хотя с даты открытия эффекта СР еще не прошло и 20 лет, количество публикаций по проблеме СР велико и продолжает расти. В рамках одного обзора нет возмож-

ности полностью описать имеющиеся на сегодня результаты по СР. В этом и нет необходимости. По проблеме СР опубликовано четыре прекрасных обзора [41–44], проведено две специальных международных конференции с публикацией трудов [45, 46]. В Интернете создан специальный сервер, содержащий более 300 наименований избранных работ по СР [47].

Авторы поставили перед собой более скромную цель — описать результаты, которые не нашли отражения в опубликованных обзорах, либо описаны в них очень лаконично. В обзоре приведены основные результаты, полученные авторами совместно с их учениками и коллегами за последние пять лет. Надеемся, что предлагаемый обзор, вместе с уже опубликованными, позволит читателям составить наиболее полное представление о СР и поможет глубокому пониманию этого удивительно интересного явления.

2. Отклик на слабый сигнал.

Теоретические подходы

Теоретическое рассмотрение СР наталкивается на ряд сложностей принципиального характера. Даже в отсутствие внешнего гармонического сигнала в общем случае не удастся найти точное решение уравнения Фоккера – Планка для двумерных плотностей вероятности, а значит, не удастся вычислить корреляционные функции и спектральные плотности. С другой стороны, с включением в рассмотрение периодической внешней силы появляются дополнительные сложности, обусловленные возникающей неоднородностью соответствующих случайных процессов во времени.

Рассмотрим модель передемпфированного бистабильного осциллятора, ставшую канонической для исследования СР. Уравнение движения в безразмерных переменных имеет вид

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos(\Omega t + \phi) + \sqrt{2D} \xi(t) \quad (2.1)$$

и описывает движение броуновской частицы (в пределе большого трения) в двухъямном потенциале $U_0(x) = -x^2/2 + x^4/4$ под действием белого шума $\xi(t)$ интенсивности D и периодической силы $f(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$. Соответствующее уравнение Фоккера – Планка (УФП) для плотности вероятности $p(x, t; \phi)$ имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ [x - x^3 + A \cos(\Omega t + \phi)] p \right\} + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Это уравнение может быть записано и в операторной форме

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ext}}(t)] p, \quad (2.3)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{\partial}{\partial x} (x - x^3) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

— невозмущенный оператор Фоккера – Планка ($A = 0$), а $\mathcal{L}_{\text{ext}}(t) = -A \cos(\Omega t + \phi) \partial/\partial x$ представляет периодическое возмущение.

Сложности первой группы не связаны непосредственно с явлением СР и подробно рассматривались в теории случайных процессов (см., например, [1, 6, 48]).

Бурное развитие исследований в области СР потребовало создания общей теории стохастических диффузионных процессов с периодически меняющимися коэффициентами сноса и диффузии. Такая теория была предложена в работах [49–51] и представляет собой расширение теории Флоке на случай УФП с периодическими коэффициентами. Одним из основных выводов общей теории периодически возмущаемого броуновского движения является результат для асимптотического среднего $\langle x(t) \rangle$ или отклика:

$$\langle x(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n \exp[in(\Omega t + \phi)], \quad (2.4)$$

где комплексно-значные амплитуды M_n являются функциями интенсивности шума, частоты сигнала Ω и его амплитуды A . Коэффициент усиления по мощности η на основной частоте определяется как [50]:

$$\eta = \left(\frac{2|M_1|}{A} \right)^2. \quad (2.5)$$

Трудности, связанные с периодической нестационарностью, формально могут быть преодолены с помощью расширения фазового пространства системы путем введения дополнительной переменной, определяющей эволюцию фазы сигнала: $\dot{\theta} = \Omega$. Для расчета спектральных плотностей производится усреднение по начальной фазе ϕ , которая считается равномерно распределенной случайной величиной [2].

Аналитические выражения для коэффициента усиления и отношения сигнал/шум удается получить с помощью ряда приближений. Одним из основных является приближение малого сигнала, когда отклик можно считать линейным. Другие приближения накладывают ограничения на частоту сигнала. Ниже мы рассмотрим две приближенные теории СР: теорию двух состояний, предложенную в работе [28], и теорию линейного отклика [52–54], обсуждавшуюся применительно к СР в работах [50, 55–57].

2.1. Теория двух состояний

Рассмотрим симметричную бистабильную систему, переменная состояния которой может принимать только два дискретных значения $x(t) = \pm x_m$. Обозначим через $n_{\pm}(t)$ вероятности нахождения системы в соответствующем состоянии, удовлетворяющие условиям нормировки: $n_{+}(t) + n_{-}(t) = 1$. Вводя плотности вероятности переходов из одного состояния в другое $W_{\pm}(t)$, получим управляющее уравнение:

$$\dot{n}_{\pm} = -[W_{\pm}(t) + W_{\mp}(t)] n_{\pm} + W_{\pm}(t). \quad (2.6)$$

Это линейное уравнение может быть решено аналитически, если заданы законы изменения $W_{\pm}(t)$. В [28] предполагается, что плотности вероятностей переходов имеют следующий вид:

$$W_{\pm}(t) = r_K \exp\left(\pm \frac{Ax_m}{D} \cos \Omega t\right). \quad (2.7)$$

В отсутствие сигнала ($A = 0$) плотности вероятностей переходов совпадают со скоростью Крамерса r_K и не зависят от времени. Для модели (2.1) скорость Крамерса

при $D < \Delta U = 1/4$ описывается законом

$$r_K = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{1}{4D}\right). \quad (2.8)$$

Здесь и далее скорость Крамерса записывается в нормированных (безразмерных) величинах.

Управляющее уравнение (2.6) адекватно описывает динамику бистабильного передемпфированного осциллятора, когда сигнал меняется достаточно медленно, так что релаксационные процессы в системе протекают гораздо быстрее изменений внешней силы. Уравнения для условных вероятностей $n_{\pm}(t|x_0, t_0)$, необходимые для расчета корреляционной функции, имеют такую же форму, как и (2.6). Решение линейного уравнения (2.6) находится без труда в случае слабого сигнала, т.е. $Ax_m \ll D$. В этом случае скорости переходов можно разложить в ряд Тейлора и удержать лишь линейные члены по амплитуде сигнала. В результате для условной вероятности получается выражение

$$n_{+}(t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left\{ \exp[-2r_K(t - t_0)] \times \right. \\ \times \left[2\delta_{x_0, x_m} - 1 - \frac{2r_K Ax_m \cos(\Omega t_0 + \psi)}{D(4r_K^2 + \Omega^2)^{1/2}} \right] + \\ \left. + 1 + \frac{2r_K Ax_m \cos(\Omega t + \psi)}{D(4r_K^2 + \Omega^2)^{1/2}} \right\}, \quad (2.9)$$

где $\psi = -\arctan(\Omega/2r_K)$. Знание условных вероятностей позволяет вычислить любые статистические характеристики процесса. Наибольший интерес представляют среднее значение, характеризующее отклик системы, и спектральная плотность, необходимая для оценки отношения сигнал/шум. Условная плотность вероятности определяется как $p(x, t|x_0, t_0) = n_{+}(t)\delta(x - x_m) + n_{-}(t)\delta(x + x_m)$. Среднее значение есть $\langle x(t)|x_0, t_0 \rangle = \int x p(x, t|x_0, t_0) dx$. Интерес представляет асимптотический предел $\langle x(t) \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle x(t)|x_0, t_0 \rangle$, для которого из (2.9) получаем

$$\langle x(t) \rangle = A_1(D) \cos[\Omega t + \psi(D)], \quad (2.10)$$

где амплитуда $A_1(D)$ и фазовый сдвиг $\psi(D)$ определяются выражениями

$$A_1(D) = \frac{Ax_0^2}{D} \frac{2r_K}{(4r_K^2 + \Omega^2)^{1/2}}, \quad (2.11)$$

$$\psi(D) = -\arctan \frac{\Omega}{2r_K}. \quad (2.12)$$

Зная амплитуду отклика на выходе, определяем коэффициент усиления по мощности:

$$\eta = \frac{4r_K^2 x_m^4}{D^2(4r_K^2 + \Omega^2)}. \quad (2.13)$$

Из (2.8) и (2.13) следует, что коэффициент усиления как функция интенсивности шума D имеет единственный максимум.

Аналогично находится автокорреляционная функция $\langle x(t + \tau)x(t)|x_0, t_0 \rangle = \iint x y p(x, t + \tau|y, t) p(y, t|x_0, t_0) dx dy$ и ее асимптотический предел при $t_0 \rightarrow -\infty$. Однако в силу периодической модуляции автокорреляционная функция зависит не только от временного сдвига τ , но и перио-

дически от времени t . Для вычисления спектральной плотности необходимо провести дополнительное усреднение по периоду внешней силы. Такая процедура эквивалентна усреднению по ансамблю случайной начальной фазы сигнала и соответствует экспериментальным методам измерения спектральных плотностей и корреляционных функций. Выражение для спектральной плотности $G(\omega)$ имеет вид

$$G(\omega) = G_N(\omega) + \frac{\pi}{2} A_1^2(D) [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \quad (2.14)$$

и содержит две составляющие: периодическую, представленную дельта-функцией с соответствующим весом, и шумовую $G_N(\omega)$:

$$G_N(\omega) = \frac{4r_K x_m^2}{4r_K^2 + \omega^2} \left[1 - \frac{A_1^2(D)}{2x_m^2} \right]. \quad (2.15)$$

Как видно из последнего выражения, шумовой пьедестал в свою очередь представлен суммой невозмущенного спектра (при $A = 0$) $G_N^{(0)}(\omega) = 4r_K x_m^2 / (4r_K^2 + \omega^2)$ и некоторым дополнительным членом порядка A^2 : $G_N(\omega) = G_N^{(0)}(\omega) + \mathcal{O}(A^2)$. Спектральная плотность невозмущенной системы определяется интенсивностью шума D , которая входит в выражение для скорости Крамерса r_K (2.8). Явное выражение для невозмущенной спектральной плотности дается формулами (2.25). При малых значениях D скорость Крамерса мала, и спектр сосредоточен в области низких частот. С увеличением интенсивности шума скорость Крамерса растет экспоненциально, и спектр становится более равномерным. Возникновение дополнительного члена, понижающего шумовой пьедестал, объясняется тем, что для модели двух состояний энергия процесса на выходе равна $2\pi x_M^2$ и не зависит от амплитуды и частоты сигнала.

Отношение сигнал/шум для модели двух состояний получается в виде

$$\text{SNR} = \pi \left(\frac{Ax_m}{D} \right)^2 r_K \quad (2.16)$$

с единственным максимумом при $D = 1/4$.

2.2. Теория линейного отклика

Согласно этой теории отклик нелинейной стохастической системы $\langle x(t) \rangle$ на слабое внешнее воздействие $f(t)$ в асимптотическом пределе больших времен определяется интегральным соотношением [52, 54]

$$\langle x(t) \rangle = \langle x \rangle_{\text{st}} + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau, D) f(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

где $\langle x \rangle_{\text{st}}$ — среднее значение невозмущенной переменной состояния системы ($f(t) = 0$), а $f(t)$ — внешняя возмущающая сила. Не теряя общности, положим для простоты $\langle x \rangle_{\text{st}} = 0$, что выполняется для симметричных относительно начала координат бистабильных систем и, в частности, для базовой модели (2.1). Функция $\chi(t)$ в (2.17) называется функцией отклика и для систем, находящихся в отсутствие возмущений в состоянии термодинамического равновесия, связана флуктуационно-диссипационными соотношениями с корреляционными функциями невозмущенной системы [58]. Рассмотрим применение теории линейного отклика на примере перемещенной бистабильной системы (2.1).

Флуктуационно-диссипационная теорема, связывающая функцию отклика $\chi(t)$ и автокорреляционную функцию $K_{xx}^{(0)}(t)$ невозмущенной системы, имеет вид [50, 51]:

$$\chi(t) = -\frac{1(t)}{D} \frac{d}{dt} K_{xx}^{(0)}(t), \quad (2.18)$$

где $1(t)$ — функция Хевисайда. Для вычисления характеристик отклика системы в рамках этой теории необходимо знание ее статистических свойств в невозмущенном равновесном или стационарном состоянии. Для гармонической силы отклик системы выражается через восприимчивость $\chi(\omega)$, которая является фурье-образом функции отклика:

$$\langle x(t) \rangle = A |\chi(\omega)| \cos(\Omega t + \psi), \quad (2.19)$$

где фазовый сдвиг ψ определен выражением

$$\psi = -\arctan \frac{\text{Im } \chi(\Omega)}{\text{Re } \chi(\Omega)}. \quad (2.20)$$

Коэффициент усиления определяется как

$$\eta = |\chi(\omega)|^2. \quad (2.21)$$

Спектральная плотность $G_{xx}(\omega)$ на выходе системы имеет вид

$$G_{xx}(\omega) = G_{xx}^{(0)}(\omega) + \frac{\pi}{2} A^2 |\chi(\Omega)|^2 \times \\ \times [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + \mathcal{O}(A^2). \quad (2.22)$$

Для отношения сигнал/шум в рамках этой теории получаем выражение:

$$\text{SNR} = \frac{\pi A^2 |\chi(\Omega)|^2}{G_{xx}^{(0)}(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Точное выражение для невозмущенной автокорреляционной функции $K_{xx}^{(0)}(\tau, D)$ получить не удастся, однако существует несколько подходов для ее приближенной оценки. Наиболее точный основан на разложении по собственным функциям оператора Фоккера–Планка [32, 59]. При этом корреляционная функция представляется в виде ряда экспонент $g_j \exp(-\lambda_j \tau)$, где λ_j — собственные значения оператора Фоккера–Планка, g_j — коэффициенты, вычисляемые путем усреднения соответствующих собственных функций по невозмущенному равновесному распределению.

В простейшем случае для расчета корреляционной функции можно учесть наименьшее ненулевое собственное значение λ_m , которое связано со скоростью Крамерса выхода из потенциальной ямы:

$$\lambda_m = 2r_K = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4D}\right).$$

Выражения для корреляционной функции и спектральной плотности невозмущенной системы в этом случае принимают вид:

$$K_{xx}^{(0)}(\tau, D) \approx \langle x^2 \rangle_{\text{st}} \exp(-\lambda_m \tau), \quad (2.24)$$

$$G_{xx}^{(0)}(\omega) = \frac{2\lambda_m \langle x^2 \rangle_{\text{st}}}{\lambda_m^2 + \omega^2} = \frac{2\sqrt{2}\pi \langle x^2 \rangle_{\text{st}} \exp(1/4D)}{2 + \pi^2 \omega^2 \exp(1/2D)}, \quad (2.25)$$

где $\langle x^2 \rangle_{st}$ — стационарное значение второго кумулянта невозмущенной системы:

$$\langle x^2 \rangle_{st} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{st}(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[\frac{1}{D} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right] dx, \quad (2.26)$$

а C — константа нормировки стационарной плотности вероятности. Такая аппроксимация соответствует приближению двух состояний и неприменима для малых интенсивностей шума ($D \ll 1$) и для случаев высокочастотных внешних воздействий.

Учет внутриямной динамики в корреляционной функции можно осуществить путем включения в выражение (2.24) дополнительного экспоненциального члена, описывающего быстрые флуктуации внутри потенциальных ям. В этом случае корреляционная функция описывает как глобальную динамику (показатель λ_m), так и локальную внутриямную динамику [51, 57]:

$$K_{xx}^{(0)}(\tau, D) = g_1 \exp(-\lambda_m \tau) + g_2 \exp(-\alpha \tau), \quad (2.27)$$

$$G_{xx}^{(0)}(\omega) = \frac{2\lambda_m g_1}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{2\alpha g_2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (2.28)$$

где показатель α определяется из линеаризованного уравнения движения, $\alpha = |U''(x_{\min})|$, $x_{\min}$ — координата минимума потенциала. Для конкретного примера (2.1) $\alpha = 2$. Коэффициенты $g_{1,2}$ в формуле (2.27) определяются из выражения для корреляционной функции и ее производной при $\tau = 0$ и равны [51]:

$$\begin{aligned} g_1 &= \langle x^2 \rangle_{st} - g_2, \\ g_2 &= \frac{\lambda_m \langle x^2 \rangle_{st}}{\lambda_m - \alpha} + \frac{\langle x^2 \rangle_{st} - \langle x^4 \rangle_{st}}{\lambda_m - \alpha}, \\ \langle x^4 \rangle_{st} &= C \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp \left[\frac{1}{D} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для восприимчивости получаем следующие выражения в приближении двух состояний:

$$\chi(\omega, D) = \frac{1}{D} \frac{\lambda_m \langle x^2 \rangle_{st}}{\lambda_m^2 + \omega^2} (\lambda_m - i\omega), \quad (2.30)$$

и с учетом внутриямной динамики:

$$\begin{aligned} \chi(\omega, D) &= \frac{1}{D} \left(\frac{g_1 \lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{g_2 \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right) - \\ &- i\omega \left(\frac{g_1 \lambda_m}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{g_2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Зная восприимчивость и спектральную плотность невозмущенной системы, можно найти соотношения для коэффициента усиления (3.5) и отношения сигнал/шум (6.37) [51, 57].

Для исследования амплитудно-частотных свойств системы достаточно рассмотреть отклик на гармонический сигнал $f(t) = A \cos(\Omega t)$. Для приближения двух состояний выражения для коэффициента усиления и отношения сигнал/шум имеют вид:

$$\eta(\Omega, D) = \frac{1}{D^2} \frac{(\langle x^2 \rangle_{st} \lambda_m)^2}{\lambda_m^2 + \Omega^2}, \quad (2.32)$$

$$\text{SNR} = \frac{\pi A^2}{2D^2} \langle x^2 \rangle_{st} \lambda_m. \quad (2.33)$$

Результат для отношения сигнал/шум получается такой же, как и в адиабатической теории двух состояний [28]. Отметим, что SNR (2.33) не зависит от частоты возмущения и имеет максимум при $D = 0,125$. Усиление η обладает частотной зависимостью и, как видно из формулы (2.32), характеризуется большими значениями в области низких частот.

С учетом внутриямной динамики выражения для усиления и отношения сигнал/шум приобретают вид [51]:

$$\begin{aligned} \eta(\Omega, D) &= \\ &= \frac{(g_1 \lambda_m)^2 (\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda_m (\alpha \lambda_m + \Omega^2)}{D^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) (\alpha^2 + \Omega^2)}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{\pi A^2}{2D^2} \times \\ &\times \frac{(g_1 \lambda_m)^2 (\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda_m (\alpha \lambda_m + \Omega^2)}{g_2 \alpha (\lambda_m^2 + \Omega^2) + g_1 \lambda_m (\alpha^2 + \Omega^2)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Зависимость усиления от интенсивности шума для разных значений частоты внешнего периодического сигнала представлена на рис. 3а. Как видно из рисунка, оба приближения дают одинаковые результаты в области максимальных значений усиления [60].

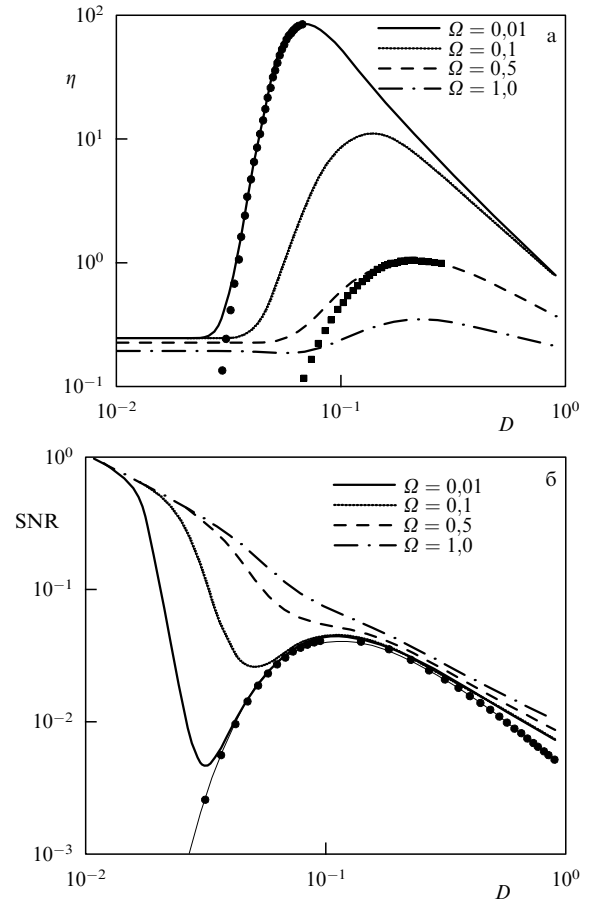


Рис. 3. Зависимости коэффициента усиления (2.34) η (а) и отношения сигнал/шум (2.35) (б) от интенсивности шума D для разных значений частоты внешнего периодического воздействия. Зависимости, определяемые без учета внутриямной динамики, показаны символами •.

Различия появляются лишь при малых интенсивностях шума. Теория, принимающая во внимание только глобальную динамику переходов между метастабильными состояниями, дает нулевое значение η при $D \rightarrow 0$. Учет внутриямной динамики дает правильный предел $\eta(\Omega, D \rightarrow 0) = 1/(\alpha^2 + \Omega^2)$. В пределе $D \rightarrow 0$ среднее время перехода из одной потенциальной ямы в другую становится астрономически большим, и за время, равное большому количеству периодов внешней силы, система не успевает переключиться из одного состояния в другое. Таким образом, при малых D бистабильный осциллятор ведет себя как линейная система с характерным временным масштабом $1/\alpha$. При уменьшении частоты внешнего воздействия максимум усиления сдвигается в сторону меньших значений интенсивности шума, а сам коэффициент усиления увеличивается. Из рисунка 3а следует, что амплитудно-частотная характеристика системы имеет подъем в области низких частот. Это свойство определяется физической природой флуктуационных процессов в бистабильных системах, где энергия шума преобразуется в низкочастотную динамику случайных переходов между метастабильными состояниями. В результате спектр флуктуаций в области низких частот на выходе имеет вид лоренциана с шириной, определяемой средней скоростью переходов Крамерса.

Зависимость отношения сигнал/шум от интенсивности шума (2.35) представлена на рис. 3б. При малых значениях D SNR расходится, что объясняется вкладом модулируемой сигналом локальной динамики внутри потенциальных ям [28]. Для достаточно низкочастотных воздействий максимум отношения сигнал/шум достигается при $D \approx 1/8$. Однако при увеличении частоты Ω эффект СР вообще пропадает, так как отношение сигнал/шум становится монотонно убывающей функцией.

3. Стохастический резонанс для сигналов сложного спектрального состава

В большинстве работ по СР в качестве внешней силы рассматривается воздействие гармонического сигнала малой амплитуды. Возникает естественная задача исследования отклика системы на многочастотные и шумовые сигналы. Это особенно важно применительно к биологическим системам. Сигналы, воспринимаемые живыми организмами, чаще всего являются шумовыми и, как правило, не содержат строго периодических компонент. Более реалистичным является исследование отклика системы на квазигармонический сигнал с конечной шириной спектральной линии, обусловленной действием флуктуаций.

Достоинством теории линейного отклика является возможность расширения ее на случай сигналов со сложным спектральным составом. Спектральная плотность на выходе имеет вид

$$G_{xx}(\omega) \approx G_{xx}^{(0)}(\omega) + |\chi(\omega)|^2 G_{ff}(\omega), \quad (3.1)$$

где $G_{ff}(\omega)$ — спектр сигнала. Ниже мы рассмотрим ряд практически важных примеров.

3.1. Отклик стохастической бистабильной системы на многочастотный сигнал

Рассмотрим слабый сигнал, имеющий дискретный спектр. Внешнюю силу $f(t)$ представим в виде ряда

Фурье:

$$f(t) = A \sum_{k=1}^M c_k \cos \Omega_k t, \quad (3.2)$$

где $Ac_k \ll 1$ — малые амплитуды гармоник, а Ω_k — их частоты. Согласно теории линейного отклика, отклик системы есть

$$\langle x(t) \rangle = A \sum_{k=1}^M c_k |\chi(\Omega_k, D)| \cos[(\Omega_k + \psi_k)t]. \quad (3.3)$$

Отклик $\langle x(t) \rangle$ (3.3) содержит те же спектральные компоненты (3.2), однако с другими амплитудами и фазами. В формуле (3.3) фазовые сдвиги ψ_k для каждой из гармоник выражаются через восприимчивость как

$$\psi_k(\Omega_k, D) = -\arctan \frac{\text{Im} \chi(\Omega_k, D)}{\text{Re} \chi(\Omega_k, D)}. \quad (3.4)$$

Меры СР, такие как коэффициент усиления η и отношение сигнал/шум SNR, определяются, согласно теории линейного отклика, как [51, 55]

$$\eta(\Omega_k, D) = |\chi(\Omega_k, D)|^2, \quad (3.5)$$

$$\text{SNR}(\Omega_k, D) = \frac{\pi (Ac_k)^2 |\chi(\Omega_k, D)|^2}{G_{xx}^{(0)}(\Omega_k, D)}. \quad (3.6)$$

Зависимость восприимчивости от частоты определяет наличие частотных искажений выходного сигнала. Для определения величины этих искажений можно использовать отношение амплитуд различных гармоник на выходе к такому же отношению на входе:

$$E(\Omega_k, \Omega_j, D) = \frac{|\chi(\Omega_k, D)|}{|\chi(\Omega_j, D)|}. \quad (3.7)$$

Как следует из выражений (2.32)–(2.35), бистабильный осциллятор (2.1) представляет собой усилитель с низкочастотной фильтрацией сигнала на выходе. Параметры усилителя (коэффициент усиления и отношение сигнал/шум) управляются интенсивностью внешнего шума. Возникает вопрос, можно ли с помощью такого устройства обеспечить усиление информационных сигналов (например, сигналов с амплитудной или частотной модуляцией) без существенных искажений? Эта задача решена в работах [60–62], где дан положительный ответ на поставленный вопрос. Если обеспечены условия реализации эффекта СР в малосигнальном приближении для составляющей спектра сигнала на частоте несущей и если эффективная полоса частот информационного сигнала не превышает 25 % от частоты несущей, то все частотные компоненты информационного сигнала будут усиливаться почти одинаково, и выходной сигнал практически не будет содержать линейных искажений.

3.2. Стохастический резонанс для сигналов с конечной шириной спектральной линии

Реальные сигналы всегда имеют конечную ширину спектральной линии, обусловленную наличием флуктуаций амплитуды и фазы генератора [1–3, 63]. Будет ли СР наблюдаться для таких сигналов, и к каким особенностям приводит учет конечной ширины спектральной

линии? Ответ на эти вопросы имеет важное значение в практических приложениях [38, 50].

В качестве модели сигнала с конечной шириной спектральной линии в работе [38] рассматривается так называемый "гармонический шум" [64], который представляет собой двумерный процесс Орнштейна–Уленбека и определяется системой двух стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$\dot{y} = s, \quad \dot{s} = -\Gamma s - \Omega^2 y + \sqrt{2\epsilon\Gamma} n(t), \quad (3.8)$$

где $n(t)$ — гауссов белый шум, $\langle n(t)n(t') \rangle = \delta(t-t')$, Γ — параметр диссипации и ϵ — интенсивность гармонического шума. Спектральная плотность $G_{yy}(\omega)$ известна и имеет форму линии Лоренца

$$G_{yy}(\omega) = \frac{2\epsilon\Gamma}{\omega^2\Gamma^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}. \quad (3.9)$$

При выполнении условия $\Omega > \Gamma/2$ спектральная плотность (3.9) имеет пик на частоте

$$\omega_p = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} \quad (3.10)$$

и характеризуется шириной (определяемой на высоте, равной половине максимальной высоты пика) $\Delta\omega_{in}$

$$\Delta\omega_{in} = \sqrt{\omega_p^2 + \Gamma\omega_1} - \sqrt{\omega_p^2 - \Gamma\omega_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (3.11)$$

Было показано, что и для случая сигнала с конечной шириной спектральной линии реализуется эффект СР. Более того, было установлено, что ширина спектральной линии на выходе бистабильной системы может быть уменьшена при оптимальном уровне шума [39].

3.3. Аперриодический стохастический резонанс

Как уже отмечалось, спектры сигналов, обрабатываемых биологическими системами, являются очень сложными. Наблюдается ли СР для таких сигналов и каков его механизм? Ответ на первый вопрос положителен и был дан в работах [65, 66] на примерах моделей нейронов. Этот вид СР был назван аперриодическим. В этом разделе мы покажем, что аперриодический СР может быть описан в рамках теории линейного отклика [67, 68].

В случае аперриодического сигнала, не имеющего пиков в спектре, меры, используемые для обычного СР (коэффициент усиления, отношение сигнал/шум, распределение времен переходов), являются либо неприменимыми, либо неэффективными. Величины, характеризующие передачу шумового сигнала через систему, могут быть рассчитаны на основе взаимных корреляционных функций (или взаимных спектральных плотностей) между входом и выходом системы [110]. Предположим, что входной сигнал $s(t)$, действующий на некоторую систему, порождает случайный процесс на выходе $x(t)$. Будем считать, что $s(t)$ и $x(t)$ являются стационарными случайными процессами. Как известно, взаимная корреляционная функция $K_{xs}(\tau)$ процессов $s(t)$ и $x(t)$ определяется как

$$K_{xs}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xsp(x, t; s, t + \tau) dx ds, \quad (3.12)$$

где $p(x, t; s, t + \tau)$ — двумерная совместная плотность вероятности процессов $s(t)$ и $x(t)$. Взаимная спектральная плотность есть преобразование Фурье взаимной корреляционной функции:

$$G_{xs}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xs}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Введем в рассмотрение функцию когерентности $\Gamma(\omega)$, которую определим следующим образом:

$$\Gamma^2(\omega) = \frac{|G_{xs}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{ss}(\omega)}. \quad (3.14)$$

Эта величина изменяется в пределах $[0, 1]$ и характеризует степень когерентности процессов $x(t)$, $s(t)$ на частоте ω .

Пусть стохастическая система характеризуется восприимчивостью $\chi(\omega, D)$, где D — интенсивность внутреннего шума. Сигнал $s(t)$ будем считать малым. Предположим также, что $s(t)$ есть гауссов стационарный случайный процесс, статистически независимый от внутреннего шума системы. Статистические характеристики отклика системы на воздействие $s(t)$ могут быть вычислены с помощью теории линейного отклика [68, 69]. Для взаимной спектральной плотности $G_{xs}(\omega)$ имеем

$$G_{xs}(\omega) = \chi(\omega, D)G_{ss}(\omega). \quad (3.15)$$

Спектральная плотность на выходе имеет вид:

$$G_{xx}(\omega) \approx G_{xx}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 G_{ss}(\omega), \quad (3.16)$$

где $G_{xx}^{(0)}(\omega, D)$ — спектральная плотность невозмущенной системы в отсутствие сигнала. Подставляя (3.15), (3.16) в выражение (3.14), получаем функцию когерентности в приближении линейного отклика:

$$\Gamma^2(\omega) = 1 - \frac{G_{xx}^{(0)}(\omega, D)}{G_{xx}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 G_{ss}(\omega, D)}. \quad (3.17)$$

Как видно из этой формулы, функция когерентности всегда меньше 1 и зависит от интенсивности внутреннего шума D . Как было показано в работе [68], когерентность входа и выхода оптимальна при определенном уровне шума. При увеличении времени корреляции сигнала когерентность входа и выхода увеличивается. Таким образом, аперриодический СР описывается в рамках общей теории совершенно аналогично случаю с периодическим сигналом.

4. Нединамический стохастический резонанс. Стохастический резонанс в хаотических системах

В предыдущем разделе внимание было сосредоточено на исследовании свойств эффекта СР в зависимости от структуры модулирующего сигнала. Специфика динамической системы не представляла принципиального значения. Безусловно ясно, что как качественные, так и количественные закономерности эффекта СР во многом зависят и от типа системы. Если рассматривать СР как индуцированное шумом возрастание степени когерентности между выходным и входным сигналами, то этот

эффект реализуется в моностабильных системах и в нединамических (пороговых) системах. Эффект СР наблюдается и в хаотических системах, демонстрирующих бистабильность в смысле индуцированной шумом или чисто динамической перемежаемости.

В настоящем разделе исследуются эффекты СР, механизмы и свойства которых главным образом определяются типом системы и режимом ее функционирования.

4.1. Стохастический резонанс

как фундаментальный пороговый эффект

С точки зрения передачи информации бистабильными системами в режиме СР основную роль играют исключительно переходы через потенциальный барьер. Внутренняя динамика может не оказывать существенного влияния на процесс переключений. Поэтому при обработке выходного сигнала с успехом используется метод динамики двух состояний. Выходной сигнал представляется в виде случайного телеграфного процесса, в котором путем фильтрации выделяется составляющая основной частоты. Можно вообще отказаться от анализа бистабильных динамических систем и представить СР как фундаментальный пороговый эффект. В этом случае процесс рассматривается в виде последовательности случайных событий, появляющихся в случае, когда сумма регулярной и шумовой компонент входного сигнала пересекает некоторый заданный пороговый уровень C_{th} :

$$[B \sin \omega t + \xi(t)] > C_{th} \quad \text{или} \quad < C_{th}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим явление СР, используя концепцию нединамического порогового эффекта [36]. Вместо динамических уравнений введем некоторые правила, которые иллюстрирует рис. 4. На рисунке 4а представлен подпороговый регулярный сигнал $B \sin \omega t$ и аддитивный шум $\xi(t)$. В отсутствие шума амплитуды сигнала B недостаточно для достижения порога $C_{th} = \Delta$. С добавлением шума преодоление порога становится возможным и происходит случайным образом.

Всякий раз, когда уровень порога пересекается в одном направлении, генерируется импульс стандартной формы. Процесс пересечений порога порождает во времени случайную последовательность импульсов, как это показано на рис. 4б. Спектр мощности такой последовательности импульсов показан на рис. 4в. Форма спектральной функции в этом случае напоминает соответствующую функцию для бистабильного осциллятора, однако содержит гармоники основной частоты $n\omega$. Отношение сигнал/шум может быть определено по спектру мощности стандартным способом. Расчет зависимости SNR от интенсивности шума демонстрирует эффект СР.

Рассматриваемое явление допускает приближенное и теоретическое описание при следующих предположениях: 1) используется стандартное ограничение адиабатической теории $\omega \ll \langle \nu \rangle$, где $\langle \nu \rangle$ есть средняя частота пересечений порога; 2) импульсы считаются некоррелированными; 3) длительность импульсов τ предполагается ограниченной и пренебрежимо малой в сравнении со средним временем пересечения порога $\tau \ll \langle \nu \rangle^{-1}$.

Нединамическая теория СР базируется на классической формуле для средней частоты пересечения порога $\langle \nu \rangle$ и на предположении, что шум $\xi(t)$ является гауссовым

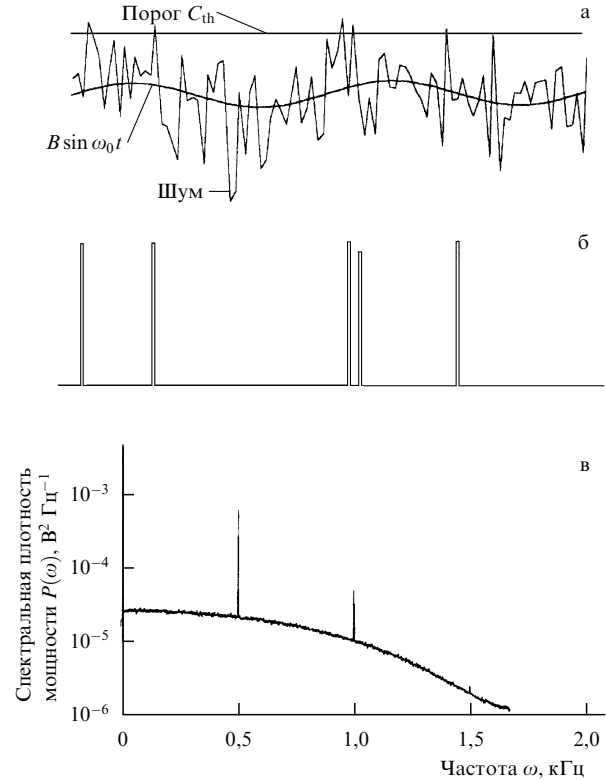


Рис. 4. Синусоидальный подпороговый сигнал плюс шум (а); импульсы, соответствующие моментам пересечения порога C_{th} (б); спектр мощности последовательности импульсов (в).

процессом, спектр которого ограничен частотой среза f_0 [70]:

$$\langle \nu \rangle = \frac{g(\Delta)}{g(0)} \left[\frac{\int f^2 S(f) df}{\int S(f) df} \right]^{1/2} = \frac{g(\Delta) f_0}{\sqrt{3} g(0)}, \quad (4.2)$$

где Δ — порог, f_0 — частота среза низкочастотного фильтра, $g(\Delta)/g(0)$ — функция Гаусса:

$$\frac{g(\Delta)}{g(0)} = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.3)$$

где σ^2 — дисперсия шума.

Если каждому пересечению порога поставить в соответствие прямоугольный импульс длительности τ , амплитуды A и считать, что $\tau \ll \langle \nu \rangle^{-1}$ и импульсы некоррелированы, то для получения спектра мощности такого процесса может быть использована теорема Кэмпбелла:

$$P_N(f) \simeq \frac{1}{2} A^2 \tau^2 \langle \nu \rangle = \frac{1}{2} A^2 \tau^2 \left(\frac{f_0}{\sqrt{3}} \right) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) характеризует равномерный шумовой спектр. В действительности спектр представляет собой медленно спадающую функцию частоты, однако выражение (4.4) можно использовать в качестве оценки спектра в низкочастотной области. Среднее значение амплитуды случайной последовательности импульсов будет

$$\langle V \rangle = A \tau \langle \nu \rangle = A \tau \left(\frac{f_0}{\sqrt{3}} \right) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.5)$$

Теперь добавим малый периодический сигнал $B \sin \omega t$, который приведет к модуляции порога с частотой ω : $A \rightarrow A_0 + B \sin \omega t$. В результате средняя частота пересечений порога $\langle \nu \rangle$ и средняя амплитуда $\langle V \rangle$ последовательности импульсов окажутся зависящими от времени:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle(t) &= \frac{A_0 f_0}{\sqrt{3}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \times \right. \\ &\quad \times (A_0^2 + 2A_0 B \sin \omega t + B^2 \sin^2 \omega t) \left. \right] \simeq \\ &\simeq \frac{A_0 f_0}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{B^2}{4\sigma^2} - \frac{A_0 B}{\sigma^2} \sin \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^2}{4\sigma^2} \cos 2\omega t \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где для получения упрощенного выражения (4.6) использовано условие $B \ll \sigma A_0$. Осуществив преобразование Фурье, получим спектр мощности сигнала, содержащий δ -пики на частотах ω и 2ω :

$$P_S(f) = \frac{A^2 \tau^2 f_0^2}{3} \left[\left(\frac{A_0 B}{\sigma^2} \right)^2 \delta(\omega) + \left(\frac{B^2}{4\sigma^2} \right)^2 \delta(2\omega) \right] \exp \left(-\frac{A_0^2}{\sigma^2} \right). \quad (4.7)$$

Для сигнала основной частоты ω мы можем рассчитать отношение сигнал/шум SNR, используя стандартное определение

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{2f_0 A_0^2 B^2}{\sigma^4 \sqrt{3}} \right) \exp \left(-\frac{A_0^2}{2\sigma^2} \right). \quad (4.8)$$

Зависимость SNR от величины стандартного отклонения σ является типичной для эффекта СР.

Несмотря на простоту и приближенный характер представленной теории, она, тем не менее, описывает основные свойства эффекта и качественно соответствует результатам экспериментов и данным численного моделирования. Более строгая и детальная теория порогового СР опубликована в работе [37].

4.2. Стохастический резонанс в хаотических системах

Для систем, демонстрирующих динамический хаос, типично сосуществование в фазовом пространстве аттракторов различного типа [71]. В отсутствие внешнего шума фазовая траектория будет принадлежать тому или иному аттрактору в зависимости от начальных условий. Воздействие внешнего шума приведет к возникновению случайных переключений между сосуществующими аттракторами системы, статистика которых будет определяться свойствами шума и динамической системы.

Теоретическое рассмотрение влияния внешнего шума на режимы динамического хаоса возможно в пределах малого [72–74] и большого [75] гауссова шума. Теория малых случайных возмущений динамических систем [76] основана на понятии квазипотенциала и была недавно расширена на системы со сложной динамикой [77, 78]. Предположим, что динамическая система имеет аттрактор и для него существует инвариантная вероятностная мера. Пусть система возмущается слабым гауссовым белым шумом интенсивности D и описывается СДУ вида

$$\dot{x}_i = f_i(x) + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.9)$$

где $\langle \xi_i(t) \xi_j(0) \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t)$. Тогда стационарная плотность вероятности $p(x)$ выражается через квазипотенциал $\Phi(x)$ следующим образом:

$$p(x) \propto \exp \left[-\frac{\Phi(x)}{D} \right]. \quad (4.10)$$

Квазипотенциал, являющийся аналогом свободной энергии [63, 79] для неравновесного стационарного состояния, зависит только от переменных состояния и параметров системы и не зависит от интенсивности шума D . Квазипотенциал принимает минимальные значения на аттракторе. Если в системе сосуществует несколько аттракторов, то $\Phi(x)$ будет иметь локальные минимумы, соответствующие этим аттракторам, и при слабом шуме возможна постановка задачи Крамерса. При $D \ll 1$ движение такой системы будет содержать медленный временной масштаб, связанный со средним временем выхода из области притяжения аттрактора. Зависимость среднего времени выхода от интенсивности шума характеризуется экспоненциальным законом вида $\nu(D) \exp(\Delta\Phi/D)$. Если дополнительно к внешнему шуму на систему подается слабый периодический сигнал, не вызывающий переходов в области притяжения других аттракторов, то мы вправе ожидать проявления эффекта СР [34, 35].

Для систем с хаотической динамикой недавно был открыт принципиально иной эффект, так называемый *детерминированный стохастический резонанс* [34, 35]. Известно, что при вариации управляющих параметров хаотических систем имеют место кризисы аттракторов. Примером кризиса может служить явление объединения двух аттракторов с возникновением динамической перемежаемости "хаос–хаос" [80], когда фазовая траектория пребывает длительное время на каждом из объединившихся аттракторов и совершает нерегулярные переходы между ними. Отметим, что такие случайные переключения осуществляются в отсутствие внешнего шума и управляются детерминированным законом [81, 82]. Для систем с перемежаемостью типа "хаос–хаос" среднее время T_i нахождения фазовой траектории на аттракторе подчиняется универсальным закономерностям вида [80–83]:

$$T_i \propto (a - a_{\text{кр}})^\gamma, \quad (4.11)$$

где a — параметр системы, $a_{\text{кр}}$ — пороговое бифуркационное значение параметра, при котором реализуется кризис и возникает перемежаемость, γ — универсальная постоянная. Таким образом, роль интенсивности шума здесь играет параметр системы, контролирующий медленный временной масштаб и, следовательно, ее спектральные свойства [83]. При воздействии на систему периодического сигнала путем изменения параметра можно добиться примерного совпадения периода сигнала и среднего времени переключения с одного аттрактора на другой, т.е. условий СР. Отметим, что режимы перемежаемости экспоненциально чувствительны к внешнему шуму [82, 83], что и делает возможным реализацию классического явления СР.

Проиллюстрируем вышесказанное на простом примере дискретной системы:

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3) \exp \left(-\frac{x_n^2}{b} \right) + A \sin \omega n + \sqrt{2D} \xi(n). \quad (4.12)$$

Система (4.12) представляет собой одномерное кубическое отображение, возмущаемое слабым периодическим сигналом ($A \ll 1$) и δ -коррелированным шумом интенсивности D . Экспоненциальный множитель введен для того, чтобы избежать ухода траектории на бесконечность. Рассмотрим свойства отображения в отсутствие возмущений.

При значении параметра $a < a_{кр} = 2,839 \dots$ в системе сосуществуют два хаотических аттрактора, разделенных седловой точкой $x_n = 0$. При достижении параметром критического значения $a_{кр}$ реализуется кризис, и аттракторы объединяются с рождением эффекта динамической перемежаемости типа "хаос–хаос".

Вначале исследуем эффект СР в режиме до кризиса $a < a_{кр}$, когда процесс переключений управляется внешним шумом. На рисунке 5а представлена зависимость коэффициента усиления периодического сигнала и отношения сигнал/шум от интенсивности внешнего шума D . Как видно из результатов расчета, зависимости усиления и отношения сигнал/шум достигают максимумов при оптимальных уровнях шума. Расчеты свидетельствуют, что оптимальному уровню шума $D = D_{опт}$ отвечает частота Крамерса, близкая к частоте внешнего сигнала.

Теперь исключим шумовое воздействие и рассмотрим реакцию системы (4.12) на периодическое возмущение в режиме, когда параметр a превышает критическое значение, $a > a_{кр}$. По данным расчетов средняя частота переключений монотонно растет с увеличением параметра a . На рисунке 5б представлены зависимости

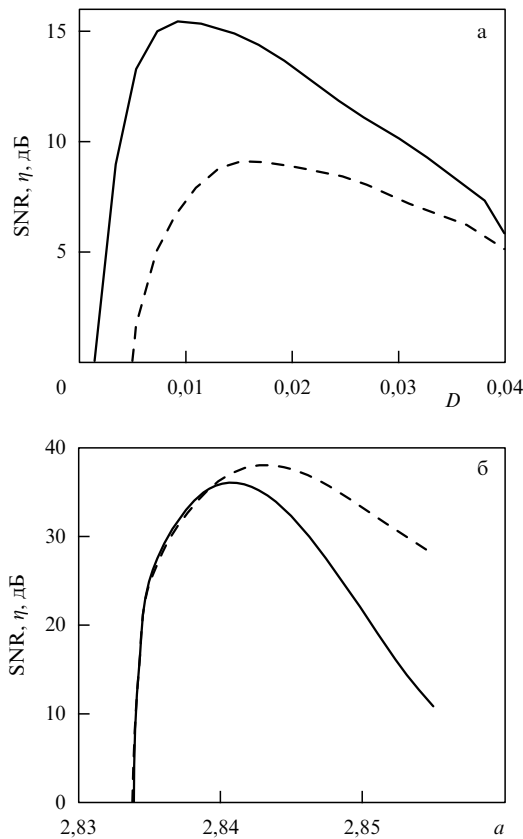


Рис. 5. Зависимость отношения сигнал/шум SNR (сплошная линия) и коэффициента усиления η (штриховая линия) от интенсивности шума D при $a = 2,5$, $A = 0,05$, $\omega = 0,1$ (а) и от управляющего параметра a при $D = 0$, $A = 0,005$, $\omega = 0,1$ (б).

коэффициента усиления и отношения сигнал/шум от величины параметра a , иллюстрирующие эффект детерминированного СР: максимум усиления и отношения сигнал/шум достигаются в области значений параметра $2,85 < a < 2,88$, когда частота Крамерса близка к частоте внешнего сигнала.

Описанные эффекты носят фундаментально общий характер, что подтверждается результатами их наблюдения в различных дискретных и дифференциальных системах, демонстрирующих как индуцированный шумом эффект перемежаемости, так и кризис [34]. В качестве примера рассмотрим СР в модели Лоренца в режиме индуцированной шумом перемежаемости. Система Лоренца [84] является очень удобной для исследования влияния шума на хаотическую динамику [85–88]. Стохастическая модель Лоренца описывается системой СДУ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -y + rx - xz + \xi_2(t), \\ \dot{z} &= -bz + xy + \xi_3(t), \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(0) \rangle &= D \delta_{ij} \delta(t).\end{aligned}\quad (4.13)$$

Как было показано в [88], в области значений параметров $\sigma = 10$, $r = 210$, $b = 8/3$, соответствующей существованию квазиаттрактора, реализуется индуцированный шумом режим перемежаемости типа "хаос–хаос" между двумя симметричными аттракторами.

С учетом только стохастической динамики переходов между аттракторами (приближение двух состояний) корреляционная функция является экспоненциально спадающей $K_{xx}(\tau) \propto \exp[-2r(D)\tau]$, и восприимчивость системы Лоренца может быть оценена таким же выражением, как и для бистабильного осциллятора.

Рассмотрим совместное действие шума и слабого периодического сигнала $A \sin \Omega t$, включенного в первое уравнение системы (4.13). Спектральная плотность в этом случае будет содержать δ -пик на частоте сигнала.

Простейшая оценка для отношения сигнал/шум на выходе системы имеет вид

$$\text{SNR} \propto \frac{r(D)}{D^2} = \frac{1}{D^2} \exp\left(-\frac{\Delta\Phi}{D}\right). \quad (4.14)$$

В результате сравнения данных, полученных численным моделированием СДУ (4.13), с теоретическими (4.14) установлено их качественное и количественное соответствие. Эксперименты показали, что формула (4.14), являющаяся универсальной для систем, демонстрирующих СР, прекрасно описывает эффект и для системы со сложной динамикой. Отметим, что динамические уравнения системы могут быть трансформированы к виду бистабильного осциллятора с инерционной нелинейностью [71, 89]:

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + u^3 + (v-1)u = 0, \quad \dot{v} = h(\beta u^2 - \alpha v), \quad (4.15)$$

где $\gamma = (1 + \sigma)/\sqrt{\sigma(r-1)}$, $h = (r-1)^{-1/2}$, $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$, $\alpha = b/\sqrt{\sigma}$. Для больших значений $r \gg 1$ переменная $v(t)$ является медленной и, исключая ее из (4.15), получаем уравнение бистабильного осциллятора уже без нелинейного инерционного члена:

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} u^3 - u = 0. \quad (4.16)$$

Таким образом, в пределе больших значений r система Лоренца допускает описание в виде бистабильного осциллятора, что гарантирует наличие эффекта СР.

5. Синхронизация стохастических систем

Применение теории линейного отклика дает хорошие результаты, вскрывающие физический механизм явления СР. Возникает вопрос: почему? Ведь все стохастические системы, демонстрирующие эффект СР, принципиально нелинейны! Дело в том, что основные нелинейные свойства стохастических систем учитываются в том или ином приближении при определении корреляционной функции невозмущенной системы. Нелинейность системы проявляется в зависимости корреляционной функции от интенсивности шума D , в результате чего от D зависит и восприимчивость. Ограничения теории линейного отклика ведут к требованию малости амплитуды сигнала возмущения. Отказ от этого условия переводит проблему в класс принципиально нелинейных, и теория линейного отклика становится неприменимой.

Одним из важных нелинейных эффектов, сопровождающих эффект СР, является синхронизация. Синхронизация стохастических систем, не имеющих собственных периодических компонент во временных реализациях процесса, — явление нетривиальное. Однако недавно были открыты эффекты как внешней [90–93], так и взаимной [94] стохастической синхронизации.

5.1. Синхронизация стохастического бистабильного осциллятора

Для рассмотрения эффекта синхронизации стохастических систем обратимся к результатам исследований неавтономного генератора Ван дер Поля — классической автоколебательной системы с предельным циклом, находящейся под воздействием периодической силы и флуктуаций [1–3]. Как известно, наличие шума ведет к флуктуациям амплитуды и фазы колебаний. В результате разность фаз колебаний генератора и внешней гармонической силы $\phi(t) = \Phi(t) - \Psi(t)$ также будет флуктуировать. В приближении постоянной амплитуды медленная динамика разности фаз $\phi(t)$ описывается следующим СДУ [1]:

$$\dot{\phi} = \Delta - \epsilon \sin \phi + \xi(t), \quad (5.1)$$

где $\Delta = \Omega - \Omega_0$ есть разность частот генератора и внешней силы (расстройка по частоте), ϵ — параметр нелинейности, $\xi(t)$ — гауссов шум. Как следует из (5.1), разность фаз $\phi(t)$ совершает броуновское движение в передемпфированном осцилляторе с наклонным периодическим потенциалом $U(\phi) = -\Delta\phi - \epsilon \cos \phi$. При малом уровне шума разность фаз флуктуирует длительное время внутри одной из потенциальных ям (эффект захвата фаз) и редко совершает перескоки через потенциальный барьер (нарушение синхронизации).

В отличие от классической синхронизации детерминированных систем, в случае стохастических колебаний необходимо использовать понятие "эффективной синхронизации" с учетом ограничений на флуктуации фазы, частоты и отношения сигнал/шум [3]. Будем использовать наиболее жесткое определение эффективной синхронизации: система функционирует в режиме эффективной

синхронизации, если среднее время захвата фазы много больше периода внешней гармонической силы. Количественной мерой степени эффективной синхронизации будет коэффициент эффективной диффузии разности фаз:

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle \phi^2(t) \rangle - \langle \phi(t) \rangle^2]. \quad (5.2)$$

Можно показать, что D_{eff} пропорциональна средней скорости r перехода через барьер $D_{\text{eff}} = 4\pi^2 r$ и обратно пропорциональна среднему интервалу времени захвата разности фаз $\langle T \rangle = n2\pi/\Omega_0$, $n \gg 1$ [1]. Таким образом, критерий эффективной синхронизации можно определить как

$$D_{\text{eff}} \leq 2\pi \frac{\Omega_0}{n}, \quad n \gg 1. \quad (5.3)$$

Эффект воздействия шума на синхронизируемый автогенератор хорошо изучен [1–3]: с ростом интенсивности шума условия синхронизации ухудшаются, так что коэффициент эффективной диффузии возрастает с увеличением интенсивности шума. Области синхронизации в пространстве параметров системы сужаются с ростом шума [100, 101]. Иными словами, шум действует против синхронизации, внося беспорядок (стохастическую диффузию фазы). Как мы увидим из дальнейшего, в системах, демонстрирующих СР, шум играет принципиально иную роль.

Вновь обратимся к модели передемпфированного бистабильного осциллятора, СДУ которого запишем в виде:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^3 + \sqrt{2D} \xi(t) + A \cos(\Omega_0 t + \psi_0). \quad (5.4)$$

Система (5.4) не имеет собственной детерминированной частоты. В то же время система характеризуется управляемым шумом временным масштабом — средним временем выхода из потенциальной ямы, которому в частотной области отвечает средняя частота переключений. Периодический сигнал по отношению к бистабильному осциллятору представляет собой как бы внешние "часы". Возникает весьма интересный вопрос: способны ли внешние часы обеспечить эффективную синхронизацию процесса переключений в стохастической бистабильной системе? Как это ни странно на первый взгляд, ответ на вопрос утвердительный. Перейдем к доказательству.

Будем полагать, что в СДУ (5.4) $\alpha, \beta > 0$, $\psi_0 = 0$ и амплитуда модуляции A является малой в сравнении с потенциальным барьером:

$$A < A_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha^3}{3\beta} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Кроме того, будем считать, что частота модуляции мала и применимо адиабатическое приближение.

С целью введения понятия мгновенной фазы аperiodического сигнала воспользуемся концепцией аналитического сигнала [95–99]. Аналитический сигнал $w(t)$ есть комплексная функция времени, определяемая следующим образом [96]:

$$w(t) = x(t) + iy(t) = a(t) \exp[i\Phi(t)], \quad (5.6)$$

где $y(t)$ есть преобразование Гильберта исходного процесса $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (5.7)$$

Интеграл в последнем выражении понимается в смысле главного значения Коши, а для стохастического процесса $x(t)$ сходимость интеграла определяется в среднеквадратичном смысле. Мгновенная амплитуда $a(t)$ и фаза $\Phi(t)$ процесса $x(t)$ выражаются как

$$a^2(t) = x^2(t) + y^2(t), \quad \Phi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (5.8)$$

а мгновенная частота $\omega(t) = d\Phi(t)/dt$ — как

$$\omega(t) = \frac{1}{a^2(t)} [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]. \quad (5.9)$$

Среднее значение частоты $\langle \omega(t) \rangle$ определяется как

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt. \quad (5.10)$$

Наконец, введем в рассмотрение мгновенную разность фаз между выходным и входным сигналами:

$$\phi(t) = \Phi(t) - \Omega_0 t. \quad (5.11)$$

Использованная выше концепция аналитического сигнала дает наиболее общее определение для мгновенной амплитуды и фазы, которое не является единственным. Общность понимается в том смысле, что определение (5.9)–(5.11) учитывает внутриямную динамику фазы. С другой стороны, как показали исследования, основная информация о процессах в системе содержится в последовательности времен переключений и может быть исследована описанным выше методом динамики двух состояний. В связи с этим имеет прямой смысл ввести соответствующее определение фазы, которое было бы эквивалентно упрощенному рассмотрению без учета внутриямной динамики фазы. Следуя [30], рассмотрим только процесс переключений. С этой целью отобразим непрерывный случайный процесс $x(t)$ в дискретный t_k , где t_k — моменты времени пересечения броуновской частицей потенциального барьера. Время пребывания между двумя последовательными переключениями будет $T(t) = t_{k+1} - t_k$, $t_k < t < t_{k+1}$. Соответствующий дихотомический процесс можно описать уравнением:

$$u(t) = x_m \operatorname{sgn} [\cos \Phi(t)], \quad (5.12)$$

где x_m — расстояние от потенциального барьера до минимума потенциальных ям системы (5.4), а $\Phi(t)$ есть фаза, определяемая как

$$\Phi(t) = \pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + \pi k, \quad t_k < t < t_{k+1}. \quad (5.13)$$

Таким образом, фаза $\Phi(t)$ в указанном приближении есть кусочно-линейная функция времени, которая дает точное описание фазы в случае, если переходы осуществляются синхронно с внешней силой, т.е. через период $2\pi/\Omega_0$. Мгновенная частота между переключениями будет

постоянной и равной $\pi/T(t)$. Средняя частота при таком определении фазы есть

$$\langle \omega \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{\pi}{t_{k+1} - t_k}, \quad (5.14)$$

т.е. по сути дела она определяется средней частотой переключений системы [90].

Отметим, что использование как первого, так и второго определений мгновенной фазы после процедуры усреднения приводит к одинаковым результатам.

Эффект фазовой синхронизации. Зависимость мгновенной разности фаз от времени, вычисленная на основе концепции аналитического сигнала, представлена на рис. 6а для различных значений интенсивности шума D . Видно, что существует оптимальное значение $D = 0,80$, при котором разность фаз остается равной нулю на протяжении длительного времени: реализуется эффект вынужденной синхронизации частоты переключений бистабильной стохастической системы, управляемый внешним шумом. Эффект вынужденной синхронизации диагностируется аналогичным образом с использованием второго определения фазы в соответствии с (5.13). На рисунке 6б представлены зависимости средней частоты переключений от интенсивности шума для различных значений амплитуды сигнала модуляции, рассчитанные с использованием как определения (5.6)–(5.10), так и определения (5.14). Результаты наглядно свидетельствуют об эффекте захвата средней частоты переключений, впервые установленном в работе [90]. Рисунок 6б иллюстрирует как наличие порога синхронизации, так и расширение области синхронизации с ростом амплитуды модуляции. В отсутствие воздействия ($A = 0$) средняя частота монотонно растет в соответствии с законом Крамерса. При значении $A \geq 1$ на графике зависимости $\langle \omega \rangle$ от D появляется слабо заметный изгиб; при $A = 2$ становится четко заметной "полочка", где $\langle \omega \rangle$ не зависит от D . Дальнейший рост амплитуды $A = 3$ ведет к расширению зоны синхронизации [93].

В соответствии с используемым определением синхронизации необходимо рассчитать эффективную диффузию D_{eff} (5.2). Результаты представлены на рис. 6в. Как видно из графиков, с ростом амплитуды воздействия зависимости D_{eff} от интенсивности шума все более четко проявляют наличие минимума. Количественные значения D_{eff} в области синхронизации свидетельствуют, что эффект захвата частоты и фазы имеет место на временах, превышающих период внешней силы более чем в 10^3 раз. В соответствии с определением, данным выше, можно констатировать наличие эффективной синхронизации на основном тоне, проявляющееся в захвате фазы и частоты переключений внешним сигналом. Нетривиальным является тот факт, что внесение дополнительного шума в систему приводит к упорядочению фазовой динамики системы: с ростом уровня шума диффузия разности фаз замедляется! Вопрос об индуцированном шумом упорядочении будет рассмотрен подробно в разделе 7.

5.2. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта

При изучении синхронизирующего действия внешнего периодического сигнала на стохастические бистабиль-

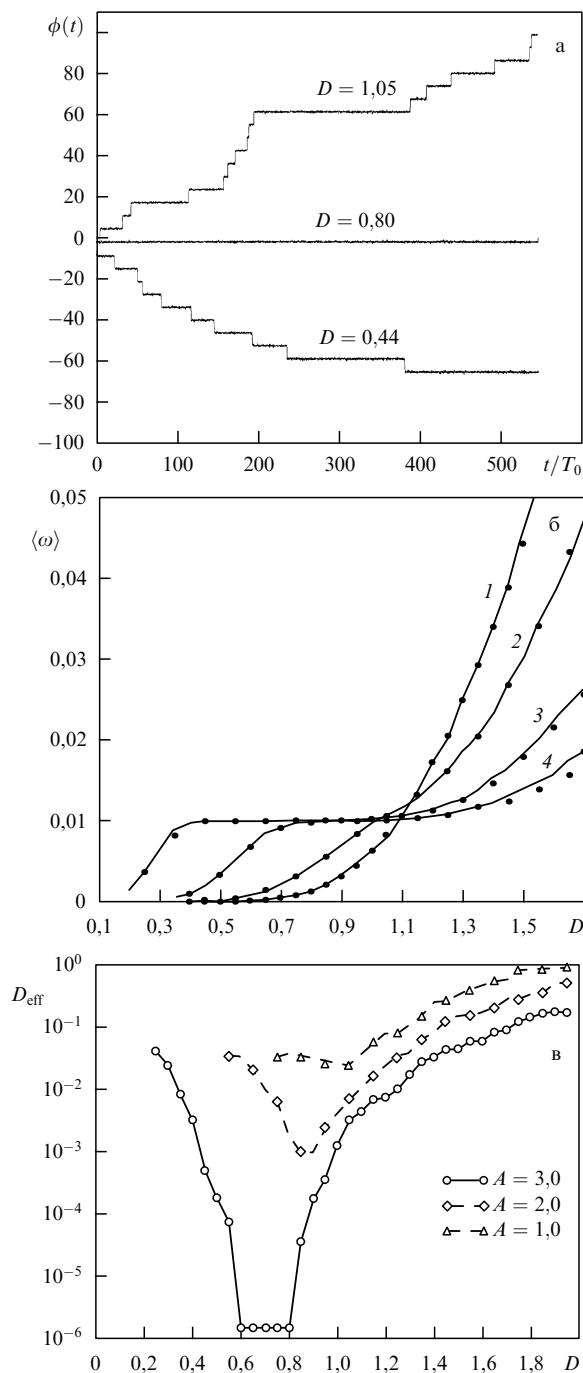


Рис. 6. Мгновенная разность фаз ϕ в зависимости от времени для указанных значений интенсивности шума. Параметры: $A = 3$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = 0,01$ (а). Средняя частота (5.10) (непрерывная линия) и средняя частота переключений (5.14) (•) в зависимости от интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия: 1 — $A = 0$; 2 — $A = 1$; 3 — $A = 2$; 4 — $A = 3$ (б). Коэффициент эффективной диффузии как функция интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия. Параметры: $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = 0,01$ (в).

ные системы основной интерес представляет глобальная динамика переходов между метастабильными состояниями. Поэтому для исследований синхронизации удобно использовать идеальную бистабильную систему — триггер Шмитта [10, 102].

Экспериментальные измерения средней частоты переключений для триггера Шмитта были проведены в

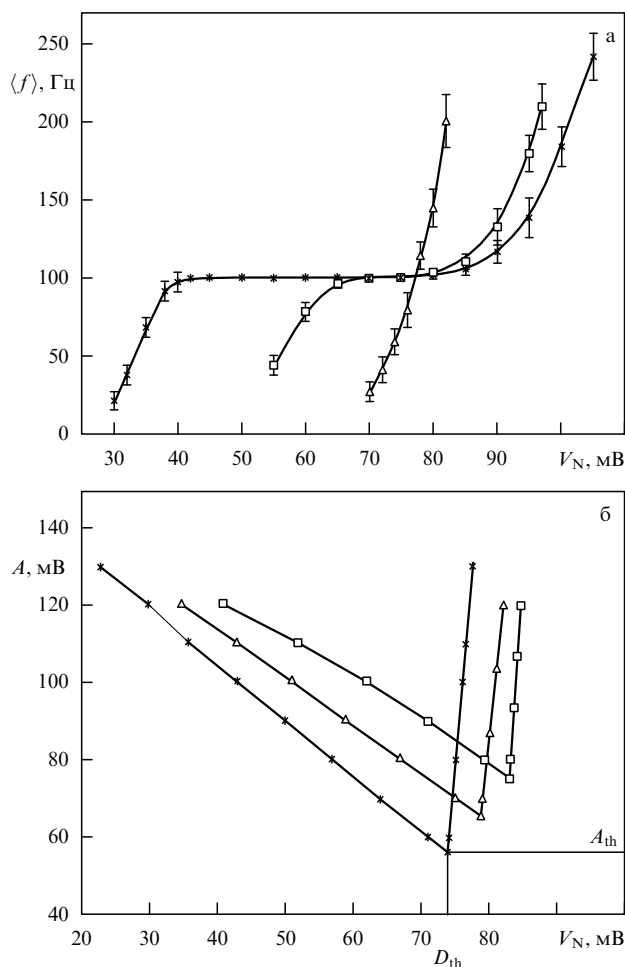


Рис. 7. Зависимость средней частоты $\langle f \rangle$ выходного сигнала триггера Шмитта (эксперимент) от шумовой амплитуды V_N для разных амплитуд сигнала: $A = 0$ мВ (Δ), $A = 60$ мВ ($\square$), $A = 100$ мВ ($\star$) (а); области синхронизации триггера Шмитта для разных частот сигнала: $f_0 = 100$ Гц ($\star$), $f_0 = 250$ Гц (Δ), $f_0 = 500$ Гц ($\square$) (б).

работе [90]. На триггер Шмитта с порогом срабатывания $\Delta U = 150$ мВ подавался шумовой сигнал с частотой среза $f_c = 100$ кГц и периодический сигнал с частотой $f_0 = 100$ Гц.

По выходному сигналу, представляющему собой телеграфный процесс и записываемому в компьютер, измерялась средняя частота по формуле (5.14). Результаты измерений показаны на рис. 7. При слабом сигнале зависимость средней частоты от интенсивности шума следует закону Крамерса. С увеличением амплитуды сигнала зависимость средней частоты от интенсивности шума качественно иная: появляется область значений интенсивности шума, в которой средняя частота практически не меняется с ростом шума и в пределах погрешности эксперимента остается равной частоте сигнала. Наблюдается эффект захвата средней частоты переключений (рис. 7а) [90].

Повторяя измерения средней частоты для разных значений амплитуды и частоты сигнала, можно получить области синхронизации на плоскости параметров "интенсивность шума — амплитуда сигнала", в которых средняя частота равна частоте сигнала. Области синхронизации, напоминающие языки Арнольда, показаны на рис. 7б. Как видно из рисунка, существует пороговое

значение амплитуды сигнала A_{th} , с которого наблюдается эффект захвата средней частоты. При достижении порога периодический сигнал начинает эффективно управлять стохастической динамикой переходов. С ростом частоты сигнала эффект синхронизации ухудшается: во-первых, сужаются области синхронизации, а во-вторых, увеличиваются пороговые значения амплитуды сигнала.

На рисунке 8 показана плотность вероятности времен пребывания $P(t)$ триггера в одном из метастабильных состояний при различных уровнях шума. При слабом шуме $P(t)$ содержит множество пиков на временах, кратных половине периода сигнала. В области синхронизации среднее время нахождения триггера в одном из состояний совпадает с половиной периода, и плотность вероятности времен пребывания содержит ярко выраженный пик при $t = T_0/2$. При большом шуме ($V_N = 115$ мВ) вне области синхронизации среднее время, необходимое для переключения, много меньше половины периода. За период система успевает многократно переключиться из одного состояния в другое, и появляется пик, соответствующий малым временам переключений. Пик, соответствующий половине периода сигнала, размывается, и когерентность выходного сигнала разрушается.

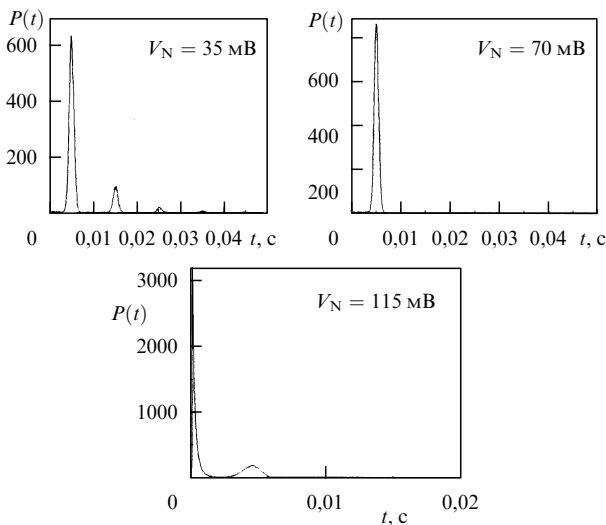


Рис. 8. Плотность вероятности времен пребывания триггера Шмитта в одном из состояний. Амплитуда сигнала $A = 100$ мВ, частота сигнала $f_0 = 100$ Гц.

Триггер Шмитта моделируется следующим выражением [28]:

$$y(t + \Delta t) = \text{sgn}[Ky(t) - \xi(t) - A \sin \Omega t]. \quad (5.15)$$

Параметр $K = 0,2$ характеризует порог срабатывания триггера, $\xi(t)$ — экспоненциально коррелированный шум с временем корреляции $\tau_c = 10^{-2}$ и интенсивностью D , описываемый процессом Орнштейна – Уленбека:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau_c} \xi + D \sqrt{\frac{2}{\tau_c}} w(t), \quad \langle w(t)w(t + \tau) \rangle = \delta(\tau). \quad (5.16)$$

Зависимости средней частоты переключений триггера от интенсивности шума, полученные численным модели-

рованием уравнений (5.15), (5.16) для различных значений амплитуд сигнала модуляции, полностью подтвердили данные экспериментов, представленные на рис. 7а. Динамика разности фаз с использованием определения (5.13) также оказалась качественно эквивалентной случаю бистабильного осциллятора (рис. 6а), подтвердив эффект захвата фазы переключений триггера внешним сигналом при оптимальном значении интенсивности шума.

Из приведенных результатов следует, что внешний периодический сигнал достаточной амплитуды синхронизирует стохастическую динамику переходов. Отметим два важных момента. Хотя амплитуда сигнала находится за пределами применимости теории линейного отклика, она остается малой настолько, что в отсутствие шума переключений системы не происходит. Шум, таким образом, является необходимым компонентом рассматриваемого явления. Это явление сопровождается захватом мгновенной фазы и средней частоты. Более того, в режиме синхронизации существенно понижается уровень фазовых флуктуаций: коэффициент эффективной диффузии становится минимальным.

5.3. Взаимная стохастическая синхронизация связанных бистабильных систем

Рассмотрим простейший случай двух симметрично связанных передемпфированных бистабильных осцилляторов, СДУ которых имеют вид [94, 103]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - x^3 + \gamma(y - x) + \sqrt{2D} \xi_1(t), \\ \dot{y} &= (\alpha + \Delta)y - y^3 + \gamma(x - y) + \sqrt{2D} \xi_2(t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

В СДУ (5.17) параметр α определяет частоту Крамерса первой подсистемы в отсутствие связи, Δ — параметр расстройки второй системы относительно первой, γ — коэффициент связи. Источники белого шума $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ предполагаются статистически независимыми: $\langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau)$. Последнее означает, что при $\gamma = 0$ случайные процессы в подсистемах $x(t)$ и $y(t)$ также будут статистически независимы. Будем считать интенсивности некоррелированных шумов одинаковыми: $D_1 = D_2 = D$. Подробный бифуркационный анализ этой системы проведен в работе [94].

Так как парциальные подсистемы являются бистабильными, то будем считать процессы $x(t)$ и $y(t)$ синхронизованными в случае, если переходы из положительной области значений $x(t)$ в отрицательную имеют место в одни и те же моменты времени, что и для $y(t)$. Значение параметра расстройки $\Delta = -0,5$ определяет более быстрое движение во второй подсистеме $y(t)$. Экспериментально было установлено, что при малой связи процессы в подсистемах несинхронизованы. С ростом коэффициента связи процесс во второй подсистеме замедляется, и при достаточной величине γ процессы в подсистемах становятся когерентными [94, 103].

Для количественной оценки синхронизации используем функцию когерентности, которая определяется выражением

$$\Gamma^2(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)}, \quad (5.18)$$

где $G_{xy}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность процессов $x(t)$, $y(t)$, а $G_{xx}(\omega)$ и $G_{yy}(\omega)$ — их спектры мощности.

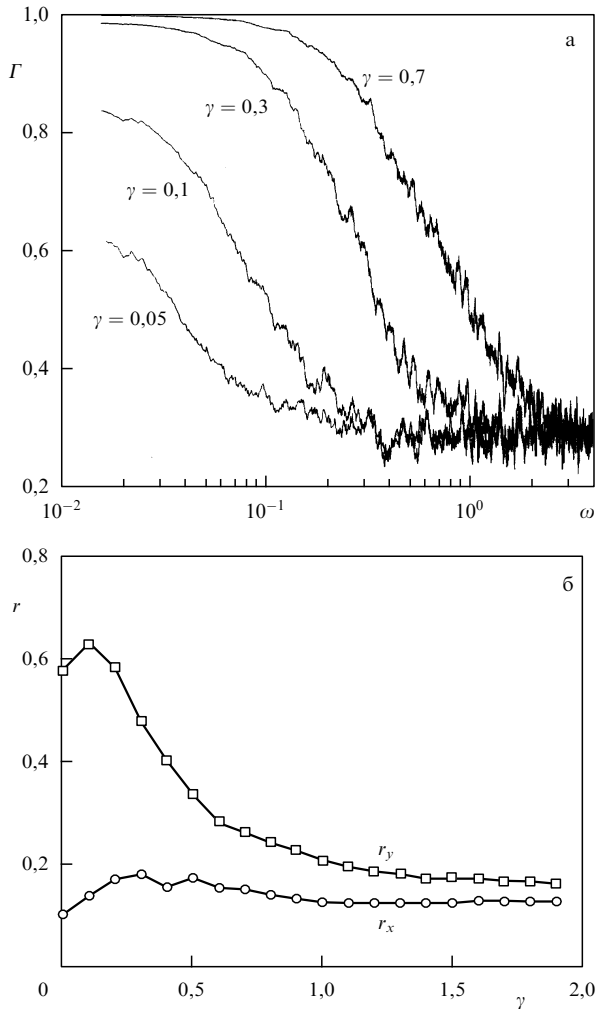


Рис. 9. Функция когерентности $\Gamma(\omega)$ системы (5.17) для разных значений коэффициента связи (а) и зависимость средних частот переключений $r_{x,y}$ от коэффициента связи для значений параметров $\alpha = 1,0$, $\Delta = -0,5$, $D = 0,1$ (б).

Функция когерентности, полученная с помощью численного моделирования СДУ (5.17), показана на рис. 9а для разных значений коэффициента связи. Случайные процессы $x(t)$, $y(t)$ когерентны в низкочастотной области, которая соответствует частотам Крамерса подсистем.

Исследуем эволюцию характерных временных масштабов подсистем с изменением коэффициента связи. При $\gamma = 0$ собственные временные масштабы подсистем представлены скоростями (частотами) Крамерса выхода из метастабильного состояния r_x , r_y :

$$r_x = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\pi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4D}\right),$$

$$r_y = \frac{\sqrt{2}(\alpha + \Delta)}{\pi} \exp\left[-\frac{(\alpha + \Delta)^2}{4D}\right]. \quad (5.19)$$

Рассмотрим влияние степени связи. Зависимость средних частот переключений от γ показана на рис. 9б. С увеличением связи собственные частоты парциальных подсистем сближаются. Функция когерентности характеризует лишь степень линейной зависимости и не содержит информации о фазах процессов. Мгновенная фаза процессов в подсистемах может быть введена на основе

времен переключения, t_i^x , t_j^y , аналогично предыдущему разделу. С помощью численного моделирования динамики мгновенной разности фаз $\phi(t) = \Theta_x(t) - \Theta_y(t)$ установлено, что при $\gamma > 1$ имеет место фазовая синхронизация: разность фаз остается постоянной в течение длительных промежутков времени.

5.4. Внешняя и взаимная синхронизация переключений в хаотических системах

Как уже отмечалось, в хаотических системах в режимах перемежаемости типа "хаос–хаос" реализуется эффект детерминированного СР. При этом средняя частота нерегулярного процесса переключений, в отличие от интенсивности шума, контролируется управляющим параметром (см. раздел 4.2).

Если эти явления объединяет глубокая физическая общность, то в хаотических системах при сильных взаимодействиях должен наблюдаться эффект синхронизации переключений, качественно эквивалентный вышеописанному для стохастических бистабильных систем. Это действительно так. Для иллюстрации рассмотрим внешнюю и взаимную синхронизацию процессов переключений в системах с детерминированной хаотической динамикой.

Внешняя синхронизация. Вновь обратимся к отображению (4.12) в режиме перемежаемости "хаос–хаос" при $a > a_{кр} = 2,839\dots$ Рассмотрим динамику системы в отсутствие внешнего шума для достаточно больших значений амплитуды внешней силы A . При этом процесс переключений принципиально нелинеен, его статистика существенно зависит от параметра a . Используя метод двух состояний, вычислим эволюцию плотности времен пребывания $p(\tau)$ в отдельно взятой потенциальной яме при вариации параметра a . Результаты показаны на рис. 10 и качественно повторяют данные, представленные на рис. 8. При оптимальном значении $a = 8,34$ распределение имеет единственный гауссообразный пик с максимумом при $\tau = 0,5$, что соответствует равенству средней частоты переключений между хаотическими аттракторами частоте внешней силы.

Эффект захвата средней частоты переключений внешним сигналом для различных значений параметра a иллюстрирует рис. 11а. Как и следовало ожидать, с ростом амплитуды сигнала воздействия область синхронизации увеличивается. Из рисунка 11б видно, что эта область представляет собой типичную зону синхронизации, как и в случае триггера Шмитта (рис. 7б), и также демонстрирует наличие порога синхронизации. Таким образом, эффект внешней синхронизации частоты переключений в детерминированной хаотической системе уверенно регистрируется и оказывается качественно эквивалентным эффекту индуцированной шумом стохастической синхронизации, описанному в разделах 5.1, 5.2.

Эффект захвата частоты переключений является универсальным и реализуется в широком классе динамических систем с режимом перемежаемости. Исследуем в качестве примера нелинейную систему Чуа, реализующую режим динамической перемежаемости [35, 83]. Цепь Чуа описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y + F(t), \end{aligned} \quad (5.20)$$

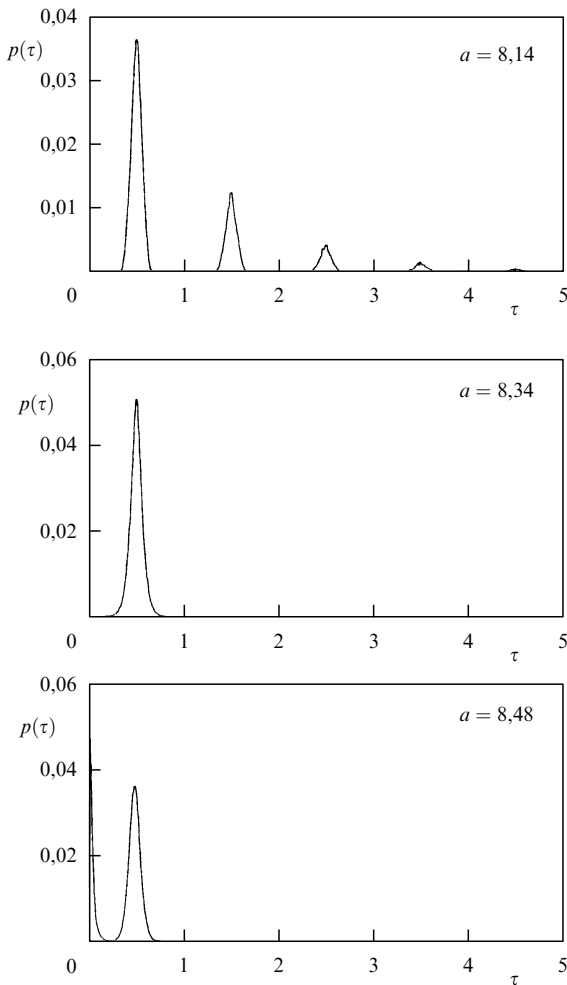


Рис. 10. Эволюция плотности распределения времен пребывания с изменением управляющего параметра α .

где $h(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ — кусочно-линейная характеристика системы, параметры которой фиксированы: $m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$; $F(t) = a \cos \omega_c t$ — внешняя периодическая сила.

Как показано в работе [83], процесс переключений в хаотической бистабильной системе (5.20) может иметь чисто динамическую природу. Применим метод двух состояний. Зафиксируем значение параметра $\beta = 14.286$. Динамика системы (5.20) будет зависеть от величины параметра α , а также от амплитуды a и частоты ω_c внешнего сигнала. В отсутствие воздействия ($a = 0$) режим перемежаемости реализуется в системе (5.20) при $\alpha \approx 8.8$. С увеличением $\alpha > 8.8$ средняя частота переключений (аналог частоты Крамерса) монотонно возрастает. Выберем значение амплитуды $a = 0.1$, когда реакция системы на внешнее воздействие принципиально нелинейна.

Результаты расчета плотности распределения времен возврата $p(\tau)$ для различных значений параметра α показали удивительное сходство с данными, приведенными на рис. 8 для триггера Шмитта. При определенном значении параметра $\alpha = 8.8325$ распределение $p(\tau)$ имеет практически единственный гауссообразный пик с максимумом вблизи $\tau = 1$, что соответствует равенству средней частоты переключений и частоты внешней силы. Регистрируется эффект вынужденной синхронизации,

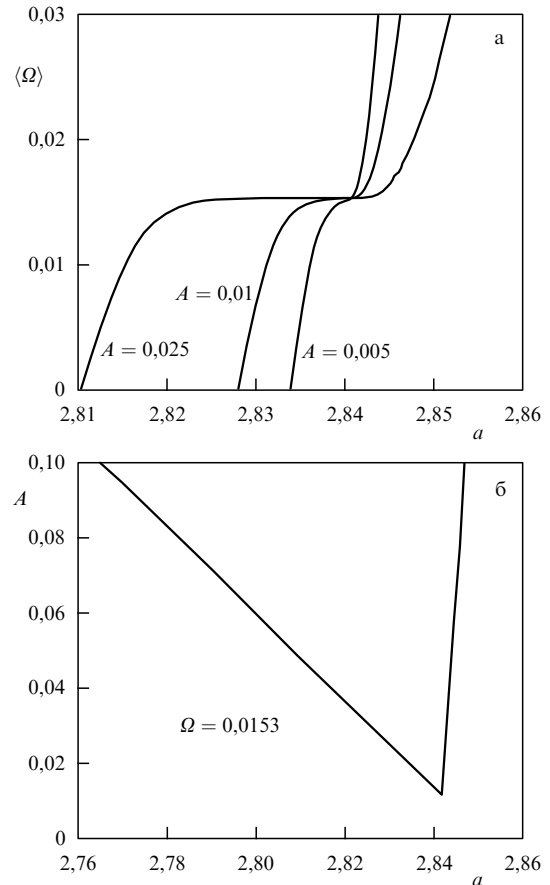


Рис. 11. Средняя частота переключений в зависимости от параметра α для разных значений амплитуды сигнала (а) и область синхронизации частоты переключений (б) для отображения (4.13).

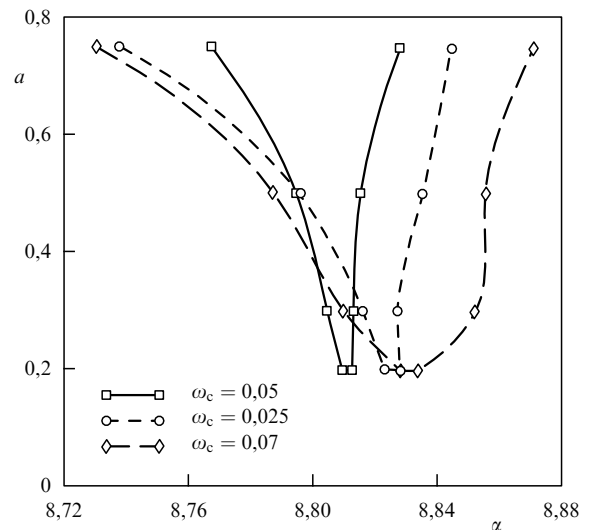


Рис. 12. Области синхронизации переключений для системы Чуа.

проявляющийся в захвате средней частоты переключений периодическим сигналом. Данные эксперимента приведены на рис. 12 и иллюстрируют области синхронизации на плоскости параметров "амплитуда внешнего сигнала — значения управляющего параметра α ". Эти области качественно напоминают "языки Арнольда", как и в случае триггера Шмитта (рис. 7б). Отличие

состоит лишь в том, что с ростом частоты сигнала уровень порога синхронизации здесь практически не изменяется, а ширина областей синхронизации увеличивается. Эти отличия обусловлены нелинейными свойствами исследуемой системы (5.20) и не касаются самой сущности наблюдаемого эффекта. Более детальные расчеты свидетельствуют о том, что эффекту синхронизации средней частоты переключений в системах (4.12) и (5.20) отвечает эффект фазовой синхронизации, полностью эквивалентный рассмотренным случаям триггера Шмитта и передемпфированного осциллятора.

Взаимная синхронизация. В качестве примера взаимной синхронизации процессов переключений рассмотрим динамику системы двух связанных моделей Лоренца [104]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x - 1) + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - x_1 z_1 - y_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - z_1 b, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= r_2 x - 2 - x_2 z_2 - y_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - z_2 b. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Выберем значения параметров $\sigma = 10$, $r_1 = 28,8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$, когда в каждой из подсистем существует аттрактор Лоренца [84, 87]. Аттрактор Лоренца в парциальной системе можно рассматривать как обобщенный бистабильный осциллятор, в котором имеет место нерегулярный процесс переключений со средней частотой, контролируемой управляющим параметром γ . Введение связи ($\gamma > 0$) должно вызывать изменение средних частот переключений в каждой из подсистем и приводить к эффекту взаимной синхронизации переключений.

Как показали расчеты, проведенные в приближении динамики двух состояний, при значениях коэффициента связи $\gamma > 5$ средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ практически совпадают. Более того, численное моделирование динамики мгновенной разности фаз процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ подтвердило эффект взаимной синхронизации: при $\gamma > 5$ разность фаз близка к нулю на временах, существенно превышающих среднее время переключений. Таким образом, при сильной связи между двумя хаотическими бистабильными осцилляторами имеет место эффект взаимной синхронизации.

6. Стохастический резонанс и синхронизация ансамблей стохастических осцилляторов

Эффект СР может быть существенно усилен, если используется цепочка связанных бистабильных систем [105–108]. Установлено, что при оптимальных значениях интенсивности шума и коэффициента связи отношение сигнал/шум в цепочке достигает максимального уровня, демонстрируя эффект усиленного массивом СР [103, 109]. Сначала рассмотрим случай слабой связи, когда взаимодействием между парциальными стохастическими резонаторами можно пренебречь.

Исследуемая модель содержит N подсистем, каждая из которых демонстрирует СР. Парциальная подсистема SR_k обладает внутренним шумом $\xi_k(t)$, при этом внутренние шумы в подсистемах статистически независимы. Вход является общим для всех элементов цепочки и представлен сигналом $s(t)$, который может быть аperiо-

дическим. Выходы сигналов с элементов подаются на суммирующий центр, дающий коллективный отклик $x_M(t)$:

$$x_M(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t). \quad (6.1)$$

Представленная модель широко используется на практике как простейший способ увеличения отношения сигнал/шум [110]. При достаточно большом количестве элементов в массиве ($N \gg 1$) внутренние шумы на коллективном выходе исчезают за счет усреднения и отношение сигнал/шум возрастает пропорционально числу элементов. Нетривиальность модели заключается в том, что каждый элемент является стохастическим резонатором. Поэтому, помимо увеличения отношения сигнал/шум, возможно и существенное усиление сигнала. Представляет интерес и проблема синхронизации ансамбля внешним сигналом. Отметим, что эта модель имеет важные биологические приложения как простейшая нейронная сеть [111] и модель ионных каналов [112, 113]. Похожая модель, где в качестве парциальных элементов использовались автоколебательные системы, исследована в работе [114]. С помощью этой модели в работе [115] был установлен важный эффект "стохастического резонанса без настройки". Было показано, что при увеличении числа элементов в массиве зависимость отношения сигнал/шум от интенсивности шума практически пропадает, начиная с некоторого малого порогового значения.

6.1. Теория линейного отклика для ансамблей стохастических резонаторов

В случае слабого сигнала $s(t)$ статистические свойства отклика отдельной стохастической системы могут быть рассчитаны с помощью теории линейного отклика. Задача состоит в вычислении спектральных характеристик коллективного отклика $x_M(t)$ [68].

Обозначим спектральную плотность на выходе k -го элемента через $G_{kk}(\omega)$, взаимную спектральную плотность k -го и m -го элементов — через $G_{km}(\omega)$ и спектральную плотность суммированного выхода — через $G_{MM}(\omega)$. Для спектральной плотности $G_{MM}(\omega)$ непосредственно из (6.1) получаем:

$$G_{MM}(\omega) = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{k=1}^N G_{kk}(\omega) + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ k \neq m}}^N G_{km}(\omega) \right]. \quad (6.2)$$

В отсутствие сигнала $G_{km}(\omega) = 0$ в силу статистической независимости внутренних шумов в элементах. Пусть элементы массива характеризуются известными восприимчивостями $\chi_k(\omega, D)$, где D — интенсивность внутреннего шума. Для спектральной плотности на выходе k -го элемента получаем

$$G_{kk}(\omega) \approx G_{kk}^{(0)}(\omega, D) + |\chi_k(\omega, D)|^2 G_{ss}(\omega), \quad (6.3)$$

где $G_{kk}^{(0)}(\omega, D)$ — спектральная плотность k -го элемента в отсутствие сигнала, а $G_{ss}(\omega)$ — спектральная плотность сигнала. Взаимная спектральная плотность $G_{km}(\omega)$ определяется выражением [68]:

$$G_{km}(\omega) = \chi_k^*(\omega, D) \chi_m(\omega, D) G_{ss}(\omega), \quad (6.4)$$

где символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. В отсутствие сигнала $G_{km}(\omega) = 0$. Подставляя (6.3) и (6.4) в (6.2), получаем спектральную плотность коллективного выхода:

$$G_{MM}(\omega) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N G_{kk}^{(0)}(\omega, D) + \frac{G_{ss}(\omega)}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \chi_k^*(\omega, D) \chi_m(\omega, D). \quad (6.5)$$

Взаимная спектральная плотность коллективного выхода и входного сигнала, $G_{sM}(\omega)$, определяется выражением

$$G_{sM}(\omega) = \frac{G_{ss}(\omega)}{N} \sum_{k=1}^N \chi_k(\omega, D). \quad (6.6)$$

Полученные соотношения позволяют определить все необходимые меры СР, в частности, функцию когерентности и отношение сигнал/шум. Для упрощения анализа рассмотрим случай ансамбля идентичных элементов с восприимчивостью $\chi(\omega, D) \equiv \chi_k(\omega, D)$ и с невозмущенной спектральной плотностью $G_{xx}^{(0)}(\omega, D) \equiv G_{kk}^{(0)}(\omega, D)$. Для этого случая получаем следующие выражения для спектральных плотностей:

$$G_{MM}(\omega) = \frac{1}{N} G_{xx}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 G_{ss}(\omega), \quad (6.7)$$

$$G_{sM}(\omega, D) = \chi(\omega, D) G_{ss}(\omega). \quad (6.8)$$

В пределе больших N первый член в (6.7), отвечающий за внутренние флуктуации в элементах ансамбля, исчезает, и весь ансамбль ведет себя как эквивалентная *линейная* система с передаточной характеристикой $\chi(\omega, D)$.

Пусть сигнал $s(t)$ представляет собой широкополосный гауссов шум с нулевым средним, характеризующийся спектральной плотностью $G_{ss}(\omega)$. Нас интересуют функция когерентности $\Gamma(\omega)$ и корреляционный коэффициент C_1 между входом и коллективным выходом:

$$\Gamma^2(\omega) = \frac{|G_{sM}(\omega)|^2}{G_{MM}(\omega) G_{ss}(\omega)}, \quad C_1 = \frac{\langle x_M, s \rangle}{\sqrt{\langle s^2 \rangle \langle x_M^2 \rangle}}. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.7) и (6.8) в (6.9), получаем для функции когерентности следующее выражение, справедливое для слабых сигналов:

$$\Gamma^2(\omega) = \frac{|\chi(\omega, D)|^2 G_{ss}(\omega)}{G_{xx}^{(0)}(\omega, D)/N + |\chi(\omega, D)|^2 G_{ss}(\omega)}. \quad (6.10)$$

При $N \rightarrow \infty$ функция когерентности стремится к 1, как это и должно быть для линейных систем. С ростом числа элементов в ансамбле зависимость функции когерентности от интенсивности внутреннего шума D и частоты пропадает, как это следует из формулы (6.10). Иными словами, выходной сигнал может быть оптимизирован при любой интенсивности внутреннего шума, начиная с некоторого малого значения.

Представим слабый сигнал на входе в виде суммы периодической и шумовой компонент: $s(t) = n(t) + A \sin \Omega t$. Отношение сигнал/шум на входе фиксиру-

вано:

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{\pi A^2}{G_{nn}(\Omega)}, \quad (6.11)$$

где $G_{nn}(\omega)$ — спектральная плотность шумовой компоненты. Спектральная плотность коллективного выхода также будет состоять из шумового пьедестала и δ -пика, соответствующего периодической части сигнала:

$$G_{MM}(\omega) = \frac{1}{N} G_{xx}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 \times [G_{nn}(\omega) + \pi A^2 \delta(\omega - \Omega)]. \quad (6.12)$$

Отношение сигнал/шум коллективного выхода SNR_{out} может быть легко получено из последнего выражения. Однако наибольший интерес представляет отношение отношений сигнал/шум на выходе и входе:

$$\eta = \frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{in}}} = 1 - \frac{G_{xx}^{(0)}(\Omega, D)}{G_{xx}^{(0)}(\Omega, D) + N |\chi(\Omega, D)|^2 G_{nn}(\Omega)}. \quad (6.13)$$

Это отношение всегда меньше 1. Лишь в пределе $N \rightarrow \infty$ отношения сигнал/шум на входе и выходе совпадают. Хотя, как следует из приведенного выше анализа, *отношение сигнал/шум на выходе ансамбля стохастических резонаторов не может быть улучшено по сравнению со входом*, периодическая часть сигнала может быть существенно усилена в $|\chi(\Omega, D)|$ раз.

Практически важной является оценка числа элементов ансамбля, необходимых для получения заданного отношения η , которое легко находится из формулы (6.13):

$$N = \frac{G_{xx}^{(0)}(\Omega, D)}{|\chi(\Omega, D)|^2 G_{nn}(\Omega)} \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (6.14)$$

Для массива стохастических резонаторов зависимость $N(D)$ демонстрирует минимум при некоторой оптимальной интенсивности шума. Таким образом, при оптимальном уровне шума заданное значение отношения η может быть достигнуто при минимальном числе элементов в массиве [68].

6.2. Синхронизация ансамбля стохастических резонаторов слабым периодическим сигналом

В пределе $N \rightarrow \infty$ и в отсутствие внешнего шума коллективный отклик ансамбля на слабый периодический сигнал является периодической функцией времени:

$$x_M^\infty(t) = A |\chi(\Omega, D)| \cos(\Omega t + \psi), \quad (6.15)$$

где ψ — фазовый сдвиг, определяемый формулой

$$\psi = -\arctan \frac{\text{Im } \chi(\Omega, D)}{\text{Re } \chi(\Omega, D)}. \quad (6.16)$$

Интересны ситуации, когда число элементов в ансамбле велико, но конечно. Примерами из области биологии могут служить популяции нейронов-рецепторов [111] и массивы ионных каналов в клеточных мембранах [112, 113]. Насколько реализация коллективного выхода ансамбля отражает входной сигнал? Предыдущие разделы дали ответ на этот вопрос лишь в терминах усредненных характеристик, таких, как отношение сиг-

нал/шум и функция когерентности. Для отдельного стохастического резонатора синхронизация выхода и входа, как было описано в разделе 5, возможна лишь при достаточно большой амплитуде сигнала. Понижение уровня внутреннего шума за счет усреднения на коллективном выходе дает возможность синхронизовать ансамбль стохастических резонаторов сколь угодно слабым периодическим сигналом [116].

Рассмотрим в качестве примера ансамбль триггеров Шмитта:

$$x_k(t + \Delta t) = \text{sgn}[Kx_k(t) - \xi_k(t) - \eta(t) - A \sin \Omega t], \quad (6.17)$$

где K — порог срабатывания триггера, $\xi_k(t)$ — внутренний шум в k -м элементе, $\eta(t)$ — слабый внешний шум. В численных экспериментах $K = 0,2$, в качестве внутреннего шума использовался гауссов экспоненциально коррелированный шум с временем корреляции $\tau_c = 0,01$ и интенсивностью D , внешний шум был также представлен гауссовым цветным шумом с таким же временем корреляции и интенсивностью $Q = 0,03$. Для амплитуды и частоты периодического сигнала были выбраны значения $A = 0,03$, $\Omega = 0,5$, при которых явление стохастической синхронизации для отдельно взятого элемента не наблюдается.

Для количественного анализа синхронизации коллективного выхода используем понятие средней частоты и мгновенной фазы (5.10) и (5.13), (5.14). На рисунке 13а показана зависимость средней частоты $\langle \omega \rangle$ от интенсивности внутреннего шума для разного числа N элементов в ансамбле. Для отдельно взятого элемента $N = 1$ зависимость $\langle \omega \rangle(D)$ имеет экспоненциальный вид. Однако с ростом числа элементов экспоненциальный закон нарушается, и при достаточно большом количестве стохастических резонаторов ($N \geq 100$) имеет место эффект захвата частоты $\langle \omega \rangle$. Описываемая картина похожа на синхронизацию отдельного стохастического резонатора при возрастании амплитуды сигнала (см. рис. 6, 7). Однако в нашем случае амплитуда сигнала мала, и синхронизация достигается за счет увеличения числа элементов в ансамбле.

Вывод о наличии синхронизации подтверждается и расчетом мгновенной разности фаз коллективного выхода и периодического сигнала, представленным на рис. 13б. При оптимальном уровне внутреннего шума ($D \approx 0,06$) разность фаз остается постоянной в течение длительных промежутков времени. Как уже говорилось, среднее значение этих промежутков времени может быть оценено с помощью коэффициента эффективной диффузии разности фаз D_{eff} . Как показали расчеты, при оптимальной интенсивности шума коэффициент диффузии минимален. С ростом числа элементов в ансамбле N абсолютное значение коэффициента диффузии уменьшается, а оптимальное значение интенсивности внутреннего шума D сдвигается в сторону меньших значений.

Описанное явление синхронизации наблюдается для любых элементов, демонстрирующих СР при изменении внутреннего шума, в том числе и для элементов, представленных моделями нейронов.

6.3. Эффект стохастического резонанса

в цепочке при конечной связи между элементами

Введение связи между элементами ансамбля позволяет произвести дальнейшую оптимизацию усилительных

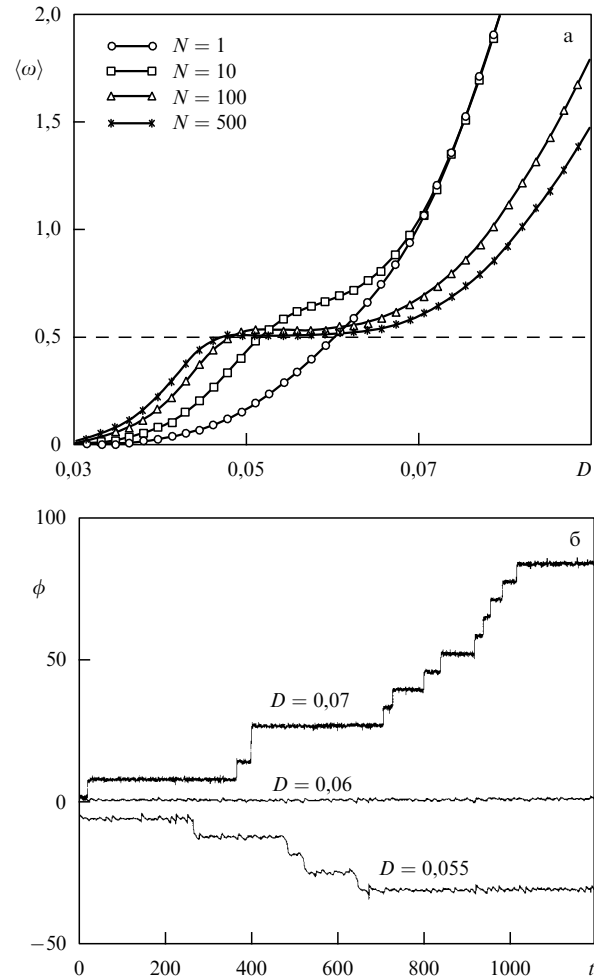


Рис. 13. Зависимость средней частоты $\langle \omega \rangle$ коллективного выхода ансамбля триггеров Шмитта от интенсивности внутреннего шума D для разного числа элементов N в ансамбле (а) и временные реализации разности фаз коллективного выхода и периодического входа ансамбля 100 триггеров Шмитта для разных значений интенсивности внутреннего шума (б).

свойств системы путем изменения коэффициента связи между элементами [103, 105, 106, 108]. В этом разделе в качестве модели рассматривается цепочка связанных систем с двумя дискретными состояниями — цепочка связанных спинов. Система модулируется внешним периодическим (магнитным) полем. Каждый спин может переключаться за счет теплового шума. Связь между элементами осуществляется через магнитное взаимодействие. Эта модель является одной из хорошо изученных и восходит к работе Глаубера 1963 г. [117]. В связи с этим стохастическая динамика цепочки связанных спинов получила название динамики Глаубера.

Динамика Глаубера использовалась для обнаружения СР в ферромагнитных системах. При этом локальная скорость переключения спинов α являлась постоянной, не зависящей от температуры. В этом случае СР имеет место исключительно за счет взаимодействия между спинами. Численные эксперименты с двумерной стохастической моделью Изинга, проведенные в [20], подтвердили существование СР. Авторы [118] нашли оптимальное значение степени связи для данного значения температуры T в цепочке спинов с постоянной локальной скоростью переключений α .

Используем идею о том, что цепочка связанных спинов может быть рассмотрена как простейший прототип связанных бистабильных стохастических резонаторов [109]. Отметим, что локальная скорость переключений отдельного спина в модели Глаубера считается зависящей от температуры. В дополнение к модели Глаубера предположим, что скорость переключений α между состояниями $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$ индивидуального несвязанного спина подчиняется закону типа Аррениуса [27]

$$\alpha = \alpha_0 \exp\left(-\frac{1}{T}\right), \quad (6.18)$$

в котором предполагается, что $\alpha_0 = 1$.

Подобное предположение о температурной зависимости (т.е. зависимости от интенсивности шума) было основным в теории двух состояний [28]. В теории [28] (см. раздел 2.1) рассматривался элемент с двумя состояниями $\sigma = \pm 1$ и стохастические переходы между ними, описываемые управляющим уравнением:

$$\dot{p}(\sigma) = -p(\sigma)W(\sigma, t) + p(-\sigma)W(-\sigma, t), \quad (6.19)$$

где $p(\sigma)$ — вероятность нахождения элемента в состоянии σ в момент времени t . $W(\sigma, t)$ обозначает вероятность перехода в единицу времени для переключения $\sigma \rightarrow -\sigma$. В присутствии слабого медленно меняющегося периодического поля скорости переходов записываются в виде:

$$W(\sigma, t) = \frac{\alpha}{2} (1 - \sigma\beta \cos(\Omega t + \phi)), \quad (6.20)$$

и в пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ возможно получение выражения для отношения сигнал/шум. Амплитуда сигнала воздействия A входит через $\beta = A/T$ в выражение для скоростей переходов. В бистабильных системах с непрерывными состояниями скорости переходов такого типа получаются при малых амплитудах в рамках адиабатического приближения.

Для обобщения теории двух состояний на связанные системы рассмотрим цепочку, состоящую из бесконечного числа элементов — спинов, и исследуем один или несколько спинов, включенных в эту цепочку. Состояние цепочки, которое задается последовательностью $\bar{\sigma} = (\dots, \sigma_k - 1, \sigma_k, \sigma_k + 1, \dots)$ ($\sigma_k = \pm 1$), определяется вероятностью $p(\bar{\sigma})$. Скорости переходов для отдельного несвязанного элемента сохраняются в форме, использованной в теории двух состояний. Однако в связанных системах скорости переходов должны зависеть от состояний элементов справа и слева от выбранного. Следуя Глауберу, запишем скорости переходов в виде

$$W_i(\sigma_i) = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \sigma_i \frac{\gamma}{2} (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1}) \right]. \quad (6.21)$$

Для положительных γ формула (6.21) дает увеличение скорости для параллельной конфигурации спинов. По Глауберу скорости переходов ведут к стационарному состоянию системы с равновесным распределением (модель Изинга):

$$p_{\text{eq}}(\bar{\sigma}) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{1}{T} \mathcal{H}\right) = Z^{-1} \exp\left(\frac{1}{T} \sum_i J \sigma_i \sigma_{i+1}\right), \quad (6.22)$$

где Z^{-1} — постоянная нормировки. В отсутствие воздействия условие детального баланса предполагает

$$\begin{aligned} W_i(\sigma_i) p_{\text{eq}}(\dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots) = \\ = W_i(-\sigma_i) p_{\text{eq}}(\dots, \sigma_{i-1}, -\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots), \end{aligned} \quad (6.23)$$

что достигается выбором коэффициента γ в виде

$$\gamma = \tanh \frac{2J}{T}. \quad (6.24)$$

Здесь параметр J имеет смысл коэффициента связи.

Учитывая взаимодействие спинов (6.21) и периодическую модуляцию внешним магнитным полем (6.20), получаем выражение для скоростей переходов в виде:

$$\begin{aligned} W_i(\sigma_i) = \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2} \sigma_i (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1}) - \right. \\ \left. - \beta \left[\sigma_i - \frac{\gamma}{2} (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1}) \right] \cos(\Omega t + \phi) \right\}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Подстановка Гамильтониана

$$\mathcal{H} = -\mu \sum_i H(t) \sigma_i - J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (6.26)$$

в выражение для равновесного распределения (6.22) ведет в адиабатическом пределе и в условиях детального баланса (6.23) к $\beta = \tanh(\mu A/T)$ или $\beta \approx \mu A/T$ для малых амплитуд A . Для простоты положим $\mu = 1$. Эволюция вероятностей $p(\bar{\sigma})$ определяется управляющим уравнением

$$\begin{aligned} \dot{p}(\bar{\sigma}) = \sum_k W_k(-\sigma_k) p(\dots, \sigma_{k-1}, -\sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots) - \\ - \sum_k W_k(\sigma_k) p(\dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Если исключить гармоническое воздействие и температурную зависимость локальных скоростей переходов (6.18), то уравнение (6.27) описывает динамику Глаубера модели Изинга в пределе слабого поля [117].

Обратим внимание, что предложенная модель есть расширение модели [28] на случай цепочки из бистабильных элементов.

Из (6.27) следует $d\langle \sigma_k \rangle / dt = -2\langle \sigma_k W_k(\sigma_k) \rangle$. Это позволяет получить систему дифференциальных уравнений для первых моментов $\langle \sigma_k(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \sigma_k \rangle}{dt} = -\alpha \langle \sigma_k \rangle + \alpha \beta \cos(\Omega t + \phi) + \frac{\alpha \gamma}{2} (\langle \sigma_{k-1} \rangle + \langle \sigma_{k+1} \rangle) - \\ - \frac{\alpha \beta \gamma}{2} (r_{k-1,k} + r_{k,k+1}) \cos(\Omega t + \phi), \end{aligned} \quad (6.28)$$

где $r_{i,j}(t) = \langle \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rangle$. Система (6.28) является незамкнутой, поскольку содержит взаимные корреляторы $r_{i,j}(t)$. Замыкание системы возможно путем линеаризации по параметру β . В этом случае корреляторы $r_{i,j}$ могут быть взяты из невозмущенной модели ($\beta = 0$). Стационарные значения корреляторов есть $r_{i,j} = \eta^{|i-j|}$, где $\eta = \gamma^{-1} (1 - \sqrt{1 - \gamma^2}) = \tanh(J/T)$ [117].

Получающуюся замкнутую систему уравнений можно еще более упростить. Так как все спины возмущаются магнитным полем равномерно, а их число бесконечно, то, коль скоро начальное распределение состояния спинов забывается, отличить отдельный спин от

других становится невозможно. Иными словами, все спины будут иметь одинаковую статистику, и индексы спинов в (6.28) могут быть опущены. Принимая во внимание сделанное выше допущение о малости β , получаем упрощенное уравнение для среднего значения:

$$\frac{d\langle\sigma\rangle}{dt} = -\alpha(1-\gamma)\langle\sigma\rangle + \alpha\beta\sqrt{1-\gamma^2} \cos(\Omega t + \phi). \quad (6.29)$$

Очевидно, что динамика $\langle\sigma\rangle$ идентична динамике среднего значения несвязанного спина с перенормированными скоростью релаксации $\alpha(1-\gamma)$ и амплитудой модуляции $\alpha\beta\sqrt{1-\gamma^2}$. В приближении малых амплитуд воздействия $\beta \approx A/T$, и асимптотическое решение уравнения (6.29) получается в виде

$$\langle\sigma(t)\rangle = q \cos(\Omega t + \phi + \psi), \quad q = q_s \left[1 + \frac{\Omega^2}{\alpha^2(1-\gamma)^2} \right]^{-1/2}, \quad \tan \psi = -\frac{\Omega}{\alpha(1-\gamma)}, \quad (6.30)$$

где q_s есть отклик системы на статический сигнал ($\Omega = 0$):

$$q_s = \frac{A}{T} \sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} = \frac{A}{T} \exp\left(\frac{2J}{T}\right). \quad (6.31)$$

Так как величина статического отклика не должна превосходить 1, $q_s = 1$, выражение (6.31) накладывает дополнительные ограничения на параметры системы, при которых сохраняются предложенные приближения:

$$A \ll \min \left[T, T \exp\left(-\frac{2J}{T}\right) \right]. \quad (6.32)$$

Спектральная плотность спина определяется из корреляционной функции $\langle\sigma_k(t)\sigma_k(t+\tau)\rangle$, где периодическая нестационарность снимается путем дополнительного усреднения $\langle \rangle_\phi$ по равномерно распределенной начальной фазе сигнала. Вводя корреляционную функцию $c_{kk}(t, \tau) = \langle [\sigma_k(t) - q_k(t)][\sigma_k(t+\tau) - q_k(t+\tau)] \rangle$, находим

$$\langle\langle\sigma_k(t)\sigma_k(t+\tau)\rangle\rangle_\phi = \langle c_{kk}(t, \tau) \rangle_\phi + \frac{q^2}{2} \cos \Omega \tau. \quad (6.33)$$

Второй член в правой части (6.33) дает δ -функцию с весом πq^2 на частоте сигнала. Первый член формирует непрерывную часть спектра. Для наших целей достаточна аппроксимация непрерывной части спектра спектральной плотностью невозмущенной системы. В этом случае корреляционная функция в стационарном состоянии $c(\tau)$ не зависит от начальной фазы сигнала и от индекса спина. В соответствии с теорией Глаубера $c(\tau)$ определяется выражением

$$c(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta^{|n|} I_n(\alpha\gamma|\tau|), \quad (6.34)$$

где $I_n(\alpha\gamma|\tau|)$ — модифицированные функции Бесселя. Спектральная плотность имеет вид [119]

$$G(\omega) = 4 \operatorname{Re} \frac{1 + \eta s_2}{s_1(1 - \eta s_2)}, \quad \omega > 0, \quad (6.35)$$

где $s_1 = \sqrt{(\alpha + i\omega)^2 - (\alpha\gamma)^2}$ и $s_2 = \alpha\gamma(\alpha + i\omega + s_1)^{-1}$.

Теперь могут быть получены аналитические выражения для коэффициента усиления и отношения сигнал/шум. Обе эти меры вычисляются для отдельного спина, вложенного в бесконечную цепочку. Коэффициент усиления $\rho = (q/A)^2$ дается явным выражением

$$\rho = \frac{1}{T^2} \exp\left(\frac{4J}{T}\right) \left\{ 1 + \left[\frac{\Omega \exp(1/T)}{1 - \tanh(2J/T)} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (6.36)$$

Нормированное на квадрат амплитуды сигнала отношение сигнал/шум получается как

$$\text{SNR} = \frac{\pi q^2}{A^2 G(\Omega)} = \frac{\pi \rho}{G(\Omega)}. \quad (6.37)$$

В пределе нулевой связи ($J \rightarrow 0$) последнее выражение дает отношение сигнал/шум (2.16), получаемое в рамках теории двух состояний для одного элемента [28]:

$$\text{SNR}_0 = \frac{\pi \alpha}{4T^2} = \frac{\pi}{4T^2} \exp\left(-\frac{1}{T}\right). \quad (6.38)$$

Как коэффициент усиления (6.36), так и перенормированное отношение сигнал/шум (6.37) зависят от трех параметров: температуры T , коэффициента связи J и частоты сигнала Ω . При конечном значении амплитуды сигнала A соотношение (6.32) устанавливает нижнюю границу для T и верхнюю границу для J . Однако эти ограничения не являются принципиальными, так как в рамках приближения слабого поля амплитуда сигнала может быть взята сколь угодно малой.

Зависимость коэффициента усиления ρ от J и T показана на рис. 14. Эта величина имеет единственный максимум при изменении температуры и коэффициента связи для любого изменяющегося во времени сигнала. Частные производные от коэффициента усиления, взятые по температуре T и коэффициенту связи J , обращаются в нуль при значениях $(T_{\max}, J_{\max})$, которые определяются из трансцендентных уравнений

$$J_{\max} = -\frac{T_{\max}}{4} \ln(2T_{\max} - 1), \quad (6.39)$$

$$\Omega^2 = \exp\left(-\frac{2}{T_{\max}}\right) \frac{(2T_{\max} - 1)^2}{T_{\max}(1 - T_{\max})}. \quad (6.40)$$

Для конечных и действительных $J_{\max}$ должно выполняться условие $T_{\max} > 1/2$. В этом случае уравнение (6.40) имеет единственное решение $1/2 < T_{\max} < 1$ для

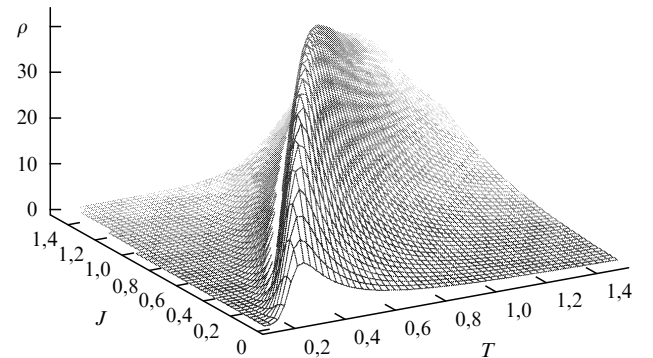


Рис. 14. Коэффициент усиления как функция температуры T и коэффициента связи J . Частота сигнала $\Omega = 0,01$.

любого значения частоты сигнала $\Omega > 0$. Соответствующее значение $J_{\max}$ находится из (6.39). Величина максимального коэффициента усиления дается выражением

$$\rho_{\max} = \frac{1 - T_{\max}}{T_{\max}^2 (2T_{\max} - 1)}. \quad (6.41)$$

Из (6.39), (6.40) и (6.41) могут быть установлены следующие свойства максимума. При изменении частоты сигнала Ω от очень больших до исчезающе малых значений оптимальная температура $T_{\max}$ падает от 1 до 1/2. При этом оптимальный коэффициент связи $J = J_{\max}$, и максимальное значение усиления возрастает от исчезающе малых до очень больших значений.

Сравним коэффициенты усиления связанных и несвязанных элементов. Пусть коэффициент усиления несвязанного спина максимален при некоторой температуре T_0 , которая определяется трансцендентным уравнением

$$\Omega^2 = \exp\left(-\frac{2}{T_0}\right) \frac{T_0}{1 - T_0} \quad (6.42)$$

и лежит в интервале $0 < T_0 < 1$. Максимальное значение усиления определяется как $\rho_0 = (1 - T_0)/T_0^2$. Так как $J_{\max}$ всегда положительно, то при любом $\Omega > 0$ максимальное значение усиления связанного элемента всегда превышает усиление несвязанного элемента. В общем случае, пользуясь (6.40) и (6.42), можно показать, что $T_{\max}$ всегда превышает T_0 . Однако на относительно высоких частотах $\Omega > 1$ индуцированное связью увеличение усиления становится исчезающе малым. В этом случае максимум усиления расположен при $T = T_0$ и $J = 0$.

При низких частотах сигнала усиление улучшается с помощью ферромагнитной связи спинов, в то время как на высоких частотах такого улучшения практически нет. Коэффициент усиления в области низких частот качественно повторяет эффект, найденный аналитически в [106] в системе глобально связанных бистабильных элементов. Однако поведение усиления на высоких частотах, где улучшение усиления с ростом связи отсутствует, является особенностью, присущей модели Глаубера.

Аналогичное поведение демонстрирует и отношение сигнал/шум, вычисленное для отдельного спина: эта величина может быть улучшена (по сравнению с несвязанной цепочкой) при соответствующей настройке связи между элементами [119].

7. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок

Как было отмечено в работе [41], стохастическая динамика переключений может быть ассоциирована с информационным потоком через систему. Информация об амплитуде и фазе сигнала закодирована во временах между переключениями системы. Естественно, что одной из основных мотиваций исследований стохастического резонанса является идея улучшения передачи информационного сигнала путем оптимальной настройки стохастического бистабильного фильтра. Наиболее подходящей мерой, описывающей передачу информации через бистабильную систему является спектр условных энтропий Шеннона [120, 121]. В отличие от других мер (линейной версии трансинформации), применявшихся в работах [122, 123] и измеряющих степень линейной зависимости входа и выхода системы,

иерархия условных энтропий Шеннона [124–126] характеризует корреляции всех высших порядков и в пределе является мерой упорядоченности системы.

Анализ в терминах теории информации требует введения символического алфавита, соответствующего стохастической динамике системы. Для бистабильных стохастических систем естественным является бинарный алфавит, состоящий из двух символов, например, "0" и "1", которые отвечают нахождению системы слева или справа от барьера. Пусть $\mathbf{i}_n = i_1, \dots, i_n$ — двоичная подпоследовательность или слово, состоящее из n букв. Обозначим относительную частоту повторения этого слова в данной последовательности (т.е. вероятность) через $p(\mathbf{i}_n)$. Если последовательность содержит периодическую компоненту, то временные корреляции будут отражаться в высокой структурированности функции распределения слов длины n . Аналогом здесь служит распределение времен пребывания. Для количественной оценки степени упорядоченности этих структур используется энтропия Шеннона [124], применяемая к распределению слов длины n (n -слов):

$$H_n = - \sum_{(\mathbf{i}_n) \in \{0,1\}^n} p(\mathbf{i}_n) \log_2 p(\mathbf{i}_n). \quad (7.1)$$

H_n называются n -блоковыми энтропиями и интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания появления слова $(i_1, \dots, i_n)$ длины n .

Условные, или динамические [125, 126], энтропии вводятся для $n = 1, 2, \dots$ как

$$h_n = H_{n+1} - H_n = \left\langle - \sum_{i_{n+1}} p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n) \log_2 p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n) \right\rangle_{(\mathbf{i}_n)}, \quad (7.2)$$

где $\langle \rangle$ обозначают усреднение по предыстории $\mathbf{i}_n$. Это определение дополняется "начальным условием" $h_0 = H_1$. В формуле (7.2) $p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n)$ обозначает вероятность наблюдения символа i_{n+1} при условии наблюдения предшествующей последовательности n символов $\mathbf{i}_n$. Динамические энтропии h_n интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания символа i_{n+1} (или информация, полученная после его наблюдения) при известной предыстории $\mathbf{i}_n$. Другими словами, h_n характеризует неопределенность в предсказании следующего символа в последовательности $\mathbf{i}_n$. Корреляции между символами обычно уменьшают это количество информации. Предел h_n при $n \rightarrow \infty$

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (7.3)$$

называется энтропией источника [127]. Энтропия источника определяет минимальное количество информации, необходимое для предсказания следующего символа в последовательности при наличии знания всей предыстории. Лишь для периодических последовательностей эта величина равна нулю. Энтропия источника является универсальной мерой упорядоченности (хаотичности) системы. Как известно, энтропия источника связана с энтропией Колмогорова–Синая [128, 129].

7.1. Динамическая энтропия и энтропия источника в режиме стохастической синхронизации

Применим подход, основанный на вычислении информационных мер, к данным, полученным из эксперимента с

триггером Шмитта. Двоичные случайные последовательности, генерируемые триггером, записывались с помощью аналого-цифрового преобразователя в компьютер. Одновременно записывались последовательности на входе (сигнал и сигнал+шум), также представленные, в зависимости от знака, в виде нулей и единиц. Во всех экспериментах длина последовательностей равнялась $15000\Delta t$, где Δt — шаг выборки. Оптимальный шаг выборки, установленный в ходе вычисления энтропийных характеристик, соответствовал 12 точкам на периоде колебаний сигнала: $\Delta t = T_0/12 \approx 8,33 \times 10^{-4}$ с. Мы выбрали режим синхронизации стохастических переключений триггера и захвата средней частоты переключений, который имеет место при амплитуде сигнала $A = 100$ мВ.

Для сравнения распределений времен пребывания на входе и выходе триггера проводились соответствующие расчеты в виде гистограмм. Ярко выраженный пик, соответствующий периоду внешнего сигнала, на входе наблюдается лишь при малой интенсивности шума. С ростом шума этот пик монотонно разрушается. На выходе, напротив, существует оптимальный уровень шума, при котором этот пик наиболее ярко выражен. Естественное, что оптимальный уровень шума отвечает режиму СР.

Разумно предположить, что последовательность, генерируемая триггером Шмитта, будет максимально упорядочена в режиме стохастической синхронизации или СР. Поэтому можно ожидать следующего поведения энтропии источника. При очень слабом шуме, когда переключения триггера крайне редки, последовательность будет характеризоваться большой степенью избыточности, и энтропия будет низка. С ростом шума энтропия должна нарастать вследствие СР, затем убывать, достигая минимума и далее нарастать опять, когда шум полностью контролирует динамику системы.

Описанная картина полностью подтверждается вычислениями, проведенными по экспериментальным данным [120, 121]. Все энтропийные меры рассчитывались путем усреднения по 20 реализациям длины $15000\Delta t$. Результаты представлены на рис. 15а. Графики рис. 15а показывают хорошо выраженный минимум при ожидаемой интенсивности шума. Таким образом, с увеличением интенсивности шума предсказуемость выходной последовательности увеличивается! На выходе обычных линейных фильтров этот важный результат не может наблюдаться в принципе.

Увеличение предсказуемости предполагает рост степени порядка в выходной последовательности. Для режима СР энтропии отражают рост периодической части выходного сигнала, и для оптимального уровня шума мы можем говорить об индуцированном шумом порядке во времени. Упорядоченное состояние означает, что максимальное количество переключений имеет место за время, равное половине периода сигнала, и выход характеризуется более длительными корреляциями.

Энтропия источника h может быть оценена и по распределению времен переключений [130]:

$$h = \frac{H[p_{\text{res}}]}{\langle t_{\text{res}} \rangle}, \quad (7.4)$$

где $H[p_{\text{res}}]$ обозначает энтропию Шеннона распределения времен переключений и $\langle t_{\text{res}} \rangle$ — средний период пере-

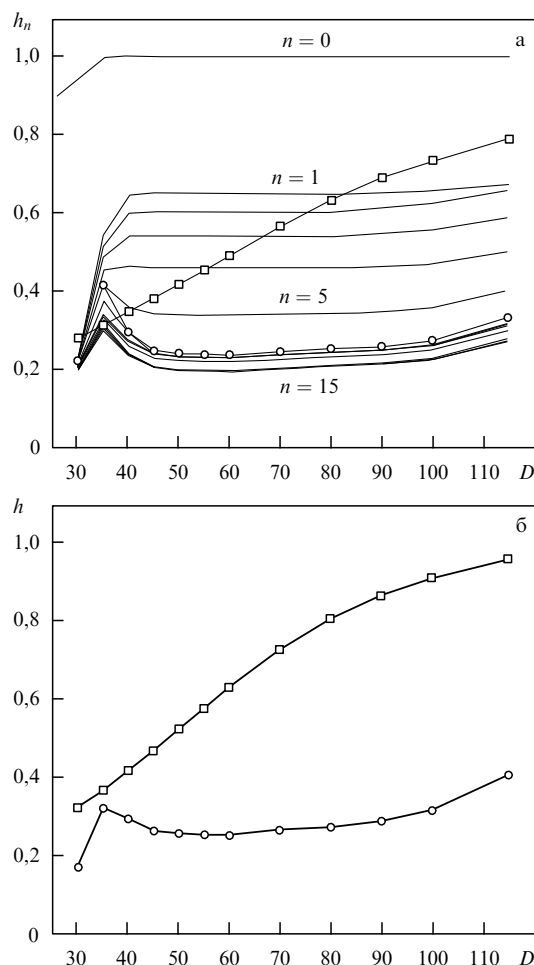


Рис. 15. Зависимость динамических энтропий h_n ($n = 0, 1, \dots, 15$) от интенсивности шума. Символами $\square$ показана $h_6(D)$ на входе триггера, а символами $\circ$ — $h_6(D)$ на выходе (а). Энтропия источника, вычисленная по распределению времен пребывания триггера в метастабильных состояниях (символы $\circ$). Символами $\square$ показана энтропия источника на входе (б).

ключений. Зависимость $h(D)$, вычисленная по распределению времен пребывания (переключений), показана на рис. 15б и эквивалентна рассмотренным выше условным (динамическим) энтропиям Шеннона: при оптимальной интенсивности шума наблюдается хорошо выраженный минимум, соответствующий наиболее упорядоченному состоянию системы. Детальные исследования показали, что минимум энтропий соответствует режиму СР, при котором коэффициент усиления сигнала на выходе максимален [120, 121].

Отметим, что минимум на графике зависимости энтропии источника от интенсивности шума наблюдается лишь для достаточно больших амплитуд периодического сигнала, когда имеет место явление синхронизации стохастических переключений триггера. В случае малого сигнала, когда отклик стохастической системы на сигнал является практически линейным, энтропия монотонно возрастает с увеличением шума и в пределе большого шума стремится к 1 [121].

7.2. Стохастический резонанс и энтропия Кульбака

Рассмотрим теперь вопрос о взаимосвязи входа и выхода. Информационная мера, используемая для этой

цели, задается с помощью энтропии Кульбака [131] $K[p^0, p]$, которая характеризует близость двух распределений p^0 и p :

$$K[p^0, p] = \sum_i p_i \log_2 \frac{p_i}{p_i^0}. \quad (7.5)$$

Энтропия Кульбака определяет количество информации, полученной путем замещения некоторого начального распределения p^0 на конечное распределение p вследствие некоторого преобразования. Эта мера всегда положительна и достигает нуля тогда и только тогда, когда p^0 и p идентичны. Применительно к СР мы идентифицируем начальное распределение с распределением вероятностей на входе триггера, $p_i^0 = p_n^{\text{in}}(\mathbf{i}_n)$, и конечное — с распределением вероятностей на выходе: $p_i = p_n^{\text{out}}(\mathbf{i}_n)$. Рассмотрим два случая:

- 1) в качестве распределения на входе возьмем сигнал + шум;
- 2) в качестве распределения на входе возьмем только распределение сигнала.

Результаты расчета энтропии Кульбака для первого случая представлены на рис. 16а для длин слов от 1 до 8. Все кривые достигают минимума при $D = 40$ мВ. Это показывает, что при данной интенсивности шума рас-

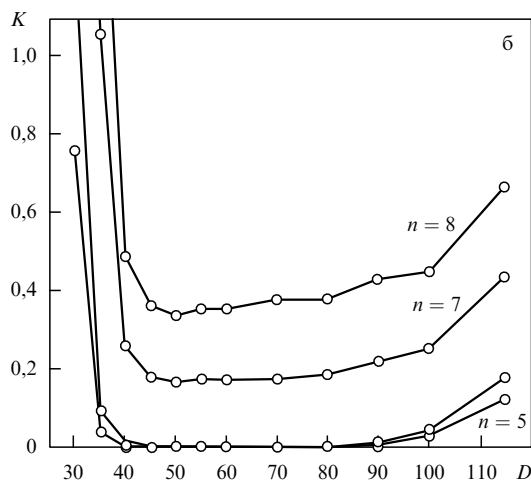
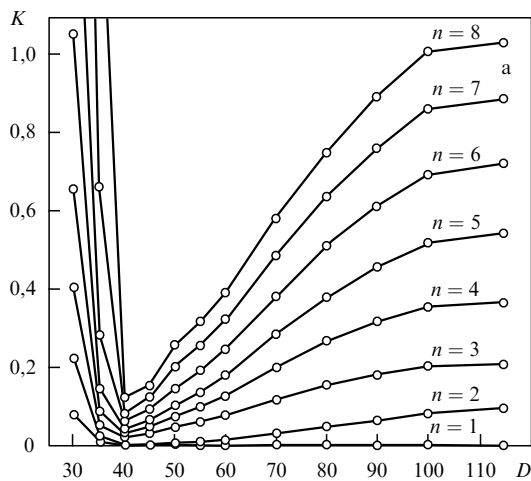


Рис. 16. Энтропия Кульбака как функция интенсивности шума для разных длин слов n . Входное распределение состоит из сигнала и шума (а). Входное распределение представлено только сигналом (б).

пределения вероятностей входа и выхода максимально совпадают. Подчеркнем, что это не означает максимальной упорядоченности выходного сигнала. При слабом шуме последовательность на входе наиболее близка к периодической, в то время как на выходе триггера последовательность характеризуется перемежаемостью (наличие длинных участков одинаковых символов). В результате распределения на входе и выходе сильно различаются. С ростом шума вес периодической компоненты во входной последовательности убывает, однако в выходной последовательности периодическая структура проявляется все более часто. Таким образом, оба распределения сближаются при значении амплитуды шума, меньшей, чем резонансная ($D = 60$ мВ). Отметим, что значение $D = 40$ мВ совпадает с началом области синхронизации (захвата средней частоты переключений), что ясно видно из рис. 7.

На рисунке 16б энтропия Кульбака показана для случая, когда в качестве начального распределения взято распределение только сигнала. В этом случае два распределения наиболее близки, когда выходная последовательность наиболее полно отражает периодическую структуру сигнала, и энтропия Кульбака принимает минимальное значение в области стохастического резонанса $D = 60$ мВ. Отметим, что при $n < 7$ энтропия Кульбака равна нулю в области синхронизации, поскольку переключения триггера синхронизованы сигналом на больших временах, превышающих половину периода.

7.3. Рост степени порядка в ансамбле стохастических осцилляторов в режиме стохастического резонанса

Возрастание степени упорядоченности в режиме СР подтверждается и на примере анализа коллективного выхода ансамбля стохастических резонаторов, возбуждаемого слабым периодическим сигналом. Для расчета энтропии источника коллективного выхода ансамбля введем символическое описание следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_M(t) < 0, \\ 1, & \text{если } x_M(t) \geq 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Результаты расчета энтропии источника h показаны на рис. 17.

Для отдельно взятого элемента, $N = 1$, энтропия монотонно растет с увеличением интенсивности внутреннего шума D , насыщаясь при больших значениях D . С ростом числа элементов в ансамбле поведение энтропии качественно меняется. При слабом внутреннем шуме времена переключения экспоненциально велики, и символическая последовательность, генерируемая ансамблем, характеризуется высокой степенью избыточности. В результате энтропия близка к нулю. С увеличением D энтропия источника растет, достигая максимума при значении интенсивности внутреннего шума, соответствующей границе области синхронизации, когда захватывается средняя частота. Начиная с этого значения, энтропия источника падает, достигая минимума при некотором оптимальном уровне внутреннего шума, и далее опять возрастает. Таким образом, с увеличением интенсивности внутреннего шума, коллективный выход ансамбля стохастических резонаторов упорядочивается. Подчеркнем, что в отличие от синхронизации отдельного элемента периодическим сигналом большой ампли-

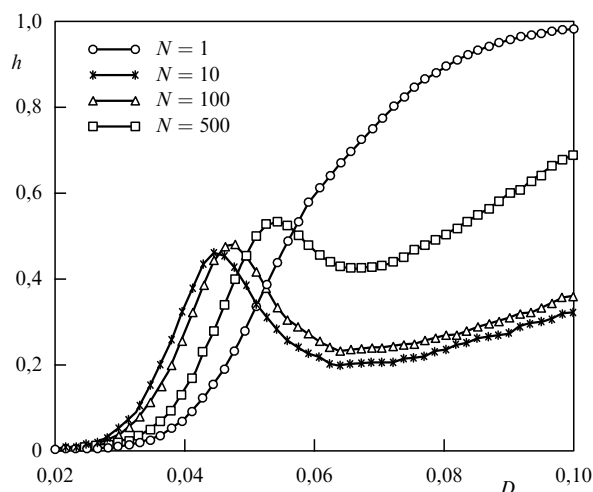


Рис. 17. Зависимость энтропии источника двоичной последовательности, генерируемой ансамблем триггеров Шмита, от интенсивности внутреннего шума для разного числа элементов в ансамбле.

туды, в случае ансамбля стохастических резонаторов уменьшение энтропии возможно для слабых сигналов, так что отдельные элементы остаются несинхронизованными. Как показали результаты детального численного исследования, значения интенсивности шума, при которых энтропия источника и коэффициент диффузии минимальны, совпадают и соответствуют оптимальному уровню шума, при котором коэффициент усиления сигнала на выходе максимален.

8. Стохастический резонанс и обработка информации живыми организмами

Эффект СР широко используется для объяснения многих физических и химических процессов и явлений, а также для создания ряда технических устройств. Например, на основе СР можно сконструировать усилитель, обеспечивающий коэффициент усиления мощности периодического сигнала ≈ 30 дБ в условиях, когда интегральная энергия внешнего шума на 60–70 дБ превышает энергию полезного сигнала [132]. При определенных условиях обеспечивается не только эффективное усиление в присутствии интенсивного шума, но и наблюдается эффект выделения сигнала из шума, когда отношение сигнал/шум на выходе превосходит существенно входное значение [133].

Однако с фундаментально научной точки зрения наибольший интерес представляют приложения теории СР к исследованиям процессов обработки информации биологическими системами. Есть основания полагать, что в процессе эволюции живые организмы приспособились использовать неустраняемый внутренний шум и шум окружающей среды для оптимального выделения полезной информации. Об этом свидетельствуют исследования сенсорных процессов в гидродинамически чувствительных механорецепторах рака [134, 135] и чувствительных к движению воздуха рецепторах сверчка [123]. Сенсорные системы у рака и сверчка развивались, по-видимому, с целью обеспечения раннего обнаружения приближения хищника. В случае рака — это голодная рыба, в случае сверчка — осы, которые откладывают яйца в теле сверчка. Чтобы избежать встречи с хищни-

ком, рак должен заблаговременно выделить почти периодический сигнал (колебания воды, обусловленные движением тела рыбы) на фоне случайных колебаний воды, а сверчок — периодические колебания воздуха (обусловленные работой крыльев осы) на фоне шума. Как показали исследования, теория нединамического или порогового СР способна объяснить указанные свойства живых систем. Более того, эта теория делает возможным качественное объяснение особенностей зрительного восприятия человека [136, 137].

8.1. Стохастический резонанс в механорецепторах речного рака

Система механорецепторов речного рака расположена на его хвосте и изображена на рис. 18. Хвост в виде веера имеет примерно 250 длинных волосков, которые связаны с внутренним нервным узлом через сенсорные нейроны, сконцентрированные в девяти нервных основаниях.

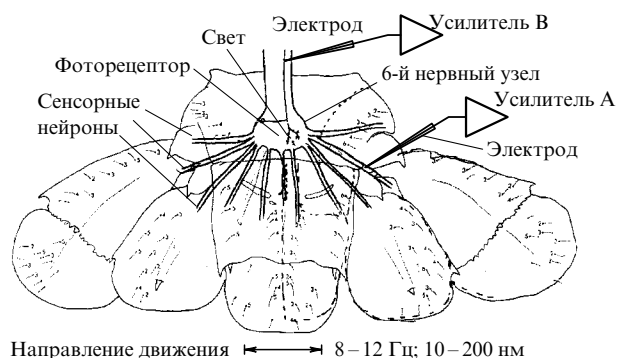


Рис. 18. Система нейрорецепторов хвоста речного рака.

На хвосте имеется 6-й нервный узел, включающий пару фоторецепторных клеток. Как показано на рис. 18, можно измерять сигналы либо от сенсорных нейронов механорецепторов, либо от выходного нейрона фоторецептора 6-го нервного узла. С этой целью необходимо путем хирургического вмешательства обеспечить возможность введения микроэлектродов для измерения сигналов нейрона. Движение волосков механорецепторов стимулировалось возмущением жидкости в направлениях, указанных на рис. 18. Возбуждение жидкости осуществлялось с помощью гармонического сигнала с частотой 5–100 Гц и амплитудой 10–100 нм, который распространялся в жидкости со скоростью от 100 до 1000 мкм с⁻¹. Отклик фоторецепторной клетки можно измерять как при гидродинамическом возмущении, так и в присутствии светового потока постоянной интенсивности, сфокусированного на фоторецепторную область. В качестве источника шума использовался шум окружающей среды и внешний шум. Протоколы постановки экспериментов подробно описаны в [134].

Измерения отношения сигнал/шум с сенсорного нейрона речного рака в зависимости от интенсивности внешнего шума продемонстрировали эффект СР. Результаты эксперимента вместе с теоретическими данными и данными моделирования системы Фитцхью–Нагумо приведены на рис. 19. Полученные данные свидетельствуют, что система механорецепторов обеспечивает восприятие периодического сигнала наилучшим образом в условиях действия шума оптимальной интенсивно-

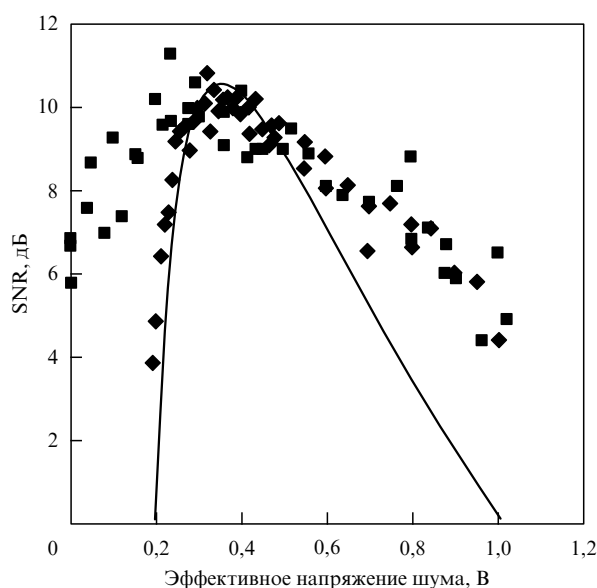


Рис. 19. Эффект СР в сенсорной системе речного рака (■), результаты теории по формуле (4.9) (непрерывная кривая) и данные моделирования системы Фитцхью – Нагумо (◆).

сти. Наиболее высокую чувствительность сенсорные нейроны проявляли к сигналам с частотой, близкой к 10 Гц. Известно, что именно эта частота характерна для колебаний воды, вызванных плывущей рыбой. Так как гидродинамические волны распространяются в воде намного быстрее, чем сама рыба, то речной рак заблаговременно воспринимает сигнал опасности и успевает спрятаться.

Однако остается открытым вопрос о влиянии внутреннего шума нейронов. Фактически все нейроны являются зашумленными [138, 139], причем уровень внутреннего шума может заметно превышать интенсивность естественного шума состояния термодинамического равновесия [140]. Были предприняты попытки зарегистрировать эффект СР в механорецепторах рака путем управления уровнем внутреннего шума с помощью изменения температуры препарата. К сожалению, явления СР обнаружить при этом пока не удалось.

8.2. Фоторецепторная система речного рака

Существует другая возможность управлять внутренним шумом нейрона. Специальные эксперименты показали, что уровень внутреннего шума существенным образом зависит от интенсивности светового потока, падающего на область фоторецепторов, входящих в шестой нервный узел (см. рис. 18) [135]. Детальный механизм взаимосвязи интенсивности света и уровня внутренних шумов нейрона пока остается неясным. Однако измерения выходного сигнала нейрона при изменении уровня света убедительно подтвердили наличие этой взаимосвязи: увеличение уровня светового потока вызывает рост внутренних шумов нейрона. Этот факт позволяет провести исследования влияния уровня внутренних шумов нейрона на степень восприятия им регулярного сигнала. Периодический сигнал, как и прежде, подавался на рецепторы речного рака путем гидродинамического возмущения, однако измерения отношения сигнал/шум производились для различных значений интенсивности светового потока. Экспериментальные результаты уве-

ренно подтвердили наличие эффекта СР, управляемого уровнем светового потока.

Приведенные данные были подтверждены результатами экспериментов со сверчком [123]. Чтобы избежать встречи с осами, сверчок использует систему очень сходную с описанной выше для речного рака. Сверчок имеет два задних придатка, которые также покрыты волосками механорецепторов. Каждый рецептор связан со множеством внутренних нейронов в нервном узле, который по строению очень близок к нервному узлу речного рака. Волоски сверчка реагируют на колебания воздуха в диапазоне частот от 80 до 150 Гц, которые на порядок превосходят характерные частоты системы речного рака (8–25 Гц). Именно в этом частотном диапазоне сосредоточен спектр характерных частот колебаний воздуха, возбуждаемых движениями крыльев осы — основного врага сверчка.

Эксперимент по регистрации СР на сверчке был поставлен с использованием усовершенствованной методики и техники. Были применены более современные характеристики передачи информации в сравнении с простым измерением отношения сигнал/шум. На придатки сверчка воздействовали воздушным потоком, который модулировался синусоидальным сигналом и шумом. Результаты измерений убедительно доказали, что процесс передачи информации от сигнала воздействию к нейронам происходит наилучшим образом при некотором оптимальном уровне внешнего шума. Более того, результаты показали, что добавление внешнего шума к слабому периодическому сигналу может также улучшить точность временного кодирования сигнала в последовательности всплесков потенциала действия.

8.3. Стохастический резонанс и количественная оценка зрительного восприятия информации человеком

Практически во всех экспериментах по изучению СР используются методы компьютерного анализа сигналов на входе и выходе изучаемых систем, с помощью которых обосновывается усиление (или увеличение информации) при действии оптимального уровня шума. Действительно ли животное или человек использует именно эту усиленную информацию? Это невозможно доказать каким-либо прямым измерением электрофизиологических характеристик. Однако можно попытаться протестировать общий интегральный эффект в каких-либо поведенческих, т.е. психологических, экспериментах с человеком. Другими словами, можно заменить сложное программное обеспечение обработки данных на ЭВМ на человеческое восприятие (интерпретацию). Такие эксперименты были разработаны и проведены специально для исследования способности человека воспринимать зрительно информацию на фоне воздействия шума. Будет ли визуально воспринимаемая информация зависеть от интенсивности шума нелинейным образом, подобно эффекту СР? Возможно ли ввести количественный критерий оптимальности зрительного восприятия информации? Ответ на эти вопросы дан в работе [137] и является утвердительным.

В работе [137] подробно описаны детали и техника экспериментов, которые кратко сводятся к следующему. Произвольно выбранная фотография (картинка) оцифровывалась на 256 уровней в сером масштабе и выводилась на экран дисплея в качестве изображения 256×256 пиксел. Затем картинка помещалась ниже порогового



Рис. 20. Картинки на экране дисплея при различном уровне шума, добавленного к подпороговому сигналу.

уровня, и ее на экране не было видно. К подпороговому уровню добавлялся гауссов шум с нулевым средним, который действовал на каждый дискретный элемент экрана независимо (источники шума в каждом пикселе были некоррелированы). Если в каком-либо конкретном пикселе преодолевается пороговый уровень, он становится черного цвета. Пиксели с уровнем ниже порога остаются белыми. При малом уровне шума лишь часть пикселей появляется на экране в виде черных точек, и картинку невозможно распознать. Если шум слишком большой, распознавание образа также затруднено. Однако всегда существует некоторое оптимальное значение интенсивности шума (зависящее от конкретного индивидуума перед экраном), когда информация о картинке максимальна и ее можно воспринять. Один из примеров приведен на рис. 20, из которого видно, что наиболее отчетливо фотография воспринимается на рис. 20б, когда интенсивность внешнего шума оптимальна. Эффект восприятия картинки на самом деле динамический, и желающие могут посмотреть результаты эволюции во времени на WWW-странице (<http://neurodyn.umsi.edu/sr>). В динамическом представлении наглядно виден также эффект влияния времени корреляции шума.

В психофизическом эксперименте людей знакомили с совокупностью картинок, "подпорченных" шумом с меняющейся интенсивностью и/или временем корреляции. В качестве картинок были выбраны специальные стандартные изображения, используемые для зрительных психофизических экспериментов. Людей просили отметить красивую (приятную) деталь в модели и определяли порог восприятия A_{th} .

На рисунке 21 представлены результаты измерения порога в зависимости от уровня шума для одного конкретного человека. Величина порога восприимчивости достигает минимума, когда информация, передаваемая в зрительный центр мозга человека, максимальна. В данном эксперименте проявляется характерная особенность СР в виде минимума порога восприимчивости. Этот вывод можно обосновать на базе приближенной теории порогового СР. Стандартное выражение (4.8), описывающее СР, перепишем как уравнение для амплитуды сигнала и решим его относительно порога восприимчивости A_{th} , имеющего размерность мощности сигнала. Все коэффициенты объединим в одну постоян-

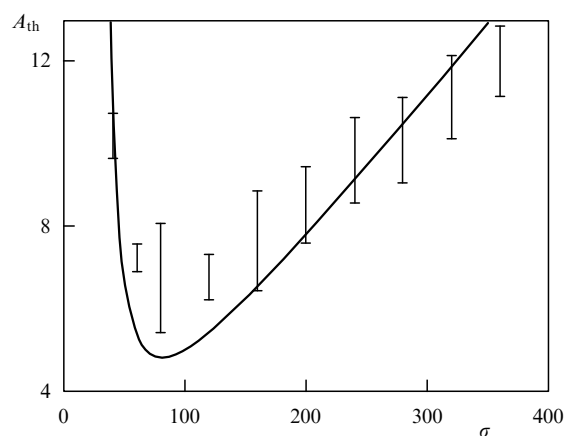


Рис. 21. Порог зрительного восприятия $A_{th} = K_1 \sigma \exp[\Delta^2/(2\sigma^2)]$ в зависимости от эффективной амплитуды шума σ ; $K = 0,36$, $\Delta = 81$.

ную K , которая и будет использоваться в качестве единственного регулируемого параметра в сравнении психофизических результатов с теорией. Выражение для A_{th} приведено на рис. 21 вместе с графиком зависимости $A_{th}(\sigma)$ и данными эксперимента. Совпадение данных эксперимента и приближенной теории не очень хорошее, но скорее удивительно удачное в свете многих допущений. В частности, уравнение (4.8) было получено для единичного стохастического резонатора, и нет оснований рассчитывать, что оно способно точно описать экспериментальные результаты. Процессы обработки информации мозгом человека настолько сложны, что такое предположение было бы наивным.

Отметим, что величина константы K характеризует индивидуальные способности принимать и интерпретировать детали рисунка и имеет различные значения для каждого участника эксперимента. При этом характер зависимости, представленной на рис. 21, сохраняется для всех испытуемых. Важным является и то, что величина коэффициента K у испытуемых практически не меняется во времени. Это было подтверждено повторными экспериментами с интервалами в один день, одну неделю, а трех участников эксперимента протестировали еще раз спустя год. В пределах ошибки 10–15 % значения постоянной K не изменились.

9. Заключение

В рамках настоящего обзора представлены результаты анализа определенного круга явлений в широком классе бистабильных систем, возбуждаемых одновременно информационным сигналом различной структуры и внешним и/или внутренним шумом заданной статистики. Во всех без исключения рассмотренных задачах убедительно показано, что с помощью шума оптимальной интенсивности в режиме СР достигается улучшение определенных характеристик информационного сигнала на выходе бистабильной системы. Шум выступает в роли конструктивного фактора, вызывающего рост степени когерентности или степени порядка в системе. С этой точки зрения СР можно трактовать как явление индуцированного шумом перехода, при котором степень порядка в системе увеличивается.

Проанализируем кратко основные результаты работы. Как показано в разделе 3, эффект СР может применяться для усиления сигналов с амплитудной и частотной модуляцией низкочастотного сигнала несущей в условиях действия шума относительно высокой интенсивности. Искажения информационного сигнала при этом неизбежны, однако могут быть минимизированы подбором оптимального шума и настройкой рабочих параметров системы. При использовании в качестве информационного сигнала узкополосного (квазимонохроматического) сигнала с конечной шириной спектральной линии за счет эффекта СР можно увеличить добротность спектральной линии входного сигнала. Применительно к информационным сигналам с широким сплошным спектром частот эффект СР также реализуется. Количественной мерой степени порядка здесь является функция когерентности, достигающая максимума при СР. Весьма интересным является обобщение теории СР на нединамические (или пороговые) системы (4.1). Как показали исследования, теория порогового СР способна приближенно описать процессы нейронной активности и объяснить результаты ряда интересных биологических экспериментов (раздел 8).

Весьма интересными являются результаты по исследованию СР в хаотических системах (4.2). Индуцированные шумом переключения между двумя хаотическими аттракторами, вообще говоря, вписываются в общую концепцию физического механизма СР. В отличие от классического бистабильного осциллятора здесь "взаимодействуют" два метастабильных состояния со сложным типом внутриямной динамики. Если использовать метод двух состояний, учитывающий только переключения, то существенных различий не будет. Принципиально новым является исследованный эффект СР в режиме динамической перемежаемости (в отсутствие шума). Эффективное время Крамерса в этом случае определяется параметром системы, и режим СР имеет место при оптимальном выборе значения управляющего параметра системы, при котором средняя частота динамических переключений становится близкой к частоте внешней модуляции.

Одной из центральных проблем обзора является детальный анализ нового явления – стохастической синхронизации бистабильных систем (раздел 5). Многие исследователи в своих статьях указывали на то, что эффект СР обусловлен синхронизацией, однако ясность

в этом вопросе отсутствовала [93]. В настоящей работе дается четкое определение эффективной стохастической синхронизации, излагается теория эффекта, базирующаяся на классических работах по синхронизации автоколебаний в присутствии шумов и приводятся данные физического и численного экспериментов, полностью подтверждающих выводы теории. Сейчас можно с уверенностью сказать, что в режиме конечных амплитуд сигнала воздействия осуществляется эффект захвата мгновенной фазы и частоты процесса переключений в конечной области значений параметров системы (в области синхронизации). В результате регистрируется область значений интенсивности шума (или другого управляющего параметра), в которой средняя частота переключений постоянна и равна частоте модуляции. Как известно, синхронизация является одним из возможных механизмов самоорганизации в нелинейных системах. Обобщение понятия эффекта синхронизации на класс бистабильных стохастических систем позволяет более четко понять физический механизм увеличения степени порядка в бистабильных системах при действии шума. Как показано в разделе 7, именно в режиме стохастической синхронизации динамическая энтропия и энтропия источника достигают минимального уровня, свидетельствуя о повышении степени порядка или самоорганизанности системы.

В разделе 6 приведены результаты исследований СР в ансамблях стохастических резонаторов. Рассматриваются ансамбли невзаимодействующих элементов, ансамбли нединамических элементов и ансамбли связанных элементов. Показано, что эффект СР может быть существенно усилен в ансамбле по сравнению с отдельным бистабильным элементом. Отношение сигнал/шум на выходе ансамбля в режиме СР может быть приближено к значению на входе при сохранении усиления входного сигнала. Ансамбль стохастических резонаторов, в отличие от единичного бистабильного элемента, демонстрирует эффект стохастической синхронизации при сколь угодно слабом внешнем периодическом сигнале. Кроме того, в ансамбле зависимость функции когерентности от частоты с ростом числа элементов исчезает. Достаточно наличия шума любой интенсивности, чтобы в ансамбле наблюдался эффект СР. Этот вывод очень важен, так как снимает вопрос о том, каким образом живые организмы могут использовать эффект СР без "подстройки" уровня шума.

Наконец, в разделе 8 приведены результаты применения теории СР для возможного объяснения способности живых организмов воспринимать информацию на фоне достаточно сильного шума. Убедительно показано, что именно в режиме СР осуществляется наиболее качественное восприятие информационного сигнала живыми системами на фоне внешних и внутренних шумов.

Авторы пользуются приятной возможностью поблагодарить W. Ebeling, J. Kurths, P.V.E. McClintock, M.I. Dykman, P. Jung, P. Hänggi, J.J. Collins, С.М. Соскина, F. Marchesoni, S. Bezrukov за возможность обсуждения результатов работы на многочисленных специальных конференциях и семинарах по нелинейной динамике. Мы благодарны также Е. Simonotto, А. Pikovsky, М. Розенблюму, Ю. Климонтовичу, Б. Шульгину, И. Хованову, А. Сильченко, U. Siewert и J. Freund за плодотворные обсуждения, дискуссии и ценные замечания, способствующие улучшению

работы, и за помощь в проведении ряда численных экспериментов.

Нам приятно отметить, что результаты, изложенные в настоящей статье, были получены при материальной поддержке в виде научных грантов, предоставленных авторам в 1993–1998 гг.: гранты Госкомобразования (93-8.2-10, 95-0-8.3-66, 97-0-8.3-47), гранты Фонда Сороса (RNO 000, RNO 300), грант РФФИ (98-02-16531), грант U.S. Office of Naval Research Physics Division, совместный грант РФФИ и DFG (Германия, Ною 436 RUS 113/334/0(R)), грант INTAS (96-0305) и грант Королевского общества Великобритании. А.Н. благодарит Институт Фетнера (США), стипендиатом которого он является в настоящее время.

Особую благодарность авторы выражают Г. Стрелковой за большой труд по подготовке рукописи настоящей статьи к печати.

Список литературы

1. Стратонович Р Л *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (М.: Сов. радио, 1961)
2. Рытов С М *Введение в статистическую радиофизику Т. 1 Случайные процессы* (М.: Наука, 1976)
3. Малахов А Н *Флуктуации в автоколебательных системах* (М.: Наука, 1968)
4. Понтрягин Л С, Андронов А А, Витт А А *ЖЭТФ* **3** 165 (1933)
5. Ланда П С, Заикин А А *ЖЭТФ* **111** 358 (1997)
6. Хортсхемке В, Лефевр Р *Индукцированные шумом переходы* (М.: Мир, 1987)
7. Benzi R, Suter A, Vulpiani A *J. Phys. A* **14** L453 (1981)
8. Benzi R et al. *Tellus* **34** 10 (1982)
9. Nicolis C *Tellus* **34** 1 (1982)
10. Fauve S, Heslot F *Phys. Lett. A* **97** 5 (1983)
11. McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626 (1988)
12. Grigorenko A N et al. *J. Appl. Phys.* **76** 6335 (1994)
13. Дыкман М И и др. *Письма в ЖЭТФ* **53** 182 (1991)
14. Gammaitoni L et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 1799 (1991)
15. Simon A, Libchaber A *Phys. Rev. Lett.* **68** 3375 (1992)
16. Spano M L, Wun-Fogle M, Ditto W L *Phys. Rev. A* **46** R5253 (1992)
17. Mantegna R N, Spagnolo B *Phys. Rev. E* **49** R1792 (1994)
18. Hibbs A D et al. *Nuovo Cimento* **17D** 811 (1995)
19. Perez-Madrid A, Rubi J M *Phys. Rev. E* **51** 4159 (1995)
20. Neda Z *Phys. Lett. A* **210** 125 (1996)
21. Дубинов А Е и др. *Изв. РАН Сер. Физ.* **60** (10) 76 (1996)
22. Leonard D S, Reichl L E *Phys. Rev. E* **49** 1734 (1994)
23. Dykman M I, Horita T, Ross J J. *Chem. Phys.* **103** 966 (1995)
24. Hohmann W, Muller J, Schneider F W J. *Phys. Chem.* **100** 5388 (1996)
25. Babinec P *Phys. Lett. A* **225** 179 (1997)
26. Kramers H A *Physica* **7** 284 (1940)
27. Hänggi P, Talkner P, Borkovec M *Rev. Mod. Phys.* **62** 251 (1990)
28. McNamara B, Wiesenfeld K *Phys. Rev. A* **39** 4854 (1989)
29. Zhou T, Moss F, Jung P *Phys. Rev. A* **42** 3161 (1990)
30. Gammaitoni L et al. *Phys. Rev. Lett.* **62** 349 (1989)
31. Gammaitoni L, Marchesoni F, Santucci S *Phys. Rev. Lett.* **74** 1052 (1995)
32. Fox R F *Phys. Rev. A* **39** 4148 (1989)
33. Stocks N G, Stein N D, McClintock P V E *J. Phys. A* **26** L385 (1993)
34. Anishchenko V S, Neiman A B, Safonova M A *J. Stat. Phys.* **70** (1–2) 183 (1993)
35. Anishchenko V S, Safonova M A, Chua L O *Int. J. Bif. Chaos* **2** 397 (1992)
36. Gingl Z, Kiss L B, Moss F *Europhys. Lett.* **29** 191 (1995)
37. Jung P *Phys. Rev. E* **50** 2513 (1994); Jung P *Phys. Lett. A* **207** 93 (1995)
38. Neiman A, Schimansky-Geier L *Phys. Rev. Lett.* **72** 2988 (1994)
39. Hänggi P et al. *J. Stat. Phys.* **70** (1–2) 25 (1993)
40. Neiman A, Sung W *Phys. Lett. A* **224** 341 (1996)
41. Moss F, in *Some Problems in Statistical Physics* (Philadelphia: SIAM, 1994) p. 205
42. Moss F, Pierson D, O’Gorman D *Int. J. Bif. Chaos* **4** 1383 (1994)
43. Bulsara A R, Gammaitoni L *Physics Today* **49** (3) 39 (1996)
44. Gammaitoni L et al. *Rev. Mod. Phys.* **70** 223 (1998)
45. Proc. NATO Adv. Res. Workshop on Stochastic Resonance in Physics and Biology *J. Stat. Phys.* **70** (1–2) (1993)
46. Proc. Intern. Workshop on Fluctuations in Physics and Biology: Stochastic Resonance, Signal Processing and Related Phenomena *Nuovo Cimento* **17D** (7–8) (1995)
47. Gammaitoni L, WWW Internet server: <http://www.pg.infn.it/SR/index.html>
48. Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)
49. Jung P, Hänggi P *Phys. Rev. A* **41** 2977 (1990)
50. Jung P, Hänggi P *Phys. Rev. A* **44** 8032 (1991)
51. Jung P *Phys. Rep.* **234** 175 (1993)
52. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1976)
53. Балееску Р *Равновесная и неравновесная статистическая механика Т. 2* (М.: Мир, 1978)
54. Hänggi P, Thomas H *Phys. Rep.* **88** 207 (1982)
55. Дыкман М И и др. *Письма в ЖЭТФ* **52** 780 (1990)
56. Dykman M I et al. *Phys. Lett. A* **180** 332 (1993)
57. Dykman M I et al. *Phys. Rev. Lett.* **68** 2985 (1992)
58. Kubo R *J. Phys. Soc. Jpn.* **12** 570 (1957); Kubo R *Rep. Prog. Phys.* **29** 255 (1966)
59. Risken H *The Fokker–Planck Equation* (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
60. Анищенко В С и др. *Радиотехника и электроника* **39** 1380 (1994)
61. Anishchenko V S et al., in *Chaos and Nonlinear Mechanics: Proceedings Euromech Colloquium* (Eds T Kapitaniak, J Brindley) (Singapore: World Scientific, 1995) p. 41
62. Anishchenko V S, Safonova M A, Chua L O *Int. J. Bif. Chaos* **4** 441 (1994)
63. Климонтович Ю Л *Статистическая физика* (М.: Наука, 1982)
64. Schimansky-Geier L, Zülicke Ch Z. *Phys. B* **79** 451 (1990)
65. Collins J J, Chow C C, Imhoff T T *Phys. Rev. E* **52** R3321 (1995)
66. Collins J J, Chow C C, Imhoff T T *Phys. Rev. E* **54** 5575 (1996)
67. Chialvo, Longtin A, Müller-Gerking J *Phys. Rev. E* **55** 1798 (1997)
68. Neiman A, Schimansky-Geier L, Moss F *Phys. Rev. E* **57** R9 (1997)
69. Dykman M I et al. *Nuovo Cimento* **17D** 661 (1995)
70. Rice S O, in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes* (Ed. N Wax) (New York: Dover, 1954) p. 133
71. Анищенко В С *Сложные колебания в простых системах* (М.: Наука, 1990)
72. Кифер Ю И *Изв. АН СССР Сер. Математическая* **38** 1091 (1974)
73. Kifer Yu *Commun. Math. Phys.* **121** 445 (1989)
74. Вул Е Б, Синай Я Г, Ханин К М *УМН* **39** (3) 3 (1984)
75. Anishchenko V S, Ebeling W Z. *Phys. B* **81** 445 (1990)
76. Вентцель А Д, Фрейдлин М И *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений* (М.: Наука, 1979)
77. Graham R, in *Noise in Nonlinear Dynamical Systems Vol. 1 Theory of Continuous Fokker–Planck Systems* (Eds F Moss, P V E McClintock) (Cambridge: Cambridge University Press, 1988)
78. Graham R, Hamm A, Tel T *Phys. Rev. Lett.* **66** 3089 (1991)
79. Климонтович Ю Л *Турбулентное движение и структура хаоса* (М.: Наука, 1990)
80. Анищенко В С *Письма в ЖТФ* **10** 629 (1984)
81. Анищенко В С, Нейман А Б *Письма в ЖТФ* **17** 1063 (1987)
82. Анищенко В С, Нейман А Б *ЖТФ* **60** (1) 3 (1990)
83. Anishchenko V S, Neiman A B, Chua L O *Int. J. Bif. Chaos* **4** 99 (1994)
84. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
85. *Волюновые и флуктуационные процессы в лазерах* (Под ред. Ю Л Климонтовича) (М.: Наука, 1974)
86. Ито Н М *J. Stat. Phys.* **35** 151 (1984)
87. Быков В В, Шильников А Л, в сб. *Методы качественной теории и теории бифуркаций* (Горький: ГГУ, 1989) с. 151
88. Анищенко В С, Нейман А Б *Письма в ЖТФ* **17** (14) 43 (1991)
89. Рабинович М И *УФН* **125** 123 (1978)
90. Shulgin B, Neiman A, Anishchenko V *Phys. Rev. Lett.* **75** 4157 (1995)
91. Anishchenko V, Neiman A, in *Stochastic Dynamics* (Eds L Schimansky-Geier, T Pöschel) (Berlin: Springer, 1997) p. 155

92. Анищенко В С, Нейман А Б *Иzv. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **5** (1) 5 (1997)
93. Neiman A et al. *Phys. Rev. E* **58** (6) (1998)
94. Neiman A *Phys. Rev. E* **49** 3484 (1994)
95. Gabor D J. *IEE London* **93** 429 (1946); Panter P F *Modulation, Noise and Spectral Analysis, Applied to Information Transmission* (New York: McGraw-Hill, 1965)
96. Вайнштейн Л А, Вакман Д Е *Разделение частот в теории колебаний и волн* (М.: Наука, 1983)
97. Middleton D *An Introduction to Statistical Communication Theory* (New York: McGraw-Hill, 1960)
98. Левин Б Р *Теоретические основы радиотехники* Кн. 1 (М.: Сов. радио, 1974)
99. Rosenblum M, Pikovsky A, Kurths J *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804 (1996)
100. Шалфеев В, в кн. *Системы фазовой синхронизации* (Под ред. В В Шахильдяна, Л Н Белоусиной) (М.: Радио и связь, 1982) с. 95
101. Neiman A, Feudel U, Kurths J J. *Phys. A: Math. Gen.* **28** 2471 (1995)
102. Melnikov V I *Phys. Rev. E* **48** 2481 (1993)
103. Neiman A, Schimansky-Geier L *Phys. Lett. A* **197** 379 (1995)
104. Anishchenko V S, Silchenko A N, Khovanov I A *Phys. Rev. E* **57** 316 (1997)
105. Bulsara A, Schmera G *Phys. Rev. E* **47** 3734 (1993)
106. Jung P et al. *Phys. Rev. A* **46** R1709 (1992)
107. Inchiosa M E, Bulsara A R *Phys. Rev. E* **52** 327 (1995)
108. Linder J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 3 (1995)
109. Schimansky-Geier L, Siewert U, in *Stochastic Dynamics* (Eds L Schimansky-Geier, T Pöschel) (Berlin: Springer, 1997) p. 245
110. Бендат Дж, Пирсол А Г *Прикладной анализ случайных данных* (М.: Мир, 1989)
111. Pei X, Wilkens L, Moss F *Phys. Rev. Lett.* **77** 4679 (1996)
112. Bezrukov S M, Vodyanov I *Nature* (London) **378** 362 (1995)
113. Gailey P C et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 4701 (1997)
114. Пиковский А С *Иzv. вузов. Радиофизика* **27** 576 (1984)
115. Collins J J, Chow C C, Imhoff T T *Nature* (London) **376** 236 (1995)
116. Neiman A, Moss F, Schimansky-Geier L, Ebeling W, in *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems Near the Millenium* (AIP Conf. Proc., Vol. 411, Eds J B Kadtk, A R Bulsara) (New York: AIP, 1997)
117. Glauber R J J. *Math. Phys.* **4** 294 (1963)
118. Brey J J, Prados A *Phys. Lett. A* **216** 240 (1996)
119. Siewert U, Schimansky-Geier L *Phys. Rev. E* **58** 2843 (1998)
120. Neiman A et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 4299 (1996)
121. Schimansky-Geier L et al. *Int. J. Bif. Chaos* **8** 869 (1998)
122. Bulsara A, Zador A *Phys. Rev. E* **54** R2185 (1996)
123. Levin J E, Miller J P *Nature* (London) **380** 165 (1996)
124. Шеннон К Э *Работы по теории информации и кибернетике* (М.: ИЛ, 1963)
125. Ebeling W, Nicolis G *Chaos, Solitons and Fractals* **2** 635 (1992)
126. Ebeling W, Freund J, Rateitschak K *Int. J. Bif. Chaos* **6** 611 (1996)
127. Хинчин А Я *УМН* **11** (1) 17 (1956)
128. Eckmann J-P, Ruelle D *Rev. Mod. Phys.* **57** 617 (1985)
129. Песин Я Б *УМН* **32** (4) 55 (1977)
130. Freund J *Phys. Rev. E* **53** 5793 (1996)
131. Кульбак С *Теория информации и статистика* (М.: Наука, 1967)
132. Шульгин Б В Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук (Саратов: СГУ, 1996)
133. Khovanov I A, Anishchenko V S, in *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems Near the Millenium* (AIP Conf. Proc., Vol. 411, Eds J B Kadtk, A R Bulsara) (New York: AIP, 1997) p. 267
134. Douglass J K et al. *Nature* (London) **365** 337 (1993)
135. Pei X, Wilkens L, Moss F J. *Neurophysiol.* **76** 3002 (1996)
136. Riani M, Simonotto E *Phys. Rev. Lett.* **72** 3120 (1994)
137. Simonotto E et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 1186 (1997)
138. Moore G, Perkel D, Segundo J *Ann. Rev. Physiol.* **28** 493 (1966)
139. Adey W R *Int. J. Neurosci.* **3** 271 (1972)
140. Denk W, Webb W *Hears. Res.* **60** 89 (1992)

Stochastic resonance: noise enhanced order

V.S. Anishchenko

Saratov State University, Department of Physics
ul. Astrakhanskaya 83, 410026 Saratov, Russia
Tel./Fax (7-8452) 51-45 49
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

A.B. Neiman

Saratov State University, Department of Physics
ul. Astrakhanskaya 83, 410026 Saratov, Russia
University of Missouri at St. Louis, Department of Physics and Astronomy
St. Louis, MO 63121 USA

F. Moss

University of Missouri at St. Louis, Department of Physics and Astronomy
St. Louis, MO 63121 USA
Tel. (1-314) 516-6150. Fax (1-314) 516-6152
E-mail: mossf@umsl.ya.umsu.edu

L. Schimansky-Geier

Humboldt University at Berlin
Berlin, Invalidenstr. 110, D-10115, Germany
Tel. (49-30) 2093-7624. Fax (49-30) 2093-7638
E-mail: alsg@summa.physik.hu-berlin.de

Stochastic resonance (SR) is one of the bright examples of noise-induced transitions in nonlinear systems driven by an information signal and noise simultaneously. In the regime of SR some characteristics of the information signal (amplification, signal-to-noise ratio, coherence and ordering degree etc.) at the output of the system are substantially improved at a certain optimal noise level. SR is realized only in nonlinear systems for which it is possible to control one of the characteristic time scales by varying the noise intensity. In the present review a physical mechanism and methods of the theoretical description of SR are discussed. The features of SR determined by the information signal structure, noise statistics and the properties of the concrete systems exhibiting the SR effect are studied. A nontrivial phenomenon of stochastic synchronization defined as the locking of the instantaneous phase and switching frequency of a bistable system by an external periodic force is analyzed in detail. Stochastic synchronization is explored in single and coupled bistable oscillators including ensembles. The effects of SR and stochastic synchronization of the ensembles of stochastic resonators are investigated both without coupling between the elements and in the case of their interaction. SR is considered in dynamical and non-dynamical (threshold) systems. The SR effect is analyzed from the viewpoint of information and entropy signal characteristics that determine the order and self-organization degree of the system. The application of the SR concept in order to explain the results of a series of biological experiments is discussed.

PACS numbers: 02.50.Ey, **05.40. + j**, **05.45. + b**, **87.70. + c**

Bibliography — 140 references

Received 26 June 1998, revised 6 August 1998