Июль 1998 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 168, № 7*

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Введение в струнные дуальности [1]

С.Г. Гуков

Дается краткий обзор последних достижений в теории суперструн. Показано, как изучение струнных компактификаций, солитонов и D*-бран приводит к понятиям* S-, T- *и* U*-дуальностей, которые связывают теории струн, до сих пор считавшиеся различными. Несмотря на то, что многие результаты все еще не имеют полного доказательства, понимание дуальностей, обсуждаемых в данном обзоре, помогает глубже понять многочисленные явления не только в теории струн, но и в геометрии, и в супергравитации. Особое внимание уделяется важным физическим аспектам, которые могут ускользать в конкретных вычислениях. Автор стремился сделать текст доступным широкому кругу читателей.*

PACS numbers: 02.10.Sp, **11.25.–w**, **11.55.–m**

Содержание

1. Введение

Теория струн появилась в 70-х годах как попытка объяснения сильного взаимодействия кварков в нуклоне [1]. Вместо того чтобы увенчаться успехом в своей первоначальной цели, эта идея привела к созданию самостоятельной области теоретической и математической физики. Сейчас теория струн имеет приложения от черных дыр в общей теории относительности до Великого Объединения [2]. Действительно, все ранние попытки объединения взаимодействий в одну теорию нашли наилучшую реализацию в теории струн. Естественно, включая в себя гравитацию, она является согласованной квантовой теорией. При низких энергиях динамика струн сводится к действию Янга – Миллса, которое является необходимой составляющей при построении реалистичных моделей взаимодействия.

Теории струн удается избежать ультрафиолетовых расходимостей теорий поля старших спинов путем замены точечных объектов на одномерные струны, так что на больших расстояниях (низкие энергии) мы имеем общую теорию относительности, а на коротких расстояниях (возможный источник расходимостей) интегралы обрезаются на размере струн. Можно надеяться, что эта идея допускает обобщения на *мембраны* [2] и объекты произвольной размерности: *p-браны*. Мы и в дальнейшем будем использовать эти обозначения, в которых p — пространственная размерность объектов. Например, точечные частицы являются 0-бранами, струны — это 1-браны, инстантоны — (-1)-браны, поскольку они локализованы во всех пространственных направлениях и времени, и т.д. Аналогично действию Намбу – Гото для теории струн [2 – 4] можно попробовать написать классическое действие

$$S = -T_p \int \mathrm{d}^{p+1}\xi \left\{ -\det\left(\partial_i X^\mu \, \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}\right)\right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

$$[T_p] = \left[(\mathrm{mass})^{p+1}\right], \qquad (2)$$

где размерность натяжения браны T_p в единицах массы есть $p+1$, а X^μ отображают $(p+1)$-мерный мировой объем $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_p)$ в D-мерное пространство Минковского: $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-,+,\ldots,+)$ и $\mu = 0, \ldots, \mathrm{D}-1$.

Это действие эквивалентно действию Полякова

$$S = T_p \int \mathrm{d}^{p+1}\xi \, \sqrt{\gamma}\, \gamma^{ij} \eta_{\mu\nu}\, \partial_i X^\mu \, \partial_j X^\nu , \qquad (3)$$

где $\gamma = \det \gamma_{ij}$. Уравнения движения для метрики определяют ее с точностью до зависящего от положения нормализационного множителя:

$$\gamma_{ij} \propto \partial_i X^\mu \, \partial_j X_\mu . \qquad (4)$$

С.Г. Гуков. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 117334 Москва, ул. Косыгина 2;
Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, ул. Б. Черемушкинская 25, Россия
E-mail: gukov@itp.ac.ru; gukov@pupgg.princeton.edu; gukov@feynman.princeton.edu

Статья поступила 4 ноября 1997 г.

[1] По материалам доклада на 34-й Юбилейной научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальной и прикладной физики и математики".

[2] Термины, выделенные курсивом, определены в словаре в конце статьи.

Подставляя метрику обратно в действие (3), получаем действие Намбу – Гото (1). Оперируя с действием (3), мы должны интегрировать по всем различным метрикам и суммировать по всем топологиям.

При произвольном p, теория p-браны сильно нелинейна. К счастью, при $p = 1$ существование огромной симметрии общей ковариантности позволяет исключить (по крайней мере, на сфере) метрику из (3) и соответственно избавиться от сильной нелинейности. В этом случае γ^{ij} имеет три независимые компоненты, что совпадает с числом свободных параметров: два из выбора координат и еще один из масштабной инвариантности. Но это еще далеко не конец. До сих пор мы имели дело с классическим действием. В квантовой же теории существует аномалия Вейля, которая нарушает масштабную инвариантность и пропорциональна полному *центральному заряду* соответствующей алгебры. Для бозонной струны — это $c = \mathrm{D} - 26$, где 26 соответствует вкладу духов, так что критическая размерность для бозонной струны $\mathrm{D} = 26$ [2–5]. Если теперь рассмотреть все X как суперсимметричные координаты, то мы получим *суперсимметричную* (SUSY) *конформную теорию* поля с центральным зарядом $c = (3/2)\mathrm{D} - 15$, т.е. критическую размерность $\mathrm{D} = 10$. Для расширенной суперсимметрии ($N = 2$) критическая размерность оказывается $\mathrm{D} = 2$, что не так интересно, как случай $N = 1$, который и будет основным предметом нашего обсуждения.

Из вышеупомянутых аргументов становится ясно, что струны являются выделенными объектами среди всего набора p-бран. Более того, состоятельная квантовая теория существует только в критической размерности.

В случае свободной открытой струны интегрирование в бозонной части действия (3) на мировом листе ведется по произвольным поверхностям $\mathcal{M}$ с границей. Вариация действия

$$\delta S = -2T_p \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{p+1}\xi\, \delta X_\mu\, \partial_i \partial^i X^\mu + \\ + 2T_p \int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{p+1}\xi\, \delta X_\mu \epsilon_{ij}\, \partial^j X^\mu \tag{5}$$

определяет классические решения в виде *гармонических функций* на мировой поверхности, построенные из собственных мод (два набора, бегущие вправо и влево, для закрытых струн), как это происходит в скрипичной струне:

$$\begin{aligned} X(z,\bar z) &= X_{\mathrm{L}}(z) + X_{\mathrm{R}}(\bar z)\,, \\ X_{\mathrm{L}}(z) &= x_{\mathrm{L}} + \frac{C}{2} - \mathrm{i}\alpha_0 \ln z + \mathrm{i}\sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m}{m z^m}\,, \\ X_{\mathrm{R}}(\bar z) &= x_{\mathrm{R}} - \frac{C}{2} - \mathrm{i}\bar\alpha_0 \ln \bar z + \mathrm{i}\sum_{m\neq 0} \frac{\bar\alpha_m}{m \bar z^m}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где [3] $z = \xi_0 + \mathrm{i}\xi_1$ и $\bar z = \xi_0 - \mathrm{i}\xi_1$ являются комплексными координатами.

Также должно выполняться одно из двух следующих условий на границе. Граничные условия Неймана сохраняют пуанкаре-инвариантность, а следовательно, и импульс:

$$\partial_n X_\mu = 0 \leftrightarrow X_{\mathrm{L}}(z) = X_{\mathrm{R}}(\bar z)\,. \tag{7}$$

С другой стороны, условия Дирихле отражают дефекты в пространстве-времени:

$$\delta X_\mu = 0 \leftrightarrow X_{\mathrm{L}}(z) = -X_{\mathrm{R}}(\bar z)\,. \tag{8}$$

Высшие возбужденные моды α_m и $\bar\alpha_m$ удовлетворяют алгебре гармонического осциллятора для каждой моды:

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0} \tag{9}$$

и аналогично для $\bar\alpha_m$, так что произвольное возбужденное состояние может быть записано как

$$\alpha_{-m_1} \ldots \alpha_{-m_r} \bar\alpha_{-m'_1} \ldots \bar\alpha_{-m'_s} |0, k\rangle \tag{10}$$

и полное число возбужденных осцилляторов

$$L = m_1 + \ldots + m_r\,, \qquad \bar L = m'_1 + \ldots + m'_s\,. \tag{11}$$

В развитии теории струн было создано пять различных теорий: типа I, типа IIA и типа IIB, теории гетеротических струн с калибровочными группами SO(32) и $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$. Скажем несколько слов о том, как все эти теории получаются из бозонной струны. Теория типа I — это теория *открытых* (и *замкнутых* [4]) струн, обладающая $N = 1$ суперсимметрией на мировой поверхности. Граничные условия на концах струны связывают два суперзаряда киральной и антикиральной мод в общий суперзаряд, состоящий из 16 компонент. Благодаря этому теория имеет $N = 1$ суперсимметрию в пространстве-времени. Теории же типа II имеют два 16-компонентных суперзаряда и, следовательно, $N = 2$ суперсимметрию в пространстве-времени. Единственное различие заключается в том, что в IIB теории обе (движущиеся вправо и влево) моды киральны, а в IIA теории они противоположной киральности с точки зрения десятимерного пространства-времени.

Поскольку только нечетное (четное) число гамма-матриц (Γ_μ) можно поместить между двумя спинорами противоположной (одной и той же) киральности, теория IIA (IIB) содержит только потенциалы нечетных (четных) форм. Гетеротическая струна выглядит чуть более замысловато, но куда более многообещающей для феноменологических целей: при компактификации на специальное многообразие (*Калаби – Яу*) она — хороший кандидат на описание реального мира. Она имеет $N = 1$ суперсимметричный правый сектор (в точности, как и струна типа I) и обычный бозонный левый сектор. Так как струна живет в десяти измерениях, может показаться, что у нас есть $26 - 10 = 16$ лишних бозонных полей. Они становятся калибровочными степенями свободы: фермионизация этих полей дает 32 фермиона, которые имеют такой же центральный заряд, как и исходные бозоны. Таким образом, мы приходим к калибровочной группе SO(32). Более детальный анализ дает единственную другую возможность: специальную группу $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$.

[3] "Нефизическая" постоянная C проявится позднее.

[4] Дело в том, что не существует теории только лишь открытых струн. Всегда можно найти такое сечение мировой поверхности, что оно будет замкнутой кривой, которая соответствует замкнутой струне.

Прежде чем погрузиться в мир дуальностей, задержимся на минуту, чтобы установить обозначения и терминологию.

Так, если некоторая теория сама себе дуальна, то говорят, что она самодуальна. Дуальностями, которые мы собираемся обсуждать, будут *T-, S- и U-дуальность*. Первая связывает две разные теории, компактифицированные на многообразия большого и малого размера соответственно. Позднее мы изучим простейший пример компактификации на окружность. Типичная для Т-дуальности группа симметрий — $O(n, m, Z)$. Т-дуальность является непертурбативной по *струнному натяжению* и пертурбативной в следующем смысле: она верна в любом порядке по *струнной константе связи*. S-дуальность существенно непертурбативна в отличие от предыдущего случая. Она связывает теорию в режиме слабой связи с теорией в области сильной связи и, соответственно, не может быть проверена по теории возмущений. Эта дуальность требует привлечения непертурбативных объектов, чем она и интересна. Обычно группа S-дуальности — $SL(2, Z)$. Последняя (U-дуальность) впервые была обнаружена в компактификации струн типа II на $K3 \times T^2$. Она имеет $\mathbf{E}_7(\mathbf{Z})$ группу дуальности, которая объединяет обе T- и S-группы, т.е. $\mathbf{SL}(\mathbf{2}, \mathbf{Z}) \times \mathbf{O}(\mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{Z})$.

Несмотря на то, что в тексте имеются все необходимые ссылки, прежде чем приступить к основной части, мы поможем читателю сориентироваться в литературе. Так как существует необходимая литература [2–5] по пертурбативной теории струн и конформной теории поля, нет необходимости здесь еще раз повторять ее изложение. Предполагается, что читатель при необходимости может обратиться к вышеупомянутым источникам. Самые необходимые понятия и термины приведены в кратком словаре в конце статьи. Имеется также ряд замечательных лекций [6–11] по непертурбативным аспектам теории струн, которые здесь в основном и будут обсуждаться. При этом мы надеемся, что настоящее изложение близких вопросов будет естественно дополнять эти обзоры. Мы также рекомендуем некоторые статьи по Т-дуальности и D-бранам [12–14], по S-дуальности [15–17] и p-бранам [18, 19]. В настоящее время точное решение Виттена–Зайберга [20] $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в четырех измерениях часто используется в качестве теста струнных компактификаций. В частности, поэтому изложение S-дуальности ведется в духе теории Виттена–Зайберга. Заинтересованному читателю мы рекомендуем [21–23] для введения в предмет.

2. Низкоэнергетическое описание в теории струн

Одним из наиболее сильных средств, в силу суперсимметричных теорем о неперенормируемости, в понимании динамики теории струн является низкоэнергетическое действие. Это теоретико-полевое действие для безмассовых возбуждений струны, которое получается в пределе ее бесконечного натяжения. Такое независимое описание для безмассовых возбуждений возможно из-за того, что все вышележащие возбуждения (10) становятся бесконечно массивными.

Рассмотрим следующее за тахионом первое возбуждение бозонной струны, которое совпадает с первым возбуждением в NS–NS секторе струн теории типа II [5]. Это будет безмассовое состояние (10) с $L = \bar{L} = 1$:

$$\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu}|0, k\rangle\,. \tag{12}$$

Симметричная, антисимметричная и следовая части этого возбуждения являются гравитоном, антисимметричным два-тензором и дилатоном соответственно.

Аналогично получаются состояния струн типа II из фермионных операторов рождения рамон-рамоновского сектора. В силу антикоммутации фермионных полей эти состояния описываются антисимметричными тензорами четного (нечетного) ранга в теории типа IIB(A).

Безмассовый спектр струны типа I получается "право-левой" симметризацией струны типа IIB, или, как еще говорят, струна типа I есть Z_2 орбифолд струны типа IIB. Но важным моментом является и то, что теория типа I — это теория открытых струн. Концы открытых струн снабжают так называемыми чан-патоновскими факторами — генераторами какой-нибудь калибровочной группы. При этом теория оказывается свободной от аномалии в случае, когда соответствующая группа есть SO(32) [2]. Поэтому низкоэнергетическое описание струны типа I содержит действие SO(32) Янга–Миллса, в то время как аналогичное действие для замкнутых струн имеет характерный вид (44).

3. Т-дуальность

Начнем наше путешествие с Т-дуальности в пространстве-времени, которая присуща только теориям, содержащим протяженные объекты (такие, как струны) и, следовательно, не имеет аналога в теории поля, описывающей физику точечных частиц.

Рассмотрим компактификацию замкнутых бозонных струн на окружность [12, 11]. Компактность 25-го измерения означает

$$X^{25} \approx X^{25} + 2\pi R\,. \tag{13}$$

Теперь импульс становится дискретным: $k^{25} = n/R$ (калуца-клейновские возбуждения). Этот эффект присутствует в любой квантовой теории в компактном пространстве. Другой же является спецификой лишь теории струн. Струна может обвиваться вокруг периодического измерения, так что

$$X^{25}(2\pi) = X^{25}(0) + 2\pi m R\,. \tag{14}$$

Возвращаясь к разложению по модам (6), мы видим, что собственные значения $k^{25}_{\mathrm{L,R}}$ операторов α_0 и $\tilde{\alpha}_0$ более не равны друг другу: $k^{25}_{\mathrm{L}} - k^{25}_{\mathrm{R}} = mR$. Так как полный импульс равен $(k^{25}_{\mathrm{L}} + k^{25}_{\mathrm{R}})/2$, то

$$k^{25}_{\mathrm{L}} = \frac{mR}{2} + \frac{n}{R}\,, \qquad k^{25}_{\mathrm{R}} = -\frac{mR}{2} + \frac{n}{R}\,. \tag{15}$$

Условия физических состояний определяют спектр масс в теории:

$$M^2 = k_0^2 - \sum_{\mu=1}^{24} k_\mu^2 = \frac{m^2R^2}{4} + \frac{n^2}{R^2} + L + \bar{L} - 2\,,$$
$$mn + L - \bar{L} = 0\,.$$

[5] В суперструнах типа II тахион убивается GSO проекцией.

Видно, что две теории с радиусами компактного измерения R и $2/R$ обладают одинаковым спектром, так что намотки и калуца-клейновские возбуждения меняются местами [6]: $m \leftrightarrow n$. Именно это и есть проявление T-дуальности, при которой

$$k_{\mathrm{L}}^{25} \to k_{\mathrm{L}}^{25}\,, \qquad k_{\mathrm{R}}^{25} \to -k_{\mathrm{R}}^{25}\,.$$

Если мы распространим ее также на старшие осцилляторные возбуждения

$$\alpha_m^{25} \to \alpha_m^{25}\,, \qquad \bar{\alpha}_m^{25} \to -\bar{\alpha}_m^{25}\,,$$

так что

$$X_{\mathrm{L}}^{25} \to X_{\mathrm{L}}^{25}\,, \qquad X_{\mathrm{R}}^{25} \to -X_{\mathrm{R}}^{25}\,,$$

то она станет симметрией операторного разложения во всех порядках по струнному взаимодействию. Теперь понятно, что с только что изученной дуальностью связана группа $\mathbf{Z}_2$: $R \leftrightarrow 2/R$, а пространство модулей, т.е. пространство параметров, соответствующей конформной теории — полупрямая $R > \sqrt{2}$.

Открытая струна не может намотаться на периодическое измерение, поэтому давайте посмотрим, к чему приведет действие на нее T-дуальности. Обычная открытая струна имеет граничные условия Неймана $n^i \partial_i X^\mu = 0$. Преобразования дуальности $\partial_i X^{25} = \epsilon_i^j \partial_j \tilde{X}^{25}$, где $\tilde{X}^{25} = X_{\mathrm{L}}^{25} - X_{\mathrm{R}}^{25}$, переводят их в условия

$$n^i \epsilon_i^j \partial_j \tilde{X} = t^j \partial_j \tilde{X}\,. \tag{16}$$

Касательная производная зануляется, так что $\tilde{X}^{25}$ постоянно вдоль границы. Как следует из разложения по модам (6), изменение знака правых мод X переводит условия Неймана (7) в граничные условия Дирихле (8). Полагая $R \to 0$, т.е. $\tilde{R} \to \infty$, мы приходим к пространству, где концы всех струн могут двигаться только по гиперплоскости постоянного $\tilde{X}^{25} = X_{\mathrm{L}}^{25} - X_{\mathrm{R}}^{25} = C$. Границы открытых струн, таким образом, могут быть обнаружены только на этой гиперплоскости, в то время как замкнутые струны (которые, как уже было отмечено, присутствуют в любой теории открытых струн) могут двигаться, где угодно. Полученная гиперплоскость не должна нарушать лоренц-инвариантность и, следовательно, она должна быть динамическим объектом: *Д*(*ирихле*)-*браной* [11, 12]. Замечательно, что при таком определении D-браны, она оказывается непертурбативным объектом, заряженным по *полям рамон-рамоновского сектора*. К этому вопросу мы еще вернемся в разделе 5.

Подчеркнем здесь еще одно важное следствие T-дуальности. В обсуждавшемся только что примере оператор четности в спинорном пространстве [7] $-\mathrm{i}\Gamma^{25}\Gamma_{27}$. При этом дуальность меняет местами четные и нечетные формы, а следовательно, и вакуум IIA и IIB теории струн.

[6] Для самодуального радиуса $R = \sqrt{2}$ появляется шесть безмассовых состояний, которые образуют $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ мультиплет.

[7] Оператор киральности определен через гамма-матрицы как $\Gamma_{27} = \Gamma_0 \Gamma_1 \ldots \Gamma_{25}$.

4. S-дуальность

Перейдем теперь к наиболее замечательной дуальности, которая привела не только к эквивалентности теорий струн, но также позволила решить различные модели. Например, она является одним из ключевых составляющих решения $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [20]. Введение в "струнный" взгляд на теорию Виттена–Зайберга изложено в [21].

Четырехмерным образом струнной дуальности сильной-слабой связи является электромагнитная дуальность точечных частиц. Они естественным образом взаимодействуют с вектор-потенциалом A_ν, напряженность поля которого

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{17}$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0\,, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\,, \tag{18}$$

где дуальная [8] напряженность поля $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta}/2$ определяется сверткой с полностью антисимметричным тензором $\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$.

Уравнения (18), очевидно, симметричны относительно преобразования $F \leftrightarrow \tilde{F}$. Появление электрического источника в правой части первого уравнения нарушает эту симметрию до тех пор, пока мы не введем также и магнитный заряд. После этого симметрия восстанавливается, если потребовать, чтобы электрический и магнитный заряды переходили друг в друга. Но вектор-потенциал теперь уже не может быть определен во всем пространстве, так как второе уравнение из (18), выраженное через A_μ, выполняется тождественно, т.е. появление ненулевой правой части в (18) несовместно с тождеством Бианки в дуальной теории. Следствием этого факта является струна Дирака, оканчивающаяся на монополе. Она не имеет динамики и представляет лишь топологическую сингулярность. Особенность в A_μ можно разрешить независимым определением вектор-потенциала на двух полусферах, окружающих магнитный заряд, интеграл магнитного поля по которым, согласно теореме Стокса, сводится к интегралу вдоль экватора или, другими словами, вдоль петли вокруг дираковской струны. В квантовой теории волновая функция электрона приобретает фазу при движении в магнитном поле. Для того чтобы струна Дирака была "невидима", изменение фазы при ее огибании должно быть кратно 2π. Так мы приходим к условию квантования Дирака электрического Q_{e} и магнитного Q_{m} зарядов: $Q_{\mathrm{e}} Q_{\mathrm{m}} = 2\pi n$. Для дионов — частиц, имеющих оба заряда, аналогичное условие известно как условие квантования Дирака–Швингера–Цванцигера. Для двух дионов с зарядами $Q_{\mathrm{e}}^1, Q_{\mathrm{m}}^1$ и $Q_{\mathrm{e}}^2, Q_{\mathrm{m}}^2$ оно имеет вид

$$Q_{\mathrm{e}}^1 Q_{\mathrm{m}}^2 - Q_{\mathrm{e}}^2 Q_{\mathrm{m}}^1 = 2\pi n\,, \qquad n \in Z\,. \tag{19}$$

Простейшее его решение дается решеткой зарядов

$$Q_{\mathrm{e}} = e n_1\,, \qquad Q_{\mathrm{m}} = \frac{2\pi}{e}\, n_2 \tag{20}$$

[8] Здесь и в дальнейшем тильда обозначает дуальную переменную.

для целых n_1 и n_2. Таким образом, теория с электрически заряженной частицей $(e, 0)$ и магнитно заряженной $(0, 2\pi/e)$ инвариантна относительно электромагнитной дуальности, действие которой $e \leftrightarrow 2\pi/e$ меняет сильную и слабую связь.

Заметим, что мы получили нетривиальное ограничение на заряды, лишь предположив существование магнитного заряда. К сожалению, КЭД, которую мы рассматривали, не содержит монополь в спектре, так что эта дуальность не является симметрией исходной теории.

Перейдем к более "богатой" модели Джорджи–Глэшоу, в спектре которой монополь присутствует с самого начала. Модель состоит из SO(3) калибровочного поля, взаимодействующего с изовекторным полем Хиггса ϕ [22]:

$$L = -\frac{1}{4} F_i^{\mu\nu} F_{i\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathrm{D}^\mu \phi \mathrm{D}_\mu \phi - V(\phi) , \qquad i = 1, 2, 3 , \tag{21}$$

где D_μ — ковариантная производная, а $V(\phi) = \lambda(\phi^2 - a^2)^2/4$ является хиггсовским потенциалом. Решения с конечной энергией должны иметь конфигурацию поля Хиггса, стремящегося к постоянному значению a на больших расстояниях, нарушая калибровочную группу, например, до U(1)-вращений вокруг $\phi_a = a\delta_{a,3}$. Таким образом, на больших расстояниях из всех компонент калибровочного поля выживает только абелев фотон. Кроме того, любое решение с конечной энергией связано с элементом второй гомотопической группы отображения пространственной бесконечности в вакуумное многообразие ϕ: $S^2 \to S^2$. Оно параметризуется целым числом, которое оказывается пропорциональным магнитному заряду Q_m полученного решения, как было показано т'Хофтом и Поляковым [28]. Они предложили топологически устойчивое солитонное решение, очень похожее на монополь Дирака на больших расстояниях, где эффективной теорией является КЭД, которой удается избежать особенностей на малых расстояниях за счет восстановления полной неабелевой калибровочной симметрии.

Поскольку рассмотренный монополь имеет гладкую полевую структуру, можно вычислить его массу. Богомольный показал [29], что масса решения с магнитным зарядом Q_m должна удовлетворять *неравенству* $M \geqslant a|Q_\mathrm{m}|$, которое, согласно Прасаду и Зоммерфельду, может быть точным равенством в случае так называемых *BPS-монополей* [30]. Такая же формула имеет место и для векторных бозонов, приобретающих массу посредством механизма Хиггса: $M = a|Q_\mathrm{e}|$. Объединением этих двух результатов получаем массовую формулу для одновременно электрически и магнитно заряженных решений, дионов:

$$M = \left| ae(n_\mathrm{e} + \tau n_\mathrm{m}) \right| , \tag{22}$$

где мы ввели комплексную константу связи[9] $\tau = \theta/2\pi + \mathrm{i}4\pi/e^2$.

Теории, имеющие подобный спектр состояний, насыщающих *условие BPS*, могут обладать $SL(2, Z)$ группой дуальности, индуцируемой действием

$$\tau \to -\frac{1}{\tau} , \qquad \tau \to \tau + 1 \tag{23}$$

преобразований. Первое из них обобщает электромагнитную дуальность, а второе сдвигает θ-угол на 2π. Примерами таких теорий служат четырехмерные теории с расширенной суперсимметрией, где энергия состояний ограничена абсолютным значением центрального заряда алгебры суперсимметрии. При достаточном числе суперсимметрий массовая формула (22) не получает квантовых поправок, так что дуальность сильной-слабой связи является точной симметрией спектра и может оказаться симметрией полной квантовой теории.

Простейшим примером с такими свойствами служит решение в форме "кинка" в $(1+1)$-мерном пространстве-времени. Решение, минимизирующее лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - U(\phi) \tag{24}$$

с потенциалом $U(\phi) = \lambda(\phi^2 - m^2/\lambda)^2/4$ и безразмерной константой связи $g = \lambda/m^2$, имеет сохраняющийся топологический заряд

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{g} \big(\phi(+\infty) - \phi(-\infty) \big) , \tag{25}$$

где $T = +1$ $(T = -1)$ для кинка (антикинка), ϕ изменяется от минимума U при $\phi = -1/\sqrt{g}$ на бесконечности $x = -\infty$ до другого минимума U при $\phi = +1/\sqrt{g}$ на $x = +\infty$. Энергия (масса покоя) кинка

$$E = \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{2} (\phi')^2 + U(\phi) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, \frac{m}{g} , \tag{26}$$

как и ожидалось, для непертурбативного решения обратно пропорциональна константе связи.

В случае суперсимметричного кинка лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \mathrm{i} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} U^2(\phi) - \frac{1}{2} U'(\phi) \psi \psi , \tag{27}$$

где ψ — майорановский фермион и $U(\phi) = \lambda(\phi^2 - a^2)$. В теории имеются два суперзаряда

$$Q_\pm = \int \mathrm{d}x \, (\dot{\phi} \pm \phi') \psi_\pm \mp U(\phi) \psi_\mp , \tag{28}$$

где $\psi_\pm$ обозначают левую и правую компоненты ψ соответственно. Они образуют алгебру суперсимметрии

$$Q_+^2 = P_+ , \qquad Q_-^2 = P_- , \qquad \{Q_+, Q_-\} = T , \tag{29}$$

где $P_\pm = P_0 \pm P_1$, и центральное расширение T является чисто топологическим зарядом. Из соотношения

$$P_+ + P_- = (Q_+ + Q_-)^2 - T = (Q_+ - Q_-)^2 + T \tag{30}$$

следует *неравенство Богомольного* $M \geqslant T/2$ для массы покоя M. Эта граница насыщается именно для состояний $|s\rangle$, которые аннулируются комбинацией суперзарядов $(Q_+ \pm Q_-)|s\rangle = 0$. Действительно, требование ненарушенной суперсимметрии эквивалентно взятию "ква-

[9] Здесь учтен топологический θ-член. Как было показано Виттеном [27], монополь в присутствии ненулевого значения θ приобретает эффективный электрический заряд $\theta n_\mathrm{m}/2\pi$.

дратного корня" из уравнений движения, а тот факт, что кинковое решение уничтожается одной комбинацией суперзарядов, означает насыщение неравенства Богомольного. Другая же комбинация суперзарядов не уничтожает кинк, а производит фермионную нулевую моду на фоне кинка. Это следует из того, что суперсимметричная вариация (если отлична от нуля) бозонных уравнений движения приводит к фермионным уравнениям движения на фоне бозонного решения.

Это свойство (что половина суперзарядов, уничтожающая классическое решение, приводит к насыщению неравенства Богомольного, в то время как действие другой половины производит фермионные нулевые моды на фоне солитона) найдено в большинстве известных примерах солитонов в суперсимметричных теориях. Как результат, поиск конфигураций, которые сохраняют часть суперсимметрии, обеспечивает короткий путь к решению полных уравнений движения. Действительно, обычно решение этих уравнений первого порядка оказывается проще решения уравнений движения второго порядка. В следующем разделе мы это увидим на примере p-бран — струнных солитонных решений.

5. Браны и дуальность дуальностей

В разделе 2 мы выяснили, что согласованная теория открытых струн, обладающая T-дуальностью, заставляет концы струн двигаться на статических протяженных объектах с p пространственными измерениями, описывающимися граничными условиями

$$\partial_{\perp} X^{0,\dots,p} = 0\,, \qquad X^{p+1,\dots,\mathrm{D}-1} = 0\,, \tag{31}$$

что вынуждает концы открытых струн двигаться по $(p+1)$-мерной гиперплоскости (мирового объема). Поскольку сами по себе открытые струны не живут в теории типа II, их присутствие неразрывно связано с существованием D-бран. Чтобы сохранить пуанкаре-инвариантность теории, как уже отмечалось, эта гиперплоскость должна быть динамическим объектом.

С другой стороны, из предыдущих разделов мы знаем о существовании струнных солитонов, так называемых p-бран. Эти протяженные BPS решения низкоэнергетической супергравитации (полученной из теории струн) характеризуются конечным натяжением T_p и плотностью заряда μ_p относительно рамон-рамоновской $(p+1)$-формы $A^{(p+1)}$, описываемой членом взаимодействия [18]

$$S_{\mathrm{int}} = \mu_p \int \mathrm{d}^{\,p+1}\xi\, A^{(p+1)} \tag{32}$$

в эффективном действии на мировом объеме. Здесь и в дальнейшем мы будем опускать пространственные индексы, вместо которых верхний индекс в скобках будет обозначать ранг соответствующей формы: $A^{(i)}$. Как и для любых BPS состояний, массовая формула, аналогичная (22), приравнивает натяжение браны и μ_p: $T_p = \mu_p$. Этот факт имеет одно важное следствие для D-бран, которые зачастую оказываются p-бранами. Несложно оценить энергию взаимодействия между двумя одинаковыми параллельными D-бранами, которая пропорциональна $T_p^2 - \mu_p^2$ [12, 13]. Следовательно, статическая сила за счет гравитонного и дилатонного притяжения в точности компенсируется отталкиванием, обусловленным рамон-рамоновскими полями. То же самое происходит и в суперсимметричных теориях поля, где два монополя (BPS состояния) не взаимодействуют друг с другом.

Как и все BPS состояния, такие p-браны обычно нарушают половину суперсимметрии. Но если мы рассмотрим пересекающиеся браны и их предельные конфигурации (D-бранные инстантоны), то суперсимметрия будет нарушена до $1/4$ и более; по одной второй за счет каждой браны.

Полная квантовая теория таких объектов наталкивается на ряд серьезных трудностей (частично упомянутых во введении). Все что мы можем пока сделать — это изучить низкоэнергетическую физику.

На языке дифференциальных форм мы можем переписать (17) для произвольных p и D. Калибровочные преобразования в этих обозначениях имеют вид

$$\delta A^{(p+1)} = \mathrm{d}\Lambda^{(p)}\,, \tag{33}$$

а калибровочно-инвариантная напряженность поля равна [10]

$$F^{(p+2)} = \mathrm{d}A^{(p+1)}\,, \tag{34}$$

откуда тут же следует тождество Бианки

$$\mathrm{d}F^{(p+2)} = 0\,. \tag{35}$$

В отсутствие других взаимодействий уравнение движения для $(p+1)$-формы потенциала

$$\mathrm{d}\tilde{F}^{(p+2)} = \tilde{J}^{(\mathrm{D}-p-1)}\,, \tag{36}$$

где источник J есть $(p+1)$-форма.

Так же, как и точечная частица естественным образом взаимодействует с вектор-потенциалом, т.е. с 1-формой, интеграл от потенциала вдоль мировой линии хорошо определен, так и p-брана естественно связана с $(p+1)$-формой (она имеет $(p+1)$-мерный мировой объем). Таким образом, напряженность поля есть $(p+2)$-форма. Как легко видеть из операции сопряжения Ходжа (свертка с D-мерным абсолютно антисимметричным тензором), она дуальна $(\mathrm{D}-(p+2) = \mathrm{D}-p-2 = \tilde{p}+2)$-форме. Это позволяет нам определить дуальные пары (p и $\tilde{p}$) в D измерениях:

$$p + \tilde{p} = \mathrm{D} - 4\,. \tag{37}$$

Например, эта полезная формула указывает на возможную самодуальность теории точечных частиц (которая реализуется на электронах и монополях) в четырехмерном пространстве-времени. Поскольку в основном мы обсуждаем теорию суперструн в критической размерности 10, полезно определить, что может быть дуально струне, или 1-бране. Согласно (37), — это *NS5-брана*. При замене СТРУНА $\leftrightarrow$ NS5-БРАНА S- и T- дуальности также меняются местами. Например, существенно непертурбативная струнная S-дуальность с точки зрения NS5-браны становится T-дуальностью, которая может быть

[10] Эта формула немного изменяется при включении взаимодействия.

проверена по теории возмущений. Следовательно, мы свели подтверждение S-дуальности к проверке эквивалентности струна – NS5-брана, описанной выше. Это рассуждение известно как дуальность дуальностей.

Как и обычные уравнения Максвелла (18), формула (36) подразумевает существование "электрического" заряда, т.е. p-браны, но не магнитного заряда, т.е. $\tilde{p} = (\mathrm{D} - p - 4)$-браны.

Чтобы восстановить симметрию дуальности введением $(\mathrm{D} - p - 4)$-бран, мы должны модифицировать (34) до

$$F^{(p+2)} = \mathrm{d}A^{(p+1)} + \omega^{(p+2)} , \tag{38}$$

так что тождество Бианки (35) приобретает вид

$$\mathrm{d}F^{(p+2)} = X^{(p+3)} , \tag{39}$$

с

$$X^{(p+3)} = \mathrm{d}\omega^{(p+2)} . \tag{40}$$

Для электрических и магнитных зарядов

$$\mu_p = \int_{S^{\mathrm{D}-p-2}} \tilde{F}^{(\mathrm{D}-p-2)} = \int_{M^{\mathrm{D}-p-1}} \tilde{J}^{(\mathrm{D}-p-1)} , \tag{41}$$

$$\mu_{\mathrm{D}-p-4} = \int_{S^{p+2}} F^{(p+2)} = \int_{M^{p+3}} J^{(p+3)} \tag{42}$$

мы имеем обобщенное условие квантования Дирака (19). Согласно Дираку, можно гладким образом определить потенциал везде, кроме сингулярной (гипер)струны, прокалывающей $S_{\mathrm{D}-p-2}$. Эта сингулярность опасна, так как эксперимент Аронова – Бома, включающий $(\mathrm{D} - p - 4)$-браны, может обнаружить ее. Действительно, волновая функция $(\mathrm{D} - p - 4)$-браны, обнесенной вокруг сингулярности, приобретает фазу

$$\mu_d \, \mu_{\mathrm{D}-d-4} = 2\pi n . \tag{43}$$

Довольно любопытно, что заряды D-бран, выраженные через их натяжения, удовлетворяют этому условию с $n = 1$. Простая цилиндрическая диаграмма каким-то образом знает об этой непертурбативной проверке на самосогласованность [13]. Более того, только что мы узнали, что D-браны несут минимальные R – R заряды, разрешенные в теории, так что можно предположить, что других нет.

Единственное, что осталось обсудить, — это явная форма p-бран. Рассмотрим антисимметричный тензорный потенциал ранга d $A_{M_1 M_2 \ldots M_d}$, взаимодействующий с гравитацией g_{MN} и с дилатоном ϕ посредством действия

$$I_{\mathrm{D}}(d) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{\mathrm{D}}x \sqrt{-g}\biggl\{ R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \\ - \frac{1}{2(d+1)!} \exp\bigl[-a(d)\phi\bigr] F_{d+1}^2 \biggr\} , \tag{44}$$

где напряженность поля F_{d+1} ранга $(d+1)$ определена в (34), а $a(d)$ — некоторая, пока неопределенная, константа. Здесь мы полагаем D и d произвольными, но наиболее интересными для нас случаями будут струна и NS5-брана [11]. Мы позволим этим полям взаимодействовать с элементарными d-мерным протяженным объектом, "$(d-1)$-браной", которая описывается траекторией в пространстве-времени $X^M(\xi^i)$ $(i = 0, 1, \ldots, (d-1))$, метрикой на мировом объеме $\gamma_{ij}(\xi)$ и натяжением T_d:

$$S_d = T_d \int \mathrm{d}^d\xi \biggl\{ -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ij}\partial_i X^M \partial_j X^N g_{MN} \exp\left[a(d)\frac{\phi}{d}\right] + \\ + \frac{(d-2)}{2}\sqrt{-\gamma} - \\ - \frac{1}{d!}\,\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_d}\partial_{i_1} X^{M_1} \partial_{i_2} X^{M_2} \ldots \partial_{i_d} X^{M_d} A_{M_1 M_2 \ldots M_d} \biggr\} . \tag{45}$$

Тождества Бианки (35) остаются неизменными, в то время как уравнения движения для поля A (36) можно переписать как

$$d\Bigl\{\exp\bigl[-a(\tilde{d})\phi\bigr] F\Bigr\} = 2(-)^{d^2}\tilde{J} , \tag{46}$$

где источник J ранга d имеет вид

$$J^{M_1 \ldots M_d} = T_d \int \mathrm{d}^d\xi\, \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_d}\, \partial_{i_1} X^{M_1} \partial_{i_2} X^{M_2} \ldots \partial_{i_d} X^{M_d} \frac{\delta^D(x - X)}{\sqrt{-g}} . \tag{47}$$

Теперь мы можем определить два сохраняющихся заряда: нетеровский "электрический" заряд (41) и топологический "магнитный" заряд (42). Последний заряд будет отличен от нуля, если действие I_{D} допускает солитонные $\tilde{d}$-мерные протяженные объекты — "$(\tilde{d}-1)$-браны". Эти заряды удовлетворяют условию квантования Дирака (43). Конечно, на этом уровне пока еще не очевидно, что система имеет либо элементарные, либо солитонные протяженные решения, и — даже если имеет — каковы величины электрического и магнитного зарядов μ_d и $\mu_{\tilde{d}}$.

Рассмотрим сначала уравнения полей, получающиеся из $I_{\mathrm{D}} + S_d$. Уравнение Эйнштейна имеет вид

$$\sqrt{-g}\biggl\{ R^{MN} - \frac{1}{2}g^{MN}R - \frac{1}{2}\left[\partial^M\phi\partial^N\phi - \frac{1}{2}g^{MN}(\partial\phi)^2\right] - \\ - \frac{1}{2}\frac{1}{d!}\left[F^M_{M_1 \ldots M_d} F^{NM_1 \ldots M_d} - \frac{1}{2(d+1)}g^{MN}F^2\right] \times \\ \times \exp\bigl[-a(d)\phi\bigr] \biggr\} = \sqrt{-g}\, T^{MN}_{d-1} , \tag{48}$$

где тензор энергии-импульса $(d-1)$-браны равен

$$T^{MN}_{d-1} = -T_d \int \mathrm{d}^d\xi \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ij}\partial_i X^M \partial_j X^N \exp\left[\frac{a(d)\phi}{d}\right] \frac{\delta^{\mathrm{D}}(x - X)}{\sqrt{-g}} . \tag{49}$$

Уравнение для антисимметричного тензорного поля имеет вид

$$\partial_M\Bigl(\sqrt{-g}\,\exp\bigl[-a(d)\phi\bigr] F^{MM_1 \ldots M_d}\Bigr) = \\ = 2T_d \int \mathrm{d}^d\xi\, \varepsilon^{i_1 \ldots i_d}\partial_{i_1} X^{M_1} \ldots \partial_{i_d} X^{M_d} \delta^{\mathrm{D}}(x - X) , \tag{50}$$

[11] Другим любопытным примером служит самодуальная струна в шести измерениях

уравнение для дилатона

$$\partial_M\big(\sqrt{-g}\,g^{MN}\partial_N\phi\big)+\frac{a(d)}{2(d+1)!}\,\sqrt{-g}\,\exp\big[-a(d)\phi\big]F^2=$$
$$=\frac{a(d)T_d}{d}\int \mathrm{d}^d\xi\,\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ij}\partial_i X^M\partial_j X^N g_{MN}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{a(d)\phi}{d}\right]\delta^{\mathrm{D}}(x-X) \tag{51}$$

и уравнения положения $(d-1)$-браны

$$\partial_i\left\{\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ij}\partial_j X^N g_{MN}\exp\left[\frac{a(d)\phi}{d}\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ij}\partial_i X^N\partial_j X^P\partial_M\left\{g_{NP}\exp\left[\frac{a(d)\phi}{d}\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{d!}\,\varepsilon^{i_1\ldots i_d}\partial_{i_1}X^{M_1}\ldots\partial_{i_d}X^{M_d}F_{MM_1\ldots M_d}=0\,, \tag{52}$$

где

$$\gamma_{ij}=\partial_i X^M\partial_j X^N g_{MN}\,\exp\left[\frac{a(d)\phi}{d}\right]. \tag{53}$$

Чтобы решить эти уравнения взаимодействующего поля $(d-1)$-браны, подставим в них анзац для D-мерной метрики g_{MN}, d-формы $A_{M_1\ldots M_d}$, дилатона ϕ и координат $X^M(\xi)$, соответствующий наиболее общему $d/(\mathrm{D}-d)$ разделению, инвариантному относительно $P_d\times \mathrm{SO}(\mathrm{D}-d)$, где P_d — d-мерная группа Пуанкаре [18, 19]. Разделим индексы

$$x^M=(x^\mu,y^m)\,, \tag{54}$$

где $\mu=0,1,\ldots,(d-1)$ и $m=d,d+1,\ldots,(\mathrm{D}-1)$. Интервал

$$\mathrm{d}s^2=\exp(2A)\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu+\exp(2B)\delta_{mn}\,\mathrm{d}y^m\,\mathrm{d}y^n\,, \tag{55}$$

а калибровочная d-форма

$$A_{\mu_1\ldots\mu_d}=-\frac{1}{{}^d g}\,\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}\exp C\,, \tag{56}$$

где ${}^d g$ — детерминант $g_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}\equiv g_{\mu_1\nu_1}\ldots g_{\mu_d\nu_d}\varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_d}$ и $\varepsilon^{012\ldots(d-1)}=1$, т.е. $A_{01\ldots(d-1)}=-\exp C$. Все остальные компоненты $A_{M_1\ldots M_d}$ положим равными нулю. P_d-инвариантность требует, чтобы произвольные пока функции A, B, C зависели только от y^m; $\mathrm{SO}(D-d)$-инвариантность тогда говорит, что эта зависимость может быть только через $y=\sqrt{\delta_{mn}y^m y^n}$. Аналогичный анзац для дилатона

$$\phi=\phi(y)\,. \tag{57}$$

Аналогично разделим координаты в $(d-1)$-бранном секторе

$$X^M=(X^\mu,\,Y^m) \tag{58}$$

и выберем статическую калибровку

$$X^\mu=\xi^\mu\,, \tag{59}$$

положив

$$Y_m=\mathrm{const}\,. \tag{60}$$

Подставляя все это в уравнения полей $(d-1)$-браны, получаем пять уравнений на четыре неизвестные функции A, B, C, ϕ и один неизвестный параметр $a(d)$.

Полагая, что на бесконечности метрика асимптотически стремится к η_{MN}, получаем единственное решение

$$A=\frac{\tilde d}{2(d+\tilde d)}(C-C_0)\,,$$
$$B=-\frac{d}{2(d+\tilde d)}(C-C_0)\,,$$
$$\frac{a(d)}{2}\,\phi=\frac{a^2(d)}{4}(C-C_0)+C_0\,, \tag{61}$$

где $C_0=a(d)\phi_0/2$ и ϕ_0 — вакуумное среднее дилатона. C определяется как

$$\exp(-C)=\exp(-C_0)+\frac{k_d}{y^{\tilde d}}\,,$$
$$\tilde d>0=\exp(-C_0)-\frac{T_d}{\pi}\ln y\,,\qquad \tilde d=0\,, \tag{62}$$

и

$$k_d=\frac{2T_d}{\tilde d}\,\Omega_{\tilde d+1}\,, \tag{63}$$

где $\Omega_{\tilde d+1}$ — объем $S^{\tilde d+1}$. Параметр $a(d)$ определяется посредством

$$a^2(d)=4-\frac{2d\tilde d}{d+\tilde d}\,. \tag{64}$$

Полезно заметить, что в данном случае коэффициенты перед δ-функцией в уравнении Эйнштейна и в уравнении для дилатона зануляются в $y=0$. Таким образом, мы нашли решения этих уравнений в отсутствии источника; δ-функциональный источник появляется только в уравнениях для антисимметричного тензорного поля.

Важным результатом является то, что мы определили постоянную $a(d)$, потребовав, чтобы наша теория имела в качестве решений элементарные $(d-1)$-браны.

Масса на единицу $(d-1)$-мерного объема элементарной $(d-1)$-браны равна

$$\mathcal{M}_d=\int\theta_{00}\,\mathrm{d}^{\mathrm{D}-d}y\,, \tag{65}$$

где θ_{MN} — полный псевдотензор общей системы гравитация – материя. Находим

$$\mathcal{M}_d=T_d\exp C_0\,. \tag{66}$$

Для вычисления электрического заряда μ_d в (41) удобно ввести полярные координаты

$$y^m=(y,\theta^i)\,, \tag{67}$$

где $i=1,\ldots,(\tilde d+1)$, так что

$$\delta_{mn}\,\mathrm{d}y^m\,\mathrm{d}y^n=\,\mathrm{d}y^2+y^2\,\mathrm{d}\Omega^2_{\tilde d+1}\,, \tag{68}$$

и $\mathrm{d}\Omega^2_{\tilde d+1}$ — метрика на единичной $(\tilde d+1)$-мерной сфере $S^{\tilde d+1}$. Далее, из уравнений антисимметричного поля замечаем, что

$$F_{y\mu_1\ldots\mu_d} = -\frac{1}{d_g}\,\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}\partial_y \exp C\,. \tag{69}$$

Дуальный к F тензор $\tilde F$ имеет ненулевые компоненты только в направлении θ^i

$$\sqrt{-g}\,\tilde F^{\theta_1\ldots\theta_{\mathrm{D}-d-1}} = -(-)^{(\mathrm{D}-d)(d+1)}\exp(2C)\partial_y\exp(-C)\,. \tag{70}$$

Следовательно, используя (61)–(63), находим

$$\exp\big[-a(d)\phi\big]\tilde F_{\theta_1\ldots\theta_{\mathrm{D}-d-1}} = (-)^{(\mathrm{D}-d)(d+1)}2T_d\,\frac{\varepsilon_{\theta_1\ldots\theta_{\mathrm{D}-d-1}}}{\Omega_{\tilde d+1}}\,. \tag{71}$$

Из (41) следует, что

$$\mu_d = \sqrt{2}\,T_d(-)^{(\mathrm{D}-d)(d+1)}\,, \tag{72}$$

и, значит,

$$\mathcal{M}_d = \frac{1}{\sqrt2}\,|\mu_d|\exp\frac{a(d)\phi_0}{2}\,. \tag{73}$$

Таким образом, мы получили, что масса и заряд удовлетворяют тому же равенству, что и в случае суперсимметричных решений из раздела 3, хотя до сих пор мы не предполагали никакой суперсимметрии. На самом деле, это следствие нашего предположения, что отношение коэффициентов перед кинетическим членом и членом Весса–Зумино в σ-модельном действии p-браны (45) такое, как этого требует суперсимметрия.

Можно непосредственно обобщить данный результат на точную, устойчивую много-$(d-1)$-бранную конфигурацию, полученную суперпозицией решений (61)

$$\exp(-C) = \exp(-C_0) + \sum_l \frac{k_d}{|\vec y - \vec y_l|^2}\,, \tag{74}$$

где $\vec y_l$ отвечает положению каждой $(d-1)$-браны. Чтобы явно увидеть условие "ноль-силы", рассмотрим, например, много-$(d-1)$-бранную конфигурацию (74) с N $(d-1)$-бранами в качестве источника. В общем случае мы не имеем поперечной $\mathrm{SO}(\mathrm{D}-d)$ симметрии, но, тем не менее, имеем P_d — пуанкаре-инвариантность конфигурации (74). Пусть каждая $(d-1)$-брана с индексом l удовлетворяет $X^\mu(l)=\xi^\mu$ так, что все они имеют одинаковую ориентацию. Лагранжиан каждой из $(d-1)$-бран с индексом l в поле источников, заданных уравнениями (54)–(57), следует из (45) после подстановки γ_{ij} из (53) и g_{MN} из (55), (61), (74):

$$\mathcal{L}_d = -T_d\Bigg\{\Bigg[-\det\Bigg(\exp\Bigg(2A+\frac{a(d)\phi}{d}\Bigg)\eta_{ij} + \exp\Bigg(2B+\frac{a(d)\phi}{d}\Bigg)\partial_i Y^m(l)\partial_j Y_m(l)\Bigg)\Bigg]^{1/2} - \exp C\Bigg\}\,, \tag{75}$$

что соответствует потенциалу

$$V = T_d\left[\exp\frac{dA + a(d)\phi}{2} - \exp C\right], \tag{76}$$

который зануляется на уравнениях для поля дилатона. Это обобщает на произвольные d и D условие ноль-силы для BPS состояний, рассмотренной выше.

Обсуждавшиеся до сих пор элементарные $(d-1)$-браны соответствуют решениям взаимодействующей системы поля–браны с действием $I_{\mathrm{D}}(d)+S_d$. Они имеют δ-функциональные особенности при $y=0$ и ненулевой нетеровский электрический заряд μ_d. В конце данного раздела найдем $(\tilde d-1)$-браны, соответствующие решениям уравнений, получающихся только из $I_{\mathrm{D}}(d)$ без источника, которые регулярны в $y=0$ и которые будут описываться ненулевым топологическим магнитным зарядом $\mu_{\tilde d}$. (Вспомним, что $\tilde d = \mathrm{D}-d-2$.)

Для этого подставим анзац, инвариантный относительно $P_{\tilde d}\times \mathrm{SO}(\mathrm{D}-\tilde d)$. Тогда (54) и (55) выглядят так же, как и раньше, только теперь $\mu = 0,1,\ldots,(\tilde d-1)$ и $m=\tilde d,\tilde d+1,\ldots,(\mathrm{D}-1)$. Однако для антисимметричного тензора мы выберем анзац на напряженость поля, а не потенциал. Из предыдущих рассуждений вспомним, что ненулевой электрический заряд соответствовал

$$\frac{1}{\sqrt2}\exp(-a\phi^*)F_{\tilde d+1} = \frac{\mu_d\,\varepsilon_{\tilde d+1}}{\Omega_{\tilde d+1}}\,, \tag{77}$$

где $\varepsilon_{\tilde d+1}$ — форма объема на $S^{\tilde d+1}$. Соответственно, чтобы получить ненулевой магнитный заряд, положим

$$\frac{1}{\sqrt2}\,F_{d+1} = \frac{\mu_{\tilde d}\,\varepsilon_{d+1}}{\Omega_{d+1}}\,, \tag{78}$$

где ε_{d+1} — форма объема на S^{d+1}. Поскольку она — гармоническая форма, F уже не может быть записана глобально, как вихрь A, но, тем не менее, удовлетворяет тождеству Бианки. Нетрудно показать, что все полевые уравнения, следующие из $I_{\mathrm{D}}(d)$, удовлетворяются лишь заменой $d\to\tilde d$, и, следовательно, $a(d)\to a(\tilde d) = -a(d)$ в уравнениях Эйнштейна и поля дилатона с нулевым членом источника. Для дальнейшего использования запишем явное решение в случае $\phi_0=0$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1+\frac{k_{\tilde d}}{y^d}\right)^{-d/(d+\tilde d)}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\mu + \left(1+\frac{k_{\tilde d}}{y^d}\right)^{\tilde d/(d+\tilde d)}\mathrm{d}y_m\,\mathrm{d}y_m\,,$$

$$\exp(2\phi) = \left(1+\frac{k_{\tilde d}}{y^d}\right)^{a(d)}\,,$$

$$F_{d+1} = \sqrt2\,\mu_{\tilde d}\,\varepsilon_{d+1}\Omega_{d+1}\,. \tag{79}$$

Заметим, что таким методом мы нашли решение везде, включая $y=0$, так как δ-функции уже отсутствовали в уравнениях для полей гравитона и дилатона.

Теперь масса на единицу $(\tilde d-1)$-мерного объема

$$\mathcal{M}_{\tilde d} = \frac{1}{\sqrt2}|\mu_{\tilde d}|\exp\left[\frac{a(\tilde d)\phi_0}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt2}|\mu_{\tilde d}|\exp\left[-\frac{a(d)\phi_0}{2}\right]. \tag{80}$$

Отметим, что зависимость от ϕ_0 именно такая, что $\mathcal{M}_{\tilde d}$ велика при малых $\mathcal{M}_d$, и наоборот.

Электрический заряд элементарного решения и магнитный заряд солитонного решения подчиняются правилу квантования Дирака (43) и также насыщают неравенство Богомольного.

Рассмотрев взаимодействие только солитонных состояний (ноль-сила), мы теперь перейдем к анализу структуры сингулярности дуальных объектов. Рассмотрим радиальную траекторию $(d-1)$-браны, падающей в поле дуальной $(\tilde{d}-1)$-браны. Предполагается, что $(d-1)$-брана и $(\tilde{d}-1)$-брана не пересекаются, как это обычно имеет место в случае $D = d + \tilde{d} + 2$. Нашим критерием сингулярности $(\tilde{d}-1)$-браны будет следующий: если пробная $(d-1)$-брана "видит" сингулярность $(\tilde{d}-1)$-бранного источника (т.е. пробник падает на источник за конечное собственное время), тогда $(\tilde{d}-1)$-брана считается сингулярным решением с точки зрения теории $(d-1)$-бран. В противном случае дуальные решения взаимно несингулярны, как, например, это имеет место для струн и пятибран. Полный ответ состоит в том, что только точечные частицы и струны несингулярны по отношению к своим дуальным партнерам. Это счастливая случайность, что дуальность струна – NS5-брана удовлетворяет этому критерию.

6. Заключение

Основная задача данного обзора заключалась в попытке более или менее элементарного введения в струнные дуальности — одну из наиболее популярных и прогрессирующих областей теоретической физики в настоящее время. Основное внимание было уделено не широте данной области, а, скорее, новым идеям. При этом мы попытались их разобрать на простых конкретных примерах и меньше говорить о сетке дуальных теорий и т.п. В заключение мы постараемся воссоздать целостную картину непертурбативной теории струн в свете дуальностей.

Современный взгляд на теорию струн подразумевает примерно следующую картину: на огромном пространстве модулей "Теории струн" имеется набор выделенных точек, представляющих теории типа IIA, IIB, I, гетеротические струны, — в общем, все те теории, которые мы раньше считали различными (независимыми) теориями струн. Теперь же все эти точки связаны, и мы при движении на пространстве модулей попадаем из одной теории в другую. Пока это еще не дуальность. Действительно, теории двумерного бозона на окружностях разного радиуса тоже представляют разные точки на пространстве модулей $\mathcal{M} = \{\mathcal{R}\}$, так что из одной можно попасть в другую, непрерывно меняя радиус. Дуальность означает нечто большее: эквивалентность теорий. Из приведенного выше примера, эквивалентными оказываются лишь теории на радиусах R и $\tilde{R}$, связанных соотношением $R\tilde{R} = 2$. Именно такой T-дуальностью связаны теории типа IIA и IIB при компактификации на окружность или старшие торы. Если же мы хотим сохранить только часть суперсимметрии, то компактифицировать надо на многообразия специального вида — многообразия Калаби – Яу. В математике до сих пор не доказано предположение, что каждое такое многообразие имеет своего ("зеркального") партнера [12]. Теория струн как бы его "доказывает", полагая, что любой компактификации теории типа IIA соответствует некоторая компактификация теории типа IIB. Это и есть T-дуальность. Другим примером теорий, связанных T-дуальностью, служит гетеротическая струна с калибровочной группой SO(32) и $E_8 \times E_8$. В такого рода дуальности легче всего поверить, проверяя их по теории возмущений. Совсем не так обстоит дело в случае S-дуальности.

S-дуальность, связывающая теории при сильной и слабой связи, является наиболее мощным инструментом в теории струн (теории поля). Чтобы ее "проверить", необходимо контролировать не только весь ряд теории возмущений, но и непертурбативные эффекты. К сожалению, существует крайне мало теорий, в которых известно столь много [13]. Наоборот, чтобы получить какую-нибудь выгоду от S-дуальности, обычно на основании косвенных аргументов (анализ BPS-состояний, низкоэнергетическое описание) предполагают существование дуальности. Далее, исходя из этого предположения, уже получают все "точные" результаты. Но необходимо помнить, что S-дуальность остается всего лишь предположением! Из известных примеров теории струн, теории типа I и гетеротическая с калибровочной группой SO(32) связаны S-дуальностью. Теория типа IIB оказывается самодуальной, т.е., когда константа связи стремится к бесконечности, непертурбативные степени свободы ведут себя так же, как и элементарные возмущения в исходной теории. Остается выяснить, чему соответствуют теории IIA и гетеротическая $E_8 \times E_8$ в режиме сильной связи. Эти теории получаются при компактификации на окружность и отрезок соответственно одиннадцатимерной M-теории. Константа связи в теории IIA связана с радиусом окружности так, что при малой константе радиус окружности также мал и мы возвращаемся к десятимерной теории. В области сильной связи окружность декомпактифицируется в одиннадцатое измерение.

D – p-браны, т.е. p-мерные гиперповерхности, на которых могут заканчиваться открытые струны, служат типичной проверкой для дуальностей. D-браны несут заряды по рамон-рамоновским полям и являются непертурбативными решениями супергравитации. Посмотрим, как все браны получаются из соответствующих решений максимальной $d = 11$ супергравитации. В M-теории есть два фундаментальных объекта: мембрана и дуальная ей (в $d = 11$) пятибрана, а также калуца-клейновские возбуждения. При компактификации теории на окружность мы попадаем в теорию IIA и получаем весь спектр бран. NS5-брана в IIA есть пятибрана M-теории, лежащая в некомпактной части пространства-времени. Когда она наматывается одним измерением на окружность, мы приходим к D4-бране. Аналогично получаются фундаментальная струна и D2-брана из мембраны в M-теории. D0-браны (и дуальные им D6-браны) — это не что иное как калуца-клейновские возбуждения вдоль компактного измерения. Все браны в теории типа IIB получаются действием T-дуальности в одном измерении. При этом NS5-брана так и остается NS5-браной, а все D-браны четной (в IIA) размерности переходят в D-браны нечетной размерности в IIB. Связь между теориями типа II оказывается даже более близкой.

[12] Многообразия X и $\tilde{X}$ связаны так называемой *mirror symmetry* [31, 9], при которой комплексная структура X переходит в келлерову структуру $\tilde{X}$. Например, действие T-дуальности на двумерный тор меняет его комплексную $\tau = \mathrm{i}R_1/R_2$ и келлерову $\rho = \mathrm{i}R_1R_2$ структуру.

[13] Аналогией из статистической физики может служить дуальность Крамерса – Ванье, при которой теория на дуальной решетке определена при обратной температуре $T \leftrightarrow 1/T$ [32]. Предположив существование лишь одной особой точки, можно "угадать" точку фазового перехода $T = 1$, где теория самодуальна.

Например, группа $SL(2,Z)$ S-дуальности в IIB имеет интерпретацию как модулярная группа преобразований тора, образованного окружностью, на которую компактифицирована теория IIA, и окружностью, на которую компактифицирована М-теория. Так T- и S -дуальности объединяются в U-дуальность.

Одним из заманчивых направлений (которое пока еще остается предметом будущих исследований) является геометрическая интерпретация $SL(2,Z)$ самодуальности теории IIB через некоторую двенадцатимерную F-теорию на торе малого радиуса. Как и в предыдущем абзаце, группа S-дуальности отождествляется с модулярной группой преобразований тора [9].

Также интересными направлениями представляются матричное описание [33] "Теории струн", ее применение к описанию теорий поля в разном числе измерений, которые получаются как низкоэнергетические пределы D-бранных конфигураций [34]. Очень плодотворным оказалось использование теории струн для описания черных дыр [25, 26, 9] [14]. Но все это представляет предмет отдельных обсуждений и дальнейших исследований.

В заключение хочу поблагодарить Э. Ахмедова, А.Ю. Морозова и Л.Б. Окуня за предварительное прочтение рукописи и ценные комментарии, а также организаторов и участников 33-й зимней школы по теоретической физике "Duality: Strings and Fields" в Польше и летней школы в Каржезе.

Работа поддержена грантом РФФИ 96-15-96939.

7. Краткий словарь терминов

BPS неравенство (условие) на массу состояний в теории с расширенной суперсимметрией возникает за счет центральных членов в алгебре суперсимметрии:

$$M \geqslant |Z| \,. \tag{81}$$

Это условие называется так потому, что оно было впервые выведено Богомольным, Прасадом и Зоммерфельдом [29, 30]. Оно подробно проиллюстрировано в разделе 3 при обсуждении S-дуальности (22).

Если вышеупомянутое неравенство превращается в точное равенство, то говорят, что условие (81) насыщается. Состояния, имеющие массу в точности равную абсолютной величине центрального заряда, образуют "короткий" мультиплет, так как он реализует представление алгебры суперсимметрии на меньшем числе состояний (по сравнению с "длинным" мультиплетом, образованным состояниями с большей массой). Данный факт имеет очень важные последствия: число состояний не может измениться скачком при непрерывном изменении параметров, поэтому BPS-состояния не меняются при движении на пространстве модулей, а их массы не получают перенормировок.

S-дуальность. Дуальностью (S-, T- или U-дуальностью) называется эквивалентность описаний теории при различных значениях параметров. Фактически, это означает, что две теории А и Б просто эквивалентны, а мы привыкли считать их разными, так как они представлены разными областями на пространстве модулей этой общей теории. Эквивалентность теорий является очень сильным утверждением, и, например, означает совпадение спектра состояний в обеих теориях (но не только). Она позволяет зачастую "решить" теорию, воспользовавшись разложениями по малым параметрам в различных окрестностях.

S-дуальность, в частности, связывает одну теорию при слабой связи с другой теорией в режиме сильной связи. При этом, конечно, далеко не просто убедиться в совпадении спектра — чтобы контролировать поведение теории при сильной связи, надо учесть все поправки теории возмущений. Ситуация существенно упрощается в случае так называемых BPS-состояний. Выраженные через параметры алгебры, они не могут получать никаких поправок и поэтому без труда "следуют" в область сильной связи при ренорм-групповом потоке.

Типичная группа преобразований, связанная с S-дуальностью, — модулярная группа $SL(2,Z)$. Она образована двумя элементами:

$$\tau \to \tau + 1 \,, \tag{82}$$

что обычно соответствует изменению какого-либо топологического числа на единицу и поэтому не меняет теории. Преобразование же

$$\tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{83}$$

обычно меняет константу связи на обратную. Чтобы не быть слишком абстрактными, заметим, что в $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [20] τ есть не что иное, как комплексифицированная константа связи.

T-дуальность. Говорят, что теория А Т-дуальна теории Б, если теория А на компактном многообразии малого размера эквивалентна теории Б на компактном многообразии большого размера. В отличие от S-дуальности она является пертурбативной в том смысле, что может быть проверена последовательно по теории возмущений в каждом порядке по струнной константе связи.

Поскольку Т-дуальность есть преобразование на d-мерной компактной части пространства-времени, с ней обычно связана ортогональная группа симметрий $O(d,d,Z)$ (или $O(d,d+16,Z)$ для гетеротической струны, компактифицированной на d-мерный тор).

U-дуальность образуется действием S- и T-дуальностей примерно так же, как и $SL(2,Z)$ группа S-дуальности образуется действием двух генераторов. Дело в том, что T и S не коммутируют друг с другом, в чем легко убедиться, например, действуя на какую-нибудь D-брану (BPS-состояние). Таким образом, U(nified)-дуальность объединяет S- и T-дуальности, потому так и называется.

Мы ожидаем, что с ней должна быть связана группа, имеющая $SL(2,Z)$ и $O(d,d,Z)$ в качестве подгрупп. Такой группой является $E_d(Z)$.

Граница Богомольного (см. BPS неравенство).

Мембрана. Двумерная динамическая поверхность — элементарное (как и струна в десятимерной теории) возбуждение М-теории. Непертурбативный двумерный

[14] Сама (экстремальная, магнитно заряженная) черная дыра получается размерной редукцией системы взаимодействующих D-бран. А энтропия Бекенштейна–Хокинга складывается из возможных состояний струны [25, 26, 9].

объект (мембрана) представляет частный случай р-браны.

D-брана — это гиперплоскость (гиперповерхность) с граничными условиями Дирихле, на которой тем самым могут заканчиваться открытые струны. Чтобы не нарушать лоренц-инвариантность теории, она должна быть динамическим объектом. Кроме того, D-браны оказываются источниками рамон-рамоновского поля и р-бранами [12]. Поэтому, чтобы фиксировать число компонент из мирового объема, часто пишут D – р-брана.

р-брана. Под р-браной обычно подразумевается непертурбативный объект, протяженный в p пространственных измерениях; а еще чаще — решение соответствующей супергравитации, взаимодействующей с теорией калибровочной $(p+1)$-формой (низкоэнергетический сектор рамон-рамоновских полей).

Классическое действие р-браны равно части пространства (мировой объем), "заметаемого" браной при движении.

NS-брана. Солитонная пятибрана — S-дуальный партнер фундаментальной струны.

Конформной теорией называется теория, обладающая симметрией по отношению к масштабным преобразованиям. Наиболее распространенной является симметрия двумерных теорий, где бесконечномерная группа конформных преобразований порождается локальными преобразованиями двумерной поверхности, оставляющими инвариантными углы [2, 4].

Именно конформная инвариантность позволила нам исключить двумерную метрику из (3).

Выпишем генераторы конформных преобразований явно через коэффициенты ряда Лорана L_m для тензора энергии-импульса:

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}\,, \qquad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}\,. \tag{84}$$

Чтобы восстановить связь с (6), приведем характерную зависимость через собственные моды свободной теории:

$$L_m \approx \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \alpha_{m-n}\,. \tag{85}$$

Эти операторы называются также генераторами Вирасоро, так как удовлетворяют алгебре Вирасоро:

$$\left[L_m, L_n\right] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,\,0} \tag{86}$$

и аналогично для $\bar{L}_m$ с центральным зарядом $\bar{c}$.

Центральный заряд, или, как его еще называют, центральное расширение алгебры, представляется c-числовым членом в (86). При этом мы говорим о центральном заряде в алгебре Вирасоро. Видно, что он является удобной характеристикой, по которой можно классифицировать теории. Например, как легко убедиться, центральный заряд свободного бозона равен 1. В более общем случае, когда X^μ — координата на D-мерном многообразии, $c = \mathrm{D}$.

Другим примером центрально-расширенной алгебры, о которой идет речь, является алгебра суперсимметрии, которая в данном случае так и называется — алгебра расширенной суперсимметрии. Поскольку суперсимметрия перемешивает группы внутренней и пространственной симметрии, то наличие центральных членов играет очень важную роль. Именно они определяют нижнюю границу (22) масс состояний в теории [29, 30].

В качестве примера приведем максимально расширенную алгебру одиннадцатимерной супергравитации [7]:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^M)_{\alpha\beta} P_M + (C\Gamma_M N)_{\alpha\beta} Z_{(2)}^{MN} + \\ + (C\Gamma_M NPQR)_{\alpha\beta} Z_{(5)}^{MNPQR}\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Она называется максимально расширенной, так как полное число независимых зарядов, которые могли бы появиться в правой части (87), равно полному числу компонент антисимметричных форм $Z_{(i)}$:

$$11 + 55 + 462 = 528\,. \tag{88}$$

С другим примером мы уже встречались в разделе 3 при обсуждении двумерного суперсимметричного кинка. Там топологический заряд кинка играл роль центрального заряда.

Струна открытая (закрытая). Струна, 1-брана, или одномерный протяженный объект, имеющий топологию отрезка (окружности). Действие открытой струны (3) и разложение по модам (6) совпадают со случаем закрытой струны. Разница проявляется только в наличии граничных условий (7) или (8) для открытой струны. Эти условия, связывая правые (α_m) и левые $(\tilde{\alpha}_m)$ моды, оставляют только 16, а не 32 независимых суперзарядов в десятимерной теории суперструн. Поэтому теория открытых струн называется теорией типа I. В то время как теории, содержащие 32 независимых суперзаряда, называются теориями типа II.

Гармоническая функция удовлетворяет уравнению Лапласа (которое является типичным свободным уравнением движения).

Группа $SL(2,Z)$. Специальная группа линейных преобразований ранга 2, порожденная элементами

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,, \tag{89}$$

где $ad - bc = 1$. Эти преобразования часто ассоциируются с действием S-дуальности, где τ выступает в качестве комплексифицированной константы связи.

Сектора в спектре теорий типа IIA. На фермионные суперпартнеры координат x_μ можно наложить два вида граничных условий. Это периодические (рамоновского типа) и антипериодические (навье-шварцевского типа) граничные условия. В зависимости от того, какие условия наложены на фермионы в левом и правом секторах на поверхности струны, имеются четыре типа струнных возбуждений: R – R, NS – NS, R – NS и NS – R. Первые два типа являются бозонными возбуждениями, тогда как вторые два — фермионными (суперпартнерами первых по пространственно-временнóй суперсимметрии).

В NS – NS секторе присутствуют гравитон, дилатон и антисимметричный два-тензор. А в R – R секторе присутствуют различные тензорные антисимметричные поля, которые называются рамон-рамоновскими.

Многообразия Калаби – Яу — это ричи-плоские келлеровы многообразия. Простейшим примером такого многообразия является двумерный (действительной размерности) тор. Более нетривиальным является четырехмерное (действительной размерности) многообразие K3.

Группа $O(n, m)$ — группа, оставляющая инвариантной элемент длины

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2 - \mathrm{d}y_1^2 - \ldots - \mathrm{d}y_m^2 \qquad (90)$$

в пространстве $R^{n,m}$ с лоренцевой сигнатурой. А $O(n, m, Z)$ — ее подгруппа матриц с целочисленными элементами.

Константы связи. В теории струн имеются два параметра разложения. Это струнное натяжение: пертурбативный параметр для нелинейной сигма-модели (теории на поверхности струны). И параметр разложения по родам поверхности струны — струнная константа связи.

Список литературы

1. Барбашов Б М, Нестеренко В В *Модель релятивистской струны в физике адронов* (М.: Энергоатомиздат, 1987)
2. Green M B, Schwarz J H, Witten E *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987)
3. Polchinski J "What is string theory", in *Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory* (Les Houches, France, 1994) (Eds F David, P Ginsparg, J Zinn-Justin) (Amsterdam: North-Holland, 1996) p. 287; hep-th/9411028
4. Морозов А Ю *УФН* **162** 84 (1992)
5. Ooguri H, Yin Z "TASI lectures on perturbative string theories", hep-th/9612254
6. Schwarz J H "Lectures on superstring and M-theory dualities" *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **55B** 1 (1997); hep-th/9607201
7. Townsend P K "Four lectures on M-theory", hep-th/9612121
8. Forste S, Louis J "Duality in string theory" *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **61A** 3 (1998); hep-th/9612192
9. Vafa C "Lectures on strings and dualities", hep-th/9702201
10. Aspinwall P S "K3 surfaces and string duality", hep-th/9611137
11. Polchinski J "TASI Lectrures on D-branes", in TASI 1996, hep-th/9611050
12. Polchinski J, Chaudhuri S, Johnson C V "Notes on D-branes", hep-th/9602052
13. Bachas C "(Half) a lecture on D-branes", in *Proc. of the 2nd Conference on Gauge Theories, Applied Supersymmetry and Quantum Gravity* (London, UK, Jul, 1996) (London: Imperial Coll. Press, 1997) p. 3; hep-th/9701019
14. Douglas M R "Superstring dualities, dirichlet branes and the small scale structure of space", hep-th/9610041
15. Sen A "Strong-weak coupling duality in four-dimensional string theory" *Int. J. Mod. Phys. A* **9** 3707 (1994)
16. Hull C M, Townsend P K "Unity of superstring dualities" *Nucl. Phys. B* **438** 109 (1995)
17. Witten E "String theory dynamics in various dimensions" *Nucl. Phys. B* **443** 85 (1995); hep-th/9503124
18. Duff M J, Khuri R R, Lu J X "String solitons" *Phys. Rep.* **259** 213 (1995)
19. Stelle K S "Lectures on supergravity p-branes", hep-th/9701088
20. Seiberg N, Witten E "Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang – Mills theory" *Nucl. Phys. B* **426** 19 (1994); hep-th/9407087
21. Lerche W "Introduction to Seiberg – Witten theory and its stringy origin", hep-th/9611190
22. Gymez C, Hernandez R "Electric-magnetic duality and effective field theories", hep-th/9510023
23. Bilal A "Duality in $N = 2$ SUSY SU(2) Yang – Mills theory: a pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten", hep-th/9601007
24. Tseytlin A A "Extreme dyonic black holes in string theory" *Mod. Phys. Lett. A* **11** 689 (1996)
25. Maldacena J M "Black holes in string theory", hep-th/9607235
26. Maldacena J M "Black holes and D-branes", hep-th/9705078
27. Witten E *Phys. Lett. B* **86** 283 (1979)
28. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **79** 276 (1974); Поляков А М *Письма в ЖЭТФ* **20** 430 (1974) [*JETP Lett.* **20** 194 (1974)]
29. Богомольный К Б *ЯФ* **24** 861 (1976) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **24** 449 (1976)]
30. Prasad M K, Sommerfield C M *Phys. Rev. Lett.* **35** 760 (1975)
31. Vafa C "Mirror transform and string theory", hep-th/9403151
32. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика* Т. 5 (М.: Физматлит, 1995)
33. Banks T, Fischler W, Shenker S H, Susskind L "M-theory as a matrix model: A conjecture" *Phys. Rev. D* **55** 5112 (1997)
34. Witten E "Solutions of four-dimensional field theories via M-theory", hep-th/9703166

Introduction to string dualities

S.G. Gukov

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Kosygina 2, 117334 Moscow, Russia
Institute for Theoretical and Experimental Physics,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117259 Moscow, Russia
E-mail: *gukov@itp.ac.ru*; *gukov@pupgg.princeton.edu;*
gukov@feynman.princeton.edu

Recent progress in superstring theory is reviewed. It is shown how S- ,T- and U-dualities arise in the study of string compactifications, solitons and D-branes to interrelate string theories previously thought to be completely different. Though there are still no proofs for a number of statements, dualities provide an insight not only into string theory itself, but also into geometry and supergravity. Special attention is given to physical aspects which may escape notice in specific problems. A very general reader with littele or no background knowledge is intended.

PACS numbers: 02.10.Sp, **11.25.–w**, **11.55.–m**

Bibliography — 34 references

Received 4 November 1997