

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л.Д. ЛАНДАУ

Конденсация Бозе – Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию

Л.П. Питаевский

Недавнее экспериментальное достижение — наблюдение конденсации Бозе – Эйнштейна в парах щелочно-земельных металлов — открыло новые возможности для исследования макроскопических квантовых явлений. Эти новые системы обладают двумя важными особенностями. Они пространственно неоднородны и разрежены. Ввиду указанной неоднородности для этих систем существует нетривиальная теория "нулевого порядка", соответствующая более грубому приближению, чем теория Боголюбова для однородного газа, и основанная на уравнении Гросса – Питаевского для волновой функции конденсата, которое справедливо в приближении "среднего поля". Это уравнение — классическое по своей сущности — содержит в явном виде квантовую постоянную \hbar . Оно описывает такие явления, как колебания конденсата, интерференцию атомов, джозефсоновский ток и вихревые нити. Частоты колебаний конденсата определяют спектр элементарных возбуждений, который необходим для вычисления термодинамических функций системы. Возбуждения можно рассматривать на основе квазиклассического приближения. Они приводят к затуханию колебаний конденсата, аналогичному затуханию Ландау. Флуктуации фазы волновой функции конденсата ограничивают монохроматичность тока Джозефсона и размывают интерференционную картину. Флуктуации числа квантов колебаний конденсата вызывают коллапс и возрождение этих колебаний.

PACS numbers: 05.30.Jp, 32.80.Pj, 52.55.Lf

Содержание

1. Введение (641).
 2. Конденсат при нуле температур (642).
2.1. Основные уравнения. 2.2. Гидродинамика. 2.3. Интерференция и вихри.
 3. Элементарные возбуждения (646).
3.1. Термодинамический закон подобия. 3.2. Кинетика конденсации. 3.3. Линеаризованные уравнения. 3.4. Квазиклассическое приближение. 3.5. Затухание Ландау.
 4. Квантовые флуктуации (650).
4.1. Поправки к распределению плотности. 4.2. Флуктуации фазы. 4.3. Квантовый коллапс колебаний конденсата.
- Приложение (652).
Список литературы (652).

1. Введение

В 1924 – 1925 гг. А. Эйнштейн опубликовал две статьи [1], в которых он обобщил работу С. Бозе о квантовой статистике фотонов на случай идеального газа атомов,

число которых задано. Во второй из этих статей он предсказал замечательное явление — конденсацию атомов в наименьшем квантовом состоянии. Оказалось, что при достаточно высокой температуре функция распределения атомов по импульсам оказывается равной¹

$$n_p = \left\{ \exp \left[\frac{\epsilon(p) - \mu}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad T > T_c^0, \quad (1)$$

где μ — химический потенциал газа и $\epsilon(p) = p^2/2m$. Ситуация меняется при температуре фазового перехода (мы полагаем фактор вырождения $g = 1$)

$$T_c^0 = 3,31 \frac{\hbar^2}{m} (n)^{2/3}, \quad (2)$$

где n — плотность газа. Ниже этой температуры число атомов N_0 в состоянии с $\mathbf{p} = 0$ макроскопически велико, т.е. пропорционально полному числу атомов N :

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right], \quad T < T_c^0. \quad (3)$$

Остальные атомы распределены согласно распределению (1), но с химическим потенциалом $\mu = 0$:

$$n_p = \left\{ \exp \left[\frac{\epsilon(p)}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad T < T_c^0. \quad (4)$$

¹ Мы используем энергетические единицы для температуры, т.е. полагаем $k_B = 1$.

Л.П. Питаевский. Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН
117454 Москва, ул. Косыгина 2, Россия
Department of Physics, Technion, 32000 Haifa, Israel
E-mail: lev@physics.technion.ac.il

Статья поступила 5 января 1998 г.

Эта "бозе-эйнштейновская конденсация" (БЭК) играет важную роль в теории многих физических систем: сверхтекучего гелия, электронов в сверхпроводниках, экситонов в диэлектриках. Однако во всех этих случаях проявления БЭК маскируются сильным взаимодействием или сложным характером системы. Например, едва ли можно сомневаться в существовании бозе-конденсата в сверхтекучем ^4He . Однако достоверное определение числа атомов в конденсате из данных по рассеянию нейтронов требует сложных теоретических расчетов.

Только недавно, в 1995 г., очень тонкая экспериментальная техника позволила непосредственно наблюдать БЭК в парах щелочноземельных металлов. Эти прекрасные опыты, по моему мнению, являются достойным завершением развития экспериментальной физики в XX веке [2–4].

Атомы щелочноземельных металлов обладают магнитным моментом. Благодаря этому их можно удерживать в соответствующих "магнитных ловушках". Захваченные атомы необходимо охладить. Охлаждение производится в два этапа. На первом этапе атомы охлаждаются посредством "лазерного охлаждения". Далее атомам позволяют испаряться из ловушки. Поскольку атомы с большей энергией испаряются более энергично, испарение приводит к охлаждению газа (этот процесс вполне аналогичен охлаждению горячего чая в открытой чашке). Таким образом удается получить температуру порядка сотен нК и наблюдать конденсацию. В настоящее время БЭК достигнута уже в нескольких экспериментальных группах.

В результате этих экспериментов не только было подтверждено знаменитое предсказание Эйнштейна. Фактически, было получено вещество в новом состоянии, в котором, благодаря сильной пространственной неоднородности, квантовые эффекты играют решающую роль в макроскопических масштабах.

Предлагаемая статья представляет собой обзор основных теоретических методов, используемых для описания свойств бозе-конденсированного газа, удерживаемого в магнитной ловушке. В УФН уже был опубликован обзор, посвященный этой проблеме [5]. Мы уделим здесь больше внимания количественной стороне дела и надеемся, что статьи будут взаимно дополнять друг друга.

Как мы уже сказали, атомы удерживаются вблизи минимума потенциала магнитной ловушки. Взаимодействие атомов с этой ловушкой можно описать, вводя внешний потенциал $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. В условиях эксперимента этот потенциал можно считать гармоническим:

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (5)$$

Для идеального бозе-газа в ловушке температура перехода связана соотношением (2) с плотностью газа в центре ловушки. В случае гармонической ловушки [6] это приводит к выражению

$$T_c^0 = \hbar\omega_H \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad \omega_H = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}. \quad (6)$$

Чтобы фазовый переход был резким, необходимо перейти к "термодинамическому пределу" $N \rightarrow \infty$. В данном случае следует, однако, одновременно устре-

мить ω_H к 0, оставляя постоянным произведение $\omega_H N^{1/3}$, т.е. T_c^0 [7]. Отметим также, что фазовый переход в однородном идеальном бозе-газе является переходом третьего рода, так что при температуре T_c^0 испытывает скачок производная теплоемкости по температуре. Напротив, переход в ловушке является фазовым переходом второго рода уже в идеальном газе.

Выражение (6) описывает с хорошей точностью температуру перехода и в газе со взаимодействием при условии, что газ достаточно разрежен. Чтобы описать пространственное распределение конденсированных атомов, необходимо, однако, принять во внимание взаимодействие между атомами и квантовую энергию нулевых колебаний. Действительно, в отсутствие этих эффектов конденсат, который не обладает тепловым давлением, собрался бы в точку вблизи минимума потенциальной энергии. Упомянутые эффекты предотвращают такой коллапс, но конденсат все равно образует достаточно резкий максимум плотности вблизи потенциального минимума. Ясно, что для количественного описания наблюдаемых явлений необходимо построить теорию неоднородного бозе-конденсированного газа.

2. Конденсат при нуле температур

2.1. Основные уравнения

Основы теоретического описания разреженного бозе-газа были сформулированы Н.Н. Боголюбовым в 1947 г. [8]. Главный пункт его приближения состоит в выделении из вторично-квантованного ψ -оператора аннигиляции атомов его классической части, описывающей конденсат: $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \approx \sqrt{n_0} + \hat{\theta}(\mathbf{r}, t)$, где $\sqrt{n_0} = c$ -число = const. В разреженном газе $\theta \ll \sqrt{n_0}$. Здесь плотность конденсата $n_0 = N_0/V$, N_0 — число атомов в конденсате. Рассматривая квантовую часть ψ -оператора $\hat{\theta}$ как малое возмущение, Боголюбов построил теорию "первого порядка" (относительно квантовых эффектов) пространственно-однородного бозе-газа.

Ту же идею можно использовать и в случае неоднородного газа. Разница состоит в том, что в этом случае существует нетривиальная теория "нулевого" порядка, в которой операторными свойствами $\hat{\psi}$ можно пренебречь полностью. Дело в том, что теперь взаимодействие не является малой поправкой, а играет ключевую роль в поведении конденсированных атомов.

Обобщение предписания Боголюбова для ψ -оператора на случай пространственно-неоднородного газа имеет вид:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \approx \psi_0(\mathbf{r}, t) + \hat{\theta}(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Задача состоит в том, чтобы получить уравнение для классической "волновой функции конденсата" ψ_0 . Исходным является точное операторное уравнение для ψ -оператора в гейзенберговском представлении:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

Здесь $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ — удерживающий потенциал ловушки, а $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ — потенциал парного взаимодействия между

атомами. Трудность состоит в том, что пренебрежение $\hat{\theta}$ в (8) означает пренебрежение всеми корреляциями между атомами, что невозможно на расстояниях порядка радиуса действия r_0 межатомного потенциала V . Этой трудности не существует, однако, если потенциал V удовлетворяет условиям применимости борновского приближения. В этом случае мы можем спокойно заменить $\hat{\psi}$ на ψ_0 и вынести медленно меняющуюся на расстояниях r_0 функцию ψ_0 из-под знака интеграла. В результате имеем:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi_0(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

где

$$g = \int V(r) d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Формулу (10) можно переписать как

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (11)$$

где a есть амплитуда s -рассеяния медленных атомов друг на друге в борновском приближении (условие применимости этого приближения можно записать как $a \ll r_0$). Используем теперь то обстоятельство, что, как это следует из общих соображений, свойства разреженного ($na^3 \ll 1$) газа при низких температурах полностью определяются амплитудой s -рассеяния независимо от свойств потенциала V . Это означает, что уравнение (9) справедливо вне зависимости от применимости борновского приближения, если под величиной a в (11) понимать точную амплитуду s -рассеяния (выражение (10) в этом случае, вообще говоря, уже не имеет места).

Отметим, что произведенное при выводе (9) пренебрежение корреляциями часто называют "приближением среднего поля".

Уравнение (9) было найдено независимо в 1961 г. Е.П. Гроссом [9] и Л.П. Питаевским [10]. Укажем, что его можно получить варьированием подходящего действия S :

$$\delta S = \delta \left(-i\hbar \int \psi_0^* \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 d\mathbf{r} dt + \int E dt \right) = 0, \quad (12)$$

где функционал энергии E равен

$$E = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi_0|^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |\psi_0|^2 + \frac{g}{2} |\psi_0|^4 \right] d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Уравнение (9) описывает динамику неоднородного разреженного бозе-газа при нуле температур, $T = 0$. Это уравнение является классическим в том смысле, что функция ψ_0 не является оператором и определяет не плотность вероятности, а реальное распределение атомов конденсата в пространстве. Модуль ψ_0 и градиент ее фазы имеют ясный классический смысл:²

$$\psi_0 = |\psi_0| \exp(i\Phi), n(\mathbf{r}, t) \approx n_0(\mathbf{r}, t) = |\psi_0|^2, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi, \quad (14)$$

² В дальнейшем мы будем опускать индекс "0" в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям.

где n и \mathbf{v} суть, соответственно, число атомов в единице объема и их скорость.

Можно сказать, что волновая функция конденсата представляет собой классический предел волны де Бройля атомов, в котором их корпускулярные свойства уже не играют роли. Описание конденсата посредством функции ψ_0 аналогично описанию классического электромагнитного поля напряженностями электрического и магнитного полей, удовлетворяющими уравнениям Максвелла. Роль последних играет в нашей задаче уравнение (9). Однако, в отличие от уравнений Максвелла, это уравнение содержит в явном виде постоянную Планка \hbar .

Уравнение (9) можно переписать как систему уравнений для n и Φ . Первое уравнение имеет вид обычного гидродинамического уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (\mathbf{v}n) = 0. \quad (15)$$

Второе аналогично уравнению Джозефсона в теории сверхпроводимости:

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V_{\text{ext}} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \right) = 0. \quad (16)$$

Если газ находится в основном состоянии, волновая функция ψ_0 зависит от времени по закону $\psi_0 \sim \exp(-i\mu t/\hbar)$, где μ — химический потенциал газа. Таким образом, распределение плотности в основном состоянии определяется уравнением:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + g|\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi_0(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) можно получить и непосредственно, минимизируя выражение (13) для энергии при постоянном числе частиц. (Аналогичное уравнение рассматривалось ранее В.Л. Гинзбургом и автором в связи с теорией сверхтекучести жидкого гелия вблизи λ -точки [11]. Однако смысл коэффициентов уравнения в этих двух задачах существенно различен.)

2.2. Гидродинамика

Уравнение (9) содержит "внутренний" параметр размерности длины — корреляционный радиус $\xi = \hbar/\sqrt{mg\bar{n}}$. Общий характер решений определяется соотношением между этой длиной и размером конденсатного "облака" R . Поскольку как n , так и R возрастают с увеличением числа атомов в конденсате N , при достаточно большом N осуществляется неравенство $R \gg \xi$. Нетрудно проверить, что это условие можно переписать как

$$N \gg \frac{a_N}{a}, \quad a_N = \left(\frac{\hbar}{m\omega_H} \right)^{1/2} \quad (18)$$

(фактически это неравенство с достаточной точностью выполняется во всех проведенных экспериментах). В этом случае "квантовое давление" $[\hbar^2/(2m\sqrt{n})]\nabla^2 \sqrt{n}$ оказывается малым по сравнению с другими членами уравнения (16), и им можно пренебречь. Взяв градиент от обеих частей уравнения, получаем

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V_{\text{ext}} + gn \right) = 0. \quad (19)$$

Уравнения (15) и (19) уже не содержат постоянную \hbar и представляют собой просто классические уравнения гидродинамики для потенциального движения среды, в которой давление связано с плотностью соотношением $P = gn^2/2$. Заметим, что такое уравнение состояния приводит к специфической симметрии уравнений. Они оказываются инвариантными относительно преобразований $\mathbf{v} \rightarrow C\mathbf{v}$, $n \rightarrow C^2n$, $\mathbf{r} \rightarrow C\mathbf{r}$, где C — постоянная.

Из уравнения (19) видно, что в том же пределе больших N распределение плотности в основном состоянии дается простым "уравнением Томаса – Ферми" [12, 14]:

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{g}. \quad (20)$$

Это уравнение выражает собой квазиклассическое условие постоянства химического потенциала системы во внешнем поле

$$\mu_1[n(\mathbf{r})] + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \mu = \text{const} \quad (21)$$

для газа с локальным значением химического потенциала $\mu_1(n) = gn$ (под локальным значением химического потенциала мы понимаем его значение для одноатомного газа той же плотности n).

В том же приближении химический потенциал μ связан с числом атомов N соотношением

$$\mu_{\text{TF}} = \frac{\hbar\omega_{\text{H}}}{2} \left(15N \frac{a}{a_{\text{H}}} \right)^{2/5}. \quad (22)$$

Отметим, что уравнение (20) имеет смысл, только если амплитуда рассеяния a и, следовательно, константа взаимодействия g положительны, что означает эффективное отталкивание между атомами. Действительно, нетрудно убедиться в том, что решение (20) при $g < 0$ соответствует не минимуму, а максимуму энергии, т.е. совершенно неустойчиво. Газ обладает в этом случае отрицательной сжимаемостью $dn/dP < 0$. В обратном предельном случае $N \ll a_{\text{H}}/|a|$ можно пренебречь взаимодействием в уравнении (17) и построить стационарное решение. Это решение будет, однако, лишь метастабильным. Достаточно сильным сжатием газа можно достичь состояния, где взаимодействие будет играть решающую роль, после чего газ будет сжиматься неограниченно, во всяком случае в рамках применимости уравнения (9). Из сказанного ясно, что метастабильное решение может существовать только при N , меньшем некоторого $N_c \sim a_{\text{H}}/|a|$ [13–15]. Атомы с $a < 0$ были исследованы в экспериментах [4]. Мы не будем в нашей статье обсуждать этот случай подробнее.

Одним из наиболее интересных применений уравнений (15) и (19) является исследование колебаний конденсата. Такие колебания были изучены экспериментально в работах [16] и [17] и являются очень эффективным методом диагностики системы. Чтобы найти собственные частоты колебаний, нужно решить систему линеаризованных уравнений (15), (19). Эта задача была решена С. Стрингари [18].

Линеаризуя уравнения и исключая из них скорость, легко получить уравнение для малого отклонения плотности δn от ее равновесного значения (20):

$$m\omega^2 \delta n = -\nabla \cdot \left\{ [\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})] \nabla \delta n \right\}. \quad (23)$$

Отметим, что это уравнение не содержит в явном виде постоянной взаимодействия g . Это объясняется тем, что гидродинамический предел соответствует, в некотором смысле, пределу $g \rightarrow \infty$. Уравнение (23) можно решить аналитически для случая изотропной ловушки, когда $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_{\text{H}}$. Собственные частоты имеют тогда вид:

$$\omega = \omega_{\text{H}}(2n_r^2 + 2n_r l + 3n_r + l)^{1/2}, \quad (24)$$

где l и n_r — целые числа, причем l определяет момент импульса колебаний.

В большинстве проведенных до сих пор экспериментов ловушки имели осевую симметрию: $\omega_x = \omega_y = \omega_{\perp}$, $\omega_z = \lambda\omega_{\perp}$. Вследствие этой симметрии сохраняется z -компонента момента импульса, и собственные частоты можно характеризовать заданием азимутального квантового числа m .

Отметим прежде всего, что в гармонической ловушке движение центра масс можно полностью отделить. Соответствующие частоты имеют поэтому тот же вид, что и для свободной частицы: $\omega = \omega_{\perp}$, $m = \pm 1$ и $\omega = \omega_z$, $m = 0$. Приведем выражения для трех наименьших "нетривиальных" частот:

$$\omega^2 = 2\omega_{\perp}^2, \quad m = \pm 2, \quad (25)$$

и

$$\omega^2 = \omega_{\perp}^2 \left(2 + \frac{3}{2}\lambda^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16} \right), \quad m = 0. \quad (26)$$

В настоящее время достигнута такая точность измерения частот, что использованное выше гидродинамическое приближение оказывается недостаточным. Были, однако, произведены прямые численные расчеты частот с использованием полного уравнения (9) [19]. Результаты этих трудных расчетов очень хорошо совпадают с измерениями.

Гидродинамическое приближение можно использовать и для изучения нелинейной динамики конденсата. При этом оказывается существенной дополнительная симметрия уравнений гидродинамики, отмеченная выше. Благодаря этой симметрии, уравнения имеют точные решения, в которых плотность n является полиномом второго порядка по координатам, а скорость \mathbf{v} — их линейной функцией.

Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу о сферически симметричных пульсациях газа в изотропной ловушке. Решение в этом случае можно искать в виде $\mathbf{v} = u(t)\mathbf{r}$, $n = c_1(t) + c_2(t)r^2$. Подставляя эти выражения в уравнения (15) и (19), исключая c_1 и c_2 и вводя новую неизвестную функцию w согласно $u = \dot{w}/w$, получаем [20–22]:

$$\ddot{w} + \omega_{\text{H}}^2 \frac{w-1}{w^4} = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) легко интегрируется в квадратурах. Линеаризуя его вблизи равновесного значения $w = 1$, мы получим гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{5}\omega_{\text{H}}$ в соответствии с формулой (24) при $l = 0$, $n_r = 1$.

Аналогичные решения для случая анизотропной ловушки обладают более сложными свойствами. В

частности, движение при достаточно больших амплитудах приобретает хаотический характер [21].

2.3. Интерференция и вихри

Явления, которые мы обсуждали в предыдущем параграфе, не являются "макроскопическими квантовыми явлениями" в буквальном смысле слова, так как постоянная Планка \hbar исчезла из уравнений при переходе от (16) к (19). Существует, однако, много интересных экспериментальных возможностей проверить полное уравнение (9) и, тем самым, концепцию волновой функции конденсата.

К сожалению, численное интегрирование уравнения (9), особенно при решении нестационарных многомерных задач, представляет большие трудности даже при современной вычислительной технике [23–25]. Здесь может оказаться полезным вариационный метод, развитый в работе [26].

Прежде всего следует подобрать пробную волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, a_i)$, правдоподобно описывающую предполагаемое решение и зависящую от нескольких параметров a_i . Затем нужно, считая a_i функциями от времени t , подставить $\psi[\mathbf{r}, a_i(t)]$ в выражение (12) для S и произвести интегрирование по $d\mathbf{r}$. Варьируя найденную таким образом функцию $S(\dot{a}_i, a_i)$ по a_i , мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $a_i(t)$, которую сравнительно легко решить.

Недавно были произведены очень эффектные эксперименты по наблюдению интерференции между двумя конденсатами [27]. Авторы имели сигарообразную ловушку. В качестве "рабочего инструмента" был использован лазерный луч с частотой выше линии поглощения атома. Поскольку в этой области частот диэлектрическая проницаемость газа $\epsilon(\omega) < 1$, атомы выталкиваются из лазерного пучка. Это позволило разбить конденсат на две разделенные в пространстве половины. Затем удерживающий потенциал ловушки был выключен, конденсаты начали расширяться и интерферировать друг с другом. На рисунке 1 показаны эксперименталь-

ные результаты вместе с теоретическими расчетами, основанными на численном интегрировании уравнения (9) [28]. Видно отличное согласие теории с экспериментом, если теоретические кривые должным образом "огрублены", чтобы учесть конечность разрешения экспериментальной установки.

Другим интересным квантовым эффектом, который описывается уравнением (9), является эффект Джозефсона. Пусть магнитная ловушка состоит из двух потенциальных ям, разделенных потенциальным барьером. Если химические потенциалы атомов в этих двух ямах различны, между ними потечет осциллирующий поток атомов. Рассмотрим простейшую одномерную симметричную ловушку, показанную схематически на рис. 2.

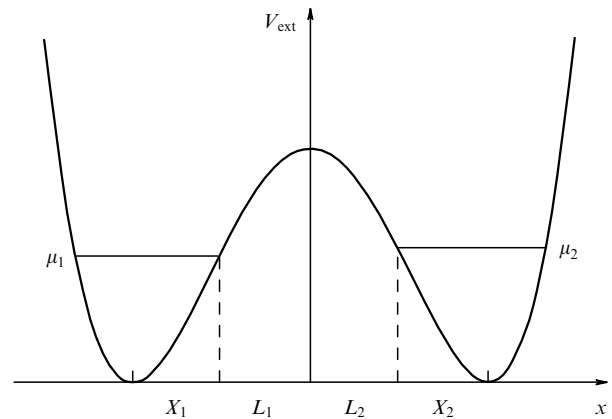


Рис. 2. Схема двойной ловушки для эксперимента Джозефсона.

Если числа атомов, находящихся в ямах, различны, будут различны и их химические потенциалы μ_1 и μ_2 . Мы будем считать, что барьер между двумя ямами достаточно высок. Уравнение (17) имеет тогда решения двух типов. Первое, которое мы будем обозначать $\psi_1(x)$, соответствует химическому потенциалу μ_1 и локализовано в яме 1. Второе решение $\psi_2(x)$, с химическим потенциалом μ_2 , локализовано в яме 2. Эти две функции перекрываются только в классически запрещенной области барьера, где они малы, и нелинейным членом в уравнении можно пренебречь. В результате линейная комбинация вида

$$\psi(x, t) = \psi_1(x) \exp\left(-i \frac{\mu_1 t}{\hbar}\right) + \psi_2(x) \exp\left(-i \frac{\mu_2 t}{\hbar}\right) \quad (28)$$

является зависящим от времени решением уравнения (9). Теперь легко вычислить поток атомов, соответствующий волновой функции (28):

$$I = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x, t) - \psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) \right]. \quad (29)$$

Он имеет типичный "джозефсоновский" вид:

$$I = I_0 \sin [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)] = I_0 \sin \frac{(\mu_1 - \mu_2)t}{\hbar}, \quad (30)$$

где $I_0 = (\hbar/m)(\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1')$. Чтобы вычислить I_0 , необходимо решить своеобразную задачу о нелинейном

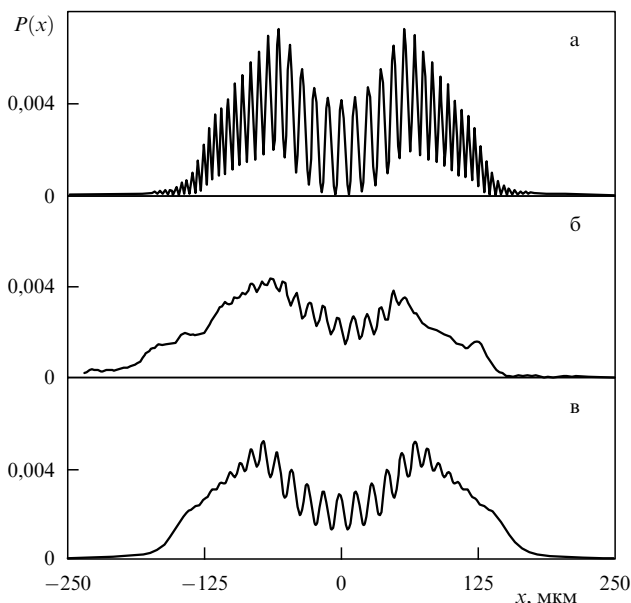


Рис. 1. Распределение плотности $P(x)$ при интерференции двух конденсатов: (а) теория; (б) эксперимент; (в) теория, учитывающая конечность разрешения.

тунелировании [29] (в работе [30] обсуждается более реалистическая постановка эксперимента).

Одной из наиболее характерных особенностей сверхтекучих систем является существование в них квантованных вихрей Онсагера–Фейнмана. Такой вихрь представляет собой особую линию, при обходе вокруг которой фаза Φ волновой функции конденсата меняется на $2\pi\kappa$, где κ — целое число. Соответственно, циркуляция скорости вокруг вихря равна $2\pi\hbar\kappa/m$. Уравнение (17) можно использовать, чтобы построить волновую функцию конденсата в ловушке при наличии вихрей (заметим, что именно исследование вихрей в разреженном бозегазе было первоначальной целью работ [9, 10]).

Рассмотрим вихревую нить, совпадающую с осью симметрии ловушки z . Волновую функцию можно искать в виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n(r_{\perp}, z)} \exp(i\kappa\phi), \quad (31)$$

где $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$, ϕ — угол в плоскости x, y , что соответствует вихрю с тангенциальной скоростью $v = \hbar\kappa/mr_{\perp}$. Уравнение (17) для волновой функции вида (31) было решено в работе [31]. На рисунке 3 показаны результаты расчета для вихря с $\kappa = 1$ в ловушке с параметрами работы [2]. Видно, что вихрь выталкивает атомы из окрестности оси, так что распределение плотности оказывается тороидальным.

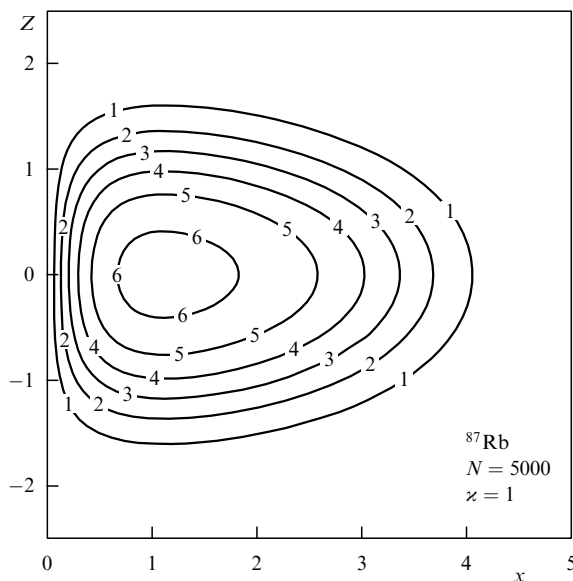


Рис. 3. Модуль волновой функции 5000 атомов ^{87}Rb для вихря с $\kappa = 1$. Расстояния даны в единицах $a_{\perp} = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}$.

Вопрос, каким образом можно создавать вихревые нити в магнитной ловушке и как их наблюдать, представляет собой одну из интереснейших нерешенных проблем БЭК.

3. Элементарные возбуждения

3.1. Термодинамический закон подобия

Структура БЭК в ловушке при конечных температурах существенно иная, чем при $T = 0$. При конечных

температурах часть атомов находится вне конденсата, на возбужденных уровнях в потенциале ловушки. Это внеконденсатные атомы образуют род "атмосферы" вокруг более плотного облака конденсата. Вместе с элементарными возбуждениями в области конденсата они определяют термодинамические функции системы. Вычисление этих функций требует поэтому детального изучения возбуждений. При этом существенна конечность числа атомов в ловушке. В этом параграфе мы, однако, рассмотрим свойства системы в уже упоминавшемся во введении термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, причем комбинация $N^{1/3}\omega_{\text{H}}$ остается конечной. Мы увидим, что в этом пределе свойства газа в ловушке можно выразить через свойства однородного газа, а магнитное поле входит в теорию только в упомянутой выше комбинации с N [7]. Поскольку в пределе $\omega_{\text{H}} \rightarrow 0$ потенциал ловушки меняется медленно, справедливо квазиклассическое условие равновесия (21), но уже не для конденсата, а для газа в целом. Тогда, если $n(\mu, T)$ есть плотность однородного газа как функция μ и T , плотность газа в точке \mathbf{r} в ловушке оказывается равной $n[\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r}), T]$. Полное число атомов N получается интегрированием по объему. Переходя к интегрированию по $\xi \equiv V_{\text{ext}}$, находим

$$N = 2\pi \left(\frac{2}{m\omega_{\text{H}}^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} n(\mu - \xi, T) \sqrt{\xi} d\xi, \quad (32)$$

откуда видно, что параметры ловушки действительно входят лишь в комбинации $N^{1/3}\omega_{\text{H}}$. Уравнение (32) определяет химический потенциал μ .

Предыдущие формулы справедливы для любой удерживаемой в ловушке системы в термодинамическом пределе. Для разреженного газа, в котором взаимодействие характеризуется одним параметром a , простые соображения размерности дают $\mu(N, T) = T_c^0 v(\zeta, T/T_c^0)$, где T_c^0 дается выражением (6), $\zeta = (N^{1/3}\omega_{\text{H}}ma^2)/\hbar$, а v — безразмерная функция [32]. Заметим, что в нашем пределе конденсат имеет резкую границу, которая определяется уравнением $n[\mu(N, T) - V_{\text{ext}}(\mathbf{r}), T] = n_c(T)$, где $n_c(T)$ — то значение плотности однородного газа, для которой T является температурой перехода.

Аналогичным образом можно проанализировать и другие термодинамические функции. Так, для термодинамического потенциала $\Omega(\mu, T)$ имеем

$$\Omega(\mu, T) = 2\pi \left(\frac{2}{m\omega_{\text{H}}^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \Theta(\mu - \xi, T) \sqrt{\xi} d\xi, \quad (33)$$

где $\Theta(\mu, T)$ есть потенциал единицы объема однородного газа. Отсюда легко получить, что энтропия, отнесенная к одной частице $S/N = \sigma(\zeta, T/T_c^0)$. Это означает, что если в двух различных экспериментах параметры подобия ζ одни и те же, будут одинаковы и значения энтропии при равных значениях T/T_c^0 . Вычисления работы [32] показывают, что термодинамические функции зависят фактически от параметра $\zeta^{1/5}$, так что зависимость от N оказывается очень слабой.

Подчеркнем, что эти результаты справедливы в термодинамическом пределе во всем интервале температур, включая критическую область вблизи точки перехода. Следует, однако, иметь в виду, что при достигнутых до сих пор значениях N не следует ожидать большой точности от этих предельных соотношений.

3.2. Кинетика конденсации

Весьма интересным является вопрос о временном ходе процесса конденсации, однако до сих пор здесь получено мало надежных результатов. Процесс конденсации однородного идеального газа был довольно подробно изучен в работе [33]. Авторы решали уравнение Больцмана для такого газа, предполагая, что функция распределения f зависит только от энергии атомов ϵ . Тогда уравнение можно привести к виду

$$\frac{df(\epsilon_1)}{d\epsilon_1} = C \int F[f] \frac{P}{p_1} d\epsilon'_1 d\epsilon'_2. \quad (34)$$

В этой формуле постоянная C пропорциональна g^2 , величина P равна наименьшей из величин p_1, p_2, p'_1, p'_2 , и интегрирование производится по области $\epsilon_1 < \epsilon'_1 < \infty$, $\epsilon_1 - \epsilon'_1 < \epsilon'_2 < \infty$. Функция $F[f]$ равна:

$$F[f] = (1 + f_1)(1 + f_2)f'_1 f'_2 - (1 + f'_1)(1 + f'_2)f_1 f_2, \quad (35)$$

причем $\epsilon_2 = \epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1$. Численное интегрирование уравнения (34) показало, что если в начальный момент функция распределения является гладкой функцией энергии, то за конечное время она обращается в бесконечность в точке $\epsilon = 0$, что означает начало образования конденсата. Вопрос, однако, нельзя считать ясным, поскольку в работах [34, 35] авторы пришли к другому заключению. О последующей стадии процесса — росте уже возникшего конденсата — известно еще меньше. Некоторые правдоподобные соображения высказаны в работе [36].

3.3. Линеаризованные уравнения

Переходя к исследованию элементарных возбуждений, заметим, что задача сильно упрощается существованием "классического" уравнения (9). Достаточно найти классические частоты колебаний ω_{cl} , описываемых линеаризованным уравнением (9). Тогда энергетические уровни элементарных возбуждений можно найти как $\epsilon = \hbar\omega_{cl}$ (эта процедура эквивалентна, разумеется, диагонализации гамильтониана в приближении Боголюбова)³.

Положим $\psi = \psi_g(\mathbf{r}) + \theta(\mathbf{r}, t)$, где ψ_g — волновая функция основного состояния системы, удовлетворяющая уравнению (17), $\theta = u(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + v(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$. Подставляя в уравнение (9) и линеаризуя относительно u и v , после простых вычислений находим [10]

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + 2gn(\mathbf{r}) \right] u(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) &= \\ &= \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})u(\mathbf{r}), \\ \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + 2gn(\mathbf{r}) \right] v(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) &= \\ &= -\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})v(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (36)$$

где $n = |\psi_g|^2$.

³ В этом обзоре мы рассматриваем, главным образом, случай достаточно низких температур, когда свойства возбуждений не зависят от температуры. В реальных условиях эксперимента такая зависимость существенна, и ее учет является сложной теоретической проблемой (см. [37, 38]). Отметим, что сама возможность введения возбуждений, спектр которых зависит от температуры, связана с разреженностью газа.

Мы можем теперь произвести "вторичное квантование" величины θ , вводя операторы аннигиляции и рождения возбуждений $\hat{\alpha}$ и $\hat{\alpha}^\dagger$. Выражение для оператора $\hat{\theta}$ имеет вид

$$\hat{\theta} = \sum_j [u_j(\mathbf{r})\hat{\alpha}_j + v_j(\mathbf{r})^*\hat{\alpha}_j^\dagger], \quad (37)$$

где u_j и v_j суть решения уравнений (36), нормированные согласно условиям [38]

$$\int d\mathbf{r} [u_i^*(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r}) - v_i^*(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r})] = \delta_{ij}. \quad (38)$$

Выражение $|u_j(\mathbf{r})|^2 - |v_j(\mathbf{r})|^2$ имеет смысл плотности вероятности для возбуждения в состоянии j .

3.4. Квазиклассическое приближение

Уравнения (36) нельзя решить в общем виде аналитически. К счастью, во многих случаях можно использовать квазиклассическое приближение [38, 40, 41]. В духе этого приближения положим:

$$u(\mathbf{r}) = \bar{u}(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})], \quad v(\mathbf{r}) = \bar{v}(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})], \quad (39)$$

причем фаза φ определяет импульс \mathbf{p} возбуждения:

$$\mathbf{p} = \hbar \nabla \varphi. \quad (40)$$

Мы предположим выполненным условие $p \gg \hbar/a_H$, где $a_H = (\hbar/m\omega_H)^{1/2}$ — "магнитная длина", введенная в (18) (для упрощения обозначений мы опускаем индекс j , нумерующий состояния, в уравнениях (39)–(49)). Предположим также, что амплитуды $\bar{u}(\mathbf{r})$ и $\bar{v}(\mathbf{r})$ медленно меняются на расстояниях порядка a_H . Так как облако внеконденсатных атомов имеет размер порядка $(2T/m\omega_H^2)^{1/2}$, квазиклассическое приближение справедливо, только если $T \gg \hbar\omega_H$. Подставим выражения (39) в уравнения (36) и пренебрежем производными амплитуд \bar{u} и \bar{v} и вторыми производными фазы φ . Получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{p^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + 2gn(\mathbf{r}) \right] u(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) &= \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})u(\mathbf{r}), \\ \left[\frac{p^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + 2gn(\mathbf{r}) \right] v(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) &= \\ &= -\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})v(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (41)$$

В этих уравнениях импульс \mathbf{p} является функцией от \mathbf{r} , заданной формулой (40). Условие совместимости уравнений определяет квазиклассический спектр элементарных возбуждений [12, 40]:

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left\{ \left[\frac{p^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + 2gn(\mathbf{r}) \right]^2 - g^2 n^2(\mathbf{r}) \right\}^{1/2}. \quad (42)$$

Выражение (42) обладает замечательными свойствами. Внутри конденсатного облака, где применимо выражение Томаса – Ферми (20) для равновесной плотности конденсата, выражение (42) можно переписать в виде:

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left\{ \left[\frac{p^2}{2m} + gn(\mathbf{r}) \right]^2 - g^2 n^2(\mathbf{r}) \right\}^{1/2}, \quad (43)$$

что совпадает со спектром Боголюбова для однородного газа. В частности, в пределе $p \rightarrow 0$ закон дисперсии имеет фононный вид $\epsilon = c(\mathbf{r})p$, где $c = (gn/m)^{1/2}$ — скорость звука. Важно, что выражение (43) зависит в явном виде только от плотности конденсата, но не от внешнего потенциала. Это находится в согласии с теорией сверхтекучести Ландау. Согласно этой теории, энергия элементарного возбуждения может зависеть от \mathbf{r} только посредством зависимости плотности жидкости от координат.

Вне конденсатного облака, где плотность n мала, выражение (42) переходит в энергию свободного атома:

$$\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu \quad (44)$$

(заметим, однако, что эта энергия отсчитывается от химического потенциала μ).

Одновременная зависимость энергии ϵ от n и V_{ext} в промежуточной области создает значительные трудности для построения полной системы уравнений конденсированного бозе-газа в ловушке при конечной температуре. Такая система была бы аналогична системе уравнений Ландау для сверхтекучего гелия (см., например, [42], § 77). Она должна состоять из кинетического уравнения для функции распределения элементарных возбуждений по импульсам и координатам и обобщения на случай конечных температур уравнения (9) для функции ψ . До сих пор, однако, не удалось вывести такую систему (обсуждение возникающих в этой связи проблем дано в работе [43], см. также [44]).

Фаза φ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\epsilon(\hbar \nabla \varphi, \mathbf{r}) = \epsilon, \quad (45)$$

где ϵ — заданное значение энергии возбуждения. Решение этого уравнения вместе с соответствующими граничными условиями на границе классически разрешенной области позволяют сформулировать квазиклассические условия квантования энергии возбуждения в ловушке.

Уравнения (41) дают только одно соотношение между функциями u и v . Чтобы получить второе соотношение и найти эти функции, нужно выписать уравнение в квазиклассическом приближении. В качестве такого уравнения можно выбрать уравнение непрерывности, которое для стационарного состояния имеет вид

$$\nabla \cdot [\mathbf{v}_g(|u|^2 - |v|^2)] = 0, \quad (46)$$

где $\mathbf{v}_g = \partial \epsilon / \partial \mathbf{p}$ есть групповая скорость возбуждения. Этому уравнению можно удовлетворить, если положить

$$u = U\Psi(\mathbf{r}), v = V\Psi(\mathbf{r}), \quad (47)$$

где функция $\Psi = A(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]$ удовлетворяет уравнению непрерывности в его обычной форме

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_g |\Psi|^2) = 0, \quad (48)$$

причем $|U|^2 - |V|^2 = 1$. Согласно (38), функция Ψ нормирована условием $\int |\Psi|^2 d\mathbf{r} = 1$. Мы видим, что функция Ψ — это квазиклассическая волновая функция элементарного возбуждения в обычном смысле слова, причем

энергия (42) играет роль гамильтониана. С этой точки зрения функции u и v представляют собой вспомогательные величины.

Для величин U и V мы имеем теперь обычные выражения Боголюбова, которые удобно представить в виде

$$U, V = \pm \left\{ \frac{[\epsilon^2 + g^2 n^2(\mathbf{r})]^{1/2} \pm \epsilon}{2\epsilon} \right\}^{1/2}. \quad (49)$$

Значения энергии ϵ , входящие в эти уравнения, различны для разных состояний возбуждения. Можно прямо положить $\epsilon = \epsilon_j$. Иногда, однако, удобнее рассматривать ϵ как функцию (42) от оператора $\hat{\mathbf{p}}$, действующего на функцию Ψ_j . Тогда в описанной ниже процедуре усреднения (50) величина ϵ будет играть роль классической функции $\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

Получить аналитическое выражение для функции Ψ возможно только в специальных случаях, например в изотропной ловушке, где переменные разделяются. Нередко, однако, нужен только квазиклассический предел выражений типа $\text{tr}(Q) = \sum_j \int \Psi_j^* Q(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}) \Psi_j d\mathbf{r}$, где $Q(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r})$ является некоторой функцией операторов $\hat{\mathbf{p}}$ и \mathbf{r} . Чтобы вычислить $\text{tr}(Q)$, заметим, что след оператора можно вычислять, используя любую полную систему функций. В частности, можно воспользоваться плоскими волнами $\Psi_{\mathbf{p}} = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})/\sqrt{V}$. Здесь V — объем некоторого большого "ящика", в котором находится наша система. Сумму по j можно заменить интегрированием по $V d\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3$. В квазиклассическом пределе можно пренебречь некоммутативностью операторов $\hat{\mathbf{p}}$ и \mathbf{r} и считать, что все операторы $\hat{\mathbf{p}}$ в функции Q стоят правее \mathbf{r} , т.е. действуют только на функцию $\Psi_{\mathbf{p}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q) &= \int \Psi_{\mathbf{p}}^* Q(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{p}} \frac{V d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \int |\Psi_{\mathbf{p}}|^2 Q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \frac{V d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} = \int Q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (50)$$

Таким образом, мы свели задачу вычисления величины $\text{tr}(Q)$ к интегрированию классической функции $Q(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ по фазовому пространству.

Изложенные соображения составляют основу вычисления термодинамических функций бозе-конденсированного газа в ловушке (см. [38] и приведенные в этой работе ссылки).

В качестве примера рассмотрим вычисление числа атомов, возбужденных из конденсата при конечных температурах. По определению эту величину можно записать как

$$N_T \equiv \int n_T(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \langle \theta^\dagger(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}. \quad (51)$$

Мы должны произвести преобразование (37), используя квазиклассические выражения (47) и (49). Статистическое среднее от величин $\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle$ равно бозевской функции распределения возбуждений

$$\langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle \rightarrow f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\exp[\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})/T] - 1}. \quad (52)$$

Теперь можно воспользоваться формулой (50) и вычислить сумму по состояниям. В результате

$$N_T = \int n_T(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{p} \, d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (53)$$

где функция распределения атомов оказывается равной

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = [U^2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + V^2(\mathbf{p}, \mathbf{r})] f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = - \left[\frac{\partial \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mu} \right]_n f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (54)$$

причем

$$\left[\frac{\partial \epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mu} \right]_n = - \frac{p^2/2m + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + 2gn(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})}. \quad (55)$$

Следует заметить, что функции распределения возбужденных и атомов различаются только при достаточно малой энергии возбуждений. При больших энергиях $\partial \epsilon / \partial \mu \rightarrow -1$, так что $F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$. Такая же ситуация имеет место вне конденсата (см. формулу (44)), где понятия возбуждения и атома совпадают. В другом предельном случае малых p , т.е. для фононов, $F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = mc(\mathbf{r})f(\mathbf{p}, \mathbf{r})/p$, так что $F \gg f$.

Химический потенциал μ определяется заданием полного числа атомов:

$$N = N_0(T) + N_T = \int n_0(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \int n_T(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (56)$$

В заключение этого раздела мы рассмотрим предельный случай, обратный к обсуждавшемуся выше квазиклассическому. Это гидродинамический предел возбуждений малых энергий. Частоты в этом случае можно определить, решая уравнение (23). Функции u и v теперь имеют вид [44]:

$$u, v = \left[\pm \sqrt{\frac{gn(\mathbf{r})}{2\omega}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2gn(\mathbf{r})}} \right] \chi(\mathbf{r}), \quad (57)$$

где χ — собственная функция уравнения (23), нормированная условием $\int |\chi|^2 \, d\mathbf{r} = 1$.

3.5. Затухание Ландау

Мы уже отмечали, что измеренные частоты колебаний конденсата хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. В эксперименте измерялось и затухание этих колебаний. Вычисление затухания представляет собой сложную теоретическую проблему. Наиболее вероятным механизмом представляется затухание Ландау, т.е. бесстолкновительное поглощение энергии осцилляций элементарными возбуждениями (такой механизм был впервые предложен в работе [46]).

Обычно затухание Ландау изучают с помощью кинетического уравнения. Для газа во внешнем потенциале удобнее вычислять затухание прямо по теории возмущений. Этот метод восходит к работе Ландау и Румера по затуханию ультразвука в диэлектриках (см., например, [42], § 73). Пусть E есть энергия классических колебаний частоты ω (говоря о классических колебаниях, мы подразумеваем, что число квантов осцилляций велико). Имеющиеся в системе элементарные возбуждения могут поглощать и испускать кванты колебаний.

Соответствующее выражение для потерь энергии имеет вид:

$$\dot{E} = -\hbar\omega[W^{(a)} - W^{(e)}]. \quad (58)$$

В этом уравнении $W^{(a)}$ и $W^{(e)}$ суть, соответственно, вероятности поглощения и испускания квантов колебаний частоты $\hbar\omega$. В теории возмущений вероятность перехода можно вычислить как

$$W = \pi \sum_{i,k} |\langle k | V_{\text{int}} | i \rangle|^2, \quad (59)$$

где матричный элемент соответствует переходу, в котором возбуждение, находящееся в i -м состоянии, переходит в состояние k . При этом $\epsilon_k = \epsilon_i + \hbar\omega$ в случае поглощения кванта колебаний (а), и $\epsilon_k = \epsilon_i - \hbar\omega$ в случае испускания (е).

Взаимодействие дается членом 4-го порядка по ψ в выражении для энергии (13), которое в этой связи следует рассматривать как "эффективный гамильтониан":

$$\hat{V}_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} \, d\mathbf{r}. \quad (60)$$

Оператор $\hat{\psi}$ следует представить в виде $\hat{\psi} = \psi_0 + \hat{\theta}$, где $\hat{\theta}$ дается выражением (37). В сумме (37) нужно различать операторы, относящиеся к коллективным колебаниям, чье затухание мы вычисляем и для которых мы будем использовать обозначения u_{osc} , v_{osc} , $\hat{\alpha}_{\text{osc}}$, $\hat{\alpha}_{\text{osc}}^\dagger$, и "тепловым" возбуждениям. Величины, относящиеся к последним, будут обозначаться индексами i, k , что уже было использовано в (59). Удерживая в (60) только члены линейные по $\hat{\alpha}_{\text{osc}}$, $(\hat{\alpha}_{\text{osc}}^\dagger)$ и содержащие произведения $\hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\alpha}_i$ ($\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_i^\dagger$), мы рассмотрим интересующий нас процесс, в котором квант осцилляций $\hbar\omega$ будет поглощен или испущен, и i -е возбуждение перейдет в k -е⁴. Таким образом, мы получаем следующий результат для скорости потери энергии:

$$\dot{E} = -\omega 2\pi \sum_{ik} |A_{ki}|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_i - \hbar\omega) (f_k - f_i), \quad (61)$$

где $E = \hbar\omega n_{\text{osc}}$ — энергия классического колебания ($n_{\text{osc}} \gg 1$), а матричный элемент, входящий в уравнение, равен [49]

$$A_{ki} = 2g \int d\mathbf{r} \psi_0 [(u_k^* v_i + v_k^* v_i + u_k^* u_i) u_{\text{osc}} + (v_k^* u_i + v_k^* v_i + u_k^* u_i) v_{\text{osc}}]. \quad (62)$$

При выводе (61) мы предположили, что числа заполнения для состояний i, k даются бозевскими функциями $f_j = [\exp(\epsilon_j/T) - 1]^{-1}$. Вводя затухание осцилляций γ согласно $\dot{E} = -2\gamma E$, находим окончательно:

$$\gamma = -\omega\pi \sum_{ik} |A_{ki}|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_i - \hbar\omega) \frac{\partial f(\epsilon_i)}{\partial \epsilon} \quad (63)$$

(мы предположили дополнительно, что $\hbar\omega \ll T$).

⁴ Этим же способом можно вычислить вероятность распада фонона на два, полученную С.Т. Беляевым [47]. В этом случае оба возбуждения i и k испускаются, и $\epsilon_k + \epsilon_i = \hbar\omega$ (см. [48]).

Уравнения (62) и (63) можно упростить далее, если принять гидродинамические выражения (57) для функций u_{osc} , v_{osc} . Выражение (63) можно использовать для численных расчетов затухания в ловушке. При достаточно большом числе атомов спектр возбуждений будет практически непрерывным, и суммирование в этой формуле можно заменить интегрированием, одно из которых устранил δ -функции.

Аналитические формулы для затухания удается получить для случая однородного газа. В этом случае функции u , v являются плоскими волнами с амплитудами вида (49). Вычисления приводят к следующему выражению для затухания:

$$\frac{\gamma}{\omega} = [a^3 n_0(T)]^{1/2} F(\tau), \quad (64)$$

где $\tau = T/mc^2$, и функция F дается выражением

$$F(\tau) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\tau} \int_0^\infty dx \left(1 - \frac{1}{2u} - \frac{1}{2u^2}\right)^2 \times \left[\exp\left(\frac{x}{2\tau}\right) - \exp\left(-\frac{x}{2\tau}\right) \right]^{-2}, \quad (65)$$

где $u(x) = (1 + x^2)^{1/2}$.

При низких температурах ($T \ll \mu$, где $\mu = gn_0(0)$ — значение химического потенциала при $T = 0$), формула (64) переходит в

$$\gamma = \frac{2\pi^2 T^4}{45\hbar^3 c^5} = \frac{27\pi}{16} \frac{\omega \rho_n}{\rho}, \quad (66)$$

ρ_n — плотность нормальной компоненты фононного газа. Это выражение было впервые получено Хоэнбергом и Мартином [50].

Важным является предельный случай относительно высоких температур T ($T \gg \mu$, но, разумеется, $T < T_c$). Термодинамические функции в этом пределе определяются возбуждениями с энергиями $\epsilon \sim T$. Напротив, в функции (65), определяющей затухание, существенны значения энергии $\epsilon \sim \mu \sim gn_0 \ll T$, так что можно воспользоваться предельным выражением "Рэлея–Джинса" для функции распределения $f(\epsilon) \approx T/\epsilon$. В результате γ оказывается линейной функцией температуры. Заметим, что такая зависимость при "высоких" температурах должна иметь место и для газа в ловушке.

Интегрирование дает в этом пределе [51, 52]

$$\gamma = \frac{3\pi}{8} \frac{Taq}{\hbar^2}. \quad (67)$$

Недавно авторы работы [46] использовали этот высокотемпературный режим для количественной оценки затухания в ловушке. Взяв q порядка $\hbar\omega/c$, где $c = (\hbar/m)[4\pi a n_0(r=0)]^{1/2}$ — значение скорости звука в центре ловушки, они получили значения γ в полуколичественном согласии с экспериментальными данными [17]. Это подтверждает предположение, что механизм Ландау ответствен за затухание колебаний. В работе [53] приведены соображения в пользу того, что выражение (67) можно использовать и для газа в анизотропной ловушке, определенным образом усреднив его по распределению плотности.

4. Квантовые флуктуации

4.1. Поправки к распределению плотности

Нетрудно показать аналогично выводу (53), (54), что при $T = 0$ в квазиклассическом приближении плотность числа атомов вне конденсата дается интегралом

$$n_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \int V^2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (68)$$

где $V^2(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ определено в (49). Интегрирование дает тот же результат, что и в случае однородного газа:

$$n_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} [n_{\text{TF}}(\mathbf{r})a]^{3/2}. \quad (69)$$

Эту величину, однако, трудно измерить экспериментально.

Большой интерес представляет вычисление поправки к выражению (20) для плотности газа n_{TF} . Имеются поправки двоякого рода. Прежде всего имеется поправка, связанная с квантовым давлением, опущенным в (20). Эту поправку легко получить из уравнения (9), учитывая это давление как возмущение. Нас будет интересовать поправка за счет квантовых флуктуаций функции ψ , опущенных уже в (9). Простейший способ найти эту поправку состоит в использовании выражения для химического потенциала однородного газа. Такое выражение с учетом квантовой поправки было получено Ли и Янгом [53]:

$$\mu(n) = g \left[n_{\text{TF}} + \frac{32}{3\sqrt{\pi}} (n_{\text{TF}} a)^{3/2} \right]. \quad (70)$$

Теперь мы можем воспользоваться условием равновесия (21), понимая под $\mu_1(n)$ выражение (70). Уравнение (21) можно решать последовательными приближениями. При этом, однако, надо учесть, что само значение μ_{TF} нужно исправить, чтобы получить то же самое значение полного числа атомов N . Для изотропной ловушки имеем

$$n(r) = \frac{1}{g} \left[\mu_{\text{TF}} \left(1 + \frac{\sqrt{m}}{2\hbar} a \mu_{\text{TF}}^{1/2} \right) - V_{\text{ext}}(r) \right] - \frac{32}{3\sqrt{\pi}} (n_{\text{TF}} a)^{3/2}, \quad (71)$$

где μ_{TF} , n_{TF} — значения плотности и химического потенциала в приближении Томаса–Ферми, определенные в (20) и (22). Разность между (71) и (69) определяет плотность конденсата: $n_0(r) = n(r) - n_{\text{out}}(r)$.

4.2. Флуктуации фазы

Уравнение (30) предсказывает полную монохроматичность тока Джозефсона. Эта монохроматичность нарушается, однако, флуктуациями фазы волновой функции конденсата Φ . Спектральное распределение тока характеризуется компонентами Фурье его корреляционной функции:

$$C(\tau) = \langle I(t+\tau)I(t) \rangle. \quad (72)$$

Вычисление $C(\tau)$ представляет собой трудную задачу и сильно зависит от конкретной постановки эксперимента.

Мы рассмотрим здесь лишь чисто методический пример, чтобы продемонстрировать общий характер возникающих соотношений.

Представим фазу в виде $\Phi(t) = -\mu t + \delta\mu t$ и предположим, что флуктуации $\delta\mu$ не зависят от t и подчиняются статистике Гаусса. Усредняя и собирая нужные члены, получаем из уравнения (30) (см. [56, 56]):

$$C(\tau) = I_0^2 \operatorname{Re} \left[\exp(-i\omega_J \tau) \exp \left(-\frac{\langle \delta\mu \rangle^2 \tau^2}{\hbar^2} \right) \right] \equiv \\ \equiv I_0^2 \operatorname{Re} \left[\exp(-i\omega_J \tau) \exp \left[-\left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 \right] \right], \quad (73)$$

где $\omega_J = (\mu_2 - \mu_1)/\hbar$. В температурном интервале $T \gg \hbar\omega_H$ имеем

$$\langle \delta\mu \rangle^2 = T \frac{\partial \mu}{\partial N}. \quad (74)$$

Эффект затухания корреляций, описываемый этим уравнением, обычно называют "диффузией по фазе"⁵. Далее, если $T \ll T_c$, можно воспользоваться низкотемпературным выражением (22) для химического потенциала. Таким образом, для времени затухания корреляционной функции τ_0 получаем

$$\tau_0^2 = \frac{\hbar^2}{T} \frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{5\hbar^2 N}{2\mu T}. \quad (75)$$

Спектральное распределение тока оказывается гауссовым с шириной порядка $1/\tau_0$.

Мы не будем обсуждать подробнее эту важную проблему.

4.3. Квантовый коллапс колебаний конденсата

Отметим, что возможность наблюдения квантовой диффузии по фазе, о которой шла речь в предыдущем параграфе, связана с тем, что число атомов в ловушке относительно мало. Иными словами, нашу систему можно считать мезоскопической. Другим мезоскопическим эффектом, который не имеет классической аналогии, является коллапс и возрождение колебаний конденсата. Этот эффект связан с тем, что собственная частота колебания зависит от его амплитуды. Авербухом и Перельманом [57] было предсказано, что такое явление может наблюдаться в квазиклассических волновых пакетах. До настоящего времени оно наблюдалось в сильно возбужденных состояниях электрона в атоме, в молекулярных колебаниях и для атома, взаимодействующего с электромагнитным полем в резонаторе. БЭК позволяет наблюдать эффект в макроскопических масштабах, как квантовый коллапс колебаний конденсата (см. [58–60] и приведенные в этих статьях ссылки).

⁵ Существование такой диффузии иногда рассматривается как повод для сомнений в возможности введения волновой функции конденсата ψ_0 , удовлетворяющей уравнению (9). Я думаю, что такие сомнения основаны на недоразумении. Как уже говорилось, в этом уравнении действительно не учитываются флуктуации, но их можно учесть в следующем приближении. При этом следует вычислять наблюдаемые физические величины, которые всегда калибровочноинвариантны, т.е. не зависят от общей фазы функции ψ_0 . Усредняя же по флуктуациям фазы саму калибровочно-неинвариантную величину ψ_0 бессмысленно.

Основная идея состоит в том, что колебание некоторой коллективной моды представляет собой, с квантовой точки зрения, когерентную суперпозицию стационарных состояний осциллятора. Масштаб явления определяется сдвигом частоты колебания в зависимости от его амплитуды.

Запишем частоту рассматриваемой моды в виде

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega = \omega_0(1 + \varkappa E), \quad (76)$$

где E — энергия колебаний. Мы предположим, что сдвиг частоты мал, $|\varkappa|E \ll 1$. Используя квазиклассическое уравнение $\hbar\omega = (\partial E_n / \partial n)$, перепишем это выражение в квантовой форме $\omega_n = E_n / \hbar = \omega_0 n + bn^2/2$. В этой формуле n — число квантов на данном уровне E_n ($n \gg 1$), а коэффициент b дается выражением $b = \hbar\omega_0^2 \varkappa$. В экспериментах [15, 16] колебания возбуждались синусоидальным изменением частоты магнитной ловушки. В результате осциллятор приводился в когерентное состояние. Волновую функцию этого когерентного состояния можно разложить по функциям стационарных состояний:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \exp(-i\omega_n t), \quad (77)$$

причем

$$|c_n|^2 = \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp \left[-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\bar{n}} \right], \quad (78)$$

где \bar{n} равно среднему числу возбужденных квантов ($\bar{n} \gg 1$), а энергия $E = \hbar\omega_0 \bar{n}$. Пусть наше колебание описывается некоторой "координатой" $\xi(t)$. Вычислим среднее значение этой координаты по состоянию (77), (78). При малой нелинейности мы должны рассматривать только переходы $n \rightarrow n \pm 1$, так что

$$\langle \xi(t) \rangle \propto \sum_n |c_n|^2 \cos [(\omega_0 + bn)t]. \quad (79)$$

Для достаточно малых значений времени t мы можем заменить суммирование по n на интегрирование. В результате оказывается, что средняя величина $\langle \xi(t) \rangle$ испытывает затухание, или "коллапс", по закону $\langle \xi \rangle \sim \exp(-\bar{n}b^2 t^2/2) \equiv \exp[-(t/\tau_c)^2]$ с характерным временем

$$\tau_c^{-1} = \left(\frac{\bar{n}}{2} \right)^{1/2} |b| = \omega_0 \left(\frac{E\hbar\omega_0}{2} \right)^{1/2} |\varkappa|. \quad (80)$$

Ввиду периодичности выражения (79), колебание, однако, будет периодически "возрождаться" с периодом $\tau_r = 2\pi/(\hbar\omega_0^2 |\varkappa|)$ в согласии с результатом [57]. Заметим, что $\tau_c \approx \sqrt{(1/\bar{n})} \tau_r \ll \tau_r$.

Общая картина явления и смысл параметров τ_c и τ_r показаны схематически на рис. 4, где приняты условные единицы для времени и координаты осциллятора.

Подчеркнем, что в квантовой механике измерение координаты осциллятора ξ меняет значение его импульса. Поэтому наблюдать коллапс и возрождение колебаний можно, только повторяя неоднократно эксперимент в различных фазах колебаний. Это, однако, в точности соответствует процедуре измерений, использованной в опытах [16, 17].

Оценим коэффициент \varkappa . Простые соображения размерности показывают, что в приближении Томаса–

Таблица

Работа	Атомы	a, a_0	$\omega_x/2\pi$, Гц	$\omega_y/2\pi$, Гц	$\omega_z/2\pi$, Гц	T_c	N_c	N_0
[2]	^{87}Rb	100	78	78	220	100 нК	10^4	4500
[15]	^{87}Rb	100	132	132	373	100 нК	10^4	4500
[3]	^{23}Na	70	745	235	410	2 мК	2×10^6	$1,5 \times 10^5$
[16]	^{23}Na	70	320	320	18	2 мК	15×10^6	5×10^6
[4]	^7Li	-14,5	151	153	132	300 нК	$1,4 \times 10^5$	1400

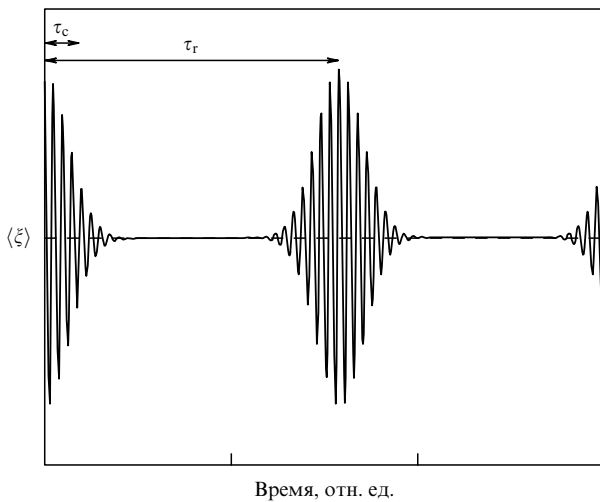


Рис. 4. Схематическая картина коллапса и возрождения колебаний.

Ферми

$$\kappa = \frac{v}{\mu_{\text{TF}} N}, \quad E = \epsilon \mu_{\text{TF}} N A^2, \quad (81)$$

где A — относительная амплитуда колебаний, а v и ϵ — безразмерные численные коэффициенты порядка единицы. Тогда

$$\tau_c = \frac{\sqrt{2}}{|v|\omega_0} \frac{\mu N}{\sqrt{E\hbar\omega_0}} = \frac{\sqrt{2}}{|v|\sqrt{\epsilon}\omega_0} \sqrt{\frac{\mu N}{\hbar\omega_0}} \frac{1}{A}. \quad (82)$$

В экспериментах [15] параметры имели следующие типичные значения (см. таблицу): $N = 4500$, $\omega_{\perp}/2\pi = 132$ Гц, $\lambda = \sqrt{8}$ и $a = 100a_0$, где a_0 — радиус Бора. С этими параметрами $\sqrt{\mu_{\text{TF}} N/\hbar\omega_{\perp}} \approx 195$.

Частота $m = 2$ моды в линейном пределе равна, согласно (25), $\omega_0 = \sqrt{2}\omega_{\perp}$. Вычисления [60] дают для этой моды $v = 0,26$, $\epsilon = 0,57$. Для относительной амплитуды порядка $A = 0,2$ время коллапса оказывается примерно равным $\tau_c = 4,98$ с. Аналогичные вычисления для нижней моды $m = 0$ (26) дают $\tau_c = 1,4$ с. Авторы работы [16] обнаружили, что колебания затухали с характерным временем порядка 100 мс. Это означает, что в условиях эксперимента затухание Ландау маскирует рассматриваемые квантовые явления. Это затухание, однако, должно быстро убывать с температурой (см. выражение (66)). Поэтому можно надеяться, что понижение температуры позволит наблюдать квантовый коллапс колебаний на нашем макроскопическом объекте.

Из других мезоскопических задач упомянем здесь обсуждаемую в [61] возможность того, что газ в ловушке при $T = 0$ описывается линейной комбинацией волновых функций с разным числом частиц.

Я надеюсь, что изложенное убедило читателя в том, что замечательные эксперименты по бозе-эйнштейновской конденсации газов в ловушках открывают новые возможности для развития теории квантовых жидкостей. Нет сомнения, что теория правильно описывает основные экспериментальные факты. В то же время возникло много интересных теоретических вопросов, ждущих своего решения. В частности, до сих пор не удалось произвести последовательное обобщение теории сверхтекучести Ландау на случай систем с существенной пространственной неоднородностью.

Мне особенно приятно, что предлагаемая статья публикуется в номере УФН, посвященном юбилею моего учителя Л.Д. Ландау. В рассматриваемой теории его идеи находят своеобразное и нередко неожиданное развитие.

В настоящем обзоре использованы материалы лекции, прочитанной автором в Сиднее в июле 1997 г. на IX Международной конференции по теории многих тел по случаю получения медали Е. Финберга. Автор благодарен В.Л. Гинзбургу, Ф. Далфово, С. Джорджини и С. Стрингари за многочисленные обсуждения и А. Беренгольцу за помощь в оформлении статьи.

Приложение

Приводим для справок таблицу основных параметров экспериментов, на которые мы ссылались в нашей статье. В таблице приведены значения амплитуды рассеяния атомов a в боровских радиусах a_0 , осцилляторные частоты ловушек ω_x , ω_y , ω_z , температура перехода T_c и число атомов при температуре перехода N_c , максимальное число атомов в конденсате N_0 . Следует, однако, иметь в виду, что экспериментальная техника развивается очень быстро, и к моменту опубликования обзора, несомненно, будут достигнуты еще более впечатляющие результаты. Число лабораторий, в которых достигнута конденсация, также быстро увеличивается.

Список литературы

1. Einstein A *Berl. Ber.* **22** 261 (1924); **23** 3 (1925); **23** 18 (1925)
2. Anderson M H et al. *Science* **269** 198 (1995)
3. Davis K B et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969 (1995)
4. Bradley C C, Sackett C A, Hulet R G *Phys. Rev. Lett.* **78** 985 (1997)
5. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *УФН* **167** 649 (1997) [*Phys. Usp.* **40** 623 (1997)]
6. de Groot S R, Hooyman G J, Ten Seldam C A *Proc. R. Soc. London A* **203** 266 (1950); Bagnato V, Pritchard D E, Kleppner D *Phys. Rev. A* **35** 4354 (1987)
7. Damle K et al. *Europhys. Lett.* **36** 7 (1996)
8. Боголюбов Н Н *Изв. АН СССР, Сер. Физ.* **11** 77 (1947); *J. Phys. USSR* **11** 23 (1947)
9. Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961); *J. Math. Phys.* **4** 195 (1963)
10. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961)
11. Гинзбург В Л, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **34** 1240 (1958)

12. Huse D A, Siggia E D *J. Low Temp. Phys.* **46** 137 (1982)
13. Ruprecht P A et al. *Phys. Rev. A* **51** 4704 (1995)
14. Baym G, Pethick C J *Phys. Rev. Lett.* **76** 6 (1996)
15. Kagan Y, Shlyapnikov G, Walraven J *Phys. Rev. Lett.* **76** 2670 (1996)
16. Jin D S et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 420 (1996); Jin D S et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 764 (1997)
17. Mewes M-O et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 988 (1996)
18. Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **77** 2360 (1996)
19. Edwards M et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 1671 (1996)
20. Castin Y, Dum R *Phys. Rev. Lett.* **77** 5315 (1996)
21. Kagan Yu, Surkov E L, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. A* **54** R1753 (1996); **55** R18 (1997)
22. Dalfovo F et al. *Phys. Lett. A* **227** 259 (1997)
23. Ruprecht P A et al. *Phys. Rev. A* **54** 4178 (1996)
24. Holland M J, Cooper J *Phys. Rev. A* **53** R1954 (1996); Holland M J et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 3801 (1997)
25. Smerzi A, Fantoni S *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589 (1997)
26. Pérez-García V M et al. *Phys. Rev. A* **56** 1424 (1997)
27. Andrews M R et al. *Science* **275** 637 (1997)
28. Röhrl A et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 4143 (1997)
29. Dalfovo F, Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. A* **54** 4213 (1996)
30. Zapata I, Leggett A J, Sols F *Phys. Rev. A* **57** R28 (1998)
31. Dalfovo F, Stringari S *Phys. Rev. A* **53** 2477 (1996)
32. Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **78** 3987 (1997)
33. Semikoz D V, Tkachev I I *Phys. Rev. Lett.* **74** 3093 (1995)
34. Levich E, Yakhot V *J. Phys. A* **11** 2237 (1978)
35. Каган Ю М, Свистунов Б В, Шляпников Г В *ЖЭТФ* **101** 528 (1992)
36. Stoof H T C, in *Bose–Einstein Condensation* (Eds A Griffin, D W Snoke, S Stringari) (Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 1995) p. 226
37. Goldman V V, Silvera I F, Leggett A J *Phys. Rev. B* **24** 2870 (1981)
38. Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S *J. Low Temp. Phys.* **109** 309 (1997)
39. Fetter A L *Ann. Phys. (N.Y.)* **70** 67 (1972)
40. Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S *Phys. Rev. A* **54** R4633 (1996)
41. Csordás A, Graham R, Szépfalusy P *Phys. Rev. A* **56** 5179 (1997)
42. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
43. Griffin A *Phys. Rev. B* **53** 9341 (1996)
44. Minguzzi J D, Chiofalo M L, Tosi M P *Phys. Lett. A* **236** 237 (1997)
45. Wen-Chin Wu, Griffin A *Phys. Rev. A* **54** 4204 (1996)
46. Liu W V, Schieve W C, cond-mat/9702122
47. Беляев С Т *ЖЭТФ* **34** 433 (1958)
48. Giorgini S *Phys. Rev. A* **57** 2949 (1998), cond-mat/9709259
49. Pitaevskii L P, Stringari S *Phys. Lett. A* **235** 398 (1997)
50. Hohenberg P C, Martin P C *Ann. Phys. (N.Y.)* **34** 291 (1965)
51. Szépfalusy P, Kondor I *Ann. Phys. (N.Y.)* **82** 1 (1974)
52. Shi H, *Ph.D. Thesis* (Toronto: University of Toronto, 1997)
53. Fedichev P O, Shlyapnikov G V, Walraven J T M, cond-mat/9710128; *Phys. Rev. Lett.* **80** 2269 (1998)
54. Lee T D, Yang C N *Phys. Rev.* **105** 1119 (1957); Lee T D, Huang K, Yang C N *Phys. Rev.* **106** 1135 (1957)
55. Lewenstein M, You L *Phys. Rev. Lett.* **77** 3489 (1996)
56. Wallis H et al., *J. Mod. Opt.* **44** 1751 (1997)
57. Averbukh I Sh, Perelman N F *Phys. Lett. A* **139** 449 (1989)
58. Kuklov A B et al. *Phys. Rev. A* **55** 488 (1997)
59. Pitaevskii L P *Phys. Lett. A* **229** 406 (1997)
60. Dalfovo F, Minniti C, Pitaevskii L P *Phys. Rev. A* **56** 4855 (1997); cond-mat/9709010
61. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **63** 963 (1996)

Bose – Einstein condensation in magnetic traps. Introduction in a theory

L.P. Pitaevskii

P.L. Kapitza Institute for Physics Problem, Russian Academy of Sciences

ul. Kosygina 2, 117454 Moscow, Russia

Department of Physics, Technion, 32000 Haifa, Israel

E-mail: lev@physics.technion.ac.il

The recent realization of Bose – Einstein condensation in atomic gases opens new possibilities for observation of macroscopic quantum phenomena. There are two important features of the system — weak interaction and significant spatial inhomogeneity. Because of this a non-trivial ‘zeroth-order’ theory exists, compared to the ‘first-order’ Bogolubov theory. The zeroth-order theory is based on the mean-field Gross–Pitaevskii equation for the condensate ψ -function. The equation is classical in its essence but contains the \hbar constant explicitly. Phenomena such as collective modes, interference, tunneling, Josephson-like current and quantized vortex lines can be described using this equation. Elementary excitations define the thermodynamic behaviour of the system and result in Landau-type damping of collective modes. Fluctuations of the phase of the condensate wave function restrict the monochromaticity of the Josephson current. Fluctuations of the numbers of quanta result in the quantum collapse-revival of the collective oscillations.

PACS numbers: 05.30.Jp, 32.80. Pj, 52.55.Lf

Bibliography — 61 references

Received 5 January 1998