

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л.Д. ЛАНДАУ

## Время, туннелирование и турбулентность

М.Я. Азбель

*В статье рассматривается время туннельного перехода; туннелирование через переменный потенциал, его увеличение и его фрактальные (типа бабочки Хофстадтера) и хаотические резонансы; резонансное туннелирование хартии-жидкости и его (специфически квантовая) неустойчивость и турбулентность.*

PACS numbers: 72.15.Rn, 72.80.Ng, 73.40.Gk

### Содержание

1. Введение (613).
2. Время туннельного перехода (614).
3. Туннелирование в переменном потенциале (616).
4. Квантовая турбулентность и резонансное туннелирование (618).

Список литературы (622).

### 1. Введение

Одним из основных проявлений квантовой механики является туннелирование. Туннелирование присутствует в распаде тяжелых ядер, холодной эмиссии из атома или твердой поверхности, в паразелектрических дефектах в твердых телах, переходах металл–диэлектрик–металл, джозефсоновских переходах, р–п-переходах, сверхпроводящих квантовых интерференционных кольцах (СКВИД), транспорте в сверхрешетках, квантовой диффузии, абсорбции и десорбции. Квантовый транспорт (например, прыжковая проводимость с переменной длиной перескока) и распространение волн вне области применимости геометрической оптики также связаны с туннелированием.

Знание времени туннельного перехода (ВТП) важно для широкого круга физических задач, от туннелирования в химических реакциях до стационарного многочастичного транспорта [1]. Поэтому это понятие появилось почти так же давно, как и сама квантовая механика [2]. Оно рассматривалось Вигнером [3] и в последнее время, после работы Буттикера и Ландауэра [4], стало привлекать большое внимание [5]. Боснак [6] и Банд [7] обсуждали аномально большие скорости прохождения (электромагнитных волн). Было показано [8], что скорость максимума плотности вероятности может быть бесконечной и даже отрицательной (ср. [9]). Недавно

Эндерс, Нимц и др. переоткрыли [10] бесконечные и сверхсветовые скорости для фазы пакета локализованных мод, распространение которого эквивалентно квантовому туннелированию. Эти эксперименты обсуждались Ландауэром (см. также [16]). Была установлена также возможность инвариантности масштаба времени туннелирования [12] (что подразумевает отсутствие характерного ВТП). Ситуация, очевидно, требует физически осмысленного ответа на вопрос, что такое ВТП и чем оно не является и как согласовать, по-видимому, бесконечную и сверхсветовую скорость с принципами неопределенности, относительности и причинности [13].

Туннелирование и активация в переменном потенциале имеют важное значение для разнообразных физических проблем [11–15]: межзонного пробоя, обмена зарядами между глубоколежащими примесными центрами в полупроводниках, резонансного туннелирования [16], кулоновской блокады [17], нарушения адиабатической инвариантности [18a]. Изучение переменного потенциала также может быть полезным в исследовании стационарного многочастичного туннелирования и испарения, если последнее свести к приближенно одночастичной задаче. При этом некоторые степени свободы, связанные с процессом вылета частицы, дают эффективный потенциал, зависящий от времени. Кроме того, характерное время  $T$  переменного потенциала может быть связано с эффективной температурой  $\theta \sim \hbar/T$ , и, следовательно, изучение переменного потенциала может оказаться также полезным в задачах о квантовом транспорте (например, прыжковая проводимость с переменной длиной перескока).

Последовательное и аккуратное исследование прохождения частицы важно еще и потому, что экспериментальные скорости часто оказываются на десятки порядков больше теоретических значений [19, 20] и даже их верхней оценки [21].

Коллапс волновой функции (КВФ), т.е. исчезновение плотности вероятности в одном месте и появление в другом, является одной из фундаментальных концепций квантовой механики. Он обычно рассматривается как вовлечение классического прибора в процесс измерения. Между тем, эффективный КВФ происходит в каждом моттовском прыжке [22], определяющем электронный

**М.Я. Азбель.** School of Physics and Astronomy, Tel Aviv University, Ramat Aviv, Tel Aviv 69978, Israel  
Факс (972-3) 642-29-79  
E-mail: azbel@tauinvm.tau.ac.il

Статья поступила 24 февраля 1998 г.

транспорт в неупорядоченных полупроводниках [23]. Он может играть важную роль в частотной зависимости моттовских прыжков, туннелировании и релаксации [1], квантовой электронике [24], в общем случае транспорта в неупорядоченных системах [25], зависящем от времени зинеровском туннелировании и пробое, а также в других задачах "постмодернистской" квантовой механики (используя термин, введенный Р. Харрисом), обсуждавшихся в четырех статьях в *Physics Today* в 1993 г. [26]. Развитие технологий в последние два десятилетия, успех в создании квантовых точек и мезоскопических систем [26, 27] и эксперименты по одноэлектронному транспорту дают возможность микроскопического исследования КВФ в одиночном прыжке моттовского типа.

Резонансное туннелирование, впервые наблюдавшееся Чангом, Эсаки и Цу [28], часто встречается в физике. Оно имеет отношение к таким явлениям, как туннелирование с участием фононов [29] и плазмонов [30], наложение уровней Ландау [31], внутренняя динамическая бистабильность, гистерезис [32], осцилляции<sup>1</sup> [16] и квантовый хаос [33], кулоновская блокада [17]. Недавно Хайлблум с соавторами исследовал резонансное туннелирование (и эволюцию его фазы) через одиночную квантовую точку [34]. Резонансное туннелирование и активация в переменном потенциале играет важную роль в частотной зависимости моттовских прыжков [23, 35]. Переменный потенциал приводит к резонансной активации [36], осцилляторному коллапсу волновой функции [37], локализованным модам [38], туннелированию с участием фотонов [39], нарушению симметрии "левое–правое" [40]. Численное решение нелинейного уравнения (типа Хартри) Боголюбова–Питаевского–Гросса [42] во внешнем поле [43] демонстрирует динамическую эволюцию к хаосу [33].

В настоящей статье рассматриваются три проблемы, сформулированные выше: ВТП, туннелирование через переменный потенциал, туннелирование хартри–жидкости и присущая ему внутренняя турбулентность.

## 2. Время туннельного перехода

Начнем рассмотрение со стационарного потока свободных квантовых частиц. Чтобы оценить время его прохождения от точки *A* до точки *B*, определим в точке *B* линейный отклик на зависящий от времени потенциал возмущения в точке *A*. Фурье-преобразование возмущения содержит сколь угодно высокие (и соответственно маловероятные) частоты. Они приводят к бесконечному возрастанию энергии, к нулевому минимальному времени перехода в нерелятивистском случае и к пределу, определяемому скоростью света, в релятивистском. Любая сингулярность во временной зависимости возмущения (которая, например, может точно определять момент его включения) только увеличивает плотность вероятности такого отклика. Аналитическая временная зависимость с характерным временем включения  $\delta t$  дает характерное изменение энергии  $\delta e \sim h/\delta t$ , изменение относительной скорости  $\delta v/v \sim \delta e/e$  и относительное изменение времени туннелирования  $(v\delta t/\Delta x) + (\delta e/e) \sim \sim (hv/\delta e \Delta x) + (\delta e/e)$ , где  $\Delta x$  — расстояние от *A* до *B*.

<sup>1</sup> В [41] показано, что магнитное поле вызывает осцилляции в асимметричной двухбарьерной структуре.

Минимальная неточность, согласно принципу неопределенности Гейзенберга, есть  $\delta t/\Delta t \sim (\lambda_{\text{dB}}/\Delta x)^{1/2}$ , где  $\lambda_{\text{dB}} \sim h/p$  — длина волны де Бройля для импульса *p*, и  $\Delta t = \Delta x/v$ . Тогда время туннелирования соответствует максимальному отклику (за которым следует бесконечно длинный и соответственно слабый запаздывающий отклик на исчезающие малые частоты в спектре возмущения).

Применим теперь тот же самый подход к туннелированию стационарного потока через непрозрачный барьер. В этом случае время  $\delta t$  (малое по сравнению с временем Буттикара–Ландауэра [4]  $t_{BL} = \int dx/|\mathbf{v}|$ ) относится к надбарьерной активации, вероятность которой экспоненциально больше, чем вероятность туннелирования. Поэтому отклик может быть экспоненциально более сильным для гораздо более слабого, но значительно более короткого возмущения. В частности, отклик может достичь своего максимума раньше, чем для более сильного возмущения. Это неудивительно — максимумы относятся к несвязанным явлениям [44] (это и есть причина возникновения псевдосверхсветовых скоростей в [10]). Но даже быстрое возмущение приводит, в общем случае, к сколь угодно низким частотам и, следовательно, к сколь угодно большому времени запаздывания отклика и сколь угодно большому ВТП. Медленное возмущение ( $\delta t \gg t_{BL}$ ) подразумевает соответственно низкую вероятность возрастания энергии частицы. Однако оно также подразумевает соответственно медленный отклик и соответствующую неточность в определении ВТП. (Поэтому ВТП не является универсальной характеристикой данного барьера и начальной энергии. Наоборот, оно сильно зависит от способа определения.)

Время Буттикара–Ландауэра определяет переход от туннелирования к активации и дает, таким образом, оценку времени туннельного отклика. Ясно, что поскольку характерная туннельная длина волны де Бройля сравнима с шириной барьера, то точного определения ВТП быть не может. Это особенно очевидно в случае резонансного туннелирования. Если  $h/\delta t$  превышает его (экспоненциально узкую) ширину, то прозрачность экспоненциально падает, и характерное время резонансного туннелирования становится порядка времени жизни квазиуровня в яме.

Введем модель для количественного изучения зависящего от времени туннелирования. Рассмотрим две удаленные потенциальные ямы, разделенные непрозрачным потенциальным барьером. Первоначально плотность частицы локализована в одной из ям (*A*) с экспоненциально малым "хвостом" в другой яме (*B*). Флуктуация моделируется зависящим от времени потенциалом, который существует в течение конечного времени. Мы покажем, что только при специальных условиях плотность частицы почти полностью сдвигается в другую яму. В общем случае это происходит периодически с изменением величины потенциала, а в случае, моделирующем моттовские прыжки, — при определенных значениях потенциала.

Уравнение Шрёдингера в потенциале  $V(t, r)$  для частицы с массой  $1/2$  и  $\hbar = 1$  имеет вид

$$i\dot{\psi} + \Delta\psi - V(t, r)\psi = 0, \quad V(t, \infty) = 0, \quad (1)$$

где  $\dot{\psi} = \partial\psi/\partial t$ . Физика явления разъясняется двумя предельными случаями.

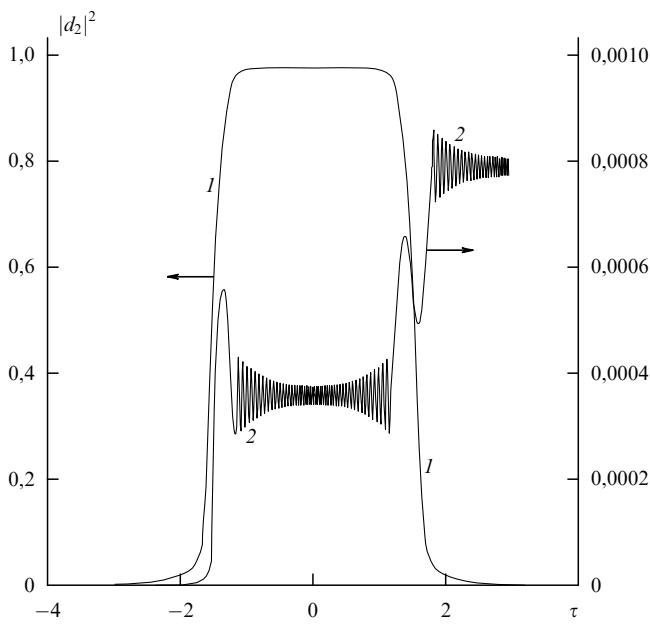


Рис. 1. Временная зависимость вероятности  $|d_2(\tau)|^2$  обнаружения частицы в яме  $B$  для  $f(\tau) = 2/\cosh \tau - 1$  и  $\zeta = 500$ ,  $\eta = 50$  (кривая 1);  $\zeta = 100$ ,  $\eta = 0,1$  (кривая 2).

а) Если  $V$  изменяется адиабатически со временем  $t$ , то собственное состояние частицы совпадает со своим мгновенным значением. Пока это состояние не слишком близко к вырожденному уровню, частица локализована в яме  $A$ . Когда уровни  $A$  и  $B$  сближаются до минимального расстояния  $\omega$ , допускаемого отталкиванием уровней ("квазивырождение"), легко показать (см. ниже), что частица перемещается в яму  $B$ . Затем отталкивание уровней сдвигает их к первоначальным значениям. В результате, когда  $V$  возвращается к своему начальному значению, частица возвращается в яму  $A$  (рис. 1, кривая 1), где  $\zeta$  относится к максимальному изменению  $V$ , а  $\eta$  — к его характерному времени (см. ниже).

б) Если  $V$  при  $t = t_1$  скачком меняется к новому значению, то из-за непрерывности волновой функции при  $t = t_1$  частица "размазывается" между состояниями, соответствующими  $V(t_1 - 0)$ . При  $t = t_1$  непрерывность волновой функции сохраняет частицу в яме  $A$ . При  $t_1 < t < t_2$  состояния интерферируют и плотность вероятности осциллирует между ямами. Поэтому результат скачкообразного возвращения  $V$  к своему первоначальному значению  $V(t_1 - 0)$  при  $t = t_2$  осциллирующим образом зависит от временного запаздывания  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Если при  $t = t_2 - 0$  частица приближенно находится в яме  $B$ , то скачок при  $t = t_2$  оставляет ее там навсегда (при отсутствии последующих скачков). Похожая ситуация возникает, когда  $V$  быстро (в сравнении с  $\omega^{-1}$ ) достигает квазивырождения и медленно (в сравнении с собственным периодом) проходит его (рис. 2). Характерными чертами случая (б) являются очень быстрые (квазискачкообразные) и очень медленные (квазистационарные) изменения потенциала. Последние (см. ниже) должны быть медленными в сравнении с расщеплением квазивырожденного мгновенного уровня (что связано с экспоненциально слабым туннелированием через непрозрачный барьер между ямами) для того, чтобы заметно сместить частицу в яму  $B$ .

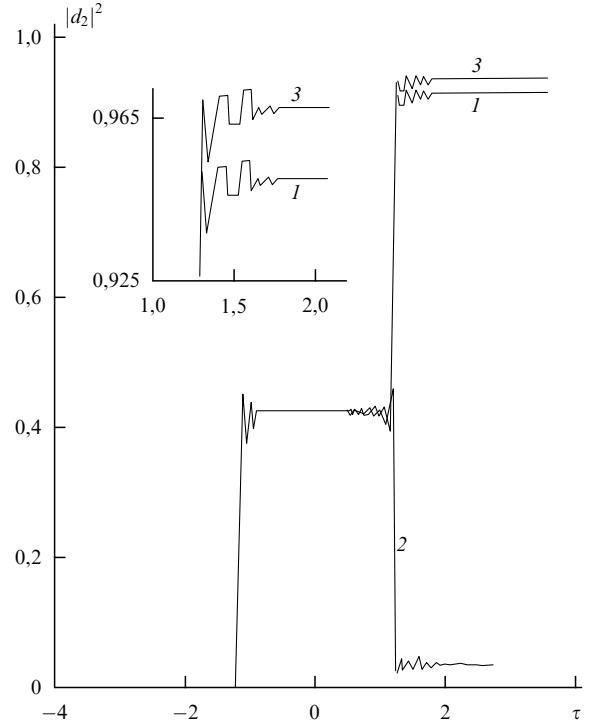


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но  $\eta = 50$  и  $\zeta = 15000$  (кривая 1);  $\zeta = 15001$  (кривая 2), т.е.  $\zeta$  изменилась приблизительно на половину периода (см. уравнение (11)); и  $\zeta = 15002$  (кривая 3).

Обычно частица в конце концов перераспределяется между ямами. "Окончательный" коллапс волновой функции (КВФ) отвечает экспоненциально малой ( $\propto \omega^2$ ) плотности вероятности в яме  $A$ . Вычисления позволяют определить очень редкие флуктуации, приводящие к этому (см., например, роль "специальных" состояний в квантовых измерениях и КВФ в [45]). Такие флуктуации возможны только в макроскопических "классических" системах (где  $\omega^2$  также может быть исчезающе малым) с их большим интервалом флуктуаций.

Для аналитического описания КВФ рассмотрим мгновенные значения собственных энергий. Предположим, что они наиболее близки при  $t = 0$  (если это происходит только один раз) или при  $t = t_1, t_2, \dots$  (если это случается несколько раз). Обозначим соответствующее мгновенное значение  $V$  через  $V_0(r)$  и запишем уравнение (1) в виде

$$i\dot{\psi} + \Delta\psi - V_0\psi = \psi\psi, \quad V_0(r) = V(t_0, r), \quad v = V - V_0. \quad (2)$$

Выберем полный ортонормированный набор функций  $\phi$ , удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\phi_n + (\omega_n - V_0)\phi_n = 0 \quad (3)$$

и представим  $\psi$  в уравнении (2) в виде

$$\psi = \sum_n b_n(t)\phi_n(r) = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\phi}. \quad (4)$$

Далее

$$i\dot{b} = (\hat{\omega} + \hat{v})b, \quad \omega_{mn} = \delta_{mn}, \quad v_{mn} = \int v\phi_m^*\phi_n dr \quad (5)$$

(звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Предположим, что  $V_0 = V_1 + V_2$ , где  $V_1$  и  $V_2$  отвечают ямам  $A$  и  $B$ . Нас интересуют переходы между ямами. Когда характеристическая частота  $v$  достаточно мала, их вероятность экспоненциально убывает с  $|\omega_m - \omega_n|$ . Предположим, что наиболее близкий уровень соответствует  $\omega_1, \omega_2$  и сохраним в уравнении (4) только члены с  $n = 1, 2$ , сводя таким образом задачу к двухуровневой. Для указания положения локализации частицы введем вещественные локализованные собственные состояния  $\tilde{\phi}$  в каждой из ям и разложим  $\psi$  по  $\tilde{\phi}$  согласно

$$\psi = \exp \left[ -i\bar{\omega}t - i \int' \bar{v}(t') dt' \right] \tilde{\phi} d. \quad (6a)$$

Теперь основное уравнение задачи принимает вид

$$id = \begin{pmatrix} w & \omega \\ \omega & -w \end{pmatrix} d, \quad (6)$$

где

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega = 0,5(\omega_2 - \omega_1) \sin(2\gamma),$$

$$w(t) = \int \frac{v(\tilde{\phi}_1^2 - \tilde{\phi}_2^2) dr}{2}, \quad \bar{v} = \int \frac{v(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2) dr}{2}. \quad (7)$$

Здесь  $\gamma$  — угол между  $\phi$  и  $\tilde{\phi}$  (для одинаковых ям  $\gamma = \pi/4$ ); зависящее от времени взаимодействие между ямами  $\omega \propto \sqrt{P_T}$ ,  $P_T$  — экспоненциально малый коэффициент туннелирования, близость уровней подразумевает, что  $|\bar{v}| \ll |\bar{\omega}|$ . Согласно уравнению (6), значение  $|d|^2$  сохраняется и равно 1 в рассматриваемом случае, тогда как  $|d_m(t)|^2$  есть вероятность состояния, локализованного в  $m$ -й яме в момент  $t$  ( $m = 1, 2$ ).

Когда  $w$  не зависит от времени, решение уравнения (6) очевидно. Когда  $w(t)$  скачком изменяется при  $t = t_1$  от одного постоянного значения к другому, непрерывность  $d(t_1 - 0) = d(t_1 + 0)$  дает матрицу перехода  $d(t)$  от  $t < t_1$  к  $t > t_1$ . Адиабатическое решение также легко получить.

Рассмотрим общий случай. Для моделирования больших флуктуаций (таких, например, как моттовские) предположим, что  $\max_t |w(t)| \gg \omega$ . При  $|w| \gg \omega$  уравнение (6) дает

$$d \cong \hat{B}D, \quad (8a)$$

где

$$\hat{B}(F) = \begin{pmatrix} \exp(-iF) & 0 \\ 0 & \exp(iF) \end{pmatrix}, \quad F = \int_0^t w(t') dt', \quad (8)$$

а  $D$  не зависит от времени ( дальнейшие приближения по  $\omega/w$  приводят к точному решению). Вблизи  $t = 0$ , где  $w(t) \cong \dot{w}(0)t$ , подстановка  $d = \exp[-iw(0)t^2/2]f$  дает

$$\frac{d}{dt} [\dot{f}_1 + 2i\dot{w}(0)t f_1] + \omega^2 f_1 = 0,$$

$$f_2 = C - \frac{2\dot{w}(0)t f_1}{\omega}. \quad (9)$$

Это уравнение линейно по  $t$  и может быть решено методом Лапласа. Решение уравнения (9) позволяет сшить  $d$  из уравнения (8a) для  $t < 0$  и  $t > 0$ , и дает соответствующую матрицу перехода для  $D$  от  $t < 0$  к  $t > 0$ .

Замена  $t = \tau\omega/\dot{w}(0)$  в уравнении (6) показывает, что при  $|M| \gg 1$ , где  $M = \omega^2/\dot{w}(0)$ , имеет место адиабатический случай, тогда как  $|M| \ll 1$  отвечает быстро меняющемуся потенциалу. Предположим, что

$$w = Wf\left(\frac{t}{\theta}\right), \quad f(\pm\infty) = 1, \quad f(0) = 0,$$

$$W \gg \omega, \quad \frac{1}{\theta}. \quad (10)$$

Введем  $\eta = \omega\theta$ ,  $\zeta = W\theta$  (и, следовательно,  $M \sim \eta^2/\zeta$ ). Тогда получаем следующие результаты, которые легко подтвердить численным решением уравнения (6). Начнем со случая  $\dot{w}(0) \neq 0$  и рассмотрим в качестве примера  $f(\tau) = 2/\cosh \tau - 1$ .

1)  $\zeta \gg \eta \gg \sqrt{\zeta}$  отвечает адиабатической ситуации (см. рис. 1, кривая 1). Частица движется от  $A$  к  $B$  и затем возвращается в  $A$ ;

2)  $\sqrt{\zeta} \gg 1 \gg \eta$  — быстро меняющийся ( $M \ll 1$ ) потенциал, который быстро ( $\eta \ll 1$ , т.е.  $\theta \ll 1/\omega$ ) проходит интервал перехода  $|w| \lesssim \omega$  (см. рис. 1, кривая 2). Частица все время находится в яме  $A$ , без какого-либо заметного движения в сторону ямы  $B$ ;

3)  $\sqrt{\zeta} \gg \eta \gg 1$  — быстро меняющийся потенциал, который медленно ( $\eta \gg 1$ , т.е.  $\theta \gg 1/\omega$ ) движется через интервал перехода (см. рис. 2). Это единственная возможность для большой вероятности прыжка. Отметим, что ее условия достаточно специфические. Характерная частота  $1/\theta$  изменения потенциала должна быть мала в сравнении с экспоненциально малой частотой  $\omega$  (связанной с туннелированием). Изменение  $2W$  величины потенциала должно быть велико по сравнению с  $\omega^2\theta$ . Как следует из (8), оно осциллирует с  $W$  с периодом, приближенно равным  $\Delta W = \Delta\zeta/\theta$ ,

$$\Delta\zeta = \pi \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau) d\tau \right]^{-1}, \quad f(\tau_1) = f(\tau_2) = 0. \quad (11)$$

Физическая причина этой периодичности заключается в медленном изменении фазы волновой функции при  $\tau_1 < \tau < \tau_2$ . Функция  $f(t)$  дает

$$\Delta\zeta = \frac{3\pi}{2} [2\pi - 3 \ln(2 + \sqrt{3})] \cong 2,0205.$$

Изменение  $W$  меняет  $|d_2|^2$  от 0 до 1 (КВФ).

### 3. Туннелирование в переменном потенциале

Подход, развитый в предыдущем разделе, может быть обобщен с целью изучения влияния переменного потенциала на туннелирование [46]. Он, в частности, показывает, что переход через одномерный барьер в переменном потенциале имеет резонансную природу, если часть времени полный потенциал содержит потенциальную яму. Одномерная потенциальная яма всегда имеет собственное состояние. Мгновенное значение энергии собственного состояния в зависящей от времени яме изменяется со временем и исчезает вместе с ямой. Когда частица активируется в наименее мгновенное основное состояние  $\tilde{\phi}$  (более точно — в соответствующий мгновенный туннельный резонанс, имеющий конечную ширину), она остается там и поднимается вместе с этим "лифтом" без какой-либо энергии активации ("лифтовая"

резонансная активация — ЛРА). Когда  $\tilde{\omega}$  меньше, чем энергия падающей частицы  $\Omega$ , энергия активации равна нулю, хотя прошедшие частицы имеют мгновенную собственную энергию, значительно превосходящую  $\Omega$ . ЛРА происходит также и при более высоких размерностях, когда самая глубокая мгновенная яма имеет собственное состояние, и существует возможность проникновения всех типов волн в область, запрещенную геометрической оптикой. Конечно, все сказанное справедливо только для достаточно медленного переменного потенциала.

Поэтому зависящий от времени малопрозрачный барьер может служить моделью для экспоненциально возрастающих пространственно-временных флуктуаций и скоростей переноса (т.е. диффузии). Это позволяет предположить их общее происхождение. Данные результаты являются общими. Они справедливы для проникновения любых волн (квантовых, электромагнитных, звуковых, гидродинамических и др.) в классически запрещенную область.

Для более детального исследования резонансного прохождения в переменном потенциале рассмотрим нелинейную активацию и туннелирование через произвольный набор потенциальных барьеров и ям в присутствии переменного точечного гармонического потенциала. Задача точно сводится к единственному одномерному конечно-разностному уравнению. Активация проявляет фрактальные (типа бабочки Хофстадтера) и хаотические резонансы с параметрами обрезания, зависящими от величины переменного потенциала. На низких частотах активация приводит к сильной дисперсии и генерации высоких частот. Ниже вакуума существуют локализованные моды (отсутствующие в стационарном случае). Коэффициент прохождения может линейно зависеть от переменного потенциала лишь при определенных (промежуточных) частотах. Активация чувствительна к пространственной неоднородности переменного потенциала. Эти предсказания могут быть непосредственно проверены в экспериментах на квантовых точках с переменным напряжением затвора при низких частотах и с внешним микроволновым полем (модулирующим статический потенциал) при высоких частотах (см. эксперименты в [32]).

Многообразие физики активации является следствием суперпозиции нескольких факторов. Переменный потенциал может возбудить падающую частицу до энергии вблизи стационарного резонанса (при низких частотах это может произойти лишь в достаточно сильном переменном потенциале). Поэтому коэффициент прохождения сильно зависит от расстояния до этой энергии, определяющегося переходами "к" и "от" энергии, особенно между другими стационарными резонансами (которые расположены квазиэквидистантно в квазиклассике и эквидистантно в параболической яме). Переходы чувствительны к соизмеримости частоты переменного потенциала и межрезонансной частоты; это может приводить к фрактальной картине (типа бабочки Хофстадтера) резонансных частот. Они сильно зависят от неоднородности переменного потенциала: чем выше неоднородность, тем более выражены резонансы.

Начнем с точечного переменного потенциала и рассмотрим произвольный одномерный статический потенциал  $V_0(x)$ ,  $V_0(\pm\infty) = 0$ , который может содержать

произвольное число барьеров и ям. Волновая функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_0 \psi - 2f\psi \delta(x) \sin(\omega t). \quad (12)$$

Границные условия предполагают, что при  $x \rightarrow -\infty$  имеется только падающая волна с энергией  $\Omega$  и что при  $x \rightarrow \infty$  отсутствуют отраженные волны. Решение уравнения (12) может быть представлено в виде

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \exp(-i\Omega_n t); \quad \Omega_n = \Omega + n\omega, \quad (13)$$

где согласно уравнениям (12), (13):

$$\psi''_n + (\Omega_n - V_0)\psi_n = 0, \quad (14)$$

$$\delta\psi_n(0) = 0; \quad \delta\psi'_n(0) = if[\psi_{n+1}(0) - \psi_{n-1}(0)]. \quad (15)$$

Согласно граничным условиям

$$\begin{aligned} \psi_n &= \delta_{n0}\tilde{\varphi}_0^+ + v_n^- \varphi_n^- \quad \text{при } x < 0, \\ \psi_n &= v_n^+ \varphi_n^+ \quad \text{при } x > 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\varphi_n^-$ ,  $\varphi_n^+$ ,  $\tilde{\varphi}_0^+$  происходят из отраженной, прошедшей и (единственной) падающей волн соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0^+ &= \exp(ik_0x), \quad \varphi_n^- = \exp(-ik_n x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ \varphi_n^+ &= \exp(ik_n x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $k_n = \Omega_n^{1/2}$ , если  $\Omega_n > 0$  и  $k_n = |\Omega_n|^{1/2}$ , если  $\Omega_n < 0$  (локализованные моды ниже вакуума [19], отсутствующие в стационарном случае). Уравнения (13), (15), (16) позволяют точно свести, например,  $\psi(x)$  при  $x > 0$  к решению  $w_n$  конечно-разностного уравнения (которое очень удобно для численного анализа):

$$\psi(t, x) = \frac{\tilde{\chi}\tilde{\varphi}_0(0)}{\chi_0} \exp(-i\Omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n^+(x)}{\varphi_n^+(0)} w_n \exp(-in\omega t), \quad (18)$$

$$\chi_n w_n + if(w_{n+1} - w_{n-1}) = \chi_0 \delta_{n0}, \quad w_{\pm\infty} \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$\chi_n = \left[ \ln \frac{\varphi_n^-(0)}{\varphi_n^+(0)} \right]', \quad \tilde{\chi} = \left[ \ln \frac{\varphi_0^-(0)}{\tilde{\varphi}_0^+(0)} \right]', \quad (20)$$

где коэффициенты  $\chi_n$  относятся к стационарным решениям уравнения Шредингера. Рассмотрим квазиклассический  $U(x)$ , сводящийся к двум непрозрачным барьерам, разделенным ямой. Тогда известные трансферматрицы [47] явно выражают  $\chi_n$  через фазовые площади в яме ( $d_n = \int K_n dx$ ) и левом ( $S_1$ ) и правом ( $S_2$ ) барьерами ( $S = \int |K_n| dx$ ); волновой вектор  $K_n = \sqrt{\Omega_n - V_0}$ . С точностью  $\propto \exp[-2(S_1 + S_2)]$ ,  $\chi_n$  действительны, и уравнение (19) эрмитово. Приближенно уравнения (18)–(20) имеют вид:

$$\chi_n^* w_n + \frac{if^2}{2} (w_{n+1} - w_{n-1}) = \chi_0^* \delta_{n0}, \quad (21)$$

$$\chi_n^* = \cos(d_n) + i \exp[-2S^*(\Omega_n)] \sin(d_n), \quad (22)$$

$$\psi(t, 0) = \frac{q}{\chi_0^*} \exp[-S_1(\Omega) - i\Omega t] G(\omega t),$$

$$G(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \exp(-in\varphi), \quad (23)$$

где  $S^* = \min(S_1, S_2)$ ;  $|q| \sim 1, f^2 \sim 2f/k_0$ . Вне барьеров

$$\begin{aligned} \psi(t, x) \sim & \frac{1}{\chi_0^*} \exp[-S_1(\Omega) - S_2(\Omega) + ik_0x - i\Omega t] \times \\ & \times \sum w_n \exp \left[ i\omega x \left( \frac{d\omega_0}{dk_0} \right)^{-1} - i\omega t - \omega n \frac{dS_2(\omega_0)}{d\omega_0} \right]. \end{aligned}$$

Если не рассматривать экспоненциально малый второй член в уравнении (22), то однородное уравнение (21) становится эрмитовым. Оно имеет решение на резонансных частотах  $\omega$ , когда решение неоднородного уравнения (21) расходится. Рассмотрим  $n\omega \ll \Omega^*$ . Тогда  $d_n \cong d_0 + \pi n\omega/\Omega^*$ , где  $\Omega^*$  — расстояние между уровнями (приблизительно постоянное в квазиклассике). С такой точностью однородное уравнение (21) формально сводится к уравнению Харпера в центре зоны с фиктивным магнитным потоком  $\omega/\Omega^*$  на один узел [48]. Это уравнение имеет решения при фрактальных значениях потока и фазы  $d_0$  вблизи  $f^* \cong 1$  (см. его решение в [48]). Более точное вычисление показывает, что  $\chi_n$  (в уравнении (19)) осциллирует в зависимости от (в общем случае несоизмеримых) фазовых площадей в яме при  $x < 0$  и  $x > 0$ . Это "хаотизирует" спектр (набор более чем двух барьеров также дает нерегулярные осцилляции и приводит к хаотическому спектру). Поэтому вероятность туннелирования может быть хаотической и фрактальной функцией частоты переменного тока. Когда в уравнении (21)  $|f^*| \ll 1$  (что исключает фрактальность и хаос), возможно получить аналитическое выражение.

Рассмотрим случай  $|\cos(d_n)| \ll |f^*|$ . Тогда в основном приближении можно пренебречь в уравнении (21) членами с  $w_{n-1}$  при  $n > 0$  и  $w_{n+1}$  при  $n < 0$  и получить  $w_n$  экспоненциально убывающую с  $|n|$ :

$$w_n \propto |f^*|^{-|n|} \prod \cos(d_n).$$

Если  $|\cos(d_n)| \ll f^* \ll 1$ , это подразумевает достаточно узкую окрестность резонансной  $\Omega_{\text{res}} = \Omega + (v + \tilde{n})\omega$ , где  $\cos[d(\Omega_{\text{res}})] = 0$ ,  $v$  — целое число,  $|\tilde{n}| < 1/2$ . Тогда

$$\chi_n^* = \frac{i\Delta + (n - v - \tilde{n})\omega}{\tilde{\Omega}}, \quad (24)$$

где  $\Delta \sim \text{Im}(\chi_n^*)$  — естественная ширина резонанса,  $\tilde{\Omega}$  — межрезонансное расстояние. Периодическая функция  $G(\varphi)$  из уравнения (23), согласно (21) и (24), может быть представлена в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} G(\varphi) = & \sigma^* [\exp(2\pi\sigma^*) - 1]^{-1} \exp(-\sigma^*\varphi + ig \cos \varphi) \times \\ & \times \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \exp(\sigma^*\varphi' - ig \cos \varphi') d\varphi', \end{aligned} \quad (25)$$

$$\sigma^* = \sigma + i(\tilde{n} + v), \quad \sigma = \frac{\Delta}{\omega}, \quad g = \frac{f^* \tilde{\Omega}}{\omega} \equiv \frac{\tilde{f}}{\omega}.$$

Очевидно, что  $G(\varphi)$  нелинейно зависит от амплитуды переменного потенциала  $g$ . При помощи уравнений (18), (23) усиление прохождения  $p_n = |w_n|^2$  (благодаря активации на  $n\omega$ ) связано с фурье-компонентой  $w_n$  функции  $G(\varphi)$ . Уравнение (25) дает точное аналитическое решение в приближении (24). Оно содержит несколько частотных областей:

а) очень низкие частоты:  $\omega \ll \tilde{f}, \Delta^2/\tilde{f}$ , т.е.  $1 < |g| < \sigma^2$ . Это адиабатический режим, когда коэффициент прохож-

дения совпадает со своим значением в мгновенном стационарном потенциале. Если  $\tilde{f} \gg \Delta, v \ll \sigma$ , то функция  $G$  существенно нелинейна и немонохроматична. Когда  $t \lesssim \Delta/\omega\tilde{f} \ll 1/\Delta$ , функция  $G \cong 1$  (генерация высокой частоты  $\sim \omega\tilde{f}/\Delta$ ; когда  $\tilde{f} \sim \Delta^2/\Omega$ , то  $G \cong 1$  при  $t \sim 1/\Delta$ ). Затем  $G \sim \Delta/\tilde{f}\sin(\omega t)$  убывает до  $\Delta/\tilde{f}$ . Вблизи резонанса прохождение определяется энергиями  $\sim \omega\tilde{f}/\Delta < \Delta$ ;

б) низкие частоты:  $\Delta^2/\tilde{f} < \omega < \Delta$ , т.е.  $1 < \sigma^2 < |g|$ . В этой области  $G \sim 0.5(1+i)(\pi/g)^{1/2}, |G| < 1$  при  $t \lesssim 1/\omega\sqrt{g}$ , затем  $G \sim \Delta/[\tilde{f}\sin(\omega t)]$ . Заметим, что характерный временной масштаб  $\Delta^{-1}$ ;

в) промежуточные частоты:  $\tilde{f} < \omega < \Delta^2/\tilde{f}$ , т.е.  $|g| < 1, \sigma^2$ . Это случай линейного отклика;

г) высокие частоты:  $\omega > \Delta, \Delta^2/\tilde{f}$ , т.е.  $\sigma^2 < 1, |g|$ . Когда  $\sigma, |\tilde{n}| \ll 1$ , то

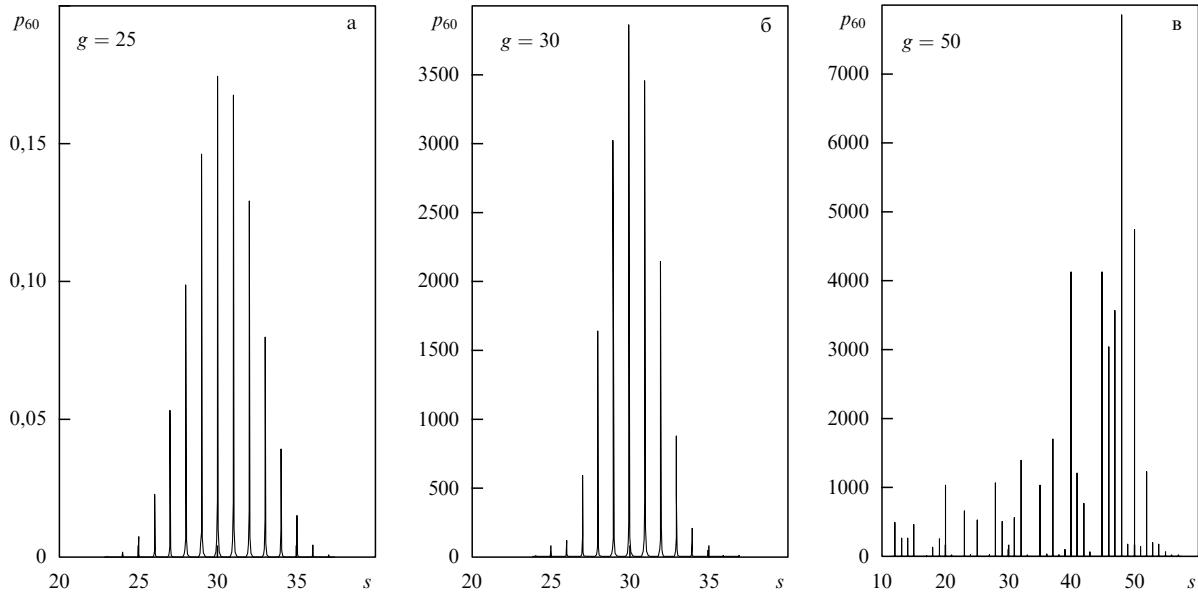
$$G(\varphi) = (-1)^{v/2} \frac{\sigma^*}{i\tilde{n} + \sigma} J_v(g) \exp(-iv\varphi + ig \cos \varphi). \quad (26)$$

Таким образом, функция  $|G(\omega t)|^2$  близка к стационарной, нелинейна и осциллирует с амплитудой переменного потенциала и  $\omega$ . Она имеет резонанс при  $|\tilde{n}| \sim \sigma$ ; когда  $\tilde{f} \gg \omega$ , то  $|G|^2 \propto \omega/\tilde{f}$ . Энергия значительно возрастает на величину  $\sim \hbar\tilde{f}$ . Согласно уравнению (25), фурье-компоненты  $w_n \sim [\sigma^*/(|\tilde{n}| + \sigma)] J_{n-v}(g) J_v(g)$ . Она экспоненциально обрезается при  $|v| > g$  и/или  $|n - v| > g$  (рис. 3). Достаточно большие  $f$  допускают в резонансе значительное увеличение энергии. В основном приближении ток близок к стационарному (естественно, благодаря суперпозиции различных частот) и существенно нелинейный.

Полное прохождение в момент  $t$  пропорционально  $|G(\omega t)|^2$ . Оно зависит от начальной частоты  $\Omega$ , силы переменного потенциала  $\tilde{f}$  и частоты  $\omega$ . Предположим, что  $|\Omega - \Omega_{\text{res}}| \equiv \Omega' \gg \omega$ . Тогда в адиабатическом случае при  $\tilde{f} > |\Omega'|$  получаем резонанс в прохождении при  $\tilde{f}\sin(\omega t) = \Omega'$  с шириной  $\omega\delta t \sim \Delta/\Omega'$  и  $G_{\max} \sim \Omega'/\Delta$ . Высокочастотное прохождение, согласно уравнению (26), не зависит от времени и имеет резонанс при  $\tilde{f} \cong \Omega'$  с относительной шириной  $\delta\tilde{f}/\Omega' \sim |\omega/\Omega'|^{2/3}$  и  $G_{\max} \sim (\Omega'/\omega)^{2/3}/(|\tilde{n}| + \sigma) < (\Omega'/\Delta)^{2/3}$ . В обоих случаях происходит резонансная активация на величину  $\tilde{f}$ .

#### 4. Квантовая турбулентность и резонансное туннелирование

Кулоновское взаимодействие в резонанском туннелировании приводит к турбулентности специфической квантовой природы. Действительно, предположим, что энергия падающей частицы немного превосходит значение энергии собственного состояния в яме. Если случайная флуктуация увеличивает заряд ямы, и, следовательно, кулоновскую энергию и энергию собственного состояния, то процесс туннелирования приближается к резонансу. Это приводит к увеличению коэффициента прохождения и, следовательно, заряда ямы. Поэтому уровень в яме еще более приближается к энергии падающей частицы, это еще более увеличивает заряд ямы и т.д., т.е. флуктуация резко возрастает. Если, однако, какая-либо другая флуктуация уменьшает заряд ямы, и, следовательно, энергию собственного состояния, туннелирование отодвигается от резонанса и его величина уменьшается. Это еще больше уменьшает заряд ямы и энергию уровня и т.д. Поэтому такая флуктуация также вырастает.



**Рис. 3.** Усиление коэффициента прохождения  $p_{60}$  (благодаря активации на  $60\omega$ ) в зависимости от приведенной энергии падающей волны  $s = (\Omega_{\text{res}} - \Omega)/\omega$  для  $\sigma = 0,01$ ,  $g = 25$  (а),  $30$  (б),  $50$  (в). Отметим, что множественные резонансы и их обрезание (по  $s$  и  $g$ ), больше зависят от амплитуды переменного потенциала, чем от частоты.

Увеличение флуктуаций может быть экспоненциально большим, так как плотность заряда в яме при резонансе экспоненциально велика в сравнении с плотностью заряда в падающем потоке и экспоненциально мала вне ширины резонанса [47]. Даже когда падающий поток очень мал, подобные случайные флуктуации приводят к специфически квантовой турбулентности, которая характерна для резонансного туннелирования. Резонансное туннелирование и, вместе с ним, турбулентность, наиболее выражены в одномерном случае, а также в структуре с двумя барьераами в сильном магнитном поле, которое эффективно сводит ее к одномерному случаю (см. ниже). Характерный временной масштаб турбулентности связан с шириной собственного состояния. На меньшем временному масштабе туннельный ток осциллирует [16], и может иметь вид, характерный для кулоновской блокады [17]; в общем случае заряд, перенесенный за один период этих осцилляций, является дробным (см. ниже). Аналогичные рассуждения применимы к резонансному туннелированию незатухающего тока Ааронова – Бома через квантовую точку, но с тремя оговорками. Величина флуктуаций энергии должна превосходить расстояние между уровнями в кольце (периметр которого должен быть соответственно тем больше, чем ниже его температура). Диссипация подразумевает, что переменный ток может существовать только на временных масштабах, малых по сравнению с временем диссипации. Магнитное поле, изменяющееся с соответствующей частотой, позволяет наблюдать внутренние осцилляции, нестабильность и турбулентность такого квазинезатухающего тока.

Рассмотрим характерные масштабы времени. Самый короткий масштаб относится к периоду классических осцилляций в потенциальной яме. Этот масштаб составляет обычно доли наносекунды и определяет [16] период осцилляций. Нестабильность и турбулентность развиваются в течение времени жизни частицы в яме. Последнее обратно пропорционально проницаемости барьера и

может достигать масштаба микросекунд. Время диссипации зависит от электрон-фононного рассеяния и излучения, оно порядка 0,1 с при 10 мК. Переменный квазинезатухающий ток может наблюдаться, когда периметр кольца (в мкм)  $\gtrsim 10^{-7}v_F/T$ , где температура  $T$  измеряется в градусах Кельвина, а скорость Ферми  $v_F$  в см  $\text{s}^{-1}$ .

В настоящей статье рассматривается хартири-жидкость. Последняя описывается нелинейным уравнением Шредингера, которое имеет много приложений в физике и подробно изучено [49]. Однако обычные подходы (в частности, солитонный) едва ли применимы к системе, находящейся во внешнем поле, и, особенно, к резонансному туннелированию, когда линейный отклик зарядовой плотности, который экспоненциально больше в потенциальной яме, чем вне ее, приводит к большой пространственной неоднородности. Выше именно этой неоднородностью объяснялась физика резонансной турбулентности.

Рассмотрим задачу, которая сводится к одномерной. Тогда нелинейное уравнение Шредингера в статическом потенциале  $U(x)$  со взаимодействием  $V(x, x') = V(x', x)$  имеет вид [42]:

$$i\dot{\psi} = \hat{H}\psi \equiv -\psi'' + U\psi + \psi \int V(x, x')|\psi(x', t)|^2 dx', \quad (27)$$

где  $\dot{\psi} \equiv \partial\psi/\partial t$ ,  $\psi' \equiv \partial\psi/\partial x$ , а  $V(x, x') = V(x', x)$  позволяет учитывать также неоднородность диэлектрической проницаемости  $\epsilon_d$  (если  $\epsilon_d$  однородна, то  $V(x, x') = V(|x - x'|)$ ). Сохраняющаяся энергия  $\epsilon$  равна

$$\epsilon = i \int \psi^* \dot{\psi} dV - \frac{1}{2} \int V(x, x') |\psi(x)|^2 |\psi(x')|^2 dx dx' \quad (28)$$

(звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Для потенциала  $U$ , состоящего из двух барьераов и ямы между ними, начнем рассмотрение со стационарного решения  $\psi = \psi_0(x) \exp(-i\omega_0 t)$ . Затем докажем его неустойчивость, найдем зависящие от времени решения и исследуем их

устойчивость. Из уравнения (27) получим для  $\psi_0(x)$

$$\psi_0'' + \left[ \psi_0 - U - \int V(x, x') |\psi_0(x')|^2 dx' \right] \psi_0 = 0. \quad (29)$$

Предположим, что  $U(-x) = U(x)$  и каждый барьер непрозрачен, а падающий ток достаточно слаб, чтобы можно было пренебречь членом, описывающим взаимодействие вне ямы. Если энергия падающей волны  $\omega_0$  находится в пределах ширины собственного уровня ямы  $\delta\omega$ , то  $|\psi_0|$  внутри ямы экспоненциально больше, чем вне ее. В квазиклассическом случае  $|\psi_0|$  быстро осциллирует в яме, и в основном приближении можно заменить  $|\psi_0|^2$  его средним значением  $\langle |\psi_0|^2 \rangle$  в яме. Если  $\omega_0$  лежит вне ширины  $\delta\omega$ , то  $|\psi_0|$  нигде не превышает своего значения  $|a|$  в падающей волне, и энергия взаимодействия может быть всюду опущена. Итак, в общем квазиклассическом случае эффективный потенциал в уравнении (29) есть

$$U_{\text{eff}} \cong U + \langle |\psi_0|^2 \rangle \int V(x, x') dx',$$

и коэффициент прохождения  $T$  равен [47]

$$\begin{aligned} T &\cong \frac{1}{1 + \exp(-4S) \sin^2 \alpha}; \\ \alpha &= 2 \int_0^{x_1} k(x) dx, \quad S = \int_{x_1}^{x_2} |k(x)| dx, \end{aligned} \quad (30)$$

$$k = (\omega_0 - U_{\text{eff}})^{1/2}, \quad U_{\text{eff}}(x_1) = U_{\text{eff}}(x_2) = 0, \quad x_1 < x_2. \quad (31)$$

Коэффициент прохождения связан с  $\langle |\psi_0|^2 \rangle / |a|^2$  соотношением [47]:

$$T \sim \frac{\langle |\psi_0|^2 \rangle}{|a|^2} \exp(-2S). \quad (32)$$

Таким образом, уравнения (30) и (31) определяют  $T$  (рис. 4, где  $\lambda = 2x_1$ ,  $\Lambda = x_2 - x_1$ ,  $U_{\text{max}} = \max(U)$ ). Средняя энергия взаимодействия в яме порядка  $e^2/\lambda$ . Поэтому, когда  $|a|^2 \gtrsim (U_{\text{max}}/e^2) \exp(-2S)$ , энергия падающей волны  $\omega_0$  приводит к нерезонансному туннелированию и многократным резонансам (с результирующей немонотонной зависимостью тока от напряжения — ср. с экспериментом в [50]). Последние связаны с самоорганизующимся процессом накопления заряда в яме, который "поднимает" различные собственные уровни до резонанса с энергией падающей частицы.

Рассмотрим устойчивость стационарного туннелирования. Согласно уравнению (27), бесконечно малое возмущение к  $\psi_0 \exp(-i\omega_0 t)$  может быть записано как

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \exp(-i\omega_0 t) + \psi_+ \exp(-i\omega_+ t) + \psi_- \exp(-i\omega_- t), \\ \omega_{\pm} &= \omega_0 \pm \omega. \end{aligned} \quad (33)$$

Введем вектор  $\Psi$  с компонентами  $\psi_+$  и  $\psi_-$ , эрмитову матрицу  $\tilde{W}(x, x')$  с компонентами

$$[\tilde{W}(x, x')]_{++} = V(x, x') \psi_0(x) \psi_0^*(x'),$$

$$[\tilde{W}(x, x')]_{+-} = V(x, x') \psi_0(x) \psi_0(x')$$

и оператор

$$\hat{W}\Psi \equiv \int \tilde{W}(x, x') \Psi(x') dx'.$$

В линейном приближении уравнения (27), (33) дают

$$\begin{aligned} (\hat{H}_0 + \hat{W} - \omega \hat{\sigma}_z) \Psi &= \omega_0 \Psi, \\ \hat{H}_0 &= -\frac{\partial}{\partial x^2} + U + \int V(x, x') |\psi_0(x')|^2 dx', \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\hat{\sigma}_z$  (естественно, формально) —  $z$ -проекция оператора спина. Если падающий ток фиксирован,  $\Psi$  должна содержать только уходящие волны, т.е. стационарную утечку из ямы. Это, очевидно, невозможно при любом вещественном собственном значении  $\omega_0$  эрмитовского оператора, так как [18]  $\text{Im}(\omega) \sim \delta\omega$  и поэтому, согласно уравнению (33), любое стационарное туннелирование в модели Хартри неустойчиво (в приближении  $\delta\omega = 0$  собственные значения  $\omega$  уравнения (34) приводят к возможности соответствующего резонанса). Аналогичные рассуждения показывают, что переменное решение уравнения (27) неустойчиво.

Точное аналитическое решение может быть найдено в мелкой яме, т.е. в модели  $U = U_1(x) - U_0 \delta(x)$ ,  $V(x, x') = V(x)\delta(x)\delta(x')$ . В этом случае при  $x \neq 0$  уравнение (27) линейно, и  $\psi_s$  (где  $s = +1$  для  $x > 0$  и  $s = -1$  для  $x < 0$ ) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \psi_s &= \left[ \frac{a}{2} (1-s) \psi_i(x) + \right. \\ &\quad \left. + \int a_{\omega s} \psi_{\omega s}(x) \exp(-i\omega t) d\omega \right] \exp(-i\omega_0 t). \end{aligned} \quad (35)$$

Вне барьера падающая волна  $\psi_i(x) = \exp(ix\sqrt{\omega_0})$ , а отраженная ( $s = -1$ ) и прошедшая ( $s = +1$ ) волны имеют вид  $\psi_{\omega s}(x) = \exp(i|x|\sqrt{\omega_0 + \omega})$ . Условия сшивки для  $\psi(\pm 0)$  и  $\psi'(\pm 0)$ , согласно уравнению (27), сводят  $\psi$  к функции  $\varphi(t) = \psi(+0, t) = \psi(-0, t)$  и дают для нее уравнение

$$k(\omega) \varphi_{\omega} = b \delta(\omega) + V_0 (|\varphi|^2 \varphi), \quad (36)$$

$$k(\omega) = \left[ \ln \frac{\psi_{\omega+}(0)}{\psi_{\omega-}(0)} \right]'; \quad b = a \psi_i(0) \left[ \ln \frac{\psi_i(0)}{\psi_{0-}(0)} \right]'. \quad (37)$$

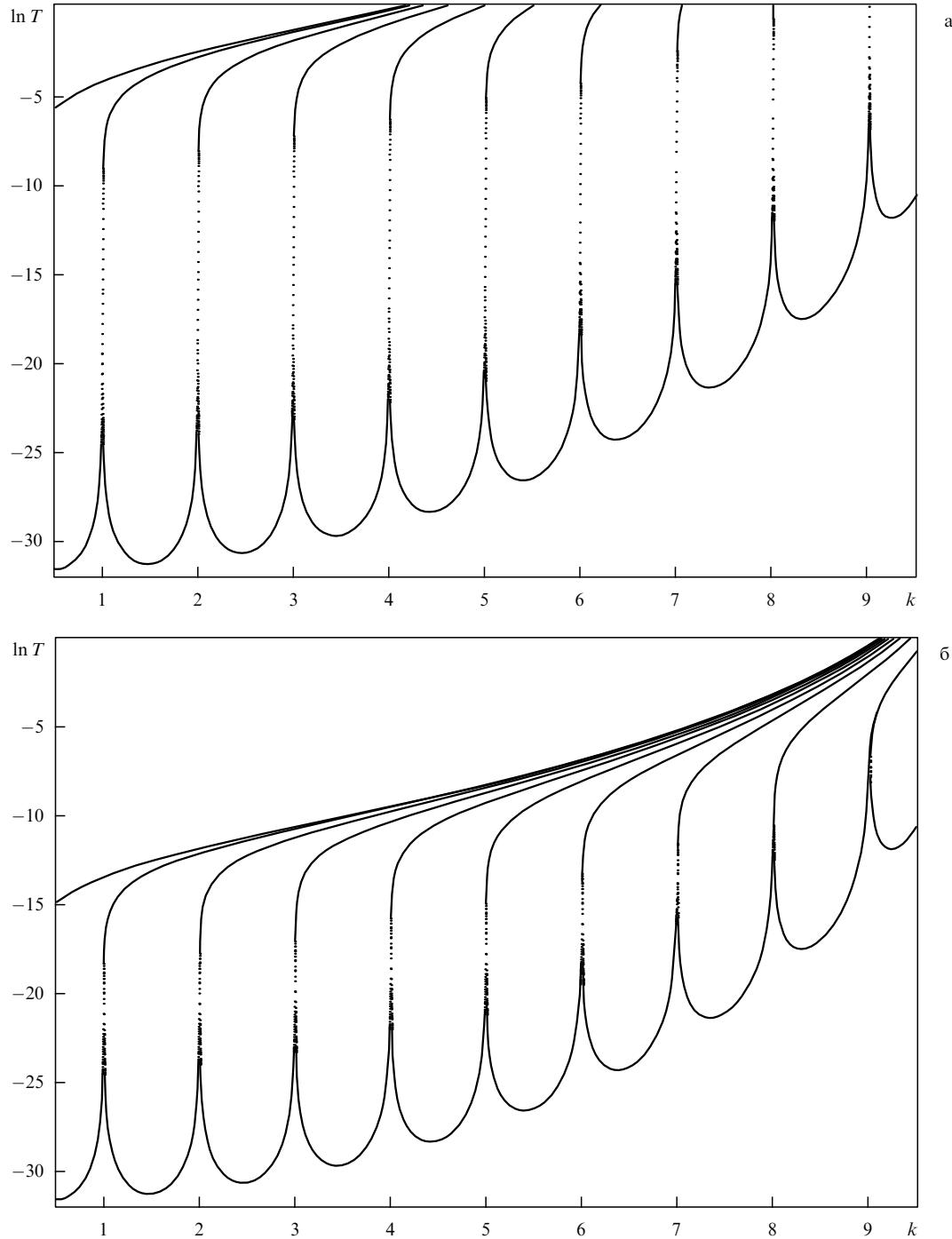
Нижний индекс в уравнении (36) обозначает фурье-компоненту. Когда  $U_1(x)$  малопрозрачен, коэффициенты  $k(\omega)$  и  $b$  легко сосчитать в приближении ВКБ для стационарного уравнения. Тогда  $\text{Re}[k(\omega)] \cong \cong 2\sqrt{q^2 - \omega}$ ,  $q = [\max(U_1) - \omega_0]^{1/2}$ ;  $\text{Im}[k(\omega)] \sim \exp(-2S)$ ,  $|b| \sim a \exp(-2S)$ . Простые алгебраические вычисления показывают неустойчивость стационарного решения (36).

Чтобы исследовать общий случай, рассмотрим квазистационарную функцию  $\varphi$ , которая сводится к низким частотам  $\omega \ll q^2$ . Тогда  $k(\omega) \cong k_1 + (\omega/q) + ik_2$ ,  $k_1 = \text{Re}[k(0)]$ ,  $k_2 = \text{Im}[k(0)]$  и уравнение (36) может быть переписано в виде:

$$(k_1 + ik_2)\varphi + \frac{i\dot{\varphi}}{q} = b + V_0 |\varphi|^2 \varphi. \quad (38)$$

Введем

$$\begin{aligned} b &= \frac{\beta k_1^{3/2}}{V_0^{1/2}} \exp(iB), \quad \varphi = \left( \frac{k_1}{V_0} \right)^{1/2} w \exp(iB - iS); \\ \frac{k_2}{k_1} &= r, \quad t - t_0 = \frac{\tau}{k_1 q}, \end{aligned} \quad (39)$$



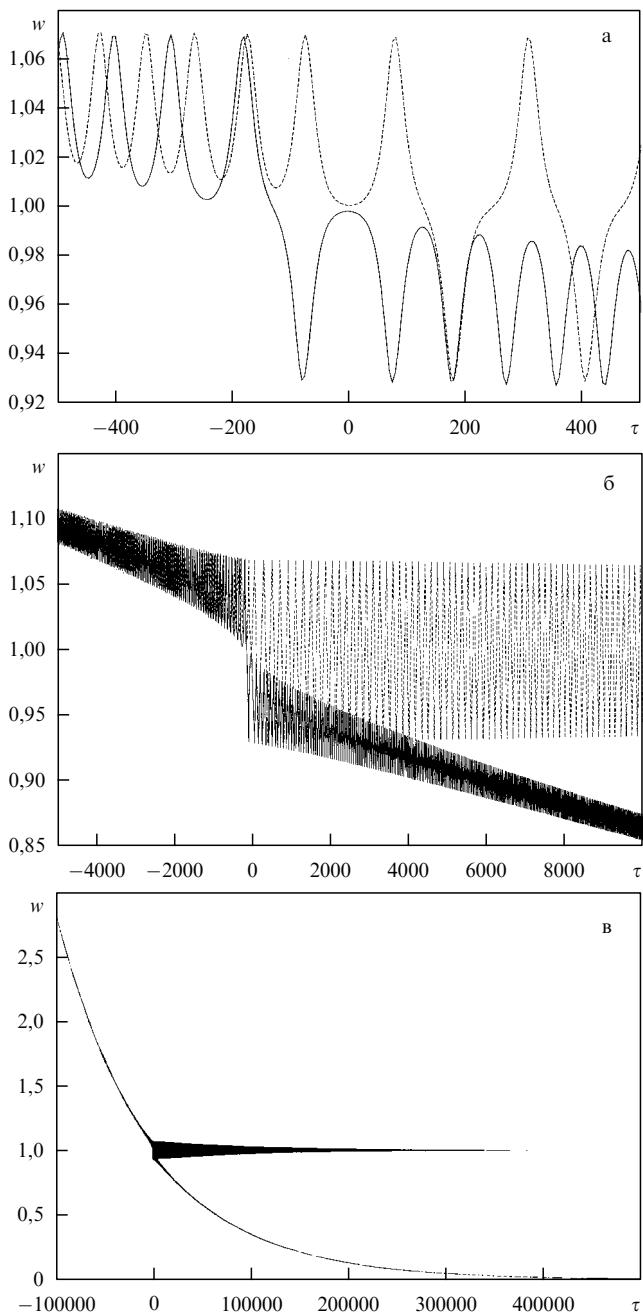
**Рис. 4.** Коэффициент прохождения  $T$  через идентичные непрозрачные потенциальные барьеры, разделенные квазиклассической (глубокой) ямой, как функция безразмерного волнового вектора падающего потока  $\tilde{k} = \lambda\sqrt{\omega_0}$  для различных значений безразмерной плотности падающих частиц  $\tilde{\rho} = e^2|a|^2\lambda^2$ . Безразмерная высота потенциала  $\Lambda^2 U_{\max} = 1000$ ;  $\lambda$  и  $\Lambda = \lambda/3$  — ширины ямы и барьера;  $|a|$  — амплитуда падающей волны;  $\tilde{\rho} = 10^{-4}$  (а) и  $\tilde{\rho} = 1$  (б). Отметим, что при  $\tilde{\rho} = 1$  получается 20 резонансных ветвей при  $\tilde{k}/\pi = 9$  (каждый резонанс настолько узок, что его ширина не может быть показана в данном масштабе).

где  $w$  и  $\beta$  положительны, а  $t_0$  — произвольная константа. Тогда уравнение (38) сводится к

$$\frac{dw}{d\tau} = \beta \sin S - rw, \quad \frac{dS}{d\tau} = w^2 + \beta w^{-1} \cos S - 1. \quad (40)$$

При  $c_1 > 2\beta$ ,  $r = 0$  функция  $\varphi(t)$  периодична по  $t$  с периодом  $\Delta t = (2/\sqrt{c_1})K(\sqrt{2\beta/c_1})$ , где  $K$  — полный эллиптический интеграл. Если  $c_1 \leq 2\beta$ , то  $|\varphi|$  имеет вид,

характерный для кулоновской блокады. Перенос заряда за период  $\varphi$  зависит от  $\varphi(t_0)$  и в общем случае является дробным. Величина  $r$  пропорциональна прозрачности барьера  $\exp(-2S)$ . Она экспоненциально мала для мало-прозрачного барьера и допускает возмущения по  $rw$  в уравнении (40). При  $|\tau| \gg 1/r$ , в зависимости от начальных условий, решение либо расходится при  $\tau \rightarrow -\infty$  и приближается к стационарному решению (как показано выше — неустойчивому) при  $\tau \rightarrow \infty$ , либо наоборот.



**Рис. 5.** Безразмерная амплитуда  $w$  волнивой функции в центре ямы как функция безразмерного времени  $\tau$  для  $\beta = 0,0025$ ,  $r = 10^{-5}$ ;  $S(0) = 0$  и  $w(0) = 0,997494$  (сплошная линия) и  $w(0) = 1$  (штриховая линия) в большом (а), среднем (б) и малом (в) масштабах. Отметим расходимость этих решений друг от друга.

Численные расчеты для уравнения (40) подтверждают полученные выше аналитические результаты (рис. 5).

Уравнения (40) проясняют происхождение неустойчивости. Они имеют решения, близость которых допускает флуктуационно-индукционные переходы (рис. 5а). В частности, их приближение к точке ветвления  $w = 1$  делает момент перехода от  $w > 1$  к  $w < 1$  неустойчивым. Однако по мере удаления от точки ветвления решения все более отдаляются друг от друга (рис. 5б, в).

## Список литературы

- См., например, (а) Hauge E, Stovneng J A *Rev. Mod. Phys.* **61** 917 (1989);  
(б) Landauer R, Martin Th *Rev. Mod. Phys.* **66** 217 (1994)
- MacColl L A *Phys. Rev.* **40** 621 (1932)
- Wigner E P *Phys. Rev.* **98** 145 (1955)
- Büttiker M, Landauer R *Phys. Rev. Lett.* **49** 1739 (1982); *Phys. Scripta* **32** 429 (1985)
- См., например, Landauer R *Nature (London)* **341** 567 (1989); Landauer R, Martin Th *Solid State Commun.* **84** 115 (1992); Fisher M P A *Phys. Rev. B* **37** 75 (1988); Jauho A-P *Phys. Rev. B* **41** 12327 (1990) и ссылки в этих работах
- Bosanac S *Phys. Rev. A* **28** 577 (1983)
- Band W *Found. Phys.* **18** 549 (1988)
- Azbel' M Ya *Phys. Rev. B* **43** 6847 (1991)
- Aharonov Y, Vaidman L *Phys. Lett. A* **178** 38 (1993)
- Enders A, Nimtz G *J. Phys. I (Paris)* **2** 1693 (1992); **3** 1089 (1993); *Phys. Rev. E* **48** 632 (1993); Steinberg A M, Kwiat P G, Chiao R Y *Phys. Rev. Lett.* **71** 708 (1993); Ranfagni A, Fabeni P, Pazzi G P, Mugnai D *Phys. Rev. E* **48** 1453 (1993); Kwiat P G, Steinberg A M, Chiao R Y et al. *Phys. Rev. A* **47** R2472 (1993)
- Landauer R *Nature (London)* **365** 692 (1993)
- Azbel' M Ya, Malomed B A *Phys. Rev. Lett.* **71** 1617 (1993); см. также [36]
- Deutch J M, Low F E *Ann. Phys. (N.Y.)* **228** 184 (1993)
- См., например, Leggett A J *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **69** 80 (1980); Esteve D et al. *Phys. Scripta* **T29** 121 (1989)
- Ивлев Б И, Мельников В И *ЖЭТФ* **90** 2208 (1986) [*Sov. Phys. JETP* **63** 1295 (1986)]; Ivlev B I, Mel'nikov V I *Phys. Rev. Lett.* **55** 1614 (1985). Численное исследование см. в Barker J R *Physica B* **134** 22 (1985); Ravaioli U et al. *Physica B* **134** 36 (1985)
- Ricco B, Azbel' M Ya *Phys. Rev. B* **29** 1970 (1984); Brown E R et al. *Appl. Phys. Lett.* **55** 1777 (1989) и ссылки в этих работах. См. обзор Berry B K, in *Physics of Quantum Electron Devices* (Springer Series in Electronics and Photonics 28, Ed. F Capasso) (Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990) Ch. 4 и ссылка 24
- См., например, Averin D V, Likharev K K, in *Mesoscopic Phenomena in Solids* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 30, Eds B L Altshuler, P A Lee, R A Webb) (Amsterdam, New York: North Holland, Elsevier, 1991) Ch. 6 и ссылки в этой работе
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Наука, 1972) а) § 53, 6, §§ 46–48, в) § 45 и задачи к нему
- Azbel' M Ya *Phys. Rev. Lett.* **64** 1553 (1990) и ссылки в этой работе
- Khait Yu L *Phys. Rep.* **99** 237 (1983); Khait Yu L et al. *Phys. Rev. B* **42** 9000 (1990) и ссылки в этой работе
- Azbel' M Ya, Platzman P M *Phys. Rev. Lett.* **65** 1376 (1990)
- Mott N F J. *Non-Cryst. Solids* **1** 1 (1968)
- Mott N F, Davis E A *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials* (Oxford: Clarendon Press; New York: Oxford Univ. Press, 1979)
- Capasso F, Datta S *Phys. Today* **43** (2) 74 (1990) и ссылки в этой работе
- Prigodin V N, Raikh M E *Phys. Rev. B* **43** 14073 (1991) и ссылки в этой работе
- (а) Heller E J, Tomsovic S *Phys. Today* **46** (7) 38 (1993); Greenberger D M, Horne M A, Zeilinger A *Phys. Today* **46** (8) 22 (1993);  
(б) Siegel R W *Phys. Today* **46** (10) 64 (1993); Kastner M A *Phys. Today* **46** (1) 24 (1993)
- Reed M A et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 535 (1988)
- Chang L L, Esaki L, Tsu R *Appl. Phys. Lett.* **24** 593 (1974)
- Goldman V J, Tsui D C, Cunningham J E *Phys. Rev. B* **36** 7635 (1987)
- Zhang C et al. *Phys. Rev. Lett.* **72** 3397 (1994)
- Zaslavsky A et al. *Appl. Phys. Lett.* **53** 1408 (1988); Zaslavsky A et al. *Phys. Rev. B* **40** 9829 (1989)
- Goldman V J, Tsui D C, Cunningham J E *Phys. Rev. Lett.* **58** 1256 (1987); **59** 1623 (1987); Sollner T C L G *Phys. Rev. Lett.* **59** 1622 (1987)
- Jona-Lasinio G, Presilla C, Capasso F *Phys. Rev. Lett.* **68** 2269 (1992); Price P J *Superlattices and Microstructures* **20** 253 (1996);

- Jona-Lasinio G, Presilla C, Sjöstrand J *Ann. Phys.* (N.Y.) **240** 1 (1995)
34. Yacoby A et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 4047 (1995); Yacoby A, Schuster R, Heiblum M *Phys. Rev. B* **53** 9583 (1996); Buks E et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 4664 (1996); Schuster R et al. *Nature* (London) **385** 417 (1997). Эти эксперименты стимулировали подробное теоретическое исследование кулоновских взаимодействий в квантовой точке — см. Yeyati A L, Büttiker M *Phys. Rev. B* **52** R14360 (1995); Hackenbroich G, Weidenmüller H A *Phys. Rev. Lett.* **76** 110 (1996); Bruder C, Fazio R, Schoeller H *Phys. Rev. Lett.* **76** 114 (1996); Oreg Yu, Gefen Yu *Phys. Rev. B* **55** 13726 (1997)
35. См., например, Lang A R et al. *Philos. Mag. B* **58** 153 (1988); Hunt A, Pollak M, in *Hopping and Related Phenomena* (Advances in Disordered Semiconductors, Vol. 2, Eds H Fritzsche, M Pollak) (Singapore, Teaneck, NJ: World Scientific, 1990); Pollak M, in *Modern Problems in Condensed Matter Science* (Eds V M Agranovich, A A Maradudin) (Amsterdam, New York: North Holland, Elsevier Pub. Co., 1991) p. 175; Long A R, in *Modern Problems in Condensed Matter Science* (Eds V M Agranovich, A A Maradudin) (Amsterdam, New York: North Holland, Elsevier Pub. Co., 1991) p. 207
36. Azbel' M Ya *Phys. Rev. Lett.* **68** 98 (1992)
37. Azbel' M Ya *Phys. Rev. Lett.* **73** 138 (1994)
38. Bagwell P F, Lake R K *Phys. Rev. B* **46** 15329 (1992)
39. Iñarrea J, Platero G, Tejedor C *Phys. Rev. B* **50** 4581 (1994); Пашковский А Б *ЖЭТФ* **109** 1779 (1996) [*JETP* **82** 959 (1996)]
40. Azbel' M Ya *Europhys. Lett.* **21** 227 (1993)
41. Orellana P, Anda E, Claro F *Phys. Rev. Lett.* **79** 1118 (1997)
42. Bogolubov N J. *Phys. USSR* **11** 23 (1947); Питаевский Л.П. *ЖЭТФ* **40** 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP* **13** 451 (1961)]; Gross E P *J. Math. Phys.* **4** 195 (1963)
43. Spohn H *Rev. Mod. Phys.* **52** 569 (1980)
44. Azbel' M Ya *Solid State Commun.* **91** 439 (1994)
45. Schulman L S *Ann. Phys.* (N.Y.) **212** 315 (1991)
46. Azbel' M Ya, Tsukernik V M *Europhys. Lett.* **41** 7 (1998)
47. Azbel' M Ya *Phys. Rev. B* **28** 4106 (1983)
48. Azbel' M Ya *Phys. Rev. Lett.* **43** 1954 (1979) и ссылки в этой работе
49. Ring P, Schuck P *The Nuclear Many-Body Problem* (New York: Springer-Verlag, 1980); Robinson P A *Rev. Mod. Phys.* **69** 507 (1997); Romeau Y, Rica S *Phys. Rev. Lett.* **72** 2426 (1994); Newell A C *Solitons in Mathematics and Physics* (Philadelphia, Pa.: SIAM, 1985) и ссылки в этой работе
50. Frydman A, Ovadyahu Z *Phys. Rev. B* **55** 9047 (1997)

## Time, tunneling and turbulence

**M.Ya. Azbel'**

*School of Physics and Astronomy,  
Tel Aviv University, Ramat Aviv, Tel Aviv 69978, Israel  
Fax (972-3) 642-29 79  
E-mail: azbel@taunivm.tau.ac.il*

The paper considers tunneling traversal time; tunneling through an alternating potential, its enhancement and its fractal (Hofstadter butterfly) and chaotic resonances; the Hartree liquid resonance tunneling and its (specifically quantum) instability and turbulence.

PACS numbers: 72.15.Rn, 72.80.Ng, 73.40.Gk

Bibliography — 50 references

*Received 24 February 1998*