

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л.Д. ЛАНДАУ

Сингулярность, начальные условия и квантовое туннелирование в современной космологии

И.М. Халатников, А.Ю. Каменщик

Рассмотрены такие ключевые вопросы современной космологии как проблема космологической сингулярности, начальные условия космологической эволюции и гипотеза квантового туннелирования. Анализируется связь между новейшими тенденциями в космологии и идеями Л.Д. Ландау, выдвинутыми много лет назад. Особое внимание уделяется осцилляторному приближению к сингулярности, процессам квантового туннелирования, определяющим волновую функцию Вселенной в присутствии комплексного скалярного поля, и роли квантовых поправок в этих процессах. Кроме того, исследуется классическая динамика замкнутых космологических моделей с действительным скалярным полем с точки зрения таких ее свойств как хаос, фрактальность и возможность избежать сингулярности.

PACS numbers: 98.80.Hw, 98.80.Bp, 04.60.Ds

Содержание

1. Введение (593).
 2. Осцилляторный подход к сингулярности (594).
 3. Квантовое туннелирование и волновая функция Вселенной, модель с комплексным скалярным полем (597).
 4. Энергетический масштаб инфляции и петлевые эффекты (601).
 5. Гамильтоново квантование гравитации и квантовая самосогласованность (603).
 6. Динамика космологических моделей со скалярным полем: хаос и фрактальность (605).
 7. Пертурбативные методы в космологии (608).
 8. Заключение (610).
- Список литературы (610).

1. Введение

В 50-е годы в беседах с учениками Лев Давидович Ландау называл три проблемы, наиболее важные для теоретической физики и ожидавшие своего решения: проблема космологической сингулярности, проблема фазовых переходов и проблема сверхпроводимости [1]. Сейчас можно говорить о том, что в исследовании сверхпроводимости [2] и фазовых переходов [3] произошел решающий перелом. В то же время проблема космологической сингулярности по-прежнему является интригующей, несмотря на немалые достижения исследователей, изучающих различные ее аспекты.

И.М. Халатников, А.Ю. Каменщик. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 117334 Москва, ул. Косыгина 2, Россия
Тел. (095) 137-32-44
Факс (095) 938-20-77
E-mail: khalat@itp.ac.ru, kamen@landau.ac.ru

Статья поступила 5 марта 1998 г.

Так, Пенроузом и Хокингом [4] были доказаны утверждения о невозможности неограниченного продолжения геодезических при определенных условиях. Из этого делался вывод о существовании особенности в общем решении уравнений Эйнштейна. Однако эти теоремы, использующие топологические методы, не давали возможности установить конкретный аналитический характер особенности. И только в работах Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова [5, 6] и В.А. Белинского, Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова [7, 8, 12] был исследован аналитический характер общих решений уравнений Эйнштейна в окрестности особенности. Важно то, что полученные решения зависели от необходимого числа произвольных функций, что и говорило об их общности [9, 10]. В этих же работах был впервые обнаружен удивительный феномен осцилляторного подхода Вселенной к сингулярности [5–13], получивший в англоязычной литературе название *Mixmaster Universe* [14]. В рамках простой модели с тремя степенями свободы (модель Вселенной Бианки-IX) было показано, как Вселенная приближается к сингулярности таким образом, что сжатие по двум осям сопровождается расширением по третьей, причем оси меняются ролями по довольно сложному закону. Динамика осцилляторного подхода к сингулярности оказалась чрезвычайно богатой и привлекает внимание исследователей, использующих самые разные математические методы от теории чисел [15] до теории катастроф [16].

С физической точки зрения нам представляется особенно интересным анализ вероятностного распределения начальных данных для расширяющейся осциллирующей Вселенной, предпринятый в [11] и продвинутый в [13]. Этот анализ предвосхитил квантово-космологические попытки определения начальных данных для космологической эволюции посредством построения волновой функции Вселенной [17, 18]. И здесь уместно вспом-

нить о том, как Ландау говорил [19], что последовательная физическая теория будущего должна включать не только правильные уравнения движения, но и определять начальные условия для них. Именно эта задача является сегодня одной из основных задач квантовой космологии.

Интересно, что в последние годы при построении волновой функции Вселенной широко используется идея квантового туннелирования (эквивалентная до известной степени использованию евклидова пространства – времени и переходов с изменением сигнатуры, см. [20]). При этом, ввиду многомерности задачи, возникает проблема комплексификации времени и траекторий [21–23], обсуждение которой имеется в учебнике Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица по нерелятивистской квантовой механике [24] с отсылкой к статье Ландау, написанной еще в 1932 г.! Другим аспектом квантового рождения Вселенной благодаря туннельному переходу и изменению сигнатуры пространства – времени является то, что при этом удастся избежать "падения в сингулярность". Иными словами, в моделях квантового рождения Вселенной предполагается, что рассматривая обратную эволюцию Вселенной во времени мы вместо сингулярности испытываем отскок, т.е. сжатие Вселенной останавливается и начинается расширение. Продолжение же эволюции в сторону меньших размеров Вселенной возможно только посредством аналитического продолжения времени в комплексную плоскость или, иными словами, посредством туннелирования. Таким образом, построение волновой функции Вселенной посредством использования идеи квантового туннелирования позволяет избежать сингулярности, что кажется привлекательным с интуитивной точки зрения. Интересно, что изучение классических космологических сценариев, позволяющих избежать сингулярности, имеет довольно долгую историю [25–29] и по-прежнему привлекает интерес [30–33].

Что же касается упомянутой выше идеи Ландау [19] о последовательной теории, определяющей не только уравнения движения, но и начальные условия для них, то с ней перекликается естественным образом другая идея, ставшая очень популярной в наши дни. Эту идею можно назвать идеей *квантовой самосогласованности*. Представляется, что квантовая теория элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий должна определять состав полей материи и, следовательно, спектр частиц, причем соответствующие ограничения могут быть получены из требования ее внутренней самосогласованности. В качестве классического примера можно привести так называемый механизм Глэшоу, Илиопулоса и Майани [34], которые ввели четвертый кварк в теорию электрослабых взаимодействий для того чтобы подавить нейтральные токи, меняющие странность, и избавиться от киральной аномалии. Позже этот кварк — "очарование" был обнаружен экспериментально. Еще более эффектным является появление критических размерностей в теориях струн и суперструн [35], претендующих на роль фундаментальной физической теории. Как известно, теория бозонной струны может быть непротиворечиво сформулирована в пространстве размерности $d = 26$ [36], тогда как суперструна существует в пространстве размерности $d = 10$.

Хорошо известно, что данные космологических наблюдений могут играть роль тестов для различных моделей физики элементарных частиц (см., например,

[37]). Менее известно то, что уже на основе требования самосогласованности квантовой космологии можно получить различные ограничения на спектр теории [38–44, 22, 23].

В настоящем обзоре мы рассмотрим некоторые направления современной квантовой и классической космологии, перекликающиеся с такими упомянутыми выше идеями Ландау, как важность проблемы сингулярности, комплексификация времени при туннельных переходах, необходимость определения начальных условий в рамках фундаментальной теории и примыкающей к ней идеи квантовой самосогласованности теории. Раздел 2 посвящен осцилляторному подходу к сингулярности, в третьем рассматривается теория космологических туннельных переходов на примере модели с комплексным скалярным полем [45–49, 32, 33]. Раздел 4 посвящен вычислению петлевых поправок в квантовой космологии и таким аспектам понятия волновой функции Вселенной как ее нормируемость и способность предсказать начальные условия космологической эволюции. В пятом разделе рассмотрена схема гамильтонова БРСТ (Бекки – Руэ – Стора – Тютин) квантования замкнутых космологических моделей и ее следствия. В шестом и седьмом разделах обсуждается вопрос о возможности избежать сингулярности уже в рамках классической космологии со скалярным полем. В заключении сформулированы основные результаты рассмотренных направлений.

2. Осцилляторный подход к сингулярности

Одним из первых точных решений, найденных в рамках общей теории относительности, было решение Казнера [50] для космологической модели типа Бианки-I, представляющей гравитационное поле в пустом пространстве с евклидовой метрикой, зависящей от времени по закону

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2, \quad (2.1)$$

где показатели p_1, p_2 и p_3 удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (2.2)$$

Упорядочивая показатели по правилу

$$p_1 < p_2 < p_3, \quad (2.3)$$

можно параметризовать их как

$$p_1 = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \quad (2.4)$$

Если параметр u изменяется в области $u \geq 1$, p_1, p_2 и p_3 принимают все допустимые значения

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (2.5)$$

При $u < 1$ возникает та же область значений p_1, p_2, p_3 , поскольку

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u). \quad (2.6)$$

В моделях Бианки-VIII или Бианки-IX режим Казнера (2.1), (2.2) уже не является точным решением уравнений Эйнштейна, однако можно сконструировать обобщенные казнеровские решения [5–8]. Оказалось возможным построить теорию возмущений, где точное казнеровское решение (2.1), (2.2) играет роль нулевого приближения, тогда как роль возмущений играют те члены в уравнениях Эйнштейна, которые зависят от пространственной кривизны (очевидно, такие члены отсутствуют в модели Бианки-I). Эта теория возмущений применима в окрестности сингулярности, т.е. при $t \rightarrow 0$. Замечательным является тот факт, что эти возмущения приводят к переходу от одного казнеровского режима к другому казнеровскому же режиму с новыми параметрами. Метрика обобщенного решения Казнера в синхронной системе отсчета может быть записана как

$$ds^2 = dt^2 - (a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta) dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.7)$$

где

$$a = t^{p_l}, \quad b = t^{p_m}, \quad c = t^{p_n}. \quad (2.8)$$

Трехмерные векторы **l**, **m**, **n** определяют направления, вдоль которых пространственные расстояния меняются со временем по степенным законам (2.8). Пусть $p_l = p_1$, $p_m = p_2$, $p_n = p_3$, так что

$$a \sim t^{p_1}, \quad b \sim t^{p_2}, \quad c \sim t^{p_3}, \quad (2.9)$$

т.е. Вселенная сжимается вдоль направлений данных векторами **m** и **n** и расширяется вдоль **l**.

Было показано [7], что возмущения, вызванные членами с пространственной кривизной, приводят к переходу к другому казнеровскому режиму, характеризующемуся следующими формулами:

$$a \sim t^{p'_l}, \quad b \sim t^{p'_2}, \quad c \sim t^{p'_3}, \quad (2.10)$$

где

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_m = -\frac{2|p_1| - p_2}{1 - 2|p_1|},$$

$$p'_n = -\frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}. \quad (2.11)$$

Таким образом, возмущения вызывают такой переход от одной "казнеровской эпохи" к другой, при котором отрицательная степень t переходит с **l** направления к направлению **m**. В процессе перехода функция $a(t)$ достигает максимума, а $b(t)$ — минимума. Следовательно, уменьшавшаяся величина b теперь увеличивается, а величина a уменьшается, тогда как $c(t)$ остается убывающей функцией. Само возмущение, вызвавшее переход от режима (2.9) к режиму (2.10), уменьшается и почти исчезает. Затем другое возмущение начинает возрастать и приводит к замене одной казнеровской эпохи другой и т.д.

Мы хотели бы подчеркнуть, что именно то обстоятельство, что возмущение приводит к такому изменению динамики, которое уничтожает его самого, дает возможность использовать теорию возмущений столь успешно. Можно отметить довольно далекую, но инте-

ресную аналогию с явлением асимптотической свободы в квантовой теории поля [51], когда пертурбативное вычисление квантовых поправок в неабелевой модели Янга – Миллса и некоторых других моделях уменьшает величину соответствующих констант связи, оправдывая, таким образом, сам метод.

Возвращаясь к правилам, управляющим перебросами отрицательной степени от одного направления к другому, можно показать, что они могут быть выражены посредством параметризации (2.4):

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u) \quad (2.12)$$

и затем

$$p'_l = p_2(u - 1), \quad p'_m = p_1(u - 1), \quad p'_n = p_3(u - 1). \quad (2.13)$$

Большая из двух положительных степеней остается положительной.

Последовательные изменения (2.13), сопровождаемые перебросами отрицательной степени между направлениями **l** и **m**, продолжаются до тех пор, пока целая часть u не исчерпана, т.е. до того шага, как u становится меньше 1. Затем в соответствии с (2.6) значение $u < 1$ преобразуется в $u > 1$; в этот момент один из показателей p_l или p_m отрицателен, и p_n становится меньшим из двух положительных чисел ($p_n = p_2$). Следующая последовательность изменений будет перебрасывать отрицательную степень между направлениями **n** и **l** или **n** и **m**.

Эволюция модели по направлению к сингулярной точке состоит из последовательных периодов (называемых эрами), в течение которых расстояния вдоль двух осей осциллируют, в то время как масштаб вдоль третьей оси уменьшается монотонно, а объем уменьшается по закону близкому к линейному по t . В процессе перехода от одной эры к другой, оси, вдоль которых расстояния монотонно уменьшаются, меняются ролями. Порядок, согласно которому оси меняются ролями, и порядок, определяющий смену эр разных длительностей, приобретает стохастический характер.

Каждой (s -й) эре соответствует уменьшающаяся последовательность значений параметра u . Эта последовательность имеет форму $u_{\max}^{(s)}, u_{\max}^{(s)} - 1, \dots, u_{\min}^{(s)}$, где $u_{\min}^{(s)} < 1$. Введем следующие обозначения:

$$u_{\min}^{(s)} = x^{(s)}, \quad u_{\max}^{(s)} = k^{(s)} + x^{(s)}, \quad (2.14)$$

т.е. $k^{(s)} = [u_{\max}^{(s)}]$ (квадратные скобки обозначают наибольшее целое, которое меньше или равно $u_{\max}^{(s)}$). Число $k^{(s)}$ определяет длину эры. Для следующей эры мы получим

$$u_{\max}^{(s+1)} = \frac{1}{x^{(s)}}, \quad k^{(s+1)} = \left[\frac{1}{x^{(s)}} \right]. \quad (2.15)$$

Упорядочение длин $k^{(s)}$ последовательных эр (измеряемых числом казнеровских эпох, содержащихся в них) асимптотически приобретает стохастический характер. Случайная природа процесса объясняется правилами (2.14), (2.15), которые определяют переходы от одной эры к другой в бесконечной последовательности значений u . Если эта последовательность начинается с некоторого начального значения $u_{\max}^{(0)} = k^{(0)} + x^{(0)}$, то длины

серий $k^{(0)}, k^{(1)}, \dots$ могут быть представлены как числа, входящие в разложение непрерывной дроби:

$$k^{(0)} + x^{(0)} = k^{(0)} + \frac{1}{k^{(1)} + 1/(k^{(2)} + \dots)}. \quad (2.16)$$

Можно статистически описать эту последовательность эр, если вместо данного начального значения $u_{\max}^{(0)} = k^{(0)} + x^{(0)}$ рассмотреть распределение $x^{(0)}$ по интервалу $(0, 1)$, управляемое неким вероятностным законом. Затем можно получить некоторые распределения значений $x^{(s)}$, обрывающих каждую s -ю серию чисел. Можно показать, что с увеличением s , эти распределения стремятся к стационарному (независимому от s) вероятностному распределению $w(x)$, для которого $x^{(s)}$ полностью "забыто":

$$w(x) = \frac{1}{(1+x) \ln 2}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что вероятностное распределение на длинах серий k дается формулой

$$W(k) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}. \quad (2.18)$$

Более того, можно точно вычислить вероятностные распределения и для других параметров, описывающих последовательные эры, таких как параметр δ , дающий соотношение между амплитудами логарифмов функций a, b, c и логарифмическим временем [13].

Таким образом, результаты статистического анализа эволюции в окрестности сингулярности [11] показывают, что стохастичность и вероятностные распределения параметров возникают уже в классической общей теории относительности. Можно сказать, что это вероятностное описание классической Вселенной в начале ее существования может служить прототипом вероятностного распределения для ее начального состояния, возникающего в квантовой космологии в результате построения волновой функции Вселенной.

Динамика осцилляторного подхода к сингулярности продолжает интенсивно обсуждаться в литературе. Так были высказаны сомнения в том, что эта динамика действительно является хаотической на том основании, что соответствующие показатели Ляпунова исчезают [52]. Позже стало ясно, что использование различных параметризаций временной переменной дают разные значения показателей Ляпунова. Возникла потребность в инвариантных методах изучения хаоса в космологии. Был проведен анализ уравнений, описывающих приближение к сингулярности с помощью теста Пенлеве, т.е. поиска сингулярных точек, положение которых зависит не только от самих уравнений, но и от начальных условий. Тип особенностей в этих точках позволяет судить о возможной неинтегрируемости динамических уравнений [53]. Результаты этих исследований указывают на хаотический характер приближения к сингулярности [54], хотя их авторы и подчеркивают, что их утверждения пока не имеют статуса теорем.

В [15] для исследования вопроса о хаосе были использованы независимые от наблюдателя фрактальные методы. Там было построено множество квазипе-

риодических траекторий, т.е. таких траекторий, когда длительности казнеровских эр чередуются по периодическому закону, в то время как общий объем Вселенной монотонно уменьшается. Интересно, что таким квазипериодическим траекториям соответствуют так называемые периодические иррациональные значения параметра u , представимые периодическими непрерывными дробями. Еще Лагранжу было известно, что такие числа являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами¹. Их множество является счетным и имеет меру нуль на множестве всех значений параметра u . Эти траектории представляют собой странный репеллер, обладающий нетривиальной фрактальной размерностью. Наличие такого репеллера и вычисление его параметров приводят авторов [15] к однозначному выводу о том, что осцилляторное приближение к сингулярности имеет хаотический характер.

Другим интересным аспектом подхода к сингулярности является вопрос о том, при каком составе материи сохраняются осцилляции. Уже давно было известно [10], что предположение о пренебрежимо малой роли материи вблизи особой точки верно лишь для материи с уравнением состояния, удовлетворяющим условию $p \leq 2\epsilon/3$, где p — давление, а ϵ — плотность энергии. В то же время для космологической модели с безмассовым скалярным полем было показано [55], что общее решение уравнений гравитации вблизи особой точки вместо колебательного режима приобретает монотонную степенную асимптотику. Это является вполне естественным, поскольку эта модель эквивалентна модели с гидродинамической материей, удовлетворяющей уравнению состояния $p = \epsilon$. В свете этого вполне естественным является заключение об отсутствии колебательного режима в струнной космологии [56], поскольку струнно-космологические модели в качестве необходимой компоненты содержат безмассовое дилатонное поле [57].

К исследованию вопроса о характере динамической эволюции в модели Бианки-IX был привлечен [58] и весьма популярный в наше время формализм переменных Аштекара [59]. В рамках гамильтонова формализма на языке переменных Аштекара было показано, что модели Бианки-II могут рассматриваться как возмущения моделей Бианки-I и интегрируются. В свою очередь модель Бианки-IX является возмущением модели Бианки-II, но алгоритм интегрируемости в данном случае не срабатывает, что и объясняет, по мнению авторов, хаотическую природу динамики модели Бианки-IX.

В заключение этого раздела можно упомянуть работу [16], где к анализу динамики модели Бианки-IX были применены методы теории катастроф [60] и было показано, что переход от одной казнеровской эры к другой эквивалентен катастрофе складки.

Таким образом, исследование осцилляторного подхода к сингулярности вызывает большой интерес и до определенной степени становится самостоятельным разделом современной математической физики.

¹ Конечные непрерывные дроби соответствуют рациональным числам. После серии колебаний, начатой с некоторого рационального значения параметра u , Вселенная приходит к состоянию с $u = 1$, чья метрика эквивалентна метрике пространства Минковского с точностью до лоренцева преобразования [9].

3. Квантовое туннелирование и волновая функция Вселенной, модель с комплексным скалярным полем

В последние годы область теоретической физики, называемая квантовой космологией, переживает интенсивный подъем. Ее важность определяется, с одной стороны тем, что возможность ее конструирования связана с разработкой последовательной схемы квантования гравитации, которая в свою очередь необходима для создания единой теории фундаментальных взаимодействий. С другой стороны, квантовая космология имеет и другую актуальную задачу: предсказание начальных условий для инфляционной модели развития Вселенной [61, 37], которая приобрела статус проверяемой и даже подтвержденной наблюдениями после открытия анизотропии космического фонового реликтового излучения [62], предсказанного почти 2 десятилетия назад [63].

Суть инфляционной космологии состоит в предположении, что в начале космологической эволюции была инфляционная (или квазидеситтеровская) стадия почти экспоненциального расширения, которое затем, в более позднюю эпоху преобразовалось в обычное фридмановское расширение по степенному закону. Такое предположение позволяет разрешить некоторые традиционные трудности теории горячей Вселенной и правильно предсказать анизотропию реликтового излучения.

Однако, остается открытым вопрос о происхождении инфляционной Вселенной. Для его решения необходимо обратиться к принципам квантовой космологии. Главный принцип квантовой космологии заключается в том, что Вселенная рассматривается как единый квантовый объект, тогда как квантование гравитации проводится на языке динамики систем со связями. Такой подход восходит к ранним работам Дирака, Уилера, ДеВитта и некоторых других авторов [64]. В рамках этого подхода можно ввести понятие волновой функции замкнутой Вселенной, подчиняющейся уравнению Уилера–ДеВитта

$$\mathcal{H}\Psi^{(3)}(g, \Phi) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $\Psi^{(3)}(g, \Phi)$ — волновая функция Вселенной, зависящая от 3-метрики $^{(3)}g$ и полей материи Φ , тогда как $\mathcal{H}$ — связь первого рода, называемая супергамильтонианом, где все поля и их канонически сопряженные импульсы интерпретируются как операторы, удовлетворяющие соответствующим каноническим коммутационным соотношениям.

Наиболее распространенный подход к уравнению Уилера–ДеВитта связан с рассмотрением так называемых минисуперпространств, включающих лишь конечное число космологических степеней свободы, в то время как большая их часть "заморожена". Другим полезным приемом, используемым при изучении уравнения (3.1), является квазиклассическое разложение функционального интеграла, формально представляющего решение уравнения Уилера–ДеВитта. Этот подход интенсивно развивается с начала 80-х годов, когда были выдвинуты два идейно близких предписания для конструкции волновой функции Вселенной [17, 18]. Обе конструкции используют аналогию между процессом рождения Вселенной из "ничего" и процессами туннелирования в квантовой механике и квантовой теории поля, рассмот-

ренными в квазиклассическом приближении. Вероятности таких процессов могут быть оценены с помощью вычисления евклидова действия на инстантонах — решениях евклидовых уравнений движения для соответствующих систем [65].

На древесном уровне, т.е. в нижнем порядке теории возмущений, можно представить эти волновые функции в следующей форме:

1) так называемая волновая функция "без границ" [17]:

$$\Psi_{\text{NB}} \sim \exp(-I), \quad (3.2)$$

2) туннелирующая волновая функция [18]:

$$\Psi_{\text{T}} \sim \exp(+I). \quad (3.3)$$

Здесь I — евклидово действие, которое в случае гравитации имеет отрицательное значение в уравнениях движения в отличие от известной ситуации в обычной теории поля. Можно показать, что обе волновые функции (3.2), (3.3) удовлетворяют уравнению Уилера–ДеВитта (3.1) [21, 39]. При доказательстве этого факта существенно используется отсутствие зависимости от времени в уравнении (3.1). Очевидно, что вероятностные распределения, полученные из волновых функций (3.2) и (3.3), являются дополняемыми в том смысле, что максимум волновой функции без границ соответствует минимуму туннелирующей функции и наоборот.

Можно сказать, что проблема согласования квантовой космологии с инфляционной заключается в поиске космологической модели, чья волновая функция может дать такие начальные условия для инфляционной стадии, которые соответствовали бы современной крупномасштабной структуре. Большая часть космологических моделей, исследованных в последние годы, включает так называемое инфлатонное скалярное поле, обладающее ненулевым классическим средним значением, которое обеспечивает существование эффективной космологической постоянной на ранней стадии космологической эволюции. Более того, одновременная эволюция пространственно-временной геометрии и инфлатонного скалярного поля обеспечивает не только инфляционную стадию, но и гладкий переход от нее к фридмановской эволюции.

Однако простые космологические модели с действительным скалярным полем, чьи волновые функции вычислены в древесном приближении в соответствии с формулами (3.2) или (3.3), не могут дать нормируемую функцию Вселенной [66] и обеспечить такое вероятностное распределение для начального значения инфлатонного скалярного поля, которое гарантировало бы достаточно длительность инфляционной стадии [67].

Можно по-разному искать выход из этой ситуации. Рассмотрение волновой функции Вселенной в однопетлевом приближении [38–43, 22, 23] дает возможность получения нормируемой волновой функции Вселенной и приемлемого вероятностного распределения начальных условий для инфлатона при условии, что определенным образом выбран спектр теории (см. раздел 4).

Другим направлением развития квантовой космологии является рассмотрение более сложных моделей, чем модель с действительным скалярным полем. Так, в [45–47] была рассмотрена модель с комплексным скалярным

полем. Одной из причин рассмотрения комплексных скалярных полей является то, что такие поля и неабелевы мультиплеты скалярных полей естественным образом возникают в современных теориях элементарных частиц. С другой стороны, имея комплексное скалярное поле, можно ввести дополнительную квазифундаментальную константу — классический заряд, связанный с глобальной симметрией лагранжиана теории относительно вращений фазы этого поля. Включение такого заряда приводит к возникновению центробежного члена в эффективном гамильтониане, и само понятие евклидовой области в минисуперпространстве радикально меняется. Евклидовы или "классически запрещенные" области становятся компактными, и в них возникают инстантонные решения с нулевыми скоростями на границе области [68]. Эти инстантонные решения соответствуют экстремуму евклидового действия и наличию пика в вероятностном распределении для волновой функции "без границ" [47]. Таким образом, эти инстантоны предсказывают начальные условия для инфляционной стадии, и, более того, последующая эволюция модели обеспечивает гладкий переход к фридмановскому степенному расширению.

В последние годы весьма популярными были модели с неминимальной связью между инфлатонным скалярным полем и гравитацией [69]. С одной стороны, такие модели дают много возможностей для согласования теоретических предсказаний с наблюдаемыми данными, с другой, — они являются более последовательными с точки зрения квантовой гравитации [70]. Космологическая модель с неминимально связанным комплексным скалярным полем оказывается весьма богатой [48, 49, 32, 33]. Как уже было сказано, в модели с минимально связанным скалярным полем существует только одно инстантонное решение [45, 46]. Это решение может быть продолжено в лоренцеву область в соответствии с лоренцевыми уравнениями движения, обеспечив таким образом начало инфляции. Эта схема отдает явное предпочтение волновой функции Вселенной "без границ" [47]. В то же время в случае неминимально связанного комплексного поля можно получить пару инстантонов, один из которых обеспечивает пик для волновой функции без границ, тогда как другой дает пик для туннелирующей волновой функции.

Рассмотрим модель с неминимально связанным комплексным полем с некоторыми подробностями. Ее действие имеет вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_P^2}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_\mu^* \phi_\nu + \frac{1}{2} \xi R \phi \phi^* - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4!} \lambda (\phi \phi^*)^2 \right]. \quad (3.4)$$

Здесь ξ — параметр неминимальной связи (мы выбрали для удобства знак, противоположный обычно используемому в литературе), λ — параметр самодействия скалярного поля, Λ — космологический член, m — масса скалярного поля. Комплексное скалярное поле ϕ может быть представлено в виде

$$\phi = x \exp(i\theta), \quad (3.5)$$

где x — абсолютное значение комплексного скалярного поля, а θ — его фаза. Будем рассматривать минисупер-

пространственную модель с пространственно-однородными переменными a (космологический радиус в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера), x и θ . Теперь действие (3.4) имеет следующую форму:

$$S = 2\pi^2 \int dt N a^3 \left\{ \frac{m_P^2}{16\pi} \left[6 \left(\frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{1}{a^2} \right) - 2\Lambda \right] + \frac{1}{2N^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2N^2} x^2 \dot{\theta}^2 + 3\xi \left(\frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{1}{a^2} \right) x^2 - \frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{1}{4!} \lambda x^4 \right\}, \quad (3.6)$$

где N — функция хода. Интегрируя по частям, можно избавиться от членов со вторыми производными $\ddot{a}$ и переписать действие (3.6) в более удобной форме:

$$S = 2\pi^2 \int dt N \left\{ \frac{m_P^2}{16\pi} \left[6 \left(-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + a \right) - 2\Lambda a^3 \right] + \frac{1}{2N^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2N^2} x^2 \dot{\theta}^2 + 3\xi \left(-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + a \right) x^2 - 6\xi \frac{\dot{a} \dot{x} a^2 x}{N^2} + \frac{1}{2N^2} \dot{x}^2 a^3 - \frac{1}{2} m^2 x^2 a^3 - \frac{1}{4!} \lambda x^4 a^3 \right\}. \quad (3.7)$$

Заметим, что фазовая переменная θ является циклической, и ее канонически сопряженный импульс p_θ должен сохраняться. Мы будем называть его значение зарядом Вселенной и обозначим через Q :

$$p_\theta = Q = a^3 x^2 \dot{\theta}. \quad (3.8)$$

Переходя к гамильтонову формализму можно переписать действие (3.7) в виде:

$$S = 2\pi^2 \int dt (p_a \dot{a} + p_x \dot{x} - \mathcal{H}), \quad (3.9)$$

где супергамильтониан $\mathcal{H}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{24a[m_P^2/(16\pi) + \xi x^2/2 + 3\xi^2 x^2]} - \frac{\xi p_x p_a x}{2a^2[m_P^2/(16\pi) + \xi x^2/2 + 3\xi^2 x^2]} + \frac{p_x^2}{2a^3} \frac{m_P^2/(16\pi) + \xi x^2/2}{m_P^2/(16\pi) + \xi x^2/2 + 3\xi^2 x^2} - U(a, x). \quad (3.10)$$

Функция $U(a, x)$, которую мы будем называть суперпотенциалом, имеет вид:

$$U(a, x) = a \left[\frac{m_P^2}{16\pi} (6 - 2\Lambda a^2) + 3\xi x^2 - \frac{Q^2}{a^4 x^2} - \frac{1}{2} m^2 x^2 a^2 - \frac{1}{24} \lambda x^4 a^2 \right]. \quad (3.11)$$

Вариация действия по функции хода N дает связь

$$\mathcal{H} = 0, \quad (3.12)$$

квантовым аналогом которой является уравнение Уилера–ДеВитта (3.1).

Теперь удобно выписать эффективный лагранжиан, зависящий только от a и x и их производных (функция хода N выбрана равной 1):

$$L = \left\{ \frac{m_P^2}{16\pi} [6(-\dot{a}^2 a + a) - 2\Lambda a^3] + 3\xi(-\dot{a}^2 a + a)x^2 - 6\xi\dot{a}\dot{x}a^2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2 a^3 - \frac{Q^2}{2a^3x^2} - \frac{1}{2}m^2x^2a^3 - \frac{1}{4!}\lambda x^4a^3 \right\}. \quad (3.13)$$

Этот лагранжиан дает уравнения движения

$$\frac{m_P^2}{16\pi} \left(\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} - \frac{\Lambda a}{2} \right) + \frac{\xi\dot{a}^2x^2}{4a} + \frac{\xi\ddot{a}x^2}{2} + \xi x\dot{x}\dot{a} + \frac{\xi\dot{x}^2a}{2} + \frac{\xi x\ddot{a}}{2} + \frac{\xi x^2}{4a} + \frac{a\dot{x}^2}{8} - \frac{m^2x^2a}{8} + \frac{Q^2}{4a^5x^2} - \frac{\lambda x^4a}{96} = 0 \quad (3.14)$$

и

$$\ddot{x} + \frac{3\dot{x}\dot{a}}{a} - \frac{6\xi x\ddot{a}}{a} - \frac{6\xi\dot{a}^2x}{a^2} - \frac{6\xi x}{a^2} + m^2x - \frac{2Q^2}{a^6x^3} + \frac{\lambda x^3}{6} = 0. \quad (3.15)$$

Кроме того можно выписать первый интеграл движения нашей динамической системы:

$$-\frac{3}{8\pi} m_P^2 a \dot{a}^2 - 3\xi a \dot{a}^2 x^2 - 6\xi x \dot{x} \dot{a} a^2 + \frac{a^3}{2} \dot{x}^2 - U(a, x) = 0. \quad (3.16)$$

Аналогичные евклидовы уравнения движения могут быть получены из (3.14)–(3.16) сменой знака перед членами, содержащими производные. Теперь следует определить понятие евклидовых областей в нашем минисуперпространстве. Отметим, что, говоря о "евклидовых" или "классически запрещенных" областях, нужно понимать, что употребление этих терминов достаточно условно, поскольку благодаря indefinitности суперметрики евклидовы области не являются недоступными для обычных лоренцевых траекторий. Хорошо известно, что в космологических моделях со скалярным полем лоренцевы траектории могут проникать в евклидову область точно так же, как траектории, соответствующие евклидовым уравнениям движения, могут проходить через лоренцеву область [29, 71, 21]. Тем не менее можно использовать такие термины, как евклидова и лоренцева области, при описании процессов туннелирования в космологии и инстантонной физике [68] даже в случае indefinitной суперметрики. Можно даже придать термину "евклидова область" точный смысл, определяя ее как область, где могут существовать точки минимального сжатия и максимального расширения Вселенной. Итак, мы будем называть евклидовой областью область, где имеет место следующее условие:

$$U(a, x) > 0. \quad (3.17)$$

Соответственно, граница этой области дается уравнением

$$U(a, x) = 0. \quad (3.18)$$

Инстантонами мы будем называть такие решения евклидовых уравнений движения, у которых обе скоро-

сти $\dot{x}$ и $\dot{a}$ на границе обращаются в нуль. Такие решения соответствуют экстремумам евклидова действия и, соответственно, экстремумам в вероятностных распределениях, полученных из волновых функций.

Здесь имеет смысл сделать одну терминологическую оговорку. Строго говоря, понятие волновой функции "без границ" не может быть буквально применено к случаю комплексного скалярного поля. Дело в том, что в квазиклассическом приближении предписание "без границ" сводится к континуальному интегрированию от $a = 0$ до некоторого малого значения космологического радиуса $a = 0$ по компактным метрикам и регулярным полям материи. Однако в присутствии фазовой переменной θ связанный с ней центробежный член исключает регулярность полей материи при $a = 0$. Таким образом, мы нуждаемся в некоторой модификации волновой функции "без границ". Такая модификация была рассмотрена в [47]. Она заключается в том, что волновая функция Вселенной должна экспоненциально расти в евклидовой области и должна в квазиклассическом приближении быть пропорциональна $\exp(-I)$. Инстантоны, рассмотренные в [45–49], соответствуют как раз этому определению волновой функции "без границ".

Теперь можно перейти к исследованию формы евклидовых областей на плоскости суперпространственных переменных (a, x) для разных значений параметров суперпотенциала U (3.11).

В простейшем случае $Q = \Lambda = \lambda = \xi = 0$ получается евклидова область, ограниченная гиперболической кривой $x = \pm \sqrt{3/(4\pi)} m_P/(ma)$ (рис. 1а). Включение космологического члена $\Lambda \neq 0$ приводит к замыканию евклидовой области "справа" при $a = \sqrt{3/\Lambda}$ (рис. 1б).

Включение ненулевого классического заряда скалярного поля $Q \neq 0$ вызывает замыкание евклидовой области "слева", и мы получаем "бананоподобную" форму этой области [45, 46] (рис. 1в).

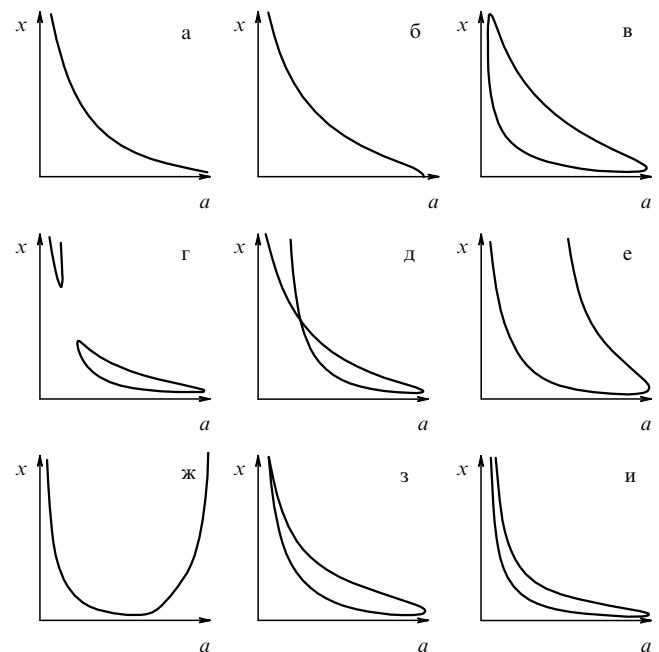


Рис. 1. Геометрия евклидовых областей при различных значениях параметров.

После включения малого члена, описывающего неминимальную связь между скалярным полем и гравитацией ($\xi \neq 0$), мы получаем вторую евклидову область в верхнем левом углу плоскости (x, a) [48]. Эта новая область некомпактна и неограничена сверху (рис. 1г). При увеличении значения параметра ξ вторая евклидова область опускается вниз и при некотором значении ξ объединяется с первой бананоподобной евклидовой областью (рис. 1д). При дальнейшем росте ξ можно обнаружить объединенную евклидову область, чья граница является частично выпуклой, частично вогнутой (рис. 1е). После дальнейшего увеличения ξ граница становится выпуклой (рис. 1ж). После включения константы самодействия $\lambda \neq 0$ можно получить, в зависимости от значения параметров Q , λ , ξ и m , три различных конфигурации евклидовых областей. Так, при достаточно малом значении ξ и относительно большом λ мы имеем только одну бананоподобную евклидову область (рис. 1з). При достаточно малых λ , неспособных "закрыть" верхнюю область, можно получить два несвязанных евклидовых района (соответствующая картина близка к изображенной на рис. 1г). Наконец, при достаточно большом значении ξ можно получить один открытый сверху "мешкоподобный район" с бесконечно длинной узкой горловиной. Таким образом, включение заряда Q , неминимальной связи ξ и самодействия скалярного поля приводит к большому разнообразию возможных геометрий евклидовых областей.

Теперь, численно интегрируя евклидовы аналоги уравнений (3.14) и (3.15), можно решить вопрос о существовании инстантонов, реализующих экстремумы евклидова действия. Можно также дополнить численное решение уравнений нахождением точных выражений для возможной локализации точек максимального расшире-

ния Вселенной ($\dot{a} = 0$, $\ddot{a} < 0$) и точек ее минимального сжатия ($\dot{a} = 0$, $\ddot{a} > 0$), а также точек максимума и минимума величины x . Подробности этого анализа представлены в [49, 32, 33]. Здесь же мы ограничимся констатацией того факта, что инстантонные траектории обязательно должны пересекать кривые, разделяющие возможные точки минимального сжатия и максимального расширения Вселенной и точки возможного максимума и минимума x .

Легко показать, что в случае простейшей модели с действительным скалярным полем инстантоны существовать не могут. Однако в случае, когда включен ненулевой заряд Q , инстантон может существовать и действительно существует (рис. 2а). Используя конечную точку этого инстантона на правой границе евклидовой бананоподобной области в качестве начальной точки лоренцевой траектории, можно увидеть, что эта траектория имеет квазиинфляционное поведение [45–49].

В случае модели с неминимально связанным комплексным скалярным полем, когда имеются две не связанных между собой евклидовых области (рис. 1г), инстантон, существующий в бананоподобной области, может обеспечить приемлемые начальные условия для инфляции (рис. 2б). В то же время имеется и другое решение евклидовых решений уравнений движения с исчезающими скоростями на границе лоренцевой и евклидовой областей — это решение связывает разные евклидовы области, проходя через лоренцеву область. Лоренцева траектория, начинающаяся в конечной точке этой евклидовой траектории, имеет явно неинфляционное поведение и не может быть использована для описания квантового туннелирования Вселенной из ничего.

Затем, по мере того как константа неминимальной связи ξ растет, путь, проходимый этим необычным

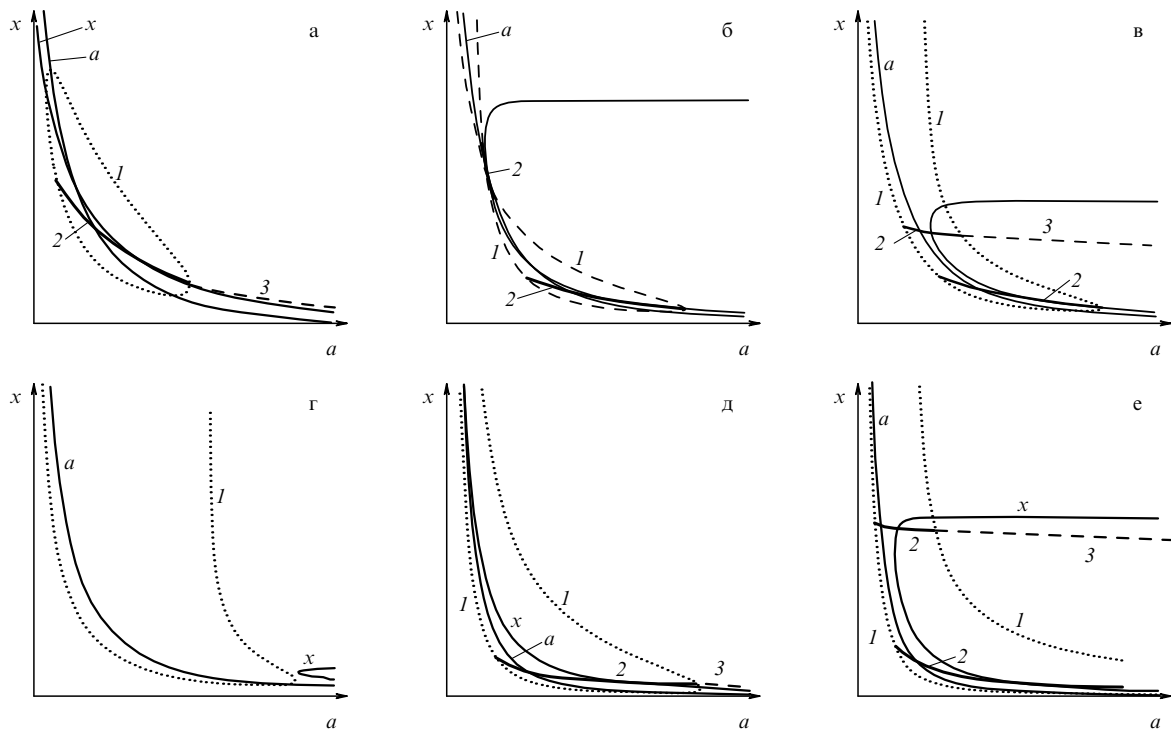


Рис. 2. 1 — границы между евклидовой и лоренцевой областями, 2 — инстантонные траектории, 3 — лоренцевы траектории, x и a — разделяющие кривые.

инстантоном, укорачивается, и в тот момент, когда две евклидовы области "встречаются", второй инстантон вырождается в точку и исчезает.

При дальнейшем увеличении ξ , когда имеется единственная евклидова область, открытая сверху, имеются два инстантона, расположенные внутри евклидовой области (рис. 2в). Нижний инстантон соответствует локальному максимуму абсолютного значения евклидова действия, тогда как верхний инстантон соответствует его локальному минимуму. Конечные точки обоих инстантонов могут быть использованы как исходные точки лоренцевых траекторий, имеющих квазиинфляционное поведение (рис. 2в).

Важно отметить, что верхний инстантон обеспечивает существование пика в вероятностном распределении туннелирующей волновой функции Вселенной [18], поскольку в древесном приближении эта функция ведет себя как $\Psi_T \sim \exp(-|I|)$. В то же время нижний инстантон обеспечивает существование пика в вероятностном распределении волновой функции без границ [17], ведущей себя как $\Psi_{NB} \sim \exp(+|I|)$. Таким образом, если мы делаем выбор в пользу волновой функции Вселенной без границ, то мы должны использовать конечную точку нижнего инстантона для определения наиболее вероятных начальных условий инфляции, тогда как для туннелирующей волновой функции следует использовать верхний инстантон.

Наконец, в случае, когда параметр ξ достаточно велик, и граница евклидовой области является выпуклой (рис. 1ж), инстантоны вообще не существуют.

В случае, когда включен член со взаимодействием $\lambda \neq 0$, картина напоминает описанную выше с некоторыми дополнительными возможностями, которые представлены в [49, 32, 33].

Интересно также рассмотреть случай с нулевой космологической постоянной ($\Lambda = 0$). Исчезновение космологической постоянной приводит к открыванию евклидовой области справа (рис. 2е). Здесь вместо двух инстантонов имеется лишь один — соответствующий минимуму абсолютного значения евклидова действия и определяющий пик вероятностного распределения туннелирующей волновой функции Вселенной. Второй же инстантон превращается в траекторию, бесконечно движущуюся внутри евклидовой области и не достигающую ее границы. Таким образом, в этом случае лишь туннелирующая волновая функция Вселенной может предсказать наиболее вероятные условия для начала космологической эволюции в отличие от ситуации с единственной замкнутой евклидовой областью, когда предпочтительной является волновая функция без границ. Возможно, этот факт является любопытным и в связи с дискуссией между сторонниками различных версий волновой функции Вселенной [72, 73].

Завершая этот раздел, необходимо отметить, что инстантонные решения могут быть получены и в рамках модели с действительным скалярным полем благодаря выбору потенциала, имеющего экстремумы при некоторых значениях инфлатонного поля. Тогда мы получаем инстантонные решения с постоянным инфлатонным полем и космологическим фактором, эволюционирующие согласно евклидову деситтерову закону

$$a(\tau) \sim \sin H\tau,$$

где τ — евклидово время. На границе евклидовой и лоренцевой областей эти решения могут быть аналитически продолжены благодаря аналитическому продолжению от евклидова к лоренцеву времени t :

$$\tau = \frac{\pi}{2H} + it, \quad (3.19)$$

$$a(t) \sim \cosh Ht. \quad (3.20)$$

Однако такие инстантоны в моделях с действительным скалярным полем имеют существенный недостаток: инфляция, предсказанная ими, является вечной (по крайней мере, если в качестве ее начала выбирается в точности конечная точка инстантонного решения). Естественный выход из инфляции с разогревом Вселенной и дальнейшим переходом к фридмановской стадии отсутствует. В то же время инфляционная стадия, предсказанная в рамках модели с комплексным инфлатонным полем, может быть достаточно долгой, но не вечной, и обеспечивающей "изящный выход" из инфляции и переход к фридмановской Вселенной.

4. Энергетический масштаб инфляции и петлевые эффекты

В модели, рассмотренной в предыдущем разделе, существование инстантонных решений позволяло описать рождение Вселенной посредством квантового туннелирования очень простым образом. При рассмотрении других моделей, где такие решения отсутствуют, квазиклассический анализ туннелирования требует рассмотрения комплексифицированного времени и комплексифицированных траекторий. Необходимость такой комплексификации возникает уже при рассмотрении многомерного туннелирования в нерелятивистской квантовой механике [24]. В случае рассмотрения квантовокосмологической задачи с несколькими переменными, если мы хотим представить траектории, составленными из двух секций — евклидовой и лоренцевой (т.е. ввести точку превращения евклидова времени в лоренцево) — необходимо добиться того, чтобы динамические переменные q не только удовлетворяли лоренцевым и евклидовым уравнениям движения на соответствующих участках траекторий, но и обеспечить следующие условия сшивки производных в точке перехода [21–23]:

$$\text{Re } \dot{q}_E = \text{Im } \dot{q}_L; \quad \text{Im } \dot{q}_E = -\text{Re } \dot{q}_L. \quad (4.1)$$

Оказывается, что в некоторых моделях вынужденная комплексификация динамических переменных не влияет слишком сильно на количественные аспекты туннелирования, и ее влияние может быть учтено посредством теории возмущений [22, 23]. Рассмотрению некоторых таких моделей и посвящен настоящий раздел. При этом ключевыми являются два аспекта:

1) выход за рамки минисуперпространства, т.е. рассмотрение наряду с космологическим радиусом a и пространственно-однородной гармоникой инфлатонного поля φ , возмущений этих и всех прочих полей материи;

2) выход за рамки древесного приближения при вычислении волновой функции Вселенной, т.е. учет петлевых поправок к квазиклассическим формулам (3.2), (3.3).

Такой подход позволяет не только описать квантовое рождение Вселенной и предсказать начальные условия инфляции, но и обеспечить нормируемость волновой функции Вселенной [22, 23, 38–43], что является необходимым условием существования ее вероятностной интерпретации. Требование нормируемости, в свою очередь, приводит к некоторым ограничениям на спектр теории, что является нетривиальным проявлением принципа квантовой самосогласованности, упоминавшегося во введении.

Перейдем к краткому изложению результатов работ [22, 23, 38–43]. Волновая функция Вселенной в однопетлевом приближении имеет вид

$$\Psi(q)_{\text{T,NB}} = \exp(\pm I[q] - W[q]), \quad (4.2)$$

где W — однопетлевая поправка к эффективному действию:

$$W = \frac{1}{2} \text{Tr}_M \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad F = \frac{\delta^2 I}{\delta \xi \delta \bar{\xi}}, \quad (4.3)$$

$\xi = [\varphi, f]$, $f \ll \varphi$. Здесь ξ — физические степени свободы, φ — однородная мода инфлатонного поля, f — неоднородные моды всех полей, μ^2 — ренормировочный массовый параметр.

Линеаризованное приближение для I имеет вид

$$I[g] = I + \frac{1}{2} f^T (Dv) v^{-1} f \Big|_{\tau_+}. \quad (4.4)$$

Здесь $I = I[g_0]$ — функция однородной моды φ , v — полный набор базисных функций оператора F , регулярных на деситтеровской евклидовой сфере (неоднородные моды), D — дифференциальный оператор первого порядка, связанный соотношением вронскиана с оператором F . Можно показать, что выражение для "евклидовой" волновой функции Вселенной имеет вид:

$$\Psi_{\text{T,NB}}(\tau_+ | \varphi, f) = \frac{1}{[\det u]^{1/2}} \exp \left[\pm I - \frac{1}{2} f^T (Dv) v^{-1} f \right]. \quad (4.5)$$

После аналитического продолжения в лоренцево пространство–время волновая функция (4.5) приобретает вид

$$\Psi_{\text{T,NB}}(t | \varphi, f) = \left(\frac{1}{[\det u^*]^{1/2}} \right)^R \times \exp \left[-I_B + iS + \frac{1}{2} i f^T (Dv) v^{-1} f \right] \quad (4.6)$$

и оказывается деситтеровым инвариантным вакуумом для мод f [74]. Здесь верхний индекс R означает необходимость перенормировки бесконечного произведения базисных функций, а S — лоренцево действие. Именно таким образом квантовое состояние полей материи в лоренцевом пространстве–времени и само это пространство–время возникает благодаря квантовому туннелированию из классически запрещенного евклидова мира.

Информация о нормируемости волновой функции Вселенной (4.6) может быть получена из диагональных

элементов матрицы плотности

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_f |\Psi\rangle \langle \Psi|. \quad (4.7)$$

Было показано [38], что величина (4.7) может быть выражена в виде

$$\rho(t | \varphi) = \frac{\Delta_\varphi^{1/2}}{|u_\varphi(t)|} \exp(\pm I - \Gamma_{1\text{-loop}}), \quad (4.8)$$

где $\Gamma_{1\text{-loop}}$ — однопетлевая поправка к эффективному действию, вычисленная на замкнутом компактном деситтеровском инстантоне. Для вычисления этой величины удобно воспользоваться техникой дзета-регуляризации [75], позволяющей вычислить $\Gamma_{1\text{-loop}}$ в следующем виде:

$$\Gamma_{1\text{-loop}} = -\frac{1}{2} \zeta'(0) - \frac{1}{2} \zeta(0) \ln \mu^2 R_0^2, \quad (4.9)$$

где $\zeta(s)$ — обобщенная дзета-функция Римана, а R_0 — радиус инстантона. Обобщенная дзета-функция Римана определяется как

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{\lambda^s}, \quad (4.10)$$

где λ — собственные значения оператора F . В пределе $\varphi \rightarrow \infty$ или, что эквивалентно, $R_0 \rightarrow 0$ выражение (4.7) сводится к

$$\rho(\varphi) \sim \exp(\pm 2I_B) \varphi^{-Z-2}, \quad (4.11)$$

где Z — аномальный скейлинг теории, выражаемый через значения $\zeta(0)$ для всех полей, включенных в модель. Требование нормируемости

$$\int^\infty d\varphi \rho(\varphi) < \infty \quad (4.12)$$

накладывает ограничение на значение Z ,

$$Z > -1, \quad (4.13)$$

необходимое для сходимости интеграла по φ при $\varphi \rightarrow \infty$.

Наиболее удобным методом вычисления аномального скейлинга является использование разложения Швингера–ДеВитта [76], поскольку, как известно, $\zeta(0)$ совпадает со вторым коэффициентом этого разложения:

$$\zeta(0) = A_2. \quad (4.14)$$

Исследование различных моделей физики элементарных частиц с точки зрения выполнения критерия (4.13), сделанное в предположении, что взаимодействием между инфлатонным полем и остальными полями материи можно пренебречь [40], приводит к выводу, что суперсимметричные модели являются предпочтительными. Однако более интересным является исследование модели с сильной неминимальной связью между инфлатонным полем и гравитацией [69]. Такая модель была рассмотрена в [22, 41, 42]. Лагранжиан этой модели выглядит так же, как и представленный формулой (3.4), однако инфлатонное поле является действительным. Кроме того, поля материи взаимодействуют с инфлатонным полем и именно благодаря этому приобретают

большие массы на начальной (инфляционной) стадии космологической эволюции. В рамках этой модели удается не только обеспечить нормируемость волновой функции Вселенной, но и обнаружить пик в вероятностном распределении, соответствующем данной волновой функции. Выясняется, что волновая функция Вселенной без границ имеет пик вероятности лишь при специальном выборе потенциала, причем инфляция в этом случае оказывается вечной, т.е. из нее нет "изящного выхода". В то же время туннелирующая волновая функция имеет пик вероятности при некотором значении инфлатонного поля ϕ_1 , причем достаточная длительность инфляции (в соответствии с данными наблюдательной космологии Вселенная должна увеличиться примерно в e^{60} раз на протяжении инфляционного периода) обеспечивается, если аномальный скейлинг модели имеет огромное значение:

$$Z \sim 10^{11}. \quad (4.15)$$

Это значение может быть достаточно естественным образом получено в рассматриваемой модели, где ведущий вклад в Z имеет вид:

$$Z = 6 \frac{\xi^2}{\lambda} A + O(\xi), \quad (4.16)$$

где

$$A = \frac{1}{2\lambda} \left(\sum_{\chi} \lambda_{\chi}^2 + 4 \sum_A g_A^4 - 4 \sum_{\psi} f_{\psi}^4 \right). \quad (4.17)$$

Здесь λ — константа самодействия инфлатонного поля, λ_{χ} , g_A , f_{ψ} — константы взаимодействия инфлатона и скалярных, векторных и спинорных полей соответственно. Поскольку в моделях с неминимальной связью [69] естественными являются такие значения параметров как $\lambda \simeq 0,05$, $\xi \simeq -2 \times 10^4$, $\lambda/\xi^2 \simeq 10^{-10}$, то необходимое значение Z можно получить при условии, что параметр A , зависящий от конкретной модели физики элементарных частиц, будет зафиксирован в достаточно жестких рамках

$$0 < A < 1,3.$$

Это ограничение снова указывает на квазисуперсимметричную природу модели физики элементарных частиц, которая должна обеспечить довольно точный баланс между бозонами и фермионами (см. (4.17)).

Последующий, существенно более громоздкий анализ был проведен в [23], где наряду с аномальным скейлингом был вычислен и вклад, даваемый функцией $\zeta'(0)$, а также учтено искажение формы инстантона (возникающее вследствие зависимости инфлатонного поля от времени). Основные выводы предыдущих работ [22, 41, 42] при этом не претерпели существенных изменений. Однако следует отметить, что, говоря о квазисуперсимметричности, мы имеем в виду лишь некоторый баланс между фермионами и бозонами, но не строгий выбор какой-то суперсимметричной модели физики элементарных частиц. Более того, в [43] было показано, что в моделях с точной суперсимметрией довольно сложно удовлетворить критерию нормируемости (4.13).

В заключение этого раздела отметим, что результаты работ [22, 23, 38–43] указывают на существование прочной связи между квантовой гравитацией, инфляционной космологией и физикой элементарных частиц, поскольку, сочетая требования, исходящие из общих принципов квантовой теории, с результатами наблюдений, осмысленными в свете инфляционной космологии, можно извлечь некоторую информацию о возможной структуре приемлемых моделей физики элементарных частиц.

5. Гамильтоново квантование гравитации и квантовая самосогласованность

В некотором смысле квантовая космология занимает уникальное место в современной теоретической физике. С одной стороны, она связана (главным образом через инфляционные модели [61, 37]) с наблюдательной космологией, включая столь успешные ее области, как исследование космического микроволнового фонового излучения и крупномасштабной структуры Вселенной. С другой стороны, математическая структура квантовой космологии близка структуре таких областей теоретической физики, как теории суперструн [35], мембран и т.п. Этот последний аспект является, на наш взгляд, несколько недооцененным, и в этом разделе мы расскажем кратко об одной попытке [44] применения современных методов, успешно опробованных в теории струн, к квантовой космологии.

Речь идет об изучении квантовых аномалий посредством гамильтонова БФВ–БРСТ (Баталин–Фрадкин–Вилковский–Бекки–Руэ–Стора–Тютин) квантования [77], доказавшего свою эффективность в применении к теории струн [78]. Следует добавить, что струнные теории служили для нас источником опыта, а не конкретных форм лагранжианов, в отличие от популярной ныне струнной космологии [57]. А именно, из теории струн была позаимствована идея о возможности размыкания квантовой алгебры связей и существования критических соотношений между параметрами теории. Эта идея и была приложена к эйнштейновской гравитации.

Вспомним, что основные уравнения канонической квантовой гравитации и космологии включают наряду с уравнением Уилера–ДеВитта (3.1) так называемые уравнения суперимпульсов

$$H_i|\psi\rangle = 0, \quad (5.1)$$

соответствующие инвариантности волновой функции Вселенной относительно пространственных диффеоморфизмов. Обычно требуют одновременного удовлетворения уравнений (3.1) и (5.1). Такой подход восходит к дираковскому квантованию систем со связями [79]. Действительно, на классическом уровне эти связи принадлежат к первому роду и находятся в инволюции относительно скобок Пуассона [80]. Однако, когда мы рассматриваем операторы и их коммутаторы, алгебра может оказаться разомкнутой, и дираковское квантование — невозможным. Подобная ситуация хорошо изучена в теории струн, где, например в квантовой теории бозонной струны, вместо замкнутой алгебры связей первого рода имеется центрально расширенная алгебра Вирасоро. Соответственно, только половина связей уничтожает физические состояния, и квантовая теория

является самосогласованной только в том случае, когда размерность объемлющего пространства равна

$$D = 26. \quad (5.2)$$

Одним из способов получения соотношения (5.2) является гамильтоново БРСТ квантование [77]. В рамках этого подхода проверка квантовой самосогласованности сводится к алгебраическим операциям.

В [44] была предпринята попытка гамильтонова БФВ–БРСТ квантования замкнутых космологических моделей посредством использования родства между симметриями теории струн и общей теории относительности (обе теории являются репараметризационно-инвариантными). Основные черты разработанного метода сводятся к следующему набору:

1) разложение как динамических переменных теории, так и связей по гармоникам;

2) выделение из алгебры связей подалгебры диффеоморфизмов, сохраняющих площадь и конструирование из остальных связей так называемых вирасоро-подобных генераторов;

3) выбор модели: вычисления оказываются наиболее простыми в так называемой обобщенной Бианки-I стационарной модели, в которой пространство представляет собой N -мерный, не зависящий от времени тор;

4) пертурбативное разложение связей и структурных функций псевдоалгебры связей по малому параметру $l_P/V^{1/N}$, где l_P — планковская длина, а V — объем Вселенной;

5) конструирование БРСТ оператора Ω и проверка квантового условия нильпотентности $\hat{\Omega}^2 = 0$;

6) в результате этой проверки на однопетлевом уровне, т.е. вычисления первой квантовой поправки к коммутаторам связей, получается следующее критическое соотношение:

$$d = 30 + \frac{5}{2}(N+1)(N-2). \quad (5.3)$$

Здесь d — число безмассовых скалярных полей в модели. Обобщение формулы (5.3) для полей произвольных спинов будет представлено ниже.

Прокомментируем кратко перечисленные выше пункты. Рассматривая компактные многообразия, можно выразить фазовые переменные и связи через дискретный набор коэффициентов гармонического разложения. Функциональный базис такого разложения образован собственными функциями оператора Лапласа, определенного на максимально симметричном пространстве данной топологии (для случая обобщенной модели Бианки-I эти функции являются многомерными фурье-гармониками на торе). Если разложение динамических переменных по гармоникам является традиционным для космологии [81, 10], то разложение связей по дискретному базису является новым элементом. При этом, свертывая генераторы суперимпульса (5.1) с поперечными векторными гармониками, мы получаем генераторы диффеоморфизмов, сохраняющих объем, введенных В.И. Арнольдом в гидродинамике [82] и нашедших широкое применение в теориях p -бран [83]. Из остальных суперимпульсов (продольных) вместе с супергамильтонианом можно образовать вирасоро-подобные генераторы, аналогичные генераторам Вира-соро в теории замкнутой бозонной струны. Структурные

коэффициенты в новом дискретном базисе выражаются через интегралы от тройных произведений соответствующих гармоник, которые в свою очередь выражаются через квадратичные комбинации коэффициентов Клебша–Гордана соответствующей группы симметрии в согласии с теоремой Вигнера–Экарта [84]. Для модели Бианки-I эти коэффициенты вычисляются крайне просто. (Отметим, что помимо вычислительной простоты Вселенная с топологией тора привлекает внимание космологов и с физической точки зрения, и имеется немало работ, посвященных наблюдательным ограничениям на возможность существования такой модели [85].)

При разложении метрики и сопряженного ей импульса по операторам рождения и уничтожения и последующем разложении связей в ряд по степеням этих операторов естественным образом возникает безразмерный параметр $l_P/V^{1/N}$. Замечательно то, что поправки более высокого порядка к коммутаторам связей вирасоро-подобного типа умножаются на этот параметр, делая тем самым применение теории возмущений оправданным.

Вся информация о калибровочных симметриях системы может быть сформулирована на языке БФВ–БРСТ формализма. В классической теории можно сконструировать грассманов объект — БРСТ заряд:

$$\Omega = c^\alpha T_\alpha + \frac{1}{2} P_\gamma U_{\alpha\beta}^\gamma c^\beta c^\alpha, \quad (5.4)$$

где T_α — связи первого рода, $U_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры связей, c^α — духи Фаддеева–Попова, P_α — сопряженные им импульсы. Исчезновение обобщенной скобки Пуассона или классическая нильпотентность БРСТ заряда эквивалентна соотношениям инволюции между связями,

$$\{T_\alpha, T_\beta\} = U_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma,$$

и тождествам Якоби.

При переходе к квантовым операторам можно наложить следующее условие на квантовые состояния:

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = 0,$$

которое является более слабым, чем дираковское требование аннигиляции физического состояния всеми связями. Условие квантовой нильпотентности или квантовой самосогласованности,

$$\hat{\Omega}^2 = 0,$$

содержит информацию о квантовых аномалиях и условиях их сокращения благодаря вкладу духов. Именно из этого условия можно получить критические соотношения, подобные $d = 26$ для бозонных струн, или формулу (5.3), представленную выше.

Для рассматриваемой модели БРСТ заряд включает около 100 членов. Духи, соответствующие вирасоро-подобным генераторам являются нормально (по Вику) упорядоченными, тогда как духи, соответствующие диффеоморфизмам, сохраняющим объем, квантуются по Вейлю. Именно такой выбор оказывается непротиворечивым. Исследование условия нильпотентности $\hat{\Omega}^2 = 0$ приводит к следующему условию квантовой самосогла-

сованности:

$$d + d_V(N-1) + d_F 2^{(N-1)/2-1} = 30 + \frac{5}{2}(N-2)(N+1). \quad (5.5)$$

Здесь d — число безмассовых скалярных полей, d_V — число безмассовых полей спина 1 и d_F — число безмассовых фермионных полей. Анализируя следствия полученной формулы, хотелось бы обратить внимание на следующие моменты:

1. Формула (5.5) оказывается гораздо проще метода, которым она получена, и имеет довольно естественную структуру. Важно отметить, что $(1/2)(N-2)(N+1)$ — это число поперечнобесследовых гравитонов в $(N+1)$ -мерном пространстве–времени. Существенно то, что конкретные коэффициенты в правой части формулы (5.5) определяются выбором вакуума для гравитонов.

2. Формула (5.5) имеет разумный предел при $N = 1$ (бозонная струна). Если $N = 1$, то $d = 25$. Этот результат может быть легко понят с точки зрения струнной σ -модели, не обладающей вейлевской инвариантностью [86].

3. При любом N пустая стационарная замкнутая Вселенная типа Бианки-I является квантово-несамосогласованной.

4. При $N = 3$ (наша Вселенная) число степеней свободы полей материи равно 40. Очевидно, оно слишком мало даже для Стандартной Модели, не говоря уже о моделях Великого объединения или суперсимметричных моделях. Однако это не должно разочаровывать, поскольку мы почти уверены в том, что наша Вселенная не тороидальна и уж во всяком случае не стационарна.

В заключение этого раздела можно перечислить дальнейшие направления развития предложенного формализма, а именно, рассмотрение

1) массивных полей (что не является тривиальным с технической точки зрения);

2) нестационарных (расширяющихся) вселенных;

3) вселенных с другими топологиями (в первую очередь Бианки-IX);

4) моделей типа Калуцы–Клейна.

6. Динамика космологических моделей со скалярным полем: хаос и фрактальность

В этом разделе мы рассмотрим простую модель, чье действие может быть получено из (3.4), если вместо комплексного скалярного поля будет взято действительное и выбраны параметры $\xi = \lambda = A = 0$. Уравнения движения и первый интеграл для такой системы имеют следующий вид:

$$\frac{m_P^2}{16\pi} \left(\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \right) + \frac{a\dot{\phi}^2}{8} - \frac{m^2\phi^2 a}{8} = 0, \quad (6.1)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{\phi}\dot{a}}{a} + m^2\phi = 0, \quad (6.2)$$

$$-\frac{3}{8\pi} m_P^2 (\dot{a}^2 + 1) + \frac{a^2}{2} (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) = 0. \quad (6.3)$$

Нетрудно увидеть, взглянув на уравнение (6.3), что точки максимального расширения и точки минимального сжатия могут существовать только в евклидовой

области, где

$$\phi^2 \leq \frac{3}{4\pi} \frac{m_P^2}{m^2 a^2}, \quad (6.4)$$

которая представляет собой область на полуплоскости $0 \leq a < +\infty$, $-\infty < \phi < +\infty$, ограниченную гиперболическими кривыми $\phi \leq \sqrt{3/4\pi} m_P/m_a$ и $\phi \geq -\sqrt{3/4\pi} m_P/m_a$ (рис. 3). Теперь нам нужно определить места возможной локализации точек минимального сжатия, где $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} > 0$, и точек максимального расширения, где $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} < 0$. Если $\dot{a} = 0$, то можно выразить $\dot{\phi}^2$ из уравнения (6.3). Подставляя полученное значение $\dot{\phi}^2$ и $\dot{a} = 0$ в уравнение (6.1), имеем

$$\ddot{a} = \frac{4\pi m^2 \phi^2 a}{m_P^2} - \frac{2}{a}. \quad (6.5)$$

Из этого уравнения видно, что возможные точки максимального расширения лежат внутри области

$$\phi^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{m_P^2}{m^2 a^2}, \quad (6.6)$$

тогда как возможные точки минимального сжатия лежат вне этой области, находясь в то же время внутри евклидовой области (6.4) (см. рис. 3).

Важно то, что все возможные траектории, удовлетворяющие уравнениям (6.1)–(6.3) имеют точки максимального расширения [87], что дает возможность использовать эти точки для построения удобной классификационной схемы. Локализация точек максимального расширения, определяемых уравнением (6.5), была описана ранее на языке фазового пространства в [71] и в [29] в терминах конфигурационного пространства. Общие формулы, описывающие такие точки для широкого класса моделей, выписаны в [49].

Мы будем различать траектории, монотонные по a и ϕ , т.е. падающие в сингулярность с монотонно меняющейся величиной скалярного поля, и траектории, испы-

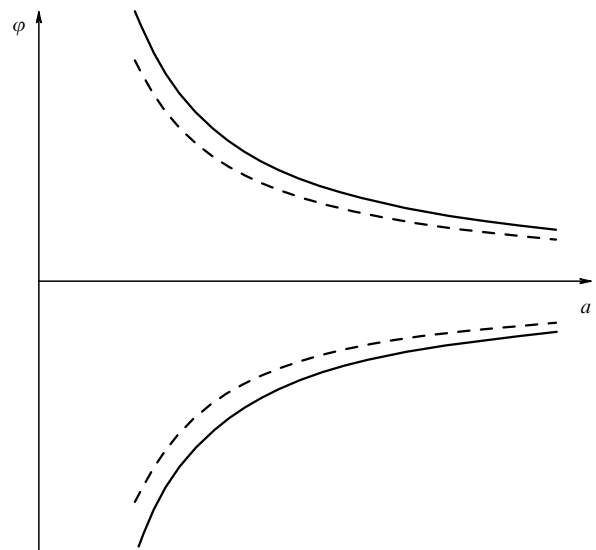


Рис. 3. На полуплоскости $a \geq 0$, ϕ сплошные гиперболические кривые отделяют лоренцеву область от евклидовой. Пунктирные гиперболические линии отделяют возможные точки максимального расширения от возможных точек минимального сжатия.

тывающие отскоки, т.е. проходящие через точки минимального сжатия, а также те, которые обладают экстремумами по φ — мы будем называть их φ -поворотами. Замечательно то, что существует определенная регулярность в расположении точек максимального расширения, соответствующих различным типам траекторий. А именно, области, соответствующие траекториям, попадающим в сингулярность после определенного числа φ -поворотов, разделены областями, соответствующими отскакивающим траекториям.

Мы будем рассматривать траектории, начинающиеся в некоторых точках максимального расширения, не изучая их "предыстории". Для скоростей $\dot{\varphi}$ в точке максимального расширения мы выберем направление "вверх", т.е. положительный знак (картина со скоростями $\dot{\varphi}$, направленными вниз, может быть получена посредством зеркального отражения относительно оси $\varphi = 0$). Численное интегрирование уравнений движения показывает, что для точек максимального расширения, расположенных в области, обозначенной на рис. 4 номером 0, траектории монотонно приближаются к сингулярности $a = 0$, $\varphi = +\infty$ (некоторые типичные траектории этого типа показаны на рис. 5а). Это представляется вполне естественным, поскольку в области близкой к оси ординат $a = 0$ поведение системы напоминает поведение модели с безмассовым скалярным полем, где отскоки и φ -повороты невозможны. Затем траектории, начинающиеся в области, обозначенной на рис. 4 номером 1, имеют отскок. Типичные траектории этого типа показаны на рис. 5б. Затем мы имеем область $\bar{1}$, которая не показана на рисунке. В этой области мы также имеем отскок, но перед этим отскоком наблюдается φ -поворот. Типичные траектории, начинающиеся в этой области, изображены на рис. 5г. Граница между областями 1 и $\bar{1}$ является местом, где некоторые периодические траектории, избегающие сингулярности, могут проходить через точки максимального расширения. (Впервые такие траектории были обнаружены в [28] и детально проанализированы в [29].) В частности, через точку $\varphi = 0$, лежащую на границе между областями 1 и $\bar{1}$ проходит симметричная по φ периодическая траектория, показанная на рис. 5в.

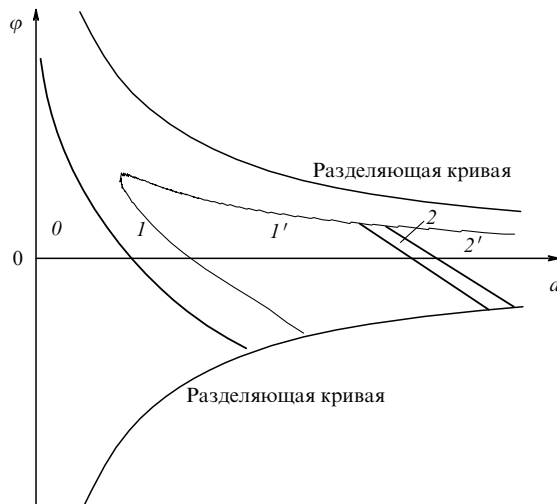


Рис. 4. Структура области локализации возможных точек максимального расширения.

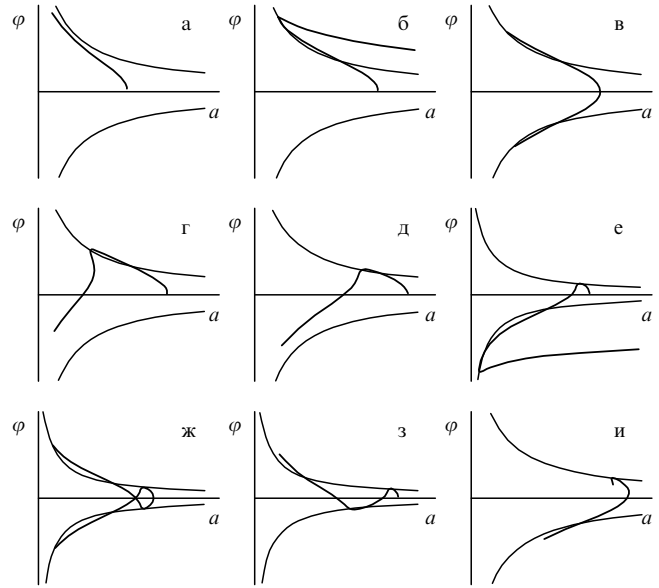


Рис. 5. Траектории, начинающиеся с точек максимального расширения в областях, представленных на рис. 4.

В области $\bar{1}$ локализованы траектории, не имеющие отскоков, но падающие в сингулярность $a = 0$, $\varphi = -\infty$ после φ -поворота (рис. 5д).

Затем в области 2 (см. рис. 4) мы имеем точки максимального расширения траекторий, которые после φ -поворота имеют отскок при $\varphi < 0$, избегая таким образом падения в сингулярность (рис. 5е). В области $2'$ мы имеем траектории, испытывающие отскок сразу после двух φ -поворотов. Граница между областями 2 и $2'$ содержит траектории, включающие точки поворота, где одновременно выполняются условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. Некоторые из таких траекторий периодичны. Одна из таких траекторий показана на рис. 5ж.

Начиная с точек максимального расширения в области $2'$ (см. рис. 4), мы имеем траектории без отскоков, но с двумя φ -поворотами, после которых они движутся к сингулярности $a = 0$, $\varphi = +\infty$ (рис. 5з).

Теперь нетрудно понять, какие траектории соответствуют точкам максимального расширения, размещенным в областях 3, $3'$, 4, $4'$ и т.д.

Стоит заметить, что наиболее своеобразную форму имеет граница между областью 1 и остальными областями в верхней полуплоскости. Эта граница состоит из двух кривых (см. рис. 4). Левая кривая конечна и отделяет область 1 от области $1'$, тогда как правая кривая бесконечна и расположена почти параллельно гиперболической кривой, отделяющей возможные точки максимального расширения от точек минимального сжатия. Интересно, что это верхняя кривая соприкасается со всеми областями, начиная с $1'$.

На рисунке 5и показана траектория, чья точка максимального расширения находится на верхней ветви области 1. Эта траектория непосредственно после отскока имеет φ -поворот, затем, пройдя через вторую точку максимального расширения, она попадает в сингулярность в нижней полуплоскости.

Вспомним, что наша классификация была построена для направления "вверх". Структура областей, соответствующих направлению "вниз", может быть получена

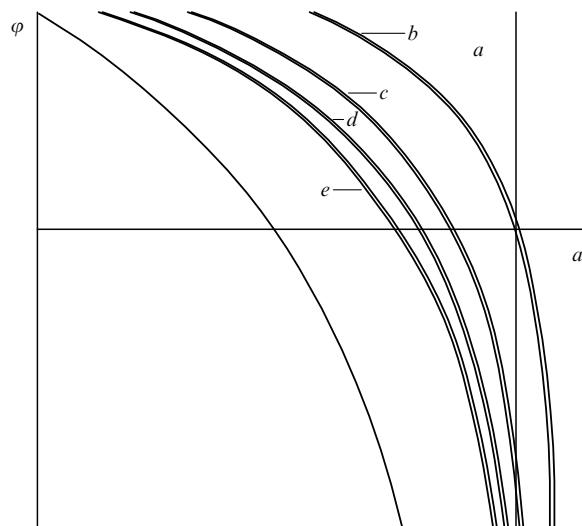


Рис. 6. Структура подобластей области I . Тонкие области, обозначенные буквами "b, c, d, e" соответствуют траекториям, имеющим, по меньшей мере, 2 отскока. Подобласть "a" и другие подобласти, расположенные между тонкими областями, соответствуют траекториям, попадающим в сингулярность после одного отскока.

отражением картины относительно оси $\varphi = 0$. Мы будем различать области "вверх" и "вниз" с помощью стрелок $\uparrow$ и $\downarrow$ соответственно.

Наибольший интерес представляют траектории, испытывающие отскоки, и особенно траектории, испытывающие множество отскоков, в идеале бесконечное число отскоков, т.е. траектории, избегающие сингулярности.

Давайте обратим внимание на траектории, чьи точки максимального расширения локализованы в областях I , 2 , $3, \dots$ или в областях $1'$, $2'$, $3'$, $\dots$, т.е. траектории, испытавшие по крайней мере один отскок. Рассмотрим структуру этих областей с точки зрения локализации их второй точки максимального расширения. Подструктура области $1\uparrow$ представлена на рис. 6, тогда как формы траекторий, соответствующих различным подобластям областей I и $1'$ представлены на рис. 7.

Справа от границы с областью $1'$ мы имеем подобласть $1\uparrow 1'\downarrow$, которая соответствует траекториям, после отскока приходящим в точку максимального расширения в области $1'\downarrow$, после которой они имеют второй отскок. Следующей подобластью слева от подобласти $1\uparrow 1'\downarrow$ является подобласть $1\uparrow 1'\uparrow$, которая соответствует траекториям, имеющим после отскока точку максимального расширения в области $1'\uparrow$. После этой точки максимального расширения они проходят через φ -поворот и затем попадают в сингулярность $a = 0$, $\varphi = -\infty$.

Дальше находится подобласть $1\uparrow 1\downarrow$, соответствующая траекториям с двумя отскоками. Затем следует подобласть $1\uparrow 1'\uparrow$, а за ней $1\uparrow 2\uparrow$, $1\uparrow 2'\uparrow$, $1\downarrow 2'\uparrow$, $1\downarrow 1\uparrow$, $1\uparrow 2'\downarrow$, $1\uparrow 3\downarrow$ и т.д.

Структура области $1'\uparrow$ существенно проще: имеются только две подобласти $1'\uparrow 1\downarrow$ и $1'\uparrow 0\downarrow$.

Таким образом, внутри областей $1\uparrow$, $1'\uparrow$ имеется бесконечный набор подобластей, приблизительно повторяющих структуру всей области возможных точек максимального расширения. Однако эта структура воспроизводится, грубо говоря, "в тройном количестве". Дей-

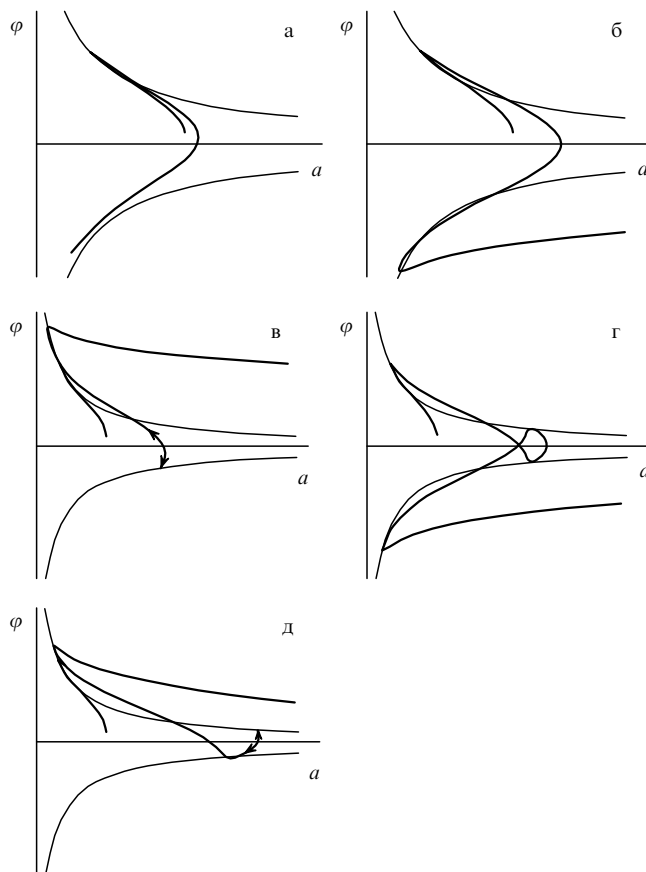


Рис. 7. Траектории, соответствующие различным подобластям области I , изображенным на рис. 6.

ствительно, все области удваиваются благодаря присутствию знаков $\uparrow$ и $\downarrow$. Кроме того, имеется бесконечное число промежуточных подобластей 11 . Можно показать, что структура пар областей $22'$; $33'$; $44'$... вполне аналогична описанной выше структуре для пары $11'$.

Изучая структуру подобластей, соответствующих двум отскокам, можно обнаружить внутри каждого из них ту же "подподструктуру" из бесконечного набора "подподобластей". Продолжая эту процедуру *ad infinitum*, можно увидеть, что область локализации точек максимального расширения, соответствующих траекториям, избегающим сингулярности, возникает в результате бесконечной рекуррентной процедуры, на каждой стадии которой мы обнаруживаем самоподобные структуры. Такое самоподобие структур, возникающих на разных масштабах, указывает на фрактальную природу множества, полученного в результате бесконечной процедуры [88]. Итак, хотя множество траекторий, избегающих сингулярности и бесконечно блуждающих между точками минимального сжатия и максимального расширения, имеет нулевую меру на множестве всех траекторий, оно может иметь в то же время нетривиальную фрактальную размерность. Это явление впервые обсуждалось в несколько иных терминах в статье [29].

Анализ наблюдательных данных свидетельствует о возможности существования в настоящее время небольшой космологической константы [89]. В связи с этим представляет интерес анализ динамики космологической модели, где наряду со скалярным полем присут-

ствует и космологическая постоянная Λ или, что эквивалентно, постоянный член в потенциале скалярного поля. Такой анализ был проделан в [31].

В первую очередь, следует отметить, что в этом случае условия теоремы о невозможности бесконечного расширения Вселенной оказываются нарушенными, и в фазовом пространстве появляются две особые точки, притягивающий и отталкивающий фокусы, соответствующие расширяющейся и сжимающейся деситтеровой Вселенной. В случае, когда поле безмассовое, картина становится совсем наглядной: фокусы превращаются в узлы, и появляются две стационарные седловые точки, когда радиус Вселенной фиксирован, а величина скалярного поля растет по линейному закону. Такая картина совпадает с известной фазовой диаграммой для космологической модели с идеальной жидкостью и космологической константой [90], что неудивительно, поскольку уравнение состояния для безмассового скалярного поля имеет вид $p = \epsilon$, что уже упоминалось в разделе 2 настоящего обзора.

В этом случае имеются три класса траекторий:

1) траектории, исходящие из выталкивающей деситтеровой точки (т.е. начинающие сжиматься по экспоненциальному закону при очень больших значениях космологического радиуса), проходящие через точку минимального сжатия и затем движущиеся к притягивающей деситтеровой точке (т.е. к режиму экспоненциального расширения);

2) траектории, исходящие из выталкивающей деситтеровой точки и падающие в сингулярность и траектории, начинающиеся в сингулярной точке и расширяющиеся к деситтеровой притягивающей точке;

3) траектории, начинающиеся и заканчивающиеся в сингулярности.

При включении массы скалярного поля картина становится более сложной, поскольку, как и в случае без космологической постоянной, возникает возможность блуждания между сингулярностями. Отметим основные черты возникающей картины. Граница между евклидовой и лоренцевой областями изменит свою форму и будет определяться уравнением:

$$\varphi^2 = \frac{3m_{\text{P}}^2}{4a^2} - \frac{\Lambda m_{\text{P}}^2}{4m^2}. \quad (6.7)$$

Евклидова область оказывается замкнутой справа при

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}.$$

Область локализации возможных точек максимального расширения отделена от возможных точек минимального сжатия кривой

$$\varphi^2 = \frac{m_{\text{P}}^2}{2\pi m^2 a^2} - \frac{\Lambda m_{\text{P}}^2}{4\pi m^2}, \quad (6.8)$$

пересекающей ось абсцисс при

$$a = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}}.$$

При значениях космологической константы Λ , меньших массы скалярного поля m , структура областей, в которых находятся точки максимального расширения, соответствующие разным режимам, напоминает структуру, описанную выше. Именно, имеется бесконечное число областей, внутри которых имеется бесконечное

число подобластей и т.д. Интересно, что бесконечное число областей "помещается" внутри области ограниченной справа, причем правой границей является некоторая периодическая траектория, ведущая себя как репеллер [31]. Как и в случае без космологической постоянной, множество траекторий, избегающих сингулярности, имеет фрактальную природу.

Однако при некотором большом значении $\Lambda \approx m^2$ картина меняется радикально: структура с бесконечным числом подобластей исчезает и вместо нее остаются только две области: область с номером 0, из которой траектории падают в сингулярность, и область с номером 1. Траектории, имеющие точку максимального расширения в области 1 после отскока уходят в деситтеров притягивающий фокус. Таким образом, для больших значений Λ множество траекторий, избегающих сингулярности, перестает быть фрактальным.

7. Пертурбативные методы в космологии

В этом разделе будет описана попытка построения теории возмущений относительно точного решения системы уравнений, упрощенной для описания некоторых качественных эффектов, представленных в предыдущем разделе. А именно, мы воспользуемся тем фактом, что для замкнутой фридмановской модели с пространственно-однородным безмассовым скалярным полем можно получить точные решения.

Для этого оказывается удобным использование канонического времени:

$$\eta = \int dt \frac{1}{a(t)}.$$

Уравнения движения (6.2), (6.3) переписываются в виде

$$\varphi'' + \frac{2\varphi'a'}{a} + m^2\varphi a^2 = 0 \quad (7.1)$$

и

$$\frac{a'^2}{a^2} = -1 + \frac{4\pi}{3m_{\text{P}}^2} \varphi'^2 + \frac{4\pi}{3m_{\text{P}}^2} m^2 \varphi^2. \quad (7.2)$$

Здесь знак "'" обозначает дифференцирование по η . При $m = 0$ уравнения (7.1) и (7.2) принимают вид

$$\varphi'' + \frac{2\varphi'a'}{a} = 0 \quad (7.3)$$

и

$$\frac{a'^2}{a^2} = -1 + \frac{4\pi}{3m_{\text{P}}^2} \varphi'^2. \quad (7.4)$$

Эта система уравнений может быть аналитически проинтегрирована. Как и в предыдущем разделе мы выберем в качестве начала эволюции тот момент, когда вселенная находится в точке максимального расширения. Тогда можно получить

$$a = a_0 \sqrt{\cos 2\eta}, \quad (7.5)$$

$$\frac{a'}{a} = -\tan 2\eta, \quad (7.6)$$

$$\varphi' = \sqrt{\frac{3m_{\text{P}}^2}{4\pi}} \frac{1}{\cos 2\eta}, \quad (7.7)$$

и, наконец,

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3m_P^2}{4\pi}} \ln \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta}. \quad (7.8)$$

Эти решения соответствуют траекториям, которые начинаются в одной из сингулярных точек $a = 0$, $\varphi = \pm\infty$, проходят через точку максимального расширения $a = a_0$, $\varphi = \varphi_0$ и падают в другую сингулярность $a = 0$, $\varphi = \mp\infty$.

На языке предыдущего раздела можно сказать, что вся полуплоскость (a, φ) заполнена единственной областью θ .

Любопытно, что при переходе к евклидовому времени эти решения преобразуются в хорошо известную кротовую нору Гиддингса и Стромингера [91], в то время как a_0 становится радиусом горловины кротовой норы.

Теперь мы построим теорию возмущений для решений уравнений (7.1), (7.2), используя решения безмассовых уравнений (7.5)–(7.7) в качестве нулевого приближения. Для упрощения вычислений ограничимся симметричным случаем $\varphi(0) = 0$. Вместо переменной a будем использовать переменную h , определенную как

$$h \equiv \frac{a'}{a}. \quad (7.9)$$

Представляя решения уравнений движения в виде

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \delta\varphi \quad (7.10)$$

и

$$h = h^{(0)} + \delta h, \quad (7.11)$$

где $\varphi^{(0)}$ и $h^{(0)}$ даются формулами (7.8) и (7.6), соответственно, можно получить следующие уравнения для $\delta\varphi$ и δh :

$$\delta\varphi'' + 2\delta\varphi' h^{(0)} + 2\delta h \varphi^{(0)'} + m^2 a^{(0)2} \varphi^{(0)} = 0 \quad (7.12)$$

и

$$h^{(0)} \delta h = \frac{4\pi}{3m_P^2} \varphi^{(0)'} \delta\varphi' + \frac{4\pi}{3m_P^2} \frac{m^2 \varphi^{(0)2} a^{(0)2}}{2}. \quad (7.13)$$

Подставляя в эти уравнения явные выражения для $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(0)'}$, $h^{(0)}$ и $a^{(0)}$ из (7.5)–(7.8), получаем

$$\begin{aligned} \delta\varphi'' - 2 \tan 2\eta \delta\varphi' + 2\delta h \sqrt{\frac{3m_P^2}{4\pi}} \frac{1}{\cos 2\eta} + \\ + \frac{1}{4} m^2 a_0^2 \cos 2\eta \sqrt{\frac{3m_P^2}{4\pi}} \ln \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta} = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

и

$$h^{(0)} \delta h = \sqrt{\frac{4\pi}{3m_P^2}} \frac{1}{\cos 2\eta} \delta\varphi' + \frac{m^2 a_0^2}{32} \ln^2 \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta}. \quad (7.15)$$

Из этих уравнений легко видеть, что малым параметром теории возмущений будет $m^2 a_0^2$. Используя уравнение (7.15), можно выразить δh через $\delta\varphi$:

$$\delta h = -\sqrt{\frac{4\pi}{3m_P^2}} \frac{\delta\varphi'}{\sin 2\eta} - \frac{m^2 a_0^2}{32} \frac{\cos^2 2\eta}{\sin 2\eta} \ln^2 \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta}. \quad (7.16)$$

Подставляя δh из (7.16) в (7.14), приходим к следующему уравнению для $\delta\varphi$:

$$\begin{aligned} \delta\varphi'' - 2\delta\varphi' \left(\tan 2\eta + \frac{1}{\cos 2\eta \sin 2\eta} \right) - \\ - \sqrt{\frac{3m_P^2}{4\pi}} m^2 a_0^2 \left(\frac{\cos 2\eta}{16 \sin 2\eta} \ln^2 \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta} - \right. \\ \left. - \frac{\cos 2\eta}{4} \ln \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\varphi' = \sqrt{\frac{3m_P^2}{4\pi}} \frac{m^2 a_0^2}{16} \frac{\sin 2\eta}{\cos^2 2\eta} \times \\ \times \left[2 \sin 2\eta - \frac{1 + \sin^2 2\eta}{2 \sin 2\eta} \ln^2 \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta} - \right. \\ - \cos^2 2\eta \ln \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta} + \ln^2 (1 - \sin 2\eta) - \\ - \ln^2 (1 + \sin 2\eta) + 2 \ln 2 \ln \frac{1 + \sin 2\eta}{1 - \sin 2\eta} + \\ \left. + 2 \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sin 2\eta}{2} \right) - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{1 + \sin 2\eta}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

$\text{Li}_2(x)$ — это дигамма-функция, представимый в виде ряда [92]:

$$\text{Li}_2(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Анализируя поведение δh и $\delta\varphi'$, можно увидеть [30], что обе первые поправки имеют знаки, противоположные знакам соответствующих функций в нулевом приближении. Поэтому можно сказать, что включение первых поправок $\delta\varphi'$ и δh может описать переход от набора траекторий без отскоков и φ -поворотов к траекториям, имеющим более сложную структуру. Можно показать, что абсолютное значение величины $\delta h/h^{(0)}$ повсюду превышает значение $\delta\varphi'/\varphi^{(0)}$. Это значит, что отскок происходит раньше, чем φ -поворот, и, таким образом, наша пертурбативная схема описывает переход от области θ к области I (см. раздел 6). (Вполне естественно, что первое приближение теории возмущений дает лишь малую часть общего набора траекторий, поскольку области, расположенные справа от I , соответствуют большим значениям параметра $m^2 a_0^2$ и не могут быть описаны пертурбативными методами.)

Следует признать, однако, что предложенная пертурбативная схема перестает работать при приближении к сингулярности. В самом деле, $\delta h/h^{(0)}$ достигает значения (-1) при *любом* значении параметра ma_0 , что означает — отскок имеется на любой траектории независимо от начальных условий. Однако мы знаем, что при малых значениях a_0 траектории лежат в области θ , т.е. не имеют ни отскоков, ни φ -поворотов. К сожалению, мы не можем оценить параметры, характеризующие изменение режимов поведения траекторий, пользуясь предложенной пертурбативной схемой, поскольку она неприменима в окрестности сингулярности. Тем не менее можно извлечь некоторую полезную информацию, сочетая пертурбативные методы, результаты численного счета и уравнения, описывающие локализацию точек экстремума траекторий [30].

В заключение этого раздела можно сказать, что теория возмущений, предложенная здесь для простейшей модели с действительным скалярным полем, оказывается значительно менее эффективной, чем теория возмущений, описывающая осцилляторный подход к сингулярности (см. раздел 2). Это связано с тем, что возмущения $\delta\phi$ и δh растут таким образом, что в определенный момент η они становятся больше, чем решения уравнений движения в безмассовом пределе. Таким образом, теория возмущений сама себя разрушает. Можно сравнить эту ситуацию с известной проблемой нуль-заряда в квантовой электродинамике, где однопетлевая поправка к константе электромагнитного взаимодействия превышает ее начальное "древесное" значение [93]. Хотя эта аналогия является столь же отдаленной, как и аналогия между применением пертурбативной теории к осцилляторному подходу к сингулярности и явлением асимптотической свободы, упомянутая в разделе 2, интересно, что эти два типа теории возмущений, "самоподдерживающийся" и "саморазрушительный", могут наблюдаться в различных областях классической и квантовой физики.

8. Заключение

Были рассмотрены такие направления квантовой и классической космологии, как осцилляторный подход к сингулярности, построение волновой функции Вселенной посредством анализа процесса квантового туннелирования, исследование вероятностных распределений для начальных условий космологической эволюции, вычисление квантовых поправок в космологии, анализ квантовой самосогласованности различных космологических моделей, анализ классической динамики изотропных космологических моделей и попытки построения несингулярных космологических сценариев. Эти направления имеют разный статус: если исследование осцилляторного подхода к сингулярности стало самостоятельным разделом математической физики, то исследование квантовой самосогласованности различных космологических моделей только начинает развиваться. В целом же, космология как квантовая, так и классическая является, по нашему мнению, одним из наиболее динамичных разделов теоретической физики. Мы стремились проследить связь между современным развитием космологии и идеями Л.Д. Ландау, высказанными в разные годы. В заключение следует отметить, что изучение хаоса, интенсивно развивающееся в последнее время в различных областях физики, включая такие аспекты космологии, как динамика изотропных и анизотропных моделей, также было одной из тем, интересовавших Л.Д. Ландау, который внес важный вклад в исследование одной из главных проблем такого рода — проблему объяснения турбулентности в гидродинамике [94].

Благодарности

Авторы благодарны А.О. Барвинскому, А.А. Старобинскому и А.В. Топоренскому за полезные обсуждения. Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований посредством грантов 96-02-16220 и 96-02-17591, гранта поддержки ведущих научных школ 96-15-96458, а также гранта РФФИ—INTAS 95-1353. И.М.Х. благодарен школе физики и астрономии Тель-Авивского университета за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Ландау Л Д, частное сообщение
2. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
3. Вильсон К, Когут Дж *Ренормализационная группа и ϵ -разложение* (М.: Мир, 1972)
4. Пенроуз Р *Структура пространства—времени* (М.: Мир, 1972); Хокинг С, Эллис Дж *Крупномасштабная структура пространства—времени* (М.: Мир, 1978); Hawking S W, Penrose R *Proc. R. Soc. London Ser. A* **314** 529 (1970)
5. Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Phys. Rev. Lett.* **24** 76 (1970)
6. Лифшиц Е М, Халатников И М *Письма в ЖЭТФ* **11** 200 (1970)
7. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **102** 463 (1970)
8. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **56** 1700 (1969)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
10. Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **80** 391 (1963)
11. Лифшиц Е М, Лифшиц И М, Халатников И М *ЖЭТФ* **59** 322 (1970)
12. Belinskii V A, Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Adv. Phys.* **31** 639 (1982)
13. Khalatnikov I M, Lifshitz E M, Khanin K M, Shchur L N, Sinai Ya G *J. Stat. Phys.* **38** 97 (1985)
14. Misner C W *Phys. Rev. Lett.* **22** 1071 (1969)
15. Cornish N J, Levin J J *Phys. Rev. D* **55** 7489 (1997)
16. Cotsakis S, Lemmer R L, Leach P G L "Adiabatic invariants and Mixmaster catastrophes" *Phys. Rev. D* **57** 4691 (1998); gr-qc/9712027²
17. Hartle J B, Hawking S W *Phys. Rev. D* **28** 2960 (1983); Hawking S W *Nucl. Phys. B* **239** 257 (1984)
18. Vilenkin A *Phys. Lett. B* **117** 25 (1982); *Phys. Rev. D* **27** 2848 (1983); **30** 509 (1984); **37** 888 (1988); Линде А Д *ЖЭТФ* **87** 369 (1984); Зельдович Я Б, Старобинский А А *Письма в АЖ* **10** 323 (1984); Rubakov V A *Phys. Lett. B* **148** 280 (1984)
19. Ландау Л Д, частное сообщение
20. Альтшулер Б Л, Барвинский А О *УФН* **166** 459 (1996)
21. Halliwell J J, Hartle J B *Phys. Rev. D* **41** 1815 (1990)
22. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Phys. Rev. D* **50** 5093 (1994)
23. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu, Mishakov I V *Nucl. Phys. B* **491** 387 (1997)
24. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Наука, 1974)
25. Parker L, Fulling S A *Phys. Rev. D* **7** 2357 (1973)
26. Старобинский А А *Письма в АЖ* **4** 155 (1978)
27. Barrow J D, Matzner R A *Phys. Rev. D* **21** 336 (1980)
28. Hawking S W, in *Relativity, Groups and Topology II* (Amsterdam: North-Holland Physics Publ., 1984)
29. Page D N *Class. Quantum Grav.* **1** 417 (1984)
30. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Int. J. Mod. Phys. D* **6** 673 (1997); gr-qc/9801064
31. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Int. J. Mod. Phys. D* **7** (1998); gr-qc/9801082; *Int. J. Mod. Phys. D* **7** 129 (1998)
32. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu, Toporensky A V, in *Proc. of 5th Course on Current Topics in Astrofundamental Physics, Erice, Italy, September 7–15, 1996* (Eds N Sanchez, A Zichichi) (Singapore: World Scientific, 1997) p. 271
33. Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu *Phys. Rep.* **288** 513 (1997)
34. Glashow S L, Iliopoulos J, Maiani L *Phys. Rev. D* **2** 1285 (1970)
35. Грин М, Шварц Дж, Виттен Э *Теория суперструн* Т.1, 2 (М.: Мир, 1990); Бринк Л, Энно М *Принципы теории струн* (М.: Мир, 1991); Поляков А М *Калибровочные поля и струны* (М.: ИТФ им. Л Д Ландау, 1995)
36. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **103** 211 (1981)
37. Линде А Д *Физика элементарных частиц и инфляционная космология* (М.: Наука, 1990)
38. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Class. Quantum Grav.* **7** L181 (1990)
39. Barvinsky A O *Phys. Rep.* **230** 237 (1993);
40. Kamenshchik A Yu *Phys. Lett. B* **316** 45 (1993)
41. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Phys. Lett. B* **332** 270 (1994)
42. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Int. J. Mod. Phys. D* **5** 825 (1996)
43. Esposito G, Kamenshchik A Yu, Miele G *Phys. Rev. D* **56** 1328 (1997)

² См., например, <http://xxx.lanl.gov>

44. Kamenshchik A Yu, Lyakhovich S L *Nucl. Phys. B* **495** 309 (1997)
45. Khalatnikov I M, Mezhlumian A *Phys. Lett. A* **169** 308 (1992)
46. Khalatnikov I M, Schiller P *Phys. Lett. B* **302** 176 (1993)
47. Amendola L, Khalatnikov I M, Litterio M, Occhionero F *Phys. Rev. D* **49** 1881 (1994)
48. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Phys. Lett. B* **357** 36 (1995)
49. Kamenshchik A Yu, Khalatnikov I M, Toporensky A V *Int. J. Mod. Phys. D* **6** 649 (1997); gr-qc/9801064
50. Kasner E M *Am. J. Math.* **43** 217 (1921)
51. Gross D J, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343 (1973); Politzer D H *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346 (1973)
52. Burd A, Buric N, Ellis G F R *Gen. Rel. Grav.* **22** 349 (1990); Hobill D, Bernstein D, Simkins D, Welge M *Class. Quantum Grav.* **8** 1155 (1991)
53. Ramani A, Grammaticos B, Bountis T *Phys. Rep.* **180** 159 (1989)
54. Contopoulos G, Grammaticos B, Ramani A *J. Phys. A* **27** 5357 (1994); Demare J, Scheen C *J. Phys. A* **29** 59 (1996); *Phys. Lett. B* **399** 207 (1997)
55. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **63** 1121 (1972)
56. Barrow J D, Dabrowski M P "Is there chaos in low-energy string cosmology?" hep-th/9711049
57. Gasperini M, Veneziano G *Astron. Phys.* **1** 317 (1993)
58. Calzetta E, Tibeault M "Perturbative analysis of Bianchi IX using Ashtekar formalism" gr-qc/9710128
59. Ashtekar A *Lectures on Non-Perturbative Quantum Gravity* (Singapore: World Scientific, 1991)
60. Gilmore R *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers* (New York: Wiley, 1981)
61. Starobinsky A A "Current trends in field theory, quantum gravity and strings" *Lect. Notes Phys.* **246** (Heidelberg: Springer-Verlag, 1986) p. 107; Kolb E W, Turner M *The Early Universe* (Frontiers in Physics, Vol. 69) (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1990)
62. Smoot J *Aph. J.* **396** L1 (1992); Струков И А и др. *Письма в АЖ* **18** 387 (1992)
63. Старобинский А А *Письма в АЖ* **9** 579 (1983)
64. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London Ser. A* **246** 333 (1958); *Lectures on Quantum Mechanics* (New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University Press, 1964); DeWitt B S *Phys. Rev.* **160** 1113 (1967); Wheeler J A, in *Batelles Rencontres* (New York: Benjamin, 1968)
65. Coleman S *Phys. Rev. D* **15** 2929 (1977); Callan C G, Coleman S *Phys. Rev. D* **16** 1762 (1977)
66. Hawking S W, Page D N *Nucl. Phys. B* **264** 185 (1986)
67. Grishchuk L P, Rozhansky L V *Phys. Lett. B* **208** 369 (1988); **234** 9 (1990)
68. Lavrelashvili G V, Rubakov V A, Serebryakov M S, Tinyakov P G *Nucl. Phys. B* **329** 98 (1990); Rubakov V A, Tinyakov P G *Nucl. Phys. B* **342** 430 (1990)
69. Salopek D S, Bond J R, Bardeen J M *Phys. Rev. D* **40** 1753 (1989); Fakir R, Unruh W G *Phys. Rev. D* **41** 1783 (1990); Fakir R, Habib S, Unruh W G *Aph. J.* **394** 396 (1992); Fakir R, Habib S *Mod. Phys. Lett. A* **8** 2827 (1993)
70. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu, Karmazin I P *Phys. Rev. D* **48** 3677 (1993)
71. Белинский В А, Гришук Л П, Зельдович Я Б, Халатников И М *ЖЭТФ* **89** 346 (1985); Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **93** 784 (1987)
72. Bousso R, Hawking S W *Phys. Rev. D* **52** 5659 (1995); **54** 6312 (1996)
73. Carriga J, Vilenkin A *Phys. Rev. D* **56** 2464 (1997)
74. Halliwell J J, Hawking S W *Phys. Rev. D* **31** 1777 (1985); Laflamme R *Phys. Lett. B* **198** 156 (1987)
75. Hawking S W *Commun. Math. Phys.* **55** 133 (1977); Dowker J S, Critchley R *Phys. Rev. D* **16** 3390 (1977)
76. DeWitt B S *Dynamical Theory of Groups and Fields* (New York: Gordon and Breach, 1965); Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Phys. Rep.* **119** 1 (1985)
77. Fradkin E S, Vilkovisky G A *Phys. Lett. B* **55** 224 (1975); Batalin I A, Vilkovisky G A *Phys. Lett. B* **69** 309 (1977); Batalin I A, Fradkin E S *Phys. Lett. B* **128** 303 (1983); *J. Math. Phys.* **25** 2426 (1984); *Riv. Nuovo Cimento* **9** Ser. 3 (10) 1 (1986); Ann. Inst. Henri Poincaré **49** 145 (1988)
78. Hwang S *Phys. Rev. D* **28** 2614 (1983); Ohta N *Phys. Rev. D* **33** 1681 (1986)
79. Дирак П А М *Лекции по квантовой механике* (М.: Мир, 1968)
80. Hanson A, Regge T, Teitelboim C *Constrained Hamiltonian Systems* (Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976); Sundermeyer K "Constrained dynamics: with applications to Yang–Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model" *Lect. Notes Phys.* **169** (Berlin, New York: Springer-Verlag, 1982); Henneaux M, Teitelboim C *Quantization of Gauge Systems* (Princeton, N.J.: Princeton University, 1992)
81. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **16** 587 (1946)
82. Arnold V *Annales de l'Institut Fourier* **XVI** 319 (1966)
83. Floratos E G, Iliopoulos J *Phys. Lett. B* **201** 237 (1988); Arakelyan T A, Savvidy G K *Phys. Lett. B* **214** 350 (1988); **223** 41 (1989); Bars I, Pope C N, Sezgin E *Phys. Lett. B* **210** 85 (1988); de Wit B, Marquard U, Nicolai H *Commun. Math. Phys.* **128** 39 (1990)
84. Wigner E P *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Pure and Applied Physics, Vol. 5) (New York: Academic Press, 1959)
85. Старобинский А А *Письма в ЖЭТФ* **57** 606 (1993); Соколов И Ю *Письма в ЖЭТФ* **57** 601 (1993); Stevens D, Scott D, Silk J *Phys. Rev. Lett.* **71** 20 (1993); Lachièze-Rey M, Luminet J-P *Phys. Rep.* **254** 135 (1995)
86. Buchbinder I L, Fradkin E S, Lyakhovich S L, Pershin V D *Int. J. Mod. Phys. A* **6** 1211 (1991)
87. Burnett G A *Phys. Rev. D* **51** 1621 (1995)
88. Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: W. H. Freeman, 1982); Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **146** 493 (1985)
89. Starobinsky A A, in *Proc. of 15th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation, Pune, India, 1997* (to be published)
90. Никомаров Е С, Халатников И М *ЖЭТФ* **75** 1176 (1978)
91. Giddings S B, Strominger A *Nucl. Phys. B* **306** 890 (1988)
92. Абрамовиц М, Стиган И *Справочник по специальным функциям* (М.: Наука, 1979)
93. Ландау Л Д, Абрикосов А А, Халатников И М *ДАН СССР* **95** 497, 773, 1177 (1954); **96** 261 (1954)
94. Ландау Л Д *ДАН СССР* **44** 339 (1944); Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988)

Singularity, initial conditions and quantum tunneling in modern cosmology

I.M. Khalatnikov, A.Yu. Kamenshchik

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,

ul. Kosygina 2, 117334 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 137-3244

Fax (7-095) 938-2077

E-mail: khalat@itp.ac.ru, kamen@landau.ac.ru

Key problems of modern cosmology, such as the cosmological singularity, initial conditions, and the quantum tunneling hypothesis, are discussed. The relationship between the latest cosmological trends and L D Landau's old ideas is analyzed. Particular attention is given to the oscillatory approach to singularity; quantum tunneling processes determining the Universe wave function in the presence of a complex scalar field; and the role of quantum corrections in these processes. The classical dynamics of closed models with a real scalar field is investigated from the standpoint of chaotic, fractal, and singularity-avoiding properties.

PACS numbers: 98.80.Hw, 98.80.Bp, 04.60.Ds

Bibliography — 94 references

Received 5 March 1998