Май 1998 г. *Том 168, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Кинетическое уравнение при наличии коллапсов волновых функций

И.Е. Мазец

Предлагается кинетическое уравнение для пробных частиц, сталкивающихся с молекулами буферного газа, модифицированное с учетом гипотезы о коллапсировании волновой функции частицы при столкновениях. Обсуждаются некоторые следствия, вытекающие из данной модификации, и возможность их наблюдения.

PACS numbers: 03.65.Bz, 05.70.Ln

Содержание

1. Введение

Природа необратимости продолжает оставаться одной из важнейших фундаментальных проблем современной физики. Наиболее убедительной представляется точка зрения, связывающая необратимость эволюции с открытостью физических систем. Система, подвергающаяся наблюдению, тем самым является принципиально открытой, т.е. взаимодействующей с окружением, в котором имеется неустранимая стохастичность. Вследствие этого описание эволюции системы исключительно обратимыми уравнениями движения неполно [1]. Таким образом, представляется актуальным создание последовательного теоретического описания эволюции индивидуальных квантовых объектов, взаимодействующих с окружением, включающего в себя необратимые (скачкообразные или близкие к таковым) изменения их векторов состояния — коллапсы волновых функций.

Важным шагом в получении количественных оценок параметров этого процесса явилась гипотеза Б.Б. Кадомцева о самоизменениях при столкновениях молекул в газе [2], подробно развитая в работах [3, 4]. Согласно этой гипотезе в результате последовательных столкновений волновая функция пробной молекулы не переходит в сложную когерентную суперпозицию рассеянных волн, существующую во всем объеме газа, а коллапсирует в хорошо локализованный (гауссов) волновой пакет, который в итоге диффундирует в газе, подобно классической частице. Основной результат этих работ состоит в количественной оценке стационарного значения ширины пакета, которая оказывается порядка

$$a = \sqrt{l\lambda_{\text{th}}}\,, \tag{1}$$

где l — длина свободного пробега, $\lambda_{\text{th}} = \hbar/(Mv_{\text{th}})$ — тепловая длина волны де Бройля, M — масса молекулы, v_{th} — характерная тепловая скорость.

В настоящей работе предполагается оценить влияние коллапсов волновых функций молекул на макроскопические свойства газа. С этой целью выводится уравнение для молекулярной матрицы плотности в вигнеровском представлении, опирающееся на гипотезу Кадомцева. В [3, 4] даны уравнения для волновой функции, моделирующие процесс ее коллапса при столкновении, где положение рассеивателя считается заданным. Усреднение по положениям молекул, с которыми сталкивается пробная частица, требует перехода к формализму матрицы плотности. В таком формализме мы отвлекаемся от микросостояния газа, выявляя существенные черты, связанные с редукцией волнового пакета.

2. Вывод кинетического уравнения

Выведем уравнение для матрицы плотности молекул вещества, представляющего собой малую примесь к основной компоненте газовой смеси. Для краткости будем говорить о пробных частицах в буферном газе. Требование малой концентрации пробных частиц означает, что их взаимодействием между собой можно пренебречь и рассматривать их столкновения только с молекулами буферного газа. Пусть $\hat{f}$ есть матрица плотности пробной частицы, $\hat{H}$ — гамильтониан ее свободного движения. После столкновения с молекулой буферного газа пробная частица оказывается в чистом состоянии $|\psi\rangle$, которое в координатном представлении

И.Е. Мазец. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Политехническая ул. 26, Россия
Тел. (812) 247-93-68
Факс (812) 247-10-17
E-mail: mazets@astro.ioffe.rssi.ru

Статья поступила 13 января 1998 г.

имеет вид

$$\langle \mathbf{r}|\psi\rangle = (\pi a^2)^{-3/4} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2a^2}\right] \exp\frac{\mathrm{i}\mathbf{p}_0\mathbf{r}}{\hbar}\,, \tag{2}$$

где ширина a гауссова пакета дается уравнением (1). Средний импульс частицы $\mathbf{p}_0$ после столкновения в общем случае коррелирован со значением $\mathbf{p}'$ перед столкновением. Точка $\mathbf{r}_0$, где модуль функции ψ достигает максимума, определяется положением частицы-рассеивателя и поэтому является случайной величиной, по которой следует проводить усреднение.

Кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}\hat{f} - \hat{f}\hat{H}) = -\hat{J}_{\mathrm{out}} + \hat{J}_{\mathrm{in}}\,, \tag{3}$$

где $\hat{J}_{\mathrm{out}}$ и $\hat{J}_{\mathrm{in}}$ — соответственно, уходная и приходная части интеграла столкновений. Рассмотрим сначала $\hat{J}_{\mathrm{out}}$. Вероятность столкновения в единицу времени Γ пробной частицы с молекулой буферного газа равна отношению тепловой скорости к длине свободного пробега: $\Gamma = v_{\mathrm{th}}/l$. Каждое столкновение, независимо от того, сопровождается оно редукцией волновой функции или нет, ведет к уходу пробной частицы из исходного состояния. Поэтому

$$\hat{J}_{\mathrm{out}} = \Gamma \hat{f}. \tag{4}$$

Аналогично, приходный член записывается следующим образом, вытекающим из теории скачкообразных случайных процессов [5–7]:

$$\hat{J}_{\mathrm{in}} = \Gamma \overline{\varkappa |\psi\rangle\langle\psi|}\,. \tag{5}$$

Здесь черта над выражением означает усреднение по состояниям буферного газа, т.е. по значениям $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{p}_0$, входящим в (2). Если происходит столкновение с какой-либо определенной молекулой буферного газа, то матрица плотности пробной частицы коллапсирует к $|\psi\rangle\langle\psi|$. Вероятность столкновения именно с данной молекулой учитывается множителем $\varkappa$. Этот безразмерный множитель представим как плотность вероятности для пробных частиц в координатном пространстве, проинтегрированную с весом $|\psi|^2$:

$$\varkappa = V \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \left|\langle \mathbf{r}'|\psi\rangle\right|^2 \langle \mathbf{r}'|\hat{f}|\mathbf{r}'\rangle\,. \tag{6}$$

Здесь полный объем V системы введен для нормировки ($\varkappa$ — безразмерная величина). Для дальнейшего преобразования выражения (6) используем вигнеровское представление (аргументы матрицы плотности суть радиус-вектор и импульс) [8]. Предполагаем, что усреднение по $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{r}_0$ можно провести независимо. Усреднение по координате частицы-рассеивателя сводится к интегрированию выражения (6) по $\mathbf{r}_0$ и делению на полный объем V, по которому молекулы буферного газа распределены равномерно. После подстановки (1) $\hat{J}_{\mathrm{in}}$ преобразуется к виду, содержащему интегральные операторы с ядрами:

$$K(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}\,\hbar}\right)^3 \int \mathrm{d}\mathbf{p}_0 \exp\left[-\frac{a^2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}{\hbar^2}\right] \Pi(\mathbf{p}_0|\mathbf{p}')\,, \tag{7}$$

$$\chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = (2\pi a^2)^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2a^2}\right]. \tag{8}$$

В выражении (7) $\Pi(\mathbf{p}_0|\,\mathbf{p}')$ означает условную плотность вероятности коллапсирования состояния пробной частицы к волновому пакету ψ с данным средним импульсом $\mathbf{p}_0$ при условии, что до столкновения импульс пробной частицы был равен $\mathbf{p}'$.

Ядро $K(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ — это обычная вероятность изменения импульса пробной частицы при столкновении. Различные формы этого ядра обсуждаются в литературе (см., например, [9, 10]). Укажем два его основных свойства. Во-первых, его интегрирование по $\mathbf{p}$ дает единицу (что, очевидно, вытекает из определения (7)), во-вторых, оно таково, что содержащее его кинетическое уравнение для пробных частиц имеет стационарное решение в виде максвелловского распределения с температурой, равной температуре буферного газа. В частности, в модели сильных столкновений $K(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ вообще не зависит от $\mathbf{p}'$ и представляет собой нормированное на единицу максвелловское распределение, соответствующее этой температуре.

Итак, запишем итоговую форму для кинетического уравнения, учитывающего коллапсы волновых функций при межмолекулярных столкновениях:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \frac{\mathbf{p}}{M}\nabla f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = -\Gamma f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \\ + \Gamma \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int \mathrm{d}\mathbf{p}'\, \chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}') K(\mathbf{p},\mathbf{p}') f(\mathbf{r}',\mathbf{p}',t)\,. \tag{9}$$

Единственное отличие (9) от традиционного уравнения, описывающего эволюцию ансамбля пробных частиц в буферном газе [9, 10], заключается в наличии интегрального оператора с ядром $\chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, который характеризует нелокальность процесса коллапса волновых функций при столкновениях. Традиционная теория локальна, что соответствует предельному переходу $a \to 0$, и, следовательно, вырождению $\chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ в δ-функцию (в этом случае интегрирование по координате осуществляется элементарно и не присутствует в итоговом интегродифференциальном уравнении для f). Отметим, что интегрирование χ по $\mathbf{r}$ дает единицу. Ввиду указанных выше свойств обоих ядер K и χ уравнение (9) сохраняет нормировку матрицы плотности.

3. Некоторые следствия

Рассмотрим, во-первых, случай, когда справедливо гидродинамическое приближение, т.е. неоднородности в распределении пробных частиц имеют пространственный масштаб много больше длины свободного пробега. Так как в разреженном газе тепловая длина волны де Бройля на много порядков меньше длины свободного пробега, пространственный параметр коллапса a оказывается малым по сравнению с пространственным масштабом неоднородности. Это позволяет разложить f под интегралом в приходном члене по степеням $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Это обычная процедура перехода от точного уравнения, описывающего дискретный случайный процесс, к приближению непрерывного случайного процесса, который описывается уравнением Фоккера – Планка [7].

Рассмотрим, как модифицируется уравнение непрерывности. Введем плотность $\rho = M\int \mathrm{d}\mathbf{p} f$ и гидродинамическую скорость $\mathbf{u} = \rho^{-1}\int \mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathbf{p} f$. Тогда при удержании членов до второго порядка включительно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = D_{\mathrm{c}}\Delta\rho\,. \tag{10}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $D_c = 3\Gamma a^2/2$ — аномальный коэффициент диффузии, обусловленный наличием коллапсов волновых функций. В уравнении непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

плотность потока должна быть записана как

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u} - D_c\nabla\rho\,.$$

Подобным образом меняются и уравнения переноса энергии и импульса.

Оценим вклад новых членов в гидродинамические уравнения. Выражая Γ и a через длину свободного пробега, получаем следующий замечательный результат:

$$D_c = \frac{3\hbar}{2M}\,. \tag{11}$$

Аномальный коэффициент диффузии оказывается не зависящим от свойств среды — температуры, плотности пробного вещества и буферного газа, а определяется лишь массой M пробной частицы. Принимая для M оценку 10^{-22} г, получаем $D_c \sim 10^{-5}$ см^2 с$^{-1}$. Это гораздо меньше типичного значения кинематической вязкости газа, имеющей порядок $v_{th}l$. Таким образом, наличие коллапсов волновых функций практически не меняет результаты гидродинамических расчетов эволюции макроскопических неоднородностей в газе, т.е. принятая нами гипотеза не противоречит опыту в данном аспекте. В то же время она служит обоснованием необратимости подобных процессов.

Во-вторых, если в распределении пробных частиц по координате создана неоднородность, осциллирующая с периодом много меньше a, то соответствующий интеграл в правой части уравнения (9), содержащий член $\chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, обращается в нуль, т.е. эффективно работает только уходный член, и такая неоднородность диссипирует за счет эффектов нелокальности при коллапсе очень быстро, за время порядка нескольких Γ^{-1}. Такие структуры могут создаваться в среде внешним электромагнитным полем, резонансным какому-либо электронному переходу пробной частицы, если данное поле само обладает устойчивой пространственной структурой (как, например, монохроматическая стоячая волна). О таких структурах говорят как о лазерно-индуцированных решетках [11, 12]. При комнатной температуре $\lambda_{th} \sim 10^{-9}$ см.

Предположим, что буферный газ достаточно разрежен, и $l \approx 0{,}1$ см. Тогда параметр коллапса $a \approx 10^{-5}$ см, и лазерно-индуцированная решетка, созданная под действием излучения ультрафиолетового диапазона, имеет период s, сравнимый с a. Нелинейно-оптический сигнал, полученный дифракцией дополнительного поля на лазерно-индуцированной решетке, несет информацию, в частности, об отличии фурье-образа ядра

$$\tilde{\chi} = \exp\left[-2\left(\frac{\pi a}{s}\right)^2\right]$$

от единицы. Однако чувствительность такого измерения существенно ограничена рядом как типично экспериментальных, так и фундаментальных факторов. Например, конечность радиуса лазерного луча приводит к большому пролетному уширению спектра сигнала. Но если создание решетки и генерация сигнальной волны разнесены во времени, то интересующий нас эффект ускоренного распада решетки замывается неоднородным уширением другого типа (допплеровским). Если же генерация решетки и сигнала идет в непрерывном режиме, то в системе имеется отличный от столкновений источник необратимости — спонтанная эмиссия фотонов (резонансная флуоресценция). Это может существенно влиять на тип редукции молекулярных волновых пакетов. Однако принципиального запрета на возможность проведения оптического измерения, способного дать ответ о наличии или отсутствии коллапсов волновой функции при столкновении, нет. Но прецизионность экспериментальных методов нелинейной лазерной спектроскопии должна быть существенно повышена, чтобы данная цель была достигнута (по предварительным оценкам погрешность измерения мощности сигнала не должна превышать 1 %).

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Д.А. Варшаловичу, Б.Г. Матисову и Н. Лейнфелльнеру за полезные обсуждения.

Список литературы

1. фон Оппен Г *УФН* **166** 661 (1996)
2. Кадомцев Б Б *УФН* **165** 967 (1995)
3. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *ЖЭТФ* **108** 1634 (1995)
4. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *УФН* **166** 651 (1996)
5. Бурштейн А И *ЖЭТФ* **49** 1362 (1965)
6. Бурштейн А И, Оселедчик Ю С *ЖЭТФ* **51** 1071 (1966)
7. Gardiner C W *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Berlin: Springer, 1985) [Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)]
8. Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М: Наука, 1971)
9. Le Gouët J-L, Berman P R *Phys. Rev. A* **17** 52 (1978)
10. Berman P R, Haverkort J E M, Woerdman J P *Phys. Rev. A* **34** 4647 (1986)
11. Маныкин Э А, Самарцев В В *Оптическая эхо-спектроскопия* (Отв. ред. С А Ахманов) (М.: Наука, 1984)
12. Зельдович Б Я, Пилипецкий Н Ф, Шкунов В В *Обращение волнового фронта* (М.: Наука, 1985)

Kinetic equation including wavefunction collapses

I.E. Mazets
A.F. Ioffe Physical Technical Institute
ul. Politekhnicheskaya 26, 194021 St. Petersburg, Russia
Tel. (*7-812*) *247-93 68. Fax* (*7-812*) *247-10 17*
E-mail: *mazets@astro.ioffe.rssi.ru*

A kinetic equation for probe particles colliding with buffer gas molecules is proposed, modified to include the concept of wavefunction collapse for colliding particles. Implications for experimental observation are discussed.

PACS numbers: 03.65.Bz, 05.70.Ln
Bibliography — 12 references
Received 13 January 1998