Апрель 1998 г. **Том 168, № 4**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

БИБЛИОГРАФИЯ

Уравнение Фоккера – Планка

The Fokker – Planck Equation. Risken H
(Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 1989)
PACS numbers: **02.50.+r**, **05.45.+b**

Хотя теория стохастических систем привлекает к себе внимание начиная с работ Больцмана, Гиббса, Максвелла, в последнее время наблюдается лавинообразный рост интереса к таким системам. Не говоря о проведении многочисленных конференций, появились специализированные журналы (например, *Phys. Rev.* открыл серию E) и множество монографий, посвященных различным аспектам теории стохастических систем (см. [1 – 5] и имеющиеся там ссылки). В ряду последних можно выделить Шпрингеровскую серию по синергетике под редакцией Хакена. Монография его сотрудника Ханнеса Рискена представляет 18-й том этой серии и была выпущена сначала в 1984 г., а затем, с немногочисленными исправлениями и добавками, в 1989 г. Поскольку она широко цитируется в оригинальной литературе и практически недоступна в СНГ, уместно ознакомиться с ее содержанием — тем более, что книга Х. Рискена представляет, по нашему мнению, лучшую из монографий по теории стохастических систем.

Прежде всего это обусловлено тем, что в ней не встретишь заклинания "легко показать", к которому мы так привыкли, читая Курс Ландау – Лифшица[1]. Рискен, не вдаваясь в излишнюю детализацию, последовательно излагает все аспекты исследуемой темы — будь то хорошо известная теория броуновского движения или мало распространенные методы решения уравнения Фоккера – Планка (УФП). Кроме того, автор никогда "не льет воду", книга написана великолепным теоретико-физическим языком и читать ее — одно удовольствие.

Монография достаточно объемна — более 470 страниц текста, 441 ссылка по разделам, 12 глав основного текста, приложения, дополнения (к первому изданию) и обширный предметный указатель. С некоторой долей условности излагаемый материал можно разбить на 3 группы. Во вводных главах 1 – 3 представлены основные понятия теории стохастических систем, приводятся необходимые сведения из теории вероятности, а также рассматривается уравнение Ланжевена. Центральная группа, включающая главы 4 – 10, посвящена рассмотрению основного объекта монографии — УФП. В главе 4, занимающей ключевое место, рассматриваются различные формы представления УФП, а затем (главы 5, 6) методы его решения при наличии одной и нескольких переменных. Несколько в стороне стоит глава 7, посвященная изложению основных сведений о корреляционных функциях и восприимчивостях. В главе 8 рассматриваются методы, позволяющие уменьшить число переменных, определяющих поведение системы. Глава 9 основана на использовании рекуррентного метода решения УФП, приводящего к использованию цепных (непрерывных) дробей. В главе 10 этот метод применяется к решению частного случая УФП — уравнения Крамерса, описывающего диффузию частицы в произвольном потенциале. Более третьей части объема монографии занимает изложение последней группы прикладных вопросов: в главе 11 рассматривается броуновское движение частицы в периодическом потенциале, а в главе 12 статистические свойства лазерного излучения. Чтение этого материала несколько утомляет обилием частных результатов, но по-иному, видимо, и не могло быть — в главах 11, 12 Рискен излагает материал, близкий его научным интересам.

Остановимся более подробно на указанных темах. При этом будем следовать такому уровню детализации, чтобы читатель, не державший в руках книгу Рискена, мог представить набор рассмотренных вопросов и суть использованных методов.

Вводная глава 1 содержит следующие разделы: 1.1. Броуновское движение. 1.2. УФП. 1.3. Уравнение Больцмана. 1.4. Управляющее уравнение. В разделе 1.1 показано, как на основе уравнения движения шарика в жидкой среде получается стохастическое уравнение Ланжевена. Введены определения белого и цветного шумов, интенсивность первого из которых найдена на основе закона равнораспределения. Показано, что в силу случайного характера решения $x(t)$ стохастического уравнения в момент времени t ему следует сопоставить функцию распределения $W(x,t)$, вид которой определяется из УФП. Раздел 1.2 содержит перечисление основных типов УФП. В наиболее общем виде имеем уравнение Чепмена – Колмогорова

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \int M(x,t;x',t')\,W(x',t')\,\mathrm{d}x'(t')\,, \qquad (1)$$

где функция памяти $M(x,t;x',t')$ учитывает влияние распределения $W(x',t')$ в предыдущие моменты времени $t' < t$. Раскладывая ядро M по разности $x - x'$, получаем обобщенное (в смысле учета эффектов памяти) уравнение Крамерса – Мойэла

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-\nabla)^n \int_{-\infty}^{t} D^{(n)}(x,t-t')\,W(x,t')\,\mathrm{d}t'\,, \qquad (2)$$

где $\nabla \equiv \partial/\partial x$, коэффициенты $D^{(n)}$ представляют моменты функции памяти M, деленные на $n!$. Для марковских процессов они пропорциональны $\delta(t-t')$, и интегриро-

[1] По словам К.П. Белова, бывшего рецензентом Курса, "Ландау угадывал результат, а Лифшиц не всегда излагал его вывод".

вание в (2) пропадает. Кроме того, в случае δ-коррелированного (белого) шума имеем $D^{(n)} \equiv 0$ при $n > 2$, и равенство (2) приводит к стандартной форме УФП

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = L_{\mathrm{FP}} W(\mathbf{x}, t)\,, \quad L_{\mathrm{FP}} \equiv -\nabla_i D_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \nabla_i \nabla_j D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})\,, \tag{3}$$

где проведено обобщение на случай нескольких переменных $\{x_i\} \equiv \mathbf{x}$, $\nabla_i \equiv \partial/\partial x_i$, по повторяющимся индексам проводится суммирование, величины $D_i^{(1)}$, $D_{ij}^{(2)} = D_{ji}^{(2)} > 0$ определяют интенсивность процессов дрейфа и диффузии. В уравнении Крамерса набор переменных $\{x_i\}$ сводится к координате и скорости одномерного броуновского движения. При значительных величинах коэффициента вязкости в стохастическом уравнении можно пренебречь инерциальным слагаемым, и скорость броуновской частицы выпадает из рассмотрения. В результате набор $\{x_i\}$ сводится к координате, а УФП приобретает простейший вид уравнения Смолуховского.

Весьма интересным представляется перечисление случаев, в которых можно найти аналитическое решение УФП (раздел 1.2.4). Как стационарное, так и нестационарное решения определяются при линейной зависимости коэффициента дрейфа $D^{(1)}(\mathbf{x})$ и постоянном значении коэффициента диффузии $D^{(2)}$. При выполнении условия детального равновесия, а также при нулевом потоке вероятности стационарное распределение сводится к квадратурам. Кроме того, в разделе 1.2.4 указаны различные методы решения УФП: машинное моделирование, численное интегрирование, сведение УФП к уравнению Шрёдингера, аналитическое решение (в особенности для одномерного случая) при специальном выборе зависимостей $D_i^{(1)}(\mathbf{x})$, $D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})$, нестационарное решение УФП при слабом внешнем воздействии (теория линейного отклика), использование метода цепной дроби. К сожалению, в этот список не попал весьма важный случай аналитического решения УФП в нестационарном автомодельном режиме (впервые такое решение получено в 1958 г. И.М. Лифшицем и В.В. Слезовым при рассмотрении ансамбля выделений фазы в процессе коалесценции). Условие самоподобия такой системы позволяет свести зависимость $W(x, t)$ от двух переменных x, t к единственному аргументу $y = x/a(t)$, где зависимость $a(t)$ определяет характерный масштаб величины x. Оказывается, что как и в указанных выше простейших случаях, зависимость $W(y)$ может быть представлена в экспоненциальной форме типа распределения Гиббса.

В разделе 1.3 проводится параллель между кинетическим уравнением Больцмана и УФП. Их различие состоит в том, что первое определяет эволюцию ансамбля одинаковых частиц, а второе — стохастическое поведение выделенной (большой) частицы. При линеаризации интеграла столкновений в уравнении Больцмана оно принимает вид уравнения Крамерса.

Раздел 1.4 содержит основные сведения об управляющем уравнении, представляющем микроскопическую картину эволюции стохастической системы. В частности, приведено выражение для δ-образной скорости перехода между микросостояниями, при котором управляющее уравнение принимает форму УФП.

Глава 2 "Теория вероятности" начинается с определения вероятности и плотности вероятности через функции Хевисайда и Дирака соответственно. Показано, как, используя свойства последней, перейти от одной стохастической переменной к другой. Центральное место занимает рассмотрение характеристической (производящей) функции $C(u)$, представляющей среднее от экспоненты $\exp(\mathrm{i}u\zeta)$, где ζ — случайная величина, u — произвольный параметр. Из определения следует, во-первых, что характеристическая функция представляет фурье-образ плотности вероятности и, во-вторых, при $u = 0$ она сводится к статистической сумме. При разложении зависимости $C(u)$ в ряд Маклорена по u коэффициенты сводятся к моментам M_n случайной величины ζ. Однако, поскольку физический смысл имеет не сама статсумма $C(0)$, а свободная энергия $-T \ln C(0)$, T — температура, то следует использовать разложение $\ln C(u)$, коэффициенты которого называются кумулянтами K_n (в диаграммном представлении им отвечают связанные графики). Автор не только приводит явные выражения K_n через M_n (и наоборот) для $n = 1, \ldots, 4$, но и находит детерминантные выражения, позволяющие перейти от $M_n(K_n)$ к $K_n(M_n)$ при любом порядке n. Рассмотрение проводится сначала для одной стохастической переменной, а затем обобщается на несколько. Найдена связь между условной и полной вероятностями. Отдельно рассматривается гауссово распределение (на наш взгляд, не самым удачным образом; во всяком случае в приложении 2.1 книги [6] это сделано намного полнее и элегантнее). Разделы 2.4, 2.5 посвящены исследованию стохастических процессов, для которых случайная переменная становится функцией времени. Показано, что для чисто случайных процессов функция распределения нескольких переменных сводится к произведению соответствующих функций одной переменной. При переходе к марковским процессам получаем произведение парных функций условной вероятности. Это приводит к интегральному уравнению Чепмена – Колмогорова, позволяющему найти такую вероятность (раздел 2.4.2). В заключение главы 2 приводится формула Винера – Хинчина, дающая фурье-образ коррелятора случайных величин через фурье-образы самих этих величин.

Глава 3 посвящена рассмотрению уравнения Ланжевена, являющегося основой теории стохастических систем (в отсутствие детерминистической силы оно описывает винеровский процесс, а при линейной зависимости этой силы от стохастической переменной — процесс Орнштейна – Уленбека). Изложение начинается с простейшего случая броуновского движения (раздел 3.1). Здесь в полной мере проявляется отмеченная выше особенность — автор подробнейшим образом излагает вычисления корреляторов скорости и смещения броуновской частицы для произвольного момента времени (обычно приводятся асимптотики при $t \to \infty$).

Весьма поучительным представляется вывод распределения Максвелла через вычисление моментов и определение производящей функции. Рассмотрение процесса Орнштейна – Уленбека в разделе 3.2 основывается на методе функции Грина, использование которого позволяет найти временные зависимости двух первых моментов в пределе $t \to 0$. В силу линейности уравнения Орнштейна – Уленбека точное решение получается при переходе к фурье-образам по времени. Центральную роль — не только в главе 3, но и во всей теории стохастических систем — играет изложенный в разделе 3.3 анализ уравнения Ланжевена

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h(x) + g(x)\zeta(t)\,, \quad \langle\zeta\rangle = 0\,, \quad \langle\zeta(t)\zeta(t')\rangle = 2\delta(t-t')\,, \tag{4}$$

где $h(x)$ — детерминистическая сила, $g(x)$ — амплитуда случайной силы $\zeta(t)$ (мультипликативная функция). Сначала (раздел 3.3.1) автор определяет временную зависимость моментов для винеровского процесса (сила $h = 0$) с амплитудой шума $g = x$ (модель Ферхюльста). При этом оказывается, что несмотря на отсутствие детерминистической силы h коэффициент дрейфа $D^{(1)} \propto x$ имеет ненулевое значение. В общем случае нескольких переменных x_i, если амплитуда шума имеет зависимость $g_{ij}(x)$ от случайной переменной x_i, то коэффициены дрейфа и диффузии имеют вид

$$D_i^{(1)} = h_i + g_{kj}\nabla_k g_{ij}\,, \quad D_{ij}^{(2)} = g_{ik}g_{jk}\,. \tag{5}$$

Таким образом, мультипликативный характер шума обусловливает появление фиктивной силы, дополняющей действие реальной составляющей h_i. Характерно, что такая добавка возникает при использовании исчисления Стратоновича и пропадает при переходе к исчислению Ито (раздел 3.3.3). Они отличаются выбором точки $\tilde{t}_n = t_n + \lambda\Delta t_n$, $\lambda \in [0,1]$ бесконечно малого интервала времени $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \to 0$, в которой определяется стохастическая переменная $x_i(t)$: в исчислении Ито эта точка берется на левом краю интервала ($\lambda = 0$), а в исчислении Стратоновича — посередине ($\lambda = 1/2$). Отдавая предпочтение исчислению Стратоновича, автор, к сожалению, не затрагивает вопрос о том, что возможно континуальное множество исчислений, отвечающих выбору параметра $\lambda \in [0,1]$. Впрочем, это избавляет его от весьма туманных спекуляций [4], после ознакомления с которыми возникает мысль, что авторы и сами не понимают суть дела. В завершение главы 3 найдены выражения, связывающие коэффициенты $D_i^{(1)}$, $D_{ij}^{(2)}$ при различном выборе стохастических переменных x_i (раздел 3.4.2). Показано, что немарковскому процессу можно придать марковскую форму за счет введения дополнительной переменной (раздел 3.5), а также приведена схема машинного моделирования уравнения Ланжевена (раздел 3.6).

Глава 4 является вводной в основной объект исследования — УФП. В разделах 4.1, 4.2 автор рассматривает три различных метода получения прямого и обратного уравнений Колмогорова, которые отвечают противоположным направлениям стрелы времени (УФП сводится к первому из них). Указанные методы носят формальный характер и сводятся к тому, что по разности $x - x'$ раскладывается либо производящая функция, либо δ-функция, либо условная вероятность. На наш взгляд, стандартный метод [7], основанный на рассмотрении управляющего уравнения, представляется более физичным, хотя использованная формальная процедура наиболее прагматична. Весьма важной представляется теорема Павулы, простой вывод которой основывается на использовании неравенства Шварца (раздел 4.3). Она показывает, что ряд Крамерса – Мойэла (2) можно оборвать либо на первом слагаемом, либо на втором; при сохранении произвольного числа членов $n > 2$ процедура обрезания приводит к противоречиям. В разделе 4.4 исследуется УФП для одной переменной. Показано, что ему можно придать вид уравнения непрерывности, где приравнивание нулю стационарного потока плотности вероятности приводит к распределению Максвелла. При малых временах условная вероятность имеет вид функционального распределения Гаусса относительно скорости $\dot{x}$, центрированной на величину $D^{(1)}$ с дисперсией $2D^{(2)}$. После рассмотрения примеров в разделах 4.5, 4.6 автор обобщает результаты на случай УФП с несколькими переменными (раздел 4.7). В разделе 4.8 рассмотрены примеры УФП с несколькими переменными: трехмерное броуновское движение в пространстве скоростей, одно- и трехмерное броуновское движение во внешнем поле и, наконец, броуновское движение двух взаимодействующих частиц. Раздел 4.9 посвящен переходу к новым переменным в УФП. Показано, что при этом параметры $D_i^{(1)}$, $D_{ij}^{(2)}$ преобразуются по тем же формулам, которые были найдены (гораздо менее громоздко) при рассмотрении уравнения Ланжевена в разделе 3.4.2. И наконец, в разделе 4.10 показано, что, используя стандартные конструкции дифференциальной геометрии, УФП можно придать ковариантную форму, причем матрица коэффициентов диффузии $D_{ij}^{(2)}$ играет роль контравариантного метрического тензора, а обратная матрица диффузии представляет ковариантный тензор.

Большое удовольствие доставляет чтение главы 5, посвященной решению УФП с одной переменной. Во вводном разделе 5.1 показано, что рассмотренное в разделах 3.4, 4.9 преобразование переменной позволяет свести коэффициент диффузии $D^{(2)}(x)$ к постоянной $D > 0$. В результате стационарное решение УФП принимает экспоненциальную форму с показателем $-\Phi \equiv -V/D$, $V \equiv -\int D^{(1)}\,\mathrm{d}x$ (раздел 5.2). В простейшем случае процесса Орнштейна – Уленбека ($D^{(1)} \propto x$) стационарное распределение принимает гауссов вид (раздел 5.3). Одним из основных методов решения УФП является разложение по собственным функциям φ_n оператора Фоккера – Планка $L_{\mathrm{FP}} \equiv -\nabla D^{(1)} + \nabla^2 D^{(2)} = \nabla D^{(2)} \exp(-\Phi)\nabla \exp\Phi$. В разделе 5.4 показано, что он приобретает эрмитовские свойства с помощью преобразования $\exp(\Phi/2)$. Соответствующая собственная функция $\psi = \exp(\Phi/2)\varphi$ имеет в стационарном состоянии вид $\psi_0 \propto \exp(-\Phi/2)$ (при этом собственное значение $\lambda = 0$). Связь задачи на собственные значения с решением УФП дается равенством для парной функции распределения

$$W_2(x,t;x',t') = \psi_0(x)\psi_0(x')\sum_n \psi_n(x)\psi_n(x') \times \\ \times \exp\big(-\lambda_n|t-t'|\big)\,. \tag{6}$$

Как известно, проблема определения собственных значений λ_n и собственных функций $\psi_n(x)$ представляет основную задачу квантовой механики. Оказывается, что эрмитов оператор $L = \exp(\Phi/2)L_{\mathrm{FP}}\exp(-\Phi/2)$ может быть записан в стандартной форме гамильтониана в уравнении Шрёдингера:

$$L = D\nabla^2 - U(x)\,, \quad U \equiv \frac{D}{4}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}\nabla D\nabla\Phi\,, \tag{7}$$

где величина $\sqrt{2D}$ играет роль постоянной Планка, а коэффициент дрейфа $D^{(1)} \equiv -\nabla V$ определяет вид эффективной потенциальной энергии $U(x)$. Более того, выражению (7) можно придать квадратичную форму $L = a^+a$, где операторы a^+, a получаются преобразованиями $\exp(\Phi/2)$, $\exp(-\Phi/2)$ из операторов импульса $p^+ = -\mathrm{i}\sqrt{D}\nabla$, $p = \mathrm{i}\sqrt{D}\nabla$ и подчиняются коммутационному соотношению $[a, a^+] = -\nabla^2 V$. Отсюда видно, что при решении УФП можно использовать не только

аналогию с уравнением Шрёдингера, но и мощные методы суперсимметрии в квантовой теории [8]. К сожалению, последним автор совершенно не уделяет внимания. Зато использование аналогии с уравнением Шрёдингера занимает центральное место. Так, в разделах 5.5–5.10 на ее основе исследованы следующие виды потенциала $V(x)$: параболический, обратный параболический, V-образный ($V = Dk|x|$), потенциал, отвечающий зависимости $U(x)$ в (7) в виде прямоугольной ямы, бистабильный и метастабильный потенциалы (как разрывный, так и плавный). В разделе 5.8 показано, как по данным для прямого потенциала $V(x)$ восстановить решение задачи для обратного $-V(x)$. Раздел 5.9 посвящен использованию численных методов при определении собственных функций и собственных значений. В заключительном разделе 5.10 определяется скорость преодоления барьера для системы, находящейся в метастабильном состоянии. В рамках "квазиклассического" приближения показано, что в согласии с известной формулой Крамерса она пропорциональна $\exp(-\Delta/D)$, где Δ — высота барьера. С другой стороны, эта скорость сводится к наименьшему собственному значению λ_0, обратное значение которого определяет время первого преодоления барьера.

Глава 6 отличается от предыдущей тем, что рассматривается не одна, а несколько переменных. Однако поскольку при этом преобразование переменных, сводящее матрицу коэффициентов диффузии к постоянным величинам, оказывается не всегда возможным, то требуется исследовать условия, при которых решение УФП сводится к задаче на собственные значения. С этой целью коэффициент дрейфа $D_i = D_i^{(s)} + D_i^{(a)}$ следует разделить на симметричную $D_i^{(s)} = \nabla_j D_{ij} - D_{ij}\nabla_j \Phi$ и антисимметричную $D_i^{(a)}$ составляющие. Соответственно, оператор $L = \exp(\Phi/2) L_{\mathrm{FP}} \exp(-\Phi/2)$ разбивается на эрмитовскую $L_{\mathrm{H}} = \exp(\Phi/2)\nabla_i D_{ij} \exp(-\Phi)\nabla_j \exp(\Phi/2) \equiv L_{\mathrm{H}}^{+}$ и антиэрмитовскую $L_{\mathrm{A}} = -\exp(\Phi/2)\nabla_i D_i^{(a)} \exp(-\Phi/2) \equiv -L_{\mathrm{A}}^{+}$ составляющие (последняя удовлетворяет свойству $L_{\mathrm{A}} W_0^{1/2} = 0$, где W_0 — стационарное распределение). Зная $D_i^{(s)}$, можно найти величины $A_i \equiv \nabla_i \Phi = D_{ij}^{-1}(\nabla_k D_{jk} - D_i^{(s)})$, удовлетворяющие условию потенциальности $\nabla_j A_i = \nabla_i A_j$, и показатель экспоненты $-\Phi$ стационарного распределения определяется равенством $\Phi = \int A_i \,\mathrm{d}x_i$. Тогда эрмитова составляющая L_{H} принимает вид (7), где следует заменить D, ∇ на D_{ij}, ∇_i, а собственные функции ψ_n, ψ_n^{+} операторов L_{H}, L_{A}^{+} определяют собственные функции УФП $\varphi_n = \exp(-\Phi/2)\psi_n$, $\varphi_n^{+} = \exp(\Phi/2)\psi_n^{+}$. При этом эрмитовская составляющая $\psi_0^{\mathrm{H}} \propto \exp(-\Phi/2)$, отвечающая собственному значению $\lambda = 0$, сводится к квадратному корню из стационарной функции распределения. В разделе 6.4 показано, что условие потенциальности (а вместе с ним и разбиение коэффициента дрейфа на симметричную и антисимметричную составляющие) следует из условия детального равновесия, означающего, что скорости микроскопических переходов на произвольный уровень и с него в каждый момент времени совпадают. Формально это выражается равенством $L_{\mathrm{FP}}(\mathbf{x}) W_0(\mathbf{x}) = W_0(\varepsilon\mathbf{x}) L_{\mathrm{FP}}^{+}(\varepsilon\mathbf{x})$, где оператор обращения времени $\varepsilon_i = 1$ для четных пе-ременных типа координаты и $\varepsilon_i = -1$ для нечетных (например, скорости). Оказывается, что использование этого оператора позволяет провести указанные выше разделения величин $D_i(\mathbf{x})$, $L_{\mathrm{FP}}(\mathbf{x})$, $L(\mathbf{x})$ согласно определениям: $D_i^{(s)}(\mathbf{x}) = \varepsilon_i D_i^{(s)}(\varepsilon\mathbf{x})$, $D_i^{(a)}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_i D_i^{(a)}(\varepsilon\mathbf{x})$; $L_{\mathrm{FP}}^{(s)}(\mathbf{x}) = L_{\mathrm{FP}}^{+}(\varepsilon\mathbf{x})$, $L_{\mathrm{FP}}^{(a)}(\mathbf{x}) = -L_{\mathrm{FP}}^{(a)}(\varepsilon\mathbf{x})$, $L(\mathbf{x}) = L^{+}(\varepsilon\mathbf{x})$ (из последнего равенства для собственных функций следует $\psi_n(\mathbf{x}) = \psi_n^{+}(\varepsilon\mathbf{x})$). Таким образом, в условиях детального равновесия решение УФП с несколькими переменными достигается в принципе так же, как и для одной переменной. В разделе 6.5 это продемонстрировано для простейшего случая уравнения Орнштейна–Уленбека. Заключительный раздел 6.6 содержит перечисление методов решения УФП, используемых в условиях нарушения принципа детального равновесия: избавление от быстро меняющихся переменных (адиабатическое приближение); преобразование переменных, приводящее к интегрируемому уравнению Шрёдингера; вариационный метод подбора собственных функций, минимизирующих собственное значение; сведение задачи к эрмитовскому оператору $L_{\mathrm{FP}}^{+} L_{\mathrm{FP}}$; численное интегрирование; разложение по базисным функциям; использование метода цепной дроби и квазиклассического приближения.

Не самой удачной представляется, на наш взгляд, глава 7 "Линейный отклик и корреляционные функции". Автор рассматривает три различных случая вывода флуктуационно-диссипационной теоремы, и в соответствии с сентенцией "за деревьями леса не видно" возникает впечатление, что материал этой главы носит частный характер. Разумеется, это не так, и здесь более предпочтительным представляется изложение в книге Д. Форстера [9].

Глава 8 посвящена рассмотрению трех случаев, допускающих сокращение числа переменных, представляющих поведение стохастической системы. Так, в разделе 8.1 исследуется проблема времени T первого выхода из заданной области $[x_1, x_2]$, при рассмотрении которой пропадает производная по времени. Величина T распределена с плотностью вероятности $w(x', T) = -\int_{x_1}^{x_2} \dot{P}(x, T|x', 0)\,\mathrm{d}x$, где $P(x, T|x', 0)$ — вероятность перехода из состояния x' при $t = 0$ в x при $t = T$. Задача сводится к определению моментов $T_n(x') \equiv \int_0^{\infty} T^n w(x', T)\,\mathrm{d}T \equiv \int_{x_1}^{x_2} p_n(x, x')\,\mathrm{d}x$ или соответствующих плотностей $p_n(x, x')$. Уравнения для первых $L_{\mathrm{FP}}^{+}(x') T_n(x') = -n T_{n-1}(x')$, $n \geqslant 1$ следуют из обратного уравнения Колмогорова, а рекуррентные соотношения $L_{\mathrm{FP}} p_n(x, x') = -n p_{n-1}(x, x')$, $n \geqslant 1$ — из УФП. В разделе 8.2 рассмотрен случай УФП, когда коэффициенты $D_i^{(1)}(\mathbf{x})$, $D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})$ не зависят от n компонент x_i из полного набора $\{x_i\}^N$, $N > n$ переменных x_i. В этом случае следует перейти к фурье-образам по этим переменным. Тогда из оператора Фоккера–Планка выделяется составляющая, не зависимая от производных ∇_i, $i = 1, \ldots, n$, и число переменных в УФП сокращается до $N - n$. Использование данной процедуры оказывается наиболее эффективным, если зависимость от x_i имеет периодический характер (например, переменная x_i сводится к углу). Другой случай использования фурье-образов возникает, если нас интересует распределение не самих стохастических переменных $x_i(t)$, а их интеграла $I(t) = \int_{t_0}^{t} f(\mathbf{x}(t'))\,\mathrm{d}t'$, где $f(\mathbf{x})$ — заданная функция. Тогда, рассматривая уравнение $\dot{I}(t) = f(\mathbf{x})$ как дополняющее систему уравнений Ланжевена для исходных стохастических переменных x_i, видим, что оператор Фоккера–Планка принимает удлиненный вид $L = L_{\mathrm{FP}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})(\partial/\partial I)$. При переходе к фурье-образам относительно I производная $\partial/\partial I$ заменяется на $\mathrm{i}k$, и фурье-образ

интересующего нас среднего значения $M(k,t) \equiv \equiv \int G(k,\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ определяется функцией Грина G удлиненного УФП $\dot{W} = LW$. В результате, если удается найти зависимость $G(\mathbf{x})$, то система из N уравнений Ланжевена для исходных переменных x_i сводится к единственному уравнению $\dot{M}(k) = -\mathrm{i}k \int f(\mathbf{x}) G(k,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ для момента M. Раздел 8.3 посвящен рассмотрению адиабатического приближения, позволяющего избавиться от быстро изменяющихся стохастических величин. Пусть, например, характерное время изменения переменной y в $\gamma \gg 1$ раз меньше, чем для переменной x. Тогда решение УФП $\dot{W} = (L_x + \gamma L_y) W$ удобно представить в виде разложения $W(x,y,t) = \sum_n C_n(x,t)\varphi_n(y,x)$ по собственным функциям φ_n оператора L_y: $L_y(y,x)\varphi_n(y,x) = -\lambda_n(x)\varphi_n(y,x)$ (при этом медленная переменная x принимается фиксированной). В результате для коэффициентов C_n получаем систему уравнений $\dot{C}_n + \gamma\lambda_n C_n = \sum_m L_{nm} C_m$, $L_{mn} \equiv \int \varphi_n^+ L_x \varphi_m\,\mathrm{d}y$. В адиабатическом приближении производная по времени удерживается только при $n = 0$, а при $n \neq 0$ в силу условия $\gamma \gg 1$ она пренебрежимо мала. Следовательно, коэффициент $C_0 \sim \gamma^0$ намного превышает остальные $C_n \sim \gamma^{-1}$, и с точностью до $\gamma^{-1} \ll 1$ имеем $C_n \simeq L_{n0} C_0/\gamma\lambda_n$, $n \neq 0$. В результате система описывается единственным уравнением $\dot{C}_0 = (L_{00} + \gamma^{-1}\sum_n L_{0n}\lambda_n^{-1} L_{n0}) C_0$, $n \neq 0$ для величины $C_0(x,t) \equiv \int W(x,y,t)\,\mathrm{d}y = W(x,t)$. В заключительном разделе 8.3.2 очень кратко описывается проекционная техника Цванцига–Мори, приводящая к цепочке равенств, выражающих коррелятор величины, обладающей наибольшим временем релаксации, через коррелятор более быстрой переменной; подобным образом последний выражается через коррелятор еще более быстрой переменной и т.д. Читателю, желающему более подробно ознакомиться с этим мощным методом, рекомендуем книгу [9].

Глава 9 посвящена изложению метода решения УФП, основанного на использовании цепной дроби

$$\frac{a_1}{b_1 + \left(\dfrac{a_2}{b_2 + \ldots}\right)} \equiv [a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots]\,, \tag{8}$$

определяемой заданием пар a_n, b_n, которые могут быть числами, функциями, операторами и т.д. Основное преимущество использования цепных дробей обусловлено тем, что они представляют наиболее эффективный способ аппроксимации коэффициентов $C_n(t)$ разложения функции распределения $W(x,t) = \sum_n C_n(t)\psi_n(x)$ по собственным функциям $\psi_n(x)$ оператора Фоккера–Планка L_{FP}. Временна́я зависимость этих коэффициентов $C_n(t) = G_{nm}(t) C_m(0)$ определяется матрицей Грина $G_{nm}(t)$, представляющей решение уравнения

$$\dot{G}_{nm} = Q_n^- G_{n-1m} + Q_n G_{nm} + Q_n^+ G_{n+1m}\,, \tag{9}$$

к которому сводится УФП при подстановке указанного разложения ($Q_n^\pm$, Q_n — заданные константы, определяемые видом оператора L_{FP}). Характерная особенность уравнения (9) состоит в том, что оно связывает три ближайших матричных элемента G_{nm}, в связи с чем автор использует термин "тридиагональное рекуррентное соотношение". Оказывается, что оно имеет достаточно общий характер в задачах, сводящихся к исследованию дифференциальных уравнений (как обычных, так и в частных производных) типа уравнений Мэтью, Блоха и т.д. В частности, если получается рекуррентное соотношение, связывающее не 3, а $2L+1$, $L > 1$ матричных элементов, то ему можно придать вид (9), вводя L — компонентные векторы $\mathbf{G}_{nm}$ и матрицы $\widehat{Q}_n^\pm$, $\widehat{Q}_n$ ранга L. Для решения уравнения (9) следует избавиться от производной по t, переходя к лапласовским образам по s, и ввести переменные $S_n^+ = G_{n+1m}/G_{nm}$, $S_n^- = = G_{n-1m}/G_{nm}$. Их использование дает выражения G_{n+1m}, G_{n-1m} через G_{nm}, т.е. позволяет повысить/понизить индекс матричного элемента G_{nm}. Обрезая в (9) индекс n верхним N_+ и нижним N_- значениями и двигаясь от них к значению $m \in [N_-, N_+]$ с помощью операторов S_n^+, S_n^-, получаем следующие выражения через цепные дроби:

$$\begin{aligned} S_m^+(s) &= [-Q_{m+1}^-, Q_{m+1} - s; -Q_{m+1}^+ Q_{m+2}^-, Q_{m+2} - s; \ldots]\,, \\ S_m^-(s) &= [-Q_{m-1}^+, Q_{m-1} - s; -Q_{m-1}^- Q_{m-2}^+, Q_{m-2} - s; \ldots]\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Они определяют функцию памяти $K_m \equiv Q_m^- S_m^- + Q_m^+ S_m^+$ и диагональный элемент функции Грина $G_{mm}(s) = [s - Q_m - K_m(s)]^{-1}$. При $n \neq m$ имеем $G_{nm}(s) = U_{nm}(s) G_{mm}(s)$, где $U_{nm} = \prod_{l=1}^{|n-m|} S_{n\pm l}^\pm$, верхние знаки отвечают случаю $n > m$, нижние — $n < m$. Обращает на себя внимание формальное сходство представленного метода с проекционной техникой Цванцига–Мори, которая также основана на использовании цепных дробей [9, 10].

Глава 10 посвящена исследованию наиболее популярного типа УФП — уравнения Крамерса, описывающего броуновское движение во внешнем поле (особенность этого уравнения состоит в линейности коэффициента дрейфа $D^{(1)}$ относительно скорости). Показано, что оператор L_{FP} разбивается на необратимую L_{ir} и обратимую L_{rev} составляющие. После преобразования $\exp\{(v/2)^2 + V(x)/2T\}$ первая из них $L_{\mathrm{ir}} \propto -b^+ b^-$ выражается через бозевские операторы $b^\pm = \mp\partial/\partial v + v/2$, а вторая имеет вид $L_{\mathrm{rev}} = -(b^- a^- + b^+ a^+)$, где $a^\pm = \nabla[1 \pm (1/2)V(x)]$, $\nabla \equiv \partial/\partial x$ (здесь координата x и скорость v измерены в единицах $(T/m)^{1/2}$). В случае гармонического потенциала $V(x)$ (раздел 10.2) линейные комбинации операторов a^+, b^+ образуют операторы рождения c_1^+, c_2^+, действие степеней n_1, n_2 которых на функцию $\psi_{00} \propto \exp\{-(v/2)^2 - (\omega x/2)^2\}$, ω — собственная частота, дает собственные функции $\psi_{n_1 n_2} = = (n_1! n_2!)^{-1/2} (c_1^+)^{n_1} (c_2^+)^{n_2} \psi_{00}$ и собственные значения $\lambda_{n_1 n_2} = (\gamma/2)(n_1 + n_2) + [(\gamma/2)^2 - \omega^2]^{1/2}(n_1 - n_2)$, γ — кинетический коэффициент. Разложение по собственным функциям приводит к рекуррентным соотношениям, решение которых выражается через цепные дроби (раздел 10.3). Заключительный раздел 10.4 посвящен рассмотрению случая больших коэффициентов затухания γ, когда по параметру $\gamma^{-1} \ll 1$ можно провести разложение. В этой главе наиболее ярким образом проявляется указанная в начале особенность монографии Рискена — подробное и аккуратное изложение рассматриваемого вопроса.

Наибольший объем в книге занимает глава 11 "Броуновское движение в периодическом потенциале". Она состоит из 9 обширных разделов, занимает 97 страниц текста, 94 рисунка и имеет 57 литературных ссылок. Сначала (раздел 11.1) автор рассматривает задачи, приводящие к проблеме диффузии в периодическом потенциале: маятник, суперионный проводник, джозефсоновский контакт, вращение диполя в постоянном поле, стабилизация фазы, связь с уравнением синус-

гордона (sin-Gordon). При этом выделяются режимы большого, малого и промежуточного значений коэффициента трения. В первом из них роль гидродинамической моды играет координата частицы, так что из УФП выпадает скорость и оно сводится к уравнению Смолуховского (раздел 11.3). При слабом трении как скорость, так и координата приобретают сильно флуктуирующий характер, и роль гидродинамической моды играет энергия частицы (раздел 11.4). Исследование промежуточного случая достигается только с использованием цепных дробей. Если кроме периодического поля приложить однородное, то частица будет испытывать дрейф с подвижностью, зависимость которой от напряженности данного поля и интенсивности шума определена в разделах 11.3 – 11.5. Весьма впечатляет графическое изображение стационарного распределения координаты и скорости частицы, приведенное в разделе 11.5 для различных значений напряженности однородного поля, коэффициента трения и интенсивности шума. Раздел 11.6 посвящен исследованию перехода из режима локализации в режим бегущей частицы. Показано, что такой переход имеет место только в отсутствие шума и происходит с ростом напряженности однородного поля. Исследование нестационарного решения в разделе 11.7 достигается на основе теоремы Флоке, используемой при определении собственных функций. Показано, что коэффициент диффузии и подвижность связаны соотношением Эйнштейна – Смолуховского, а фурье-образ структурного фактора принимает в гидродинамическом пределе диффузионный вид. Раздел 11.8 посвящен определению частотной зависимости восприимчивости. Использование метода цепной дроби показывает, что как действительная, так и мнимая составляющие восприимчивости имеют пики при нулевой частоте ω и при $\omega \neq 0$; с ростом трения оба этих пика размываются. И наконец, в разделе 11.9 исследуются собственные значения и собственные функции для различного соотношения однородной и гармонической составляющих, коэффициента трения и интенсивности шума. Приводимые здесь графики сильно напоминают "паутину" электронных энергетических спектров кристалла.

Глава 12 посвящена исследованию статистических свойств лазерного излучения. Сначала в рамках микроскопического подхода показано, что операторы, отвечающие амплитуде напряженности электромагнитной волны, с одной стороны, а также поляризации электронов и разности их заселенностей на двух энергетических уровнях — с другой, удовлетворяют хорошо известной синергетической системе Лоренца. В рамках адиабатического приближения показано, что она сводится к известному уравнению Ван дер Поля, которое при включении стохастических источников дает уравнение Ланжевена для лазерного излучения, характеризуемого интенсивностью и фазой. В результате найдено УФП и рекуррентное соотношение для моментов распределения интенсивности. В разделе 12.2 показано, что стационарное распределение интенсивности имеет вид распределения Гиббса с потенциалом Ландау в экспоненте. Характерно, что с ростом порядка моментов этого распределения их величина неограниченно нарастает вблизи критического значения управляющего параметра. Раздел 12.3 посвящен исследованию проблемы в представлении собственных значений и функций. Как показано в следующем разделе 12.4, соответствующие коэффициенты разложения определяются через цепные дроби, использование которых позволяет найти форму вероятности перехода лазера в режим спонтанного излучения (раздел 12.5). И наконец, в разделе 12.6 исследована связь распределения интенсивности спонтанного излучения с распределением фотоэлектронов, испущенных детектором фотонов под действием этого излучения.

Книга содержит 6 приложений, в той или иной степени связанных с использованием метода цепной дроби, и 11 дополнений, добавленных при выходе второго издания. Большинство дополнений имеют конспективный характер и содержат указания на работы, появившиеся между изданиями книги. Обращает на себя внимание последнее дополнение S.11, где рассматривается УФП с отрицательными элементами матрицы коэффициентов диффузии и производными третьего порядка. В приложении A.1 и дополнения S.10 рассматривается случай цветного шума, интенсивность которого имеет экспоненциальный характер. Показано, что этот случай можно свести к аддитивному шуму, используя интенсивность цветного как новую переменную. В свою очередь, это позволяет воспроизвести результаты, полученные в главах 3, 4, на основе метода цепной дроби. В приложении A.2 показано, что интегралу столкновений в уравнении Больцмана можно придать вид оператора Фоккера – Планка, что открывает возможность использования цепной дроби. Раздел A.3 содержит вычисление матричных элементов функции Грина гармонического осциллятора с помощью цепной дроби. Показано, что при этом воспроизводятся результаты раздела 5.5. В приложении A.4 с помощью характеристической функции задемпфированного гармонического осциллятора получено квантовомеханическое УФП, из которого найдено стационарное распределение. A.5 содержит весьма элегантный (четвертый по счету) метод получения УФП, основанный на усреднении уравнения для микроканонического распределения $\delta(t) = \delta(\zeta(t) - x)$, где $\zeta(t)$ подчиняется стохастическому уравнению движения. И наконец, приложение A.6 посвящено исследованию уравнения Ван дер Поля с флуктуирующим значением управляющего параметра. Показано, что при этом шум амплитуды стохастической переменной пропорционален ее величине, в связи с чем стационарное распределение может принимать δ-образный вид. Переходя к логарифмической переменной, шуму можно придать аддитивный характер и свести УФП к уравнению Шрёдингера с потенциалом Тоды.

Список литературы

1. Risken H *The Fokker – Planck Equation* (Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 1989)
2. Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1980)
3. Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)
4. Хорстхемке В, Лефевр Р *Индуцированные шумом переходы* (М.: Мир, 1987)
5. Ван Кампен Н Г *Стохастические процессы в физике и химии: Теория и применение в физике, химии и биологии* (М.: Высшая школа, 1990)
6. Doi M, Edvards S F *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford: Clarendon Press, 1986)
7. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
8. Cooper F, Khare A, Sukhatme U *Phys. Rep.* **251** 267 (1995)
9. Форстер Д *Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции* (М.: Атомиздат, 1980)
10. Olemskoi A I, in *Physics Reviews* (Ed. I M Khalatnikov) **18** Part I 1 (1996)

А.И. Олемской