

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Проблемы вероятностной топологии: статистика узлов и некоммутативных случайных блужданий

С.К. Нечаев

Обзор относится к области современной теоретической и математической физики, которую можно называть статистической топологией. С помощью представления топологического инварианта Кауфмана на решетке в виде статсуммы двумерной неупорядоченной модели Поттса получена оценка сверху на вероятность реализации тривиального узла. Исследованы статистические свойства случайных блужданий на многосвязных пространствах и предельное поведение цепей Маркова на некоммутативных группах. Обсуждены разнообразные применения этих и ряда других вероятностно-топологических результатов в физике полимерных цепей. На основе достижений современной топологии и некоммутативной теории вероятностей сформулированы некоторые новые результаты физики полимеров, объединяющие строгие математические факты и доказательства с менее строгими теорфизическими аргументами.

PACS number: 02.40.Re, 02.50.Cw, 36.20.Ey

Содержание

1. Введение (369).
2. Диаграммы узлов как неупорядоченные спинные системы (370).
 - 2.1. Краткий обзор статистических проблем в топологии.
 - 2.2. Абелевы проблемы в статистике случайных блужданий с топологическими ограничениями и неполнота инварианта Гаусса.
 - 2.3. Неабелевы алгебраические инварианты узлов.
 - 2.4. Решеточные диаграммы узлов и зацеплений как неупорядоченная модель Поттса.
 - 2.5. Понятие о "динамических" и "замороженных" реализациях топологического беспорядка.
3. Случайные блуждания на локальных некоммутативных группах (382).
 - 3.1. Броуновский мост на простейших некоммутативных группах и статистика узлов.
 - 3.2. Случайные блуждания на локально свободных группах.
 - 3.3. Броуновские мосты на плоскости Лобачевского и произведениях некоммутативных случайных матриц.
4. Конформные методы в статистике случайных блужданий с топологическими ограничениями (392).
 - 4.1. Построение неабелевой связности для групп G_2 и $PSL(2, \mathbb{Z})$ с помощью конформных методов.
 - 4.2. Случайные блуждания на дважды проколотой плоскости и конформная теория поля.
 - 4.3. Статистика случайных блужданий с топологическими ограничениями в двумерной решетке препятствий.
5. Физические приложения. Полимерный язык в статистике линейных цепных объектов с топологическими ограничениями (397).
 - 5.1. Полимерная цепь в трехмерной решетке препятствий.
 - 5.2. Сколлапсированная фаза незаузеленного полимера.
6. Некоторые узловые проблемы теории вероятности и статистической физики (403).

- 6.1. Замечания и комментарии к разделу 2.
- 6.2. Замечания и комментарии к разделам 3 и 4.
- 6.3. Замечания и комментарии к разделу 5.

Список литературы (404).

1. Введение

По-видимому, не будет преувеличением сказать, что современная физика становится все более и более математизированной. Можно по-разному относиться к этому обстоятельству, однако его нельзя не принимать во внимание. Анализируя причины математизации физики, пожалуй, можно выделить две основные тенденции.

С одной стороны, становится все труднее сформулировать принципиально новую физическую проблему, для решения которой потребовалось бы выйти за рамки уже существующих теорий. Это ведет к тому, что реальных глубоких физических задач постепенно становится меньше, чем математических методов, предназначенных для их описания. Тем самым математика превращается из вспомогательного, языкового средства в своего рода "игру в бисер", не связанную с нуждами эксперимента.

С другой стороны, математическая физика, впитывая новые идеи из различных областей математики, пытается перевести абстрактные математические представления на физический язык, наполняя формально-логические конструкции живым содержанием. Это зачастую приводит к созданию новой системы понятий и стимулирует поиск новых физических приложений, развивает наше воображение и заставляет критически относиться к имеющимся феноменологическим теориям, приводя к поиску новых, более глубоких закономерностей в наблюдаемых физических явлениях.

Проникновение новых математических идей в физику бывает довольно парадоксальным. Не секрет, что разли-

С.К. Нечаев. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 117334 Москва, ул. Косыгина 2, Россия
E-mail: nechaev@landau.ac.ru

Статья поступила 8 июля 1997 г., после доработки 10 ноября 1997 г.

чие языков и целей физиков и математиков приводит иногда к непреодолимым коммуникационным проблемам в отношении как самого предмета исследования, так и того, что именно следует считать результатом. Сказанное можно пояснить на примере статистики случайных блужданий с зацеплениями — постоянном объекте изучения статистической физики полимеров. Начиная с 70-х годов, после классических работ Конвея, первый алгебраический инвариант — полином Александера — стал очень популярен в математической литературе, и, казалось бы, физики, работающие в области статистической топологии, получили гораздо более мощный топологический инвариант, чем простой инвариант Гаусса. Конструктивное применение алгебраических инвариантов в физике макромолекул было развито в классических работах А.В. Вологодского, М.Д. Франк-Каменецкого и др. [1]. Тем не менее до сих пор в подавляющем большинстве работ по топологии полимеров при микроскопических расчетах авторы используют инвариант Гаусса (или его различные абелевы модификации), лишь отмечая неполноту этого инварианта. И только считанные работы посвящены попыткам выйти за рамки традиционных методов и учесть некоммутативный характер топологических ограничений.

Одна из причин такой инертности заключается, вероятно, в том, что математические идеи часто формулируются как теоремы существования, и требуются значительные взаимные усилия физиков и математиков, чтобы выработать общую точку зрения и превратить теорему существования в реальное вычислительное средство, необходимое для решения конкретной физической задачи.

Цель данной работы заключается в попытке использовать современные достижения в области алгебраической топологии и теории случайных блужданий на некоммутативных группах для последовательного и по возможности полного решения старой проблемы — вычисления энтропии случайно генерированного узла и/или нефантомной ("телесной") марковской цепи в заданном гомотопическом состоянии. Следует отметить, что изложение не является математически строгим и там, где это возможно, строгие утверждения заменены физически обоснованными соображениями. В целом работа посвящена анализу вероятностных проблем в топологии (задачам об энтропии случайного узла) и их приложению в статистической физике полимерных систем с топологическими ограничениями.

Сформулируем кратко основные результаты работы.

1. Вычислена вероятность того, что длинная случайная траектория, полностью заполняющая решетку, образует узел в заданном наперед топологическом состоянии (раздел 2). Данная проблема рассмотрена с помощью алгебраических инвариантов Кауффмана, и показана непосредственная связь топологической задачи с термодинамическими свойствами двумерной модели Поттса с замороженным или динамическим беспорядком в константе взаимодействия.

2. Исследовано предельное поведение случайных блужданий на простейших некоммутативных группах, имеющих отношение к топологии; в контексте топологических проблем изучены некоторые статистические свойства определенных в работе локально свободных групп (раздел 3). В частности, показана связь предельного распределения показателей Ляпунова произведения слу-

чайных матриц — генераторов группы кос — с асимптотикой распределения сложности узла (степени полиномиального инварианта узла). Установленная связь использована для вычисления энтропии узла, образованного косой. Показано также, что сложность узла соответствует хорошо известному феноменологическому топологическому инварианту — примитивному пути, часто используемому в статистике полимерных цепей с зацеплениями.

3. Изучена задача о статистике случайного блуждания в регулярной решетке топологических препятствий (раздел 4). С помощью конформных методов построен полный неабелев топологический инвариант и показано, что многие нетривиальные свойства предельного поведения броуновских траекторий с топологическими ограничениями следуют из предельных теорем для случайного блуждания на гиперболических группах.

Результаты, полученные в процессе решения перечисленных выше модельных задач, применены при рассмотрении статистических свойств так называемой складчатой (фрактальной) глобулы, представляющей собой незаузленную кольцевую полимерную молекулу с объемными взаимодействиями (раздел 5).

Связь между различными проблемами, рассмотренными в работе, схематически показана на рис. 1.

2. Диаграммы узлов как неупорядоченные спинные системы

2.1. Краткий обзор статистических проблем в топологии

Взаимопроникновение таких областей современной теоретической и математической физики, как теория интегрируемых систем, алгебраическая топология и конформная теория поля, послужило катализатором развития нового направления в топологии, а именно построения аналитических топологических инвариантов узлов на основе точно решаемых двумерных моделей.

Сегодня считается общепринятым, что следующие три открытия в теоретической физике принесли свежую струю в топологию.

— Была установлена замечательная геометрическая аналогия между уравнениями Янга–Бакстера, являющимися необходимым условием коммутативности трансфер-матрицы в теории интегрируемых систем, и одним из движений Райдемайстера, используемых для построения инвариантов узлов.

— Было обнаружено, что статистическая сумма петли Вильсона с действием Черна–Саймонса в топологической теории поля совпадает с представлением известных неабелевых алгебраических инвариантов узлов в виде упорядоченных по времени континуальных интегралов.

— Поиск новых решений уравнений Янга–Бакстера послужил мощным стимулом к выделению теории "квантовых групп" в самостоятельный раздел математической физики.

Приведенный список, безусловно, не исчерпывает всех замечательных достижений в данной области за последние десять лет, однако именно эти открытия вызвали принципиальный "идеологический" поворот в топологической науке: в настоящее время топологию уже нельзя рассматривать как отдельную, замкнутую в себе

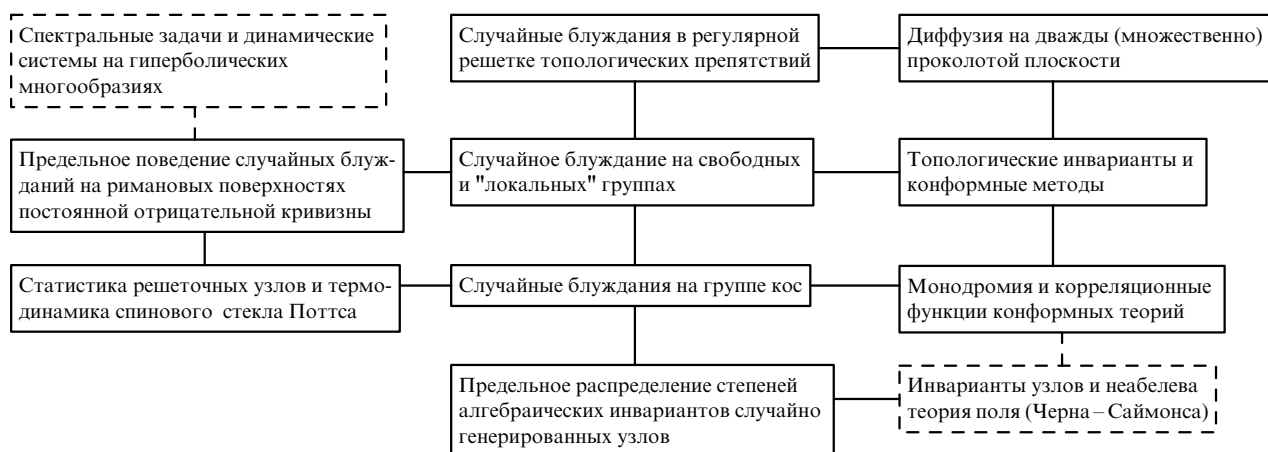


Рис. 1. Схематическая связь между различными вероятностно-топологическими проблемами. В сплошных рамках — проблемы, обсужденные в работе, в штриховых рамках — проблемы, которые остались за пределами данного исследования.

область математики, любой прогресс в которой требует столько усилий, что порой кажется случайным.

Таким образом, в середине 80-х годов на свободу был выпущен "квантово-групповой джин". Он позволил связать общим математическим формализмом классические проблемы топологии, статистической физики и теории поля. Новый подход к старым проблемам и изящность идеи произвели сильное впечатление на физиков и математиков. В результате в последние несколько лет число работ, посвященных поиску новых приложений квантово-группового подхода растет экспоненциально быстро, далеко выходя за рамки исходных областей. В качестве примеров настойчивого проникновения идей квантовых групп в физику можно привести примеры работ по анионной сверхпроводимости [2], квантовым случайным блужданиям [3], исследованию спектральных свойств квантовых деформаций гармонических осцилляторов [4] и т.д.

По-видимому, время покажет, является такая квантово-групповая экспансия физически оправданной или это лишь дань моде. Тем не менее уже сегодня ясно, что многие топологические физические проблемы могут быть сформулированы на новом языке, который позволяет естественным образом конструировать неабелевы объекты и работать с ними.

Среди множества работ, посвященных различным аспектам теории интегрируемых систем, наше особое внимание будет сконцентрировано на трудах, обсуждающих построение инвариантов узлов и зацеплений на основе двумерных моделей статистической физики. Существует несколько прекрасных обзоров и книг (см., например, [5, 6]), относящихся к данной теме. Нашей целью не является компиляция или интерпретация их содержания; в данной работе сделана попытка последовательного подхода к разнообразным вероятностным проблемам в топологии, а также обсужден ряд вопросов, лежащих на границе топологии и теории вероятности. Разумеется, мы используем современные достижения алгебраической топологии такие, как построение топологических инвариантов узлов и зацеплений, развитые в работах [5, 7].

Наряду с такими традиционными фундаментальными проблемами топологии, как конструирование новых топологических инвариантов и изучение свойств

расслоений и гомотопических классов, следует отметить ряд родственных, но гораздо менее изученных задач. Прежде всего имеются в виду вопросы, связанные с вычислением "энтропии узла". В наиболее общем виде проблема может быть сформулирована следующим образом. Пусть есть решетка $\mathbb{Z}^3$, вложенная в пространство $\mathbb{R}^3$, и пусть Ω_N есть ансамбль всех возможных замкнутых самонепересекающихся траекторий из N шагов с одной фиксированной точкой на $\mathbb{Z}^3$. Обозначим через ω некоторую конкретную конфигурацию (реализацию) траектории. Проблема заключается в вычислении вероятности $\mathcal{P}_N$ того, что узел, образованный траекторией $\omega \in \Omega_N$, принадлежит некоторому заданному гомотопическому типу. Формально эта величина может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N\{\text{Inv}\} &= \frac{1}{\Omega_N} \sum_{\omega \in \Omega_N} \Delta[\text{Inv}\{\omega\} - \text{Inv}] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\Omega_N} \sum_{\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}} \Delta[\text{Inv}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\} - \text{Inv}] (1 - \Delta[\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j]) \Delta[\mathbf{r}_N], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\text{Inv}\{\omega\}$ есть функциональное представление инварианта узла, соответствующего траектории $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$; Inv есть конкретный топологический инвариант, характеризующий гомотопический тип узла, и $\Delta(x)$ — дельта-функция Кронекера: $\Delta(x=0) = 1$ и $\Delta(x \neq 0) = 0$. Первая дельта-функция в выражении (2.1) вырезает множество траекторий с фиксированным значением топологического инварианта, а вторая и третья обеспечивают замкнутость и самонепересекаемость траектории.

Функция распределения $\mathcal{P}_N\{\text{Inv}\}$ удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{\text{по всем гомотопическим классам}} \mathcal{P}_N\{\text{Inv}\} = 1. \quad (2.2)$$

Энтропия $S_N\{\text{Inv}\}$ заданного гомотопического состояния узла, представленного замкнутой траекторией длины N на $\mathbb{Z}^3$, есть

$$S_N\{\text{Inv}\} = \ln [\Omega_N \mathcal{P}_N\{\text{Inv}\}]. \quad (2.3)$$

Проблемы, касающиеся определения энтропии узла, неоднократно обсуждались в физической литературе. Однако до середины 80-х годов число принципиально

новых *аналитических* результатов оставалось незначительным. Как уже отмечалось, исключительно важную роль для развития дальнейших теоретических исследований сыграли работы А.В. Вологодского и др. [1], посвященные первому успешному использованию неабелевых (некоммутативных) алгебраических инвариантов Александра при компьютерных расчетах в статистической биофизике. Некоторые задачи физики полимеров, связанные с проблемой определения энтропии узла, рассмотрены в разделе 5.

Несмотря на ясность геометрического образа, топологические взаимодействия с большим трудом поддаются формализованному описанию, что прежде всего связано с нелокальным характером топологических ограничений. Кроме того, дополнительные трудности при попытке аналитического вычисления энтропии узла вызваны отсутствием аналитического представления *полного* топологического инварианта. Поэтому для того чтобы хотя бы отчасти приблизиться к решению задачи об энтропии узла заданного гомотопического типа, мы заменили ее задачей о вычислении энтропии узла с заданным топологическим инвариантом. Данная проблема отличается от исходной, поскольку ни один из известных неабелевых топологических инвариантов (полиномы Джонса, Александра, HOMFLY) не является точным. Отметим, что, по-видимому, исключение составляют инварианты Васильева [8], но их рассмотрение выходит за рамки данной работы. Таким образом, топологический тип узла мы характеризуем заданием соответствующего алгебраического инварианта.

В задачах об энтропии узла особо важное значение имеет ситуация, когда ω является реализацией случайного процесса. Именно этому подклассу задач и уделено основное внимание в работе. Вероятность найти замкнутую траекторию из N шагов в пространстве $\mathbb{R}^3$ в некотором наперед заданном топологическом состоянии может быть представлена в следующем виде:

$$\mathcal{P}_N\{\text{Inv}\} = \int \dots \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j \prod_{j=1}^{N-1} g(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) \delta[\text{Inv}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\} - \text{Inv}] \delta[\mathbf{r}_N], \quad (2.4)$$

где $g(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j)$ есть вероятность найти $(j+1)$ -й шаг траектории в точке $\mathbf{r}_{j+1}$, если j -й шаг находится в точке $\mathbf{r}_j$. В пределе $a \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ ($Na = L = \text{const}$) в трехмерном пространстве мы имеем следующее выражение для функции $g(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j)$:

$$g(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) = \left(\frac{3}{2\pi a^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j)^2}{2a^2}\right) \simeq \left(\frac{3}{2\pi a^2}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{3}{2a} \left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right)^2\right\}. \quad (2.5)$$

Вводя время s вдоль траектории, можно переписать функцию распределения $\mathcal{P}_N\{\text{Inv}\}$ (выражение (2.4)) в виде интеграла по траекториям с плотностью меры Винера:

$$\mathcal{P}_N\{\text{Inv}\} = \frac{1}{Z} \int \dots \int \mathcal{D}\{\mathbf{r}\} \exp\left\{-\frac{3}{2a} \int_0^L \left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right)^2 ds\right\} \times \times \delta[\text{Inv}\{\mathbf{r}(s)\} - \text{Inv}], \quad (2.6)$$

и условие нормировки имеет вид

$$Z = \sum_{\text{все различные инварианты узлов}} \mathcal{P}_N\{\text{Inv}\}.$$

Выражение (2.6) с точностью до поворота Вика и несущественных констант совпадает с амплитудой α свободной квантовой частицы в многосвязном пространстве. Действительно, для амплитуды α имеем

$$\alpha \sim \sum_{\text{все пути данного топологического типа}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int \dot{\mathbf{r}}^2(s) ds\right\}. \quad (2.7)$$

Если все фазовые траектории могут быть преобразованы друг в друга с помощью непрерывных отображений, то суммирование в (2.7) должно распространяться на все возможные конфигурации путей. Если же фазовое пространство состоит из топологически различных несвязанных друг с другом областей, то суммирование в (2.7) распространяется лишь на траектории, принадлежащие одному топологическому типу, что немедленно ведет к проблеме определения энтропии узла или зацепления.

2.2. Абелевы проблемы в статистике случайных блужданий с топологическими ограничениями и неполнота инварианта Гаусса

Основы статистической теории топологических взаимодействий были заложены в 1967 г. С.Ф. Эдвардом [9], который предложил новый способ вычисления функции распределения самопересекающихся траекторий случайного блуждания, топологически взаимодействующих с бесконечной нитью (в трехмерном случае) или особой точкой (в двумерном случае). Данная проблема рассматривалась в математической литературе и ранее (см., например, [10]), но Эдвардс был, по-видимому, первым, кто обратил внимание на глубокую аналогию между абелевыми задачами статистической физики марковских цепей и квантовомеханическими задачами вычисления амплитуды рассеяния заряженных частиц в магнитном поле (проблема Аронова – Бома; подробности можно найти в книге [12], а некоторые новые результаты, относящиеся к данной проблеме, содержатся в работе [11]).

Двумерный вариант проблемы Эдвардса может быть сформулирован следующим образом. Рассмотрим плоскость с выколотой точкой в начале координат и предположим, что эта особенность моделирует топологическое ограничение для случайного блуждания длины L с координатами начальной и конечной точек $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_L$ соответственно. Пусть n — число оборотов, сделанных траекторией вокруг особой точки (рис. 2). Вопрос заключается в определении функции распределения $\mathcal{P}_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_L, L)$.

В рассматриваемой задаче топологическое состояние пути C однозначно характеризуется числом оборотов n . Соответствующий топологический (абелев) инвариант известен как инвариант Гаусса и (представленный в виде контурного интеграла) имеет следующий вид:

$$\text{Inv}\{\mathbf{r}(s)\} \equiv G\{C\} = \int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \equiv 2\pi n + \vartheta, \quad (2.8)$$

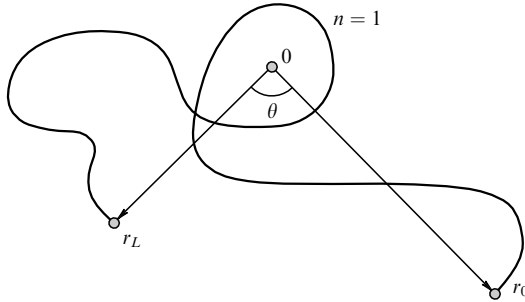


Рис. 2. Случайное блуждание на плоскости вблизи одной особой точки в начале координат.

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \xi \times \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad \xi = (0, 0, 1) \quad (2.9)$$

и ϑ — угловое расстояние между концами траектории случайного блуждания.

Подставляя (2.8) в (2.6) и используя для δ -функции преобразование Фурье, мы приходим к окончательному выражению

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_L, L) = \frac{1}{\pi La} \exp\left(\frac{r_0^2 + r_L^2}{La}\right) \int_{-\infty}^{\infty} I_{|\lambda|}\left(\frac{2r_0 r_L}{La}\right) \times \\ \times \exp[i\lambda(2\pi n + \vartheta)] d\lambda, \end{aligned} \quad (2.10)$$

которое воспроизводит результат работы [9]. Некоторые существенные обобщения содержатся в работе [11].

Физически важной величиной, полученной на основе выражения (2.10), является энтропийная сила

$$f_n(\rho) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \ln \mathcal{P}_n(\rho, L), \quad (2.11)$$

действующая на замкнутую траекторию ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_L = \rho$, $\vartheta = 0$) в случае, когда меняется расстояние между препятствием и некоторой фиксированной точкой траектории. Очевидно, что топологические ограничения приводят к сильному притяжению цепи к препятствию для любого $n \neq 0$ и к слабому отталкиванию для $n = 0$.

Другая точно решаемая задача, тесно связанная с задачей, рассмотренной выше, касается вычисления функции распределения случайных блужданий заданной длины L с фиксированной алгебраической площадью (т.е. с площадью со знаком).

Один из возможных подходов к решению этой задачи, принадлежащий авторам работы [13], заключается в использовании функционального интегрирования (см. уравнение (2.6)) с подстановкой

$$\delta[\text{Inv}\{\mathbf{r}(s)\} - \text{Inv}] \rightarrow \delta[S\{\mathbf{r}(s)\} - S], \quad (2.12)$$

где алгебраическая площадь записана в калибровке Ландау:

$$S\{\mathbf{r}(s)\} = \frac{1}{2} \int_C y dx - x dy = \frac{1}{2} \int_C \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} ds, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \xi \times \mathbf{r} \quad (2.13)$$

(ср. с выражениями (2.8), (2.9)).

После стандартных вычислений функция распределения (2.6) может быть представлена в следующем виде [12]:

$$\mathcal{P}_S(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_L, L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dg \exp(iqS) \mathcal{P}_q(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_L, L), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_q(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_L, L) = \frac{\lambda}{4\pi \sin(La\lambda/4)} \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x_0 y_L - y_0 x_L) - \frac{\lambda}{4} \times \right. \\ \left. \times [(x_L - x_0)^2 + (y_L - y_0)^2] \cot \frac{La\lambda}{4}\right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

и $\lambda = -iq$.

Для замкнутых траекторий формулы (2.14), (2.15) существенно упрощаются:

$$\mathcal{P}_S^{\text{cl}}(N) = 2La \cosh^2\left(\frac{2\pi S}{La}\right). \quad (2.16)$$

Различные аспекты данной проблемы интенсивно изучались в работе [11].

Между задачами о случайном блуждании на плоскости с фиксированным числом зацеплений за одно топологическое препятствие или с фиксированной алгебраической площадью не существует принципиального различия: обе проблемы имеют абелеву (т.е. коммутативную) природу. Тем не менее на последней проблеме следует остановиться подробнее в силу ее глубокой связи с известной задачей Харпера–Хофштадтера, касающейся спектральных свойств электрона на двумерной решетке в постоянном магнитном поле [14]. Действительно, перепишем (2.4) со сделанной подстановкой (2.12) в виде рекуррентного уравнения по числу шагов случайного блуждания (т.е. по числу "прыжков" электрона) N :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_q(\mathbf{r}_{N+1}, N+1) = \int d\mathbf{r}_N g(\mathbf{r}_{N+1} - \mathbf{r}_N) \times \\ \times \exp\left[\frac{iq}{2} \xi(\mathbf{r}_N \times \mathbf{r}_{N+1})\right] \mathcal{P}_q(\mathbf{r}_N, N). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для такого дискретного случайного блуждания по решетке $\mathbb{Z}^2$ сделаем замену

$$\int d\mathbf{r}_N g(\mathbf{r}_{N+1} - \mathbf{r}_N) (\dots) \rightarrow \sum_{\{\mathbf{r}_N\}} w(\mathbf{r}_{N+1} - \mathbf{r}_N) (\dots), \quad (2.18)$$

где $w(\mathbf{r}_{N+1} - \mathbf{r}_N)$ — матрица симметричных локальных прыжков на квадратной решетке

$$w = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } (x, y) \rightarrow (x, y \pm 1) \text{ или } (x, y) \rightarrow (x, \pm 1, y), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Окончательно (в калибровке Ландау) имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\varepsilon} W(x, y, q, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{2} i q x\right) W(x, y-1, q) + \\ + \exp\left(-\frac{1}{2} i q x\right) W(x, y+1, q) + \\ + \exp\left(\frac{1}{2} i q y\right) W(x-1, y, q) + \\ + \exp\left(-\frac{1}{2} i q y\right) W(x+1, y, q), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $W(x, y, q, \varepsilon)$ — производящая функция, определенная как $W(x, y, q, \varepsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N \mathcal{P}_S(\mathbf{r}_N, N)$, и q играет роль магнитного потока через контур, ограниченный траекторией случайного блуждания на решетке.

Несмотря на многочисленные более или менее успешные попытки решения данной задачи остается непонятным следующий принципиальный факт. С одной стороны, континуальная версия данной модели имеет хорошо определенную абелеву основу, поскольку использует при описании коммутативный инвариант — алгебраическую площадь (см. (2.13)). С другой стороны, в работе [15] было обнаружено, что уравнение Харпера (2.20), записанное в калибровке $S\{\mathbf{r}\} = \int_C y dx$, имеет скрытую квантово-групповую симметрию, связанную с так называемой C^* -алгеброй [16], являющейся неабелевой. Обычно в статистической физике мы ожидаем, что предельный переход при стремлении размера ячейки решетки к нулю при одновременной перенормировке всех параметров задачи не меняет, по крайней мере качественно, наблюдаемой физической картины явления. Однако спектральные свойства описанной модели оказываются исключительно чувствительными к микроскопическим деталям и сильно зависят от геометрии рассматриваемой системы.

Одно из естественных обобщений рассмотренных выше проблем заключается в вычислении функции распределения для случайного блуждания, топологически взаимодействующего с $k > 1$ препятствиями на плоскости, расположенными в точках $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$. На первый взгляд, методы, основанные на использовании интеграла Гаусса в качестве топологического инварианта, позволяют достаточно просто решить данную задачу. Действительно, подставим в (2.8) векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \zeta \times \sum_{j=1}^k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (2.21)$$

Топологический инвариант в этом случае будет алгебраической суммой оборотов (со знаком) вокруг особых точек, что является прямым обобщением инварианта Гаусса на случай траектории, зацепленной за множество топологических препятствий.

Тем не менее данный подход не решает следующей проблемы: в системе с двумя или большим числом топологических ограничений существуют траектории, зацепленные за несколько препятствий одновременно, однако не зацепленные за каждое из препятствий по отдельности. В качестве примера одной из возможных реализаций таких траекторий можно привести так называемый контур Похгаммера, изображенный на рис. 3. Никакие абелевы модификации интеграла Гаусса не позволяют точно характеризовать топологическое состояние этого контура по отношению к препятствиям.

Пояснить сказанное можно, используя понятие гомотопической группы [17]. Рассмотрим топологическое пространство $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$, где $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ — координаты особых точек на плоскости (препятствий), и выберем некоторую начальную точку $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}_j$, $j \in [1, 2]$. Рассмотрим ансамбль направленных траекторий, начинающихся и кончающихся в точке $\mathbf{r}_0$. Пусть $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ ($0 < s < L$) — базисные петли, соответствующие обходам вокруг точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по часовой стрелке. Те же пути,

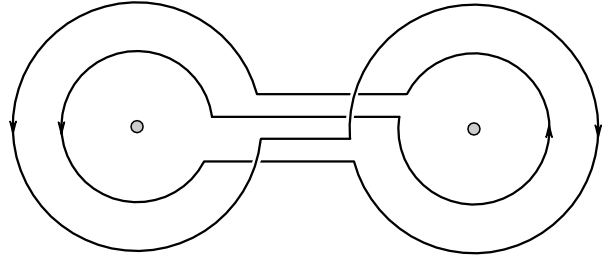


Рис. 3. Контур Похгаммера, зацепленный за оба препятствия сразу, но не зацепленный за каждое из препятствий по отдельности.

соответствующие левосторонним обходам, обозначим как $\gamma_1^{-1}(s)$ и $\gamma_2^{-1}(s)$.

Произведение путей есть их композиция, например, $\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_1 \circ \gamma_2$. Единичный (тривиальный) путь является объединением произвольного пути с обратным:

$$e = \gamma_i \gamma_i^{-1} = \gamma_i^{-1} \gamma_i, \quad i = \{1, 2\}. \quad (2.22)$$

Пути $\gamma_i(s)$ и $\tilde{\gamma}_i(s)$ называются эквивалентными, если существует такое монотонное преобразование переменных $s = s(\tilde{s})$, которое переводит $\gamma_i(s)$ в $\tilde{\gamma}_i(s)$. Гомотопические классы направленных путей образуют группу по отношению к операции умножения; единицей является класс тривиальных путей. Соответствующая группа известна как гомотопическая группа $\pi_1(\mathcal{R}, \mathbf{r}_0)$.

Каждый замкнутый путь на $\mathcal{R}$ может быть представлен словом, состоящим из набора "букв" $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}\}$. Принимая во внимание выражение (2.22), мы можем сократить каждое слово до минимального неприводимого. Например, слово $W = \gamma_1 \gamma_2^{-1} \gamma_1 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}$ может быть редуцировано до слова $W = \gamma_1 \gamma_2^{-1} \gamma_2^{-1}$. Легко понять, что слово $W \equiv e$ геометрически соответствует контурам, не зацепленным за особые точки. Зацепление на рис. 3 отвечает неприводимому слову $W = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1} \equiv 1$. Неабелев характер топологических ограничений проявляется в том, что различные зацепления не коммутируют: $\gamma_1 \gamma_2 \neq \gamma_2 \gamma_1$. В то же время индекс зацепления (число направленных обходов особых точек) для траектории на рис. 3 равен нулю, т.е. принадлежит тривиальному классу гомотий.

2.3. Неабелевы алгебраические инварианты узлов

В связи со сказанным выше становится понятно, что даже самые очевидные топологические проблемы, касающиеся вычисления вероятности образования узла при случайном замыкании концов траектории случайного блуждания, не могут быть изучены с помощью инварианта Гаусса из-за его неполноты.

Прорыв в этой области был сделан в 1975–1976 гг. в работах [1], в которых было предложено использовать алгебраические (полиномиальные) инварианты Александера для характеристики топологического состояния замкнутых случайных траекторий, генерированных на компьютере с помощью метода Монте-Карло. После этих работ стало ясно, что полиномы Александера, являясь несравнимо более сильными инвариантами, чем интеграл Гаусса, могут служить в качестве удобного средства при численном анализе термодинамических характеристик случайных блужданий с топологиче-

скими ограничениями. Статистико-топологический подход, развитый в [1], оказался весьма плодотворным, и основные известные в настоящее время результаты о разнообразных статистических свойствах узлов и зацеплений получены именно с помощью этого метода и его последующих модификаций.

В данном разделе предложен аналитический подход к решению базисной проблемы статистической теории узлов — вероятности найти узел, генерированный случайным образом, в специфическом топологическом состоянии. При решении этой задачи мы явно использовали современные достижения алгебраической топологии, и поэтому мы считаем целесообразным кратко воспроизвести схему построения инвариантов Джонса, следуя подходу Кауффмана.

2.3.1. Неупорядоченная модель Поттса и обобщенные бихроматические полиномы. Хорошо известно, что двумерная модель Поттса допускает представление в виде разложения по графам на плоской решетке [18, 19]. Данную конструкцию нетрудно обобщить на случай модели Поттса с беспорядком в константе взаимодействия.

Напомним некоторые необходимые сведения, касающиеся представления модели Поттса в виде бихроматического полинома. Рассмотрим произвольный плоский граф $\mathcal{L}$ с N вершинами. Сопоставим каждой вершине графа спиновую переменную σ_i ($i \in [1, N]$), принимающую q значений от 1 до q на симплексе. Предположим, что вклад в энергию дает лишь взаимодействие соседних спинов, т.е. спинов, соединенных друг с другом ребром графа. Определим энергию взаимодействия спинов следующим образом:

$$E_{kl} = J_{kl} \delta(\sigma_k, \sigma_l) = \begin{cases} J_{kl}, & \sigma_k = \sigma_l, (\sigma_k, \sigma_l) \text{ — соседи,} \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.23)$$

где J_{kl} — константа взаимодействия, которая в случае неупорядоченной модели может принимать разные значения для различных ребер графа; равенство $\sigma_k = \sigma_l$ означает, что соседние спины принимают одинаковые значения на симплексе.

Статистическая сумма модели Поттса может быть записана как

$$Z_{\text{Поттс}} = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ \sum_{\{kl\}} \frac{J_{kl}}{T} \delta(\sigma_k, \sigma_l) \right\}, \quad (2.24)$$

где T — температура.

В случае $q = 2$ выражение (2.24) совпадает со стандартным представлением модели Изинга с беспорядком в константе взаимодействия — модели, интенсивно изучающейся в теории спиновых стекол [20].

Для того чтобы представить модель Поттса в виде разложения по графам, перепишем статистическую сумму (2.24) в следующем виде:

$$Z_{\text{Поттс}} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\{kl\}} [1 + v_{kl} \delta(\sigma_k, \sigma_l)], \quad v_{kl} = \exp \left(\frac{J_{kl}}{T} \right) - 1. \quad (2.25)$$

Если граф $\mathcal{L}$ имеет N вершин, то произведение (2.25) содержит N множителей. Каждый множитель состоит из

комбинаций двух членов: 1 и $v_{kl} \delta(\sigma_k, \sigma_l)$. Следовательно, статистическая сумма (2.25) разлагается в сумму 2^N членов.

Каждый член суммы находится во взаимно однозначном соответствии с некоторой частью графа $\mathcal{L}$. Для того чтобы сделать это соответствие более ясным, потребуем, чтобы каждый член статистической суммы представлял собой произведение N сомножителей, по одному от каждого ребра графа. Примем следующие правила:

(а) если для некоторого ребра соответствующий сомножитель равен 1, то мы убираем данное ребро из графа $\mathcal{L}$;

(б) если для некоторого ребра соответствующий сомножитель равен $v_{kl} \delta(\sigma_k, \sigma_l)$, то мы оставляем на месте данное ребро в графе.

После повторения подобной процедуры со всеми ребрами графа мы получим взаимно однозначное соответствие между всеми членами суммы (2.25) и набором компонент (не обязательно связанных) графа $\mathcal{L}$.

Рассмотрим типичный граф G , содержащий m ребер и S связанных компонент, при этом изолированную вершину графа будем рассматривать как одну компоненту. Наличие δ -функций в выражении (2.25) обеспечивает равенство спинов в пределах одной компоненты. В результате после суммирования по всем независимым спинам и всем возможным разбиениям исходного графа на множество подграфов G мы получаем новое выражение для статистической суммы Поттса (2.24)

$$Z_{\text{Поттс}} = \sum_{\{G\}} q^C \prod_{\{kl\}}^m v_{kl}, \quad (2.26)$$

где $\prod_{\{kl\}}^m$ означает произведение по всем ребрам графа G .

Отметим, что выражение (2.26) при $v_{kl} \equiv v$ для всех $\{k, l\}$ совпадает с хорошо известным представлением статсуммы модели Поттса в виде бихроматического полинома (см., например, [18, 19]).

Выражение (2.26) может рассматриваться как аналитическое продолжение системы спинов Поттса на нецелые и даже комплексные значения q . В последующих разделах показано, как данная модель связана с алгебраическими инвариантами узлов.

2.3.2. Движения Радемайстера и связь алгебраических инвариантов с вершинными моделями. Пусть K — узел или зацепление, вложенные в трехмерное пространство. Рассмотрим проекцию K на плоскость и получим двумерную диаграмму узла (также обозначаемую K) в общем положении, т.е. в ситуации, когда в одной точке на проекции пересекается не более двух участков K . Определим для каждого пересечения проходы и переходы, т.е. участки путей, проходимые "сверху" или "снизу" в соответствии с естественной геометрией узла K в пространстве.

Для диаграммы узла на плоскости с заданной системой проходов и переходов справедлива следующая теорема (К. Радемайстер [22]).

Два узла в $\mathbb{R}^3$ могут быть непрерывным образом деформированы один в другой тогда и только тогда, когда диаграмма одного узла может быть трансформирована в диаграмму другого узла с помощью последовательности локальных движений I, II и III, изображенных на рис. 4.

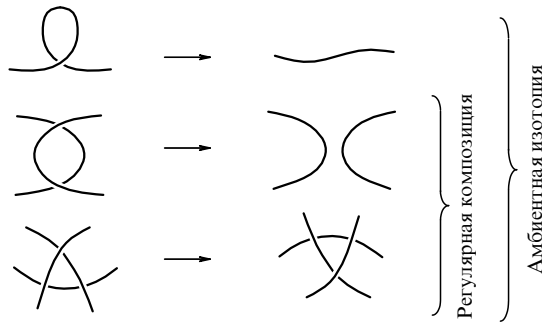


Рис. 4. Движения Радемайстера I, II и III.

Доказательство данной теоремы содержится в работе [22]. Два узла называются *регулярно изотопическими*, если они могут быть непрерывным образом трансформированы друг в друга с помощью движений Радемайстера II и III; если же преобразование одного узла в другой осуществляется с помощью всех движений, то узлы называются *амбиентно изотопическими*. Как видно из рис. 4, движение Радемайстера I ведет к образованию сингулярности на проекции при непрерывном стягивании петли, и данное движение является запрещенным для гладких траекторий на плоскости. В то же время в трехмерном пространстве все узлы (зацепления) являются амбиентно изотопическими.

Опишем теперь конструкцию полиномиальных скобочных инвариантов, следуя идеям Л. Кауффмана [7, 23]. Эти инварианты могут быть определены в виде статистической суммы, в которой суммирование осуществляется по некоторым внутренним формальным степеням свободы.

Рассмотрим $2D$ -диаграмму узла с заданной системой проходов и переходов как некоторую нерегулярную решетку (граф). Все пересечения на диаграмме поместим в вершины решетки и приведем их пересечения к стандартному положению, в котором пересекающиеся участки перпендикулярны друг другу в окрестности вершины и составляют углы $\pm\pi/4$ с осью x . Можно показать, что нижеследующий результат не зависит от способа стандартизации. Таким образом, существует два типа вершин, которые мы будем обозначать переменной $b_i = \pm 1$, как показано на диаграмме:

$$(a) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad b_i = +1, \quad (b) \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad b_i = -1.$$

Следующий шаг заключается в построении алгебраического инварианта как суммы по двум различным способам разрезания диаграммы в вершине, а именно мы приписываем каждому разрезанию статистические веса по следующим правилам: вес A горизонтальному и вес B вертикальному разрезаниям для вершины типа (а); вес B горизонтальному и вес A вертикальному разрезаниям для вершины типа (б). Сказанное схематически можно изобразить следующим образом:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} A \\ \text{---} B \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} B \\ \text{---} A \end{array}$$

константы A и B будут определены позднее.

Для диаграммы узла с N вершинами существует 2^N различных микросостояний, каждое из которых представляет собой набор одновременных разрезов всех N вершин. Каждое микросостояние S соответствует разложению диаграммы узла (зацепления) в набор непересекающихся и самонепересекающихся циклов. Число циклов для каждого микросостояния S мы обозначаем через $\mathcal{S}$. Л. Кауффману ([7]) принадлежит следующее утверждение.

Рассмотрим статистическую сумму

$$\langle K \rangle = \sum_{\{S\}} d^{\mathcal{S}-1} A^i B^j, \quad (2.27)$$

где $\sum_{\{S\}}$ означает суммирование по всем 2^N разрезаниям графа, i и $j = N - i$ — соответственно числа вершин с весами A и B для заданного набора всех разрезов, отвечающих микросостоянию S .

Полином от переменных A , B и d , представленный статсуммой (2.27), есть топологический инвариант регулярно изотопических узлов тогда и только тогда, когда между параметрами A , B и d выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= 1, \\ ABd + A^2 + B^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Приведем кратко схему доказательства, предложенную в работе [7]. Обозначим через $\langle \dots \rangle$ статистический вес узла или его части. Величина $\langle K \rangle$ представляет собой произведение всех весовых множителей от всех частей диаграммы. Используя определение введенных выше разрезов, нетрудно проверить соотношения, справедливые для неориентированных диаграмм,

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} &= \begin{array}{c} \text{---} A \\ \text{---} B \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} B \\ \text{---} A \end{array}, \\ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} &= \begin{array}{c} \text{---} B \\ \text{---} A \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} A \\ \text{---} B \end{array}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

дополненные начальными условиями

$$\langle K \cup O \rangle = d \langle K \rangle, \quad \text{если } K \text{ не пусто}, \quad (2.30)$$

где O обозначает одиночную тривиальную петлю.

Соотношения клубка (skein relations; см. соотношение (2.29)) соответствуют определенным выше весам горизонтальных и вертикальных разрезов, в то время как соотношение (2.30) дает статистический вес композиции узла с тривиальной петлей. Эти геометрические правила строго определены для зафиксированных граничных условий узла, т.е. для фиксированной части узла за пределами скобок (см. выше). Положим, что полином тривиального узла равен единице:

$$\langle O \rangle = 1. \quad (2.31)$$

Теперь осталось показать, что при определенном соотношении между A , B и d статистическая сумма (2.27) представляет собой алгебраический инвариант узла. Доказательство основано на непосредственной проверке инвариантности статсуммы $\langle K \rangle$ по отношению к движениям Радемайстера II и III. Например, для

движения типа II имеем

$$\begin{aligned} \langle \text{diagram} \rangle &= \langle \text{diagram} \rangle ABd + \langle \text{diagram} \rangle B^2 + \\ &+ \langle \text{diagram} \rangle A^2 + \langle \text{diagram} \rangle AB = \\ &= \langle \text{diagram} \rangle (ABd + A^2 + B^2) + \langle \text{diagram} \rangle AB. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Следовательно, инвариантность по отношению ко второму движению Радемайстера может быть немедленно получена, если определить статистические веса в последней строке цепочки (2.32) так же, как в соотношении (2.28). Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие инвариантности рассматриваемой статсуммы по отношению к третьему движению Радемайстера не нарушает соотношений (2.28).

Соотношения (2.28) могут быть переписаны в виде

$$B = A^{-1}, \quad d = -A^2 - A^{-2}, \quad (2.33)$$

что означает, что инвариант Кауффмана (2.27) является лорановским полиномом единственной переменной A .

Л. Кауффман также показал, что для ориентированных узлов (зацеплений) инвариант амбиентно изотопических узлов (т.е. диаграмм, инвариантных по отношению ко всем трем движениям Радемайстера) определяется следующим образом:

$$f[K] = (-A)^{3Tw(K)} \langle K \rangle, \quad (2.34)$$

где $Tw(K)$ — кручение (*twisting*) диаграммы узла, т.е. сумма всех ориентированных пересечений участков диаграммы, определенных согласно правилу:

$$(a) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} +1, \quad (b) \quad \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} -1$$

(не путать определение $Tw(K)$ с определением b_i , введенным выше). Уравнение (2.34) следует из такой цепочки тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \left[\text{diagram} \right] &= \langle \text{diagram} \rangle B + \langle \text{diagram} \rangle dA = \\ &= \langle \text{diagram} \rangle (B + dA) \equiv \langle \text{diagram} \rangle (-A)^3. \end{aligned}$$

Описанная вершинная модель и скобочные полиномы, определенные Кауффманом, представляются, на первый взгляд, очень искусственными, поскольку используют в своем построении такие специфические геометрические правила, как суммирование по "нефизическим" степеням свободы — разрезаниям во всех вершинах. Однако оказалось, что полиномиальные инварианты Кауффмана $f[K](A)$ от переменной A совпадают с инвариантами Джонса $V(t)$ от переменной t , где $t = A^{1/4}$. Полиномиальные инварианты $V(t)$ были определены впервые В.Ф.Р. Джонсом при исследовании топологических свойств кос (см. раздел 3). Джонсу удалось обнаружить глубокую связь между соотношениями группы кос

и уравнениями Янга–Бакстера, являющимися необходимым условием коммутативности трансфер-матрицы [6].

2.4. Решеточные диаграммы узлов и зацеплений как неупорядоченная модель Поттса

Первая попытка применить инвариант Кауффмана регулярно изотопических узлов при исследовании статистических свойств случайных блужданий с топологическими ограничениями в узкой полости была предпринята в работе [24]. Ниже мы развиваем идеи работы [24], рассматривая топологическое состояние узла как специфический случай *замороженного беспорядка*.

Модель, рассмотренная в данном разделе, определена следующим образом. Возьмем квадратную решетку M , повернутую под углом $\pi/4$ по отношению к оси x , и спроецируем на нее узел K , вложенный в $\mathbb{R}^3$, так, чтобы: а) каждая точка пересечения диаграммы узла совпадала с какой-нибудь вершиной решетки; б) не было свободных вершин решетки (рис. 5). В каждой вершине решетки определим проходы и переходы: $b_i = \pm 1$, и выберем граничные условия таким образом, чтобы решетка как целое образовывала узел. Набор всех проходов и переходов вместе с граничными условиями (решеточный узел) однозначно фиксирует топологию системы.

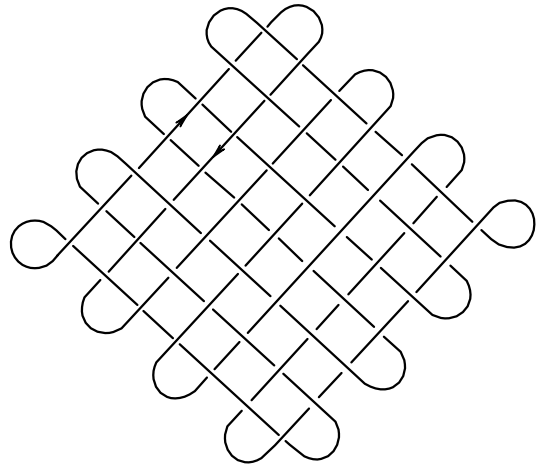


Рис. 5. Решеточный узел с топологическим беспорядком, реализованным в виде случайных проходов и переходов.

Подчеркнем, что рассматриваемая модель является очень грубой, поскольку мы пренебрегаем пространственными флуктуациями траектории и сохраняем лишь флуктуации топологии системы. Тем не менее данная модель может быть применена для описания статистических свойств полимерных цепей в конденсированном (так называемом глобулярном) состоянии, в котором пространственные флуктуации сильно подавлены энергетическими взаимодействиями между звеньями цепи.

Основная проблема заключается в вычислении вероятности $\mathcal{P}_N\{f[K]\}$ того, что среди всех 2^N возможных микрореализаций беспорядка $\{b_i\}$ найдется решеточный узел K в топологическом состоянии с заданным инвариантом Кауффмана $f[K\{b_1, \dots, b_N\}]$. Эта вероят-

ность может быть формально записана в виде (ср. с (2.1))

$$\mathcal{P}_N\{f[K]\} = \frac{1}{2^N} \sum_{\{b_i\}} \Delta \left[f[K\{b_1, b_2, \dots, b_N\}] - f[K] \right], \quad (2.35)$$

где $f[K\{b_1, \dots, b_N\}]$ есть представление инварианта Кауффмана в виде функции всех проходов и переходов $\{b_i\}$ на решетке $\mathcal{M}$. Таким образом, топологический беспорядок, связанный со случайным независимым выбором проходов и переходов в каждой вершине решетке, является случайным замороженным внешним полем.

Идея оценки $\mathcal{P}_N\{f[K]\}$ содержит два последовательных шага:

(а) топологический инвариант Кауффмана мы представляем в виде хорошо известной модели Поттса с беспорядком в константе взаимодействия;

(б) вычисление термодинамических характеристик ансамбля узлов осуществляется в рамках стандартных методов физики неупорядоченных систем для обычной спиновой модели Поттса.

Строго говоря, мы могли бы опустить обсуждение пункта (а), поскольку это не ведет непосредственно к ответу на основной вопрос. Тем не менее мы придерживаемся выбранной последовательности, преследуя две цели: 1) мы бы хотели показать, что топологически-вероятностная проблема может быть решена в рамках стандартного термодинамического формализма; 2) мы бы хотели применить хорошо известные методы исследования неупорядоченных спиновых систем (и, в частности, модели Поттса) для решения исходной топологической задачи. Отметим, что используемый ниже формализм, основанный на приближении среднего поля и формальной замене модели с короткодействием моделью с бесконечным радиусом взаимодействия, является обычным для проблем теории неупорядоченных систем и теории спиновых стекол.

2.4.1. Алгебраические инварианты регулярно изотопических узлов. По Джонсу и Кауффману общий способ аналитического построения алгебраического инварианта узла связан с поиском функционала $f[K\{b_1, \dots, b_N\}]$, который бы не зависел от формы узла, т.е. был бы инвариантен относительно локальных деформаций траектории — движений Радемайстера.

Напомним, что представление инварианта Кауффмана регулярно изотопических узлов в виде модели Поттса с заданным набором переменных $\{b_i\}$, определяющих топологический беспорядок на решетке, связано с разложением решетки $\mathcal{M}$ на полигоны — систему плотно упакованных непересекающихся замкнутых контуров. Совокупность всех полигонов представляет собой набор эйлеровых путей, полностью заполняющих решетку. Эйлеровы пути находятся во взаимно однозначном соответствии с представлением модели Поттса в виде разложения по графам, рассмотренном в разделе 2.3.1 (см. детали в работе [27]).

Перепишем инвариант Кауффмана регулярно изотопических узлов $\langle K \rangle$ в виде неупорядоченной модели Поттса, определенной в предыдущем разделе. Введем вспомогательные переменные $s_i = \pm 1$ в каждой вершине решетки независимо от переменной $b_i = \pm 1$ в той же

вершине:

$$\bigcap s_i = +1; \quad \bigcup s_i = -1.$$

В результате имеем

$$\langle K\{b_i\} \rangle = \sum_{\{s\}} (A^2 + A^{-2})^{S-1} \exp \left(\ln A \sum_{i=1}^N b_i s_i \right). \quad (2.36)$$

Записанная в такой форме статсумма $\langle K\{b_i\} \rangle$ представляет собой взвешенный ансамбль всех эйлеровых путей¹ на решетке $\mathcal{M}$. Покажем, что микросостояния модели Кауффмана находятся во взаимно однозначном соответствии с микросостояниями модели Поттса на дуальной решетке. По-видимому, впервые сходное утверждение было высказано в работе [7].

(а) Рассмотрим решетку $\mathcal{L}$, дуальную к решетке $\mathcal{M}$ (рис. 6). Ребра решетки $\mathcal{L}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами решетки $\mathcal{M}$. Таким образом, беспорядок на ребрах $\mathcal{L}$ совпадает с беспорядком в вершинах $\mathcal{M}$. Мы будем различать горизонтальные и вертикальные ребра решетки $\mathcal{L}$. Каждое ребро (kl) решетки $\mathcal{L}$ несет случайную переменную b_{kl} , являющуюся функцией переменной b_i решетки $\mathcal{M}$. Наиболее простой выбор зависимости $b_{kl}(b_i)$ определен ниже в (2.46), где i — вершина решетки $\mathcal{M}$, принадлежащей ребру (kl) дуальной решетки $\mathcal{L}$.

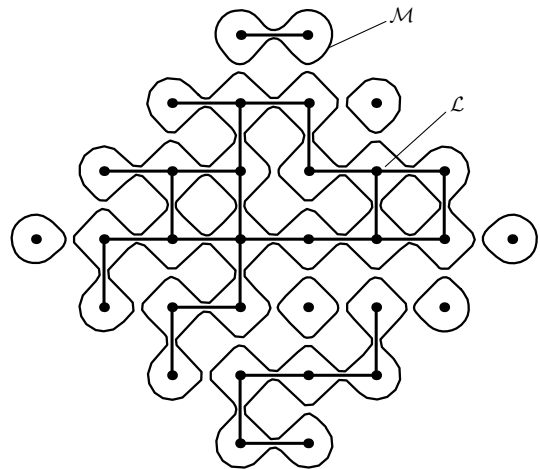


Рис. 6. Разложение диаграммы узла на решетке $\mathcal{M}$ в ансамбль непересекающихся эйлеровых путей и представление модели Поттса в виде совокупности графов на дуальной решетке $\mathcal{L}$.

(б) Для заданной конфигурации разрезов на $\mathcal{M}$ и выбранной дуальной решетки $\mathcal{L}$ примем следующее соглашение: отметим все ребра решетки $\mathcal{L}$, если эти ребра не пересекаются полигонами решетки $\mathcal{M}$, все же остальные ребра решетки $\mathcal{L}$ оставим неотмеченными и перепишем сумму $\sum s_i b_i$ в уравнении (2.36) следующим образом:

¹ Эйлеровым путем называется траектория, проходящая через все ребра графа и посещающая каждое ребро один раз.

$$\begin{aligned}
\sum_i s_i b_i &= \sum_{\text{отмеч.}} s_i b_i + \sum_{\text{неотмеч.}} s_i b_i = \sum_{\text{отмеч.}}^{\text{гориз.}} s_i b_i + \sum_{\text{отмеч.}}^{\text{вертик.}} s_i b_i + \\
&+ \sum_{\text{неотмеч.}}^{\text{гориз.}} s_i b_i + \sum_{\text{неотмеч.}}^{\text{вертик.}} s_i b_i = - \sum_{\text{отмеч.}}^{\text{гориз.}} b_{kl} - \sum_{\text{отмеч.}}^{\text{вертик.}} b_{kl} + \\
&+ \sum_{\text{неотмеч.}}^{\text{гориз.}} b_{kl} + \sum_{\text{неотмеч.}}^{\text{вертик.}} b_{kl} = \sum_{\text{все ребра}} b_{kl} - 2 \sum_{\text{отмеч.}} b_{kl},
\end{aligned} \quad (2.37)$$

где мы использовали соотношение

$$\sum_{\text{неотмеч.}} b_{kl} + \sum_{\text{отмеч.}} b_{kl} = \sum_{\text{все ребра}} b_{kl}.$$

(в) Пусть m_s — число отмеченных ребер и C_s — число связных компонент отмеченного графа. Соотношение Эйлера для графа имеет вид

$$S = 2C_s + m_s - N + \chi. \quad (2.38)$$

Значение χ зависит от рода поверхности, в которую вложена решетка (т.е. зависит от граничных условий). В термодинамическом пределе $N \gg 1$ зависимость от χ исчезает (по крайней мере для плоских поверхностей), и ниже мы будем предполагать, что выполняется обычное соотношение $S = 2C_s + m_s - N$.

С помощью определений (а)–(в) можно легко трансформировать уравнение (2.36) в следующее:

$$\begin{aligned}
\langle K\{b_{kl}\} \rangle &= (A^2 + A^{-2})^{-(N+1)} \prod_{\text{все ребра}}^N [A^{b_{kl}}] \times \\
&\times \sum_{\{G\}} (A^2 + A^{-2})^{2C_s} \prod_{\text{отмеч.}}^{m_s} [A^{-2b_{kl}} (-A^2 - A^{-2})],
\end{aligned} \quad (2.39)$$

где мы использовали соотношения (2.37) и тот факт, что значение $N+1$ четно. Сравнивая (2.39) с (2.25), мы немедленно получаем выражение

$$\begin{aligned}
\sum_{\{G\}} (A^2 + A^{-2})^{2C_s} \prod_{\text{отмеч.}}^{m_s} [A^{-2b_{kl}} (-A^2 - A^{-2})] &\equiv \\
&\equiv \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\{kl\}} [1 + v_{kl} \delta(\sigma_k, \sigma_l)],
\end{aligned} \quad (2.40)$$

которое совпадает со статсуммой модели Поттса, представленной в виде бихроматического полинома. Таким образом,

$$\begin{aligned}
v_{kl} &= A^{-2b_{kl}} (-A^2 - A^{-2}) = -1 - A^{-4b_{kl}}, \\
q &= (A^2 + A^{-2})^2.
\end{aligned} \quad (2.41)$$

Так как беспорядок b_{kl} принимает только дискретные значения ± 1 , мы можем переписать выражение для константы взаимодействия J_{kl} в виде

$$\frac{J_{kl}}{T} = \ln [1 - (A^2 + A^{-2}) A^{-2b_{kl}}] = \ln [-A^{-4b_{kl}}].$$

В результате мы приходим к следующему утверждению.

Топологический инвариант Кауффмана $\langle K(A) \rangle$ регулярно изотопических диаграмм узлов на $\mathcal{M}$ допускает

представление в форме двумерной системы Поттса на дуальной решетке $\mathcal{L}$

$$\langle K(A) \rangle = H(A, \{b_{kl}\}) Z_{\text{Поттс}} [q(A), \{J_{kl}(b_{kl}, A)\}], \quad (2.42)$$

где

$$H(A, \{b_{kl}\}) = (A^2 + A^{-2})^{-(N+1)} \exp \left(\ln A \sum_{\{kl\}} b_{kl} \right) \quad (2.43)$$

есть тривиальный множитель, не зависящий от поттсовских спинов;

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Поттс}} [q(A), \{J_{kl}(b_{kl}, A)\}] &= \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ \sum_{\{kl\}} \frac{J_{kl}(b_{kl}, A)}{T} \delta(\sigma_k, \sigma_l) \right\}
\end{aligned} \quad (2.44)$$

есть статсумма модели Поттса с константой взаимодействия J_{kl} и числом состояний спина q , определенными следующим образом:

$$\frac{J_{kl}}{T} = \ln [-A^{-4b_{kl}}], \quad q = (A^2 + A^{-2})^2; \quad (2.45)$$

переменная b_{kl} играет роль беспорядка на ребрах решетки $\mathcal{L}$, дуальной к решетке $\mathcal{M}$. Соотношение между b_{kl} и b_i таково:

$$b_{kl} = \begin{cases} -b_i, & \text{если ребро } (kl) \text{ вертикально,} \\ b_i, & \text{если ребро } (kl) \text{ горизонтально.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Выражение (2.44) имеет смысл статистической суммы неупорядоченной двумерной модели Поттса со случайным взаимодействием ближайших соседей. Набор проходов и переходов $\{b_{kl}\}$ однозначно характеризует истинное топологическое состояние системы переплетенных нитей ("ковра") при заданных граничных условиях. Таким образом, топологическая проблема определения инварианта узла оказалась эквивалентной статистической проблеме вычисления функции распределения модели Поттса с беспорядком в константе связи. Разумеется, это соответствие останется достаточно формальным до тех пор, пока мы не определим область изменения параметра A , при котором (2.44) будет иметь физический смысл.

Специфической особенностью модели Поттса (2.44) является связь между температурой T и числом состояний спина q , согласно которой T и q нельзя рассматривать как независимые переменные.

2.4.2. Алгебраические инварианты амбиентно изотопических узлов. Требование инвариантности величины $f[K]$ по отношению ко всем движениям Радемайстера (2.34) ведет к рассмотрению ориентированных эйлеровых путей, называемыхся *гамильтоновыми путями*².

Предположим, что ориентация решетки на рис. 5 совпадает с естественной ориентацией узла K в $\mathbb{R}^3$. Для заданных граничных условий мы получаем *манхеттенскую решетку*, состоящую из нитей с альтернирующими направлениями.

Согласно определению кручения (*twisting*; см. выше) $Tw(K)$ меняет знак, если направление одной нити в

² Гамильтонов путь представляет собой замкнутую траекторию, посещающую только один раз все ребра ориентированного графа.

вершине решетки меняется на противоположное. Определим группы четных и нечетных вершин решетки $\mathcal{M}$ согласно правилу: вершина i называется *четной* (*нечетной*), если она принадлежит горизонтальному (вертикальному) ребру (kl) дуальной решетки $\mathcal{L}$. Теперь нетрудно проверить, что кручение манхеттенской решетки $\mathcal{M}$ выражается в терминах переменной b_{kl} . Окончательно имеем

$$f[K] = \exp \left(3 \ln[-A] \sum_{\{kl\}} b_{kl} \right) \langle K(\{b_{kl}\}, A) \rangle, \quad (2.47)$$

где $\langle K(\{b_{kl}\}, A) \rangle$ определено согласно выражению (2.42).

2.5. Понятие о динамических и замороженных реализациях топологического беспорядка

Фиксированная топологическая структура случайной траектории заданной длины, флуктуирующая в пространстве, является типичным примером замороженного беспорядка. Действительно, узел формируется при замыкании концов траектории и не меняется впоследствии при любых непрерывных деформациях петли. Наличие топологических ограничений разбивает фазовое пространство ансамбля случайно генерированных петель на независимые подобласти, что вызывает ассоциации с многодолинной структурой фазового пространства состояний спинного стекла. Каждая подобласть соответствует подпространству конфигураций петли с фиксированным значением топологического инварианта.

Методы теоретического описания систем с замороженным беспорядком в константе взаимодействия достаточно хорошо разработаны, особенно в связи с исследованием моделей спиновых стекол [20]. Центральным для этих методов является понятие самоусредняемости [21], смысл которого можно пояснить следующим образом. Пусть F — некоторая аддитивная функция (например, свободная энергия) неупорядоченной системы. Функция F является самоусредняющейся величиной, если наблюдаемое значение $F_{\text{наб}}$ совпадает со значением F , усредненным по ансамблю всех реализаций беспорядка:

$$F_{\text{наб}} = \langle F \rangle_{\text{ср}}.$$

Основная техническая проблема статистической теории неупорядоченных систем заключается в усреднении свободной энергии $F = -T \ln Z$ по реализациям случайного внешнего поля. В данном разделе мы показываем, как эта принципиальная проблема теории неупорядоченных спиновых систем связана с проблемой вычисления энтропии узла.

Другая проблема возникает при усреднении статистической суммы Z (а не свободной энергии) по различным реализациям беспорядка. Физически такая постановка отвечает модели, когда рассматривается вопрос о вычислении средних значений топологических инвариантов $\langle K(A) \rangle$ или $f[K]$ в ансамбле незамкнутых траекторий. В [26] показано, что вычисление средних значений топологических инвариантов позволяет извлечь достаточно грубую, но тем не менее нетривиальную информацию о статистических свойствах узлов.

2.5.1. Энтропия узла. Метод реплик. Нашей основной целью является вычисление величины $\mathcal{P}_N\{f[K]\}$ (см. (2.35)). Мы не в состоянии определить эту функцию

точно, но, пользуясь представлением $\mathcal{P}_N\{f[K]\}$ в терминах неупорядоченной модели Поттса, можем оценить долю случайно генерированных узлов, принадлежащих заданному топологическому классу (например, тривиальному). Используем следующую цепочку неравенств, ограничиваясь рассмотрением случая регулярно изотопических узлов:

Вероятность $\mathcal{P}_N$ образования узла в заданном топологическом состоянии	$\leq$	Вероятность $\mathcal{P}_N\{K(A)\}$ образо- вания узла с за- данным топологи- ческим инвариан- том $\langle K(A) \rangle$ для всех A	$\leq$	Вероятность $\mathcal{P}_N\{K(A^*)\}$ обра- зования узла, от- вечающего спе- цифическому значению A^* , ми- нимизирующему свободную энер- гию модели Пот- тса
--	--------	--	--------	--

(2.48)

Первое неравенство следует из того, что инвариант Кауффмана регулярно изотопических узлов не является полным. Последняя вероятность в (2.48) может быть переписана следующим образом:

$$\mathcal{P}_N\{K(A^*)\} = \sum_{\{b_{kl}\}} \Theta\{b_{kl}\} \Delta \left[\langle K\{b_{kl}, A^*\} \rangle - \langle K(A^*) \rangle \right], \quad (2.49)$$

где $\sum$ означает суммирование по всем конфигурациям проходов и переходов $\{b_{kl}\}$; Δ -функция вырезает из множества $\{b_{kl}\}$ состояния со специфическим значением инварианта Кауффмана $\langle K\{b_{kl}, A^*\} \rangle \equiv \langle K(A^*) \rangle$; $\Theta\{b_{kl}\}$ — вероятность реализации некоторого набора проходов и переходов.

В принципе распределение $\Theta\{b_i\}$ зависит от статистики траектории в трехмерном пространстве и определяется физическими процессами образования узла. Ниже мы ограничиваемся простейшей ситуацией и предполагаем, что:

(а) проходы и переходы $\{b_i\}$ в различных вершинах решетки $\mathcal{M}$ являются статистически независимыми переменными (соответственно переменные $\{b_{kl}\}$ на ребрах решетки $\mathcal{L}$ также независимы)

$$\Theta\{b_i\} = \prod_{i=1}^N P(b_i); \quad (2.50)$$

(б) переменные b_i (b_{kl}) принимают значения ± 1 с равными вероятностями

$$P(b_i) = \frac{1}{2} \delta(b_i - 1) + \frac{1}{2} \delta(b_i + 1). \quad (2.51)$$

Используя выражение (2.49), оценим вероятность образования тривиального узла как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N^{(0)}(A^*) &\leq \sum_{\{b_{kl}\}} \Theta\{b_{kl}\} \Delta \left[\ln \langle K\{b_{kl}, A^*\} \rangle \right] \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int \dots \int \prod_{kl} P(b_{kl}) db_{kl} \langle K^{iy}\{b_{kl}, A^*\} \rangle, \end{aligned} \quad (2.52)$$

где $\langle K(A^*) \rangle \equiv 1$ для тривиальных узлов.

Наша проблема свелась к вычислению нецелых комплексных моментов статистической суммы, т.е. значений типа $\langle K^{iy}\{b_{kl}, A^*\} \rangle$. Аналогичная проблема вычисления нецелых моментов хорошо известна в физике неупорядоченных систем и, в частности, в теории спиновых стекол. Действительно, усреднение свободной энергии системы F по замороженному случайному внешнему полю часто осуществляется с помощью *метода реплик* [28]. Идея этого метода заключается в следующем. Разложим тождество $Z^n \equiv \exp(n \ln Z)$ в ряд по степеням n . Ограничиваясь первым членом разложения, получим $Z^n = 1 + n \ln Z + O(n^2)$. Теперь можно написать

$$F = -\ln Z = -\lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}.$$

Следуя методу реплик, мы должны найти $\overline{\langle K^n \rangle}$ для целых положительных значений n . Затем, положив $n = iy$, вычислить оставшийся интеграл по y в выражении (2.52). Конечно, данная процедура требует обоснования, и было бы весьма желательно иметь сопоставление наших вычислений с данными численного моделирования. Однако следует подчеркнуть, что предложенный способ вычисления величины $\langle K\{b_{kl}\} \rangle$ является не более спекулятивным, чем стандартный метод реплик.

Схема последующих вычислений такова. Мы перепишем инвариант Кауффмана в терминах обычной модели Поттса, произведя необходимые усреднения в рамках теории среднего поля с бесконечным радиусом взаимодействия в размерности $D = 2$. Далее, мы получим выражение для средней свободной энергии $F(A)$. Минимизируя $F(A)$ по переменной A , мы найдем "равновесное" значение A^* . После этого можно вычислить желаемую вероятность $\mathcal{P}_N^{(0)}(A^*)$.

Усредняя n -ю степень инварианта Кауффмана по распределению независимых проходов и переходов $b_{kl} = \pm 1$, получим

$$\begin{aligned} \overline{\langle K^n(A) \rangle} &= \int \dots \int \prod_{kl} P(b_{kl}) db_{kl} K^{2n}\{b_{kl}\} = \\ &= [2 \cosh(2\beta)]^{-2n(N+1)} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{kl} \exp \left\{ i\pi \sum_{kl} \delta(\sigma_k^x, \sigma_l^x) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \cosh \left[\beta \sum_{\alpha=1}^n (4\delta(\sigma_k^x, \sigma_l^x) - 1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $\beta = \ln A$. Забудем на время о связи между числом состояний спина q и константой взаимодействия и предположим, что $|\beta| \ll 1$. Позже мы проверим самосогласованность этого предположения. Разложим экспоненту в последнем выражении в ряд по степеням β . Сохраняя члены до порядка β^2 включительно, перепишем (2.53) в стандартном виде n -репличной статсуммы модели Поттса

$$\begin{aligned} \overline{\langle K^n(A) \rangle} &= [2 \cosh(2\beta)]^{-2n(N+1)} \exp \left[N \left(\frac{1}{2} \beta^2 n^2 \right) \right] \times \\ &\quad \times \sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}} \exp \left\{ \frac{J^2}{2} \sum_{kl} \sum_{\alpha \neq \beta} \sigma_{ka}^x \sigma_{kb}^x \sigma_{la}^x \sigma_{lb}^x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{J^2}{2} (q-2) + \bar{J}_0 \right) \sum_{kl} \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{ka}^x \sigma_{lb}^x \right\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где индексы a, b меняются в интервале $[0, q-1]$, $\beta^2 \ll 1$ и

$$\begin{aligned} J^2 &= 16\beta^2, \\ \bar{J}_0 &= i\pi - 4\beta^2 n, \\ q &= 4 + 16\beta^2 > 4. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Согласно результатам работ [29, 30] спин-стекольная фаза наблюдается тогда, когда обычное ферромагнитное упорядочение не дает существенного вклада в свободную энергию рассматриваемой системы

$$\frac{\bar{J}_0}{J} < \frac{q-4}{2}. \quad (2.56)$$

Подставляя (2.55) в (2.56), можно увидеть, что в уравнении (2.56) $\text{Re}[\text{левая часть}] < \text{Re}[\text{правая часть}]$ для всех β . Таким образом, мы ожидаем, что спин-стекольный порядок (в модели с бесконечным радиусом взаимодействия) отвечает решению

$$\begin{aligned} m_a^x &= \langle q\delta(\sigma_k^x, a) - 1 \rangle = 0, \\ Q_{ab}^{x\beta} &= \langle q\delta(\sigma_k^x, a) - 1 \rangle \langle q\delta(\sigma_k^\beta, b) - 1 \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

где m_a^x и $Q_{ab}^{x\beta}$ — соответственно ферромагнитный и спин-стекольный параметры порядка. Если это так, то мы можем сохранить в экспоненте (2.54) член, соответствующий только межрепличным взаимодействиям.

Далее, мы можем следовать стандартной схеме анализа спиновых стекол Поттса, подробно рассмотренной в работах [29–31]; основные шаги данного рассмотрения воспроизведены ниже. Осуществляя преобразование Хаббарда–Стратоновича и переходя к скалярным полям $Q_{iab}^{x\beta}$, будем искать решение в виде $Q_{iab}^{x\beta} = Q_i^{x\beta} \delta_{ab}$. Перепишем теперь выражение (2.54) следующим образом [29]:

$$\begin{aligned} \overline{\langle K^n \rangle} &= \exp \left\{ N \left[\ln \frac{\pi}{J^2} n(n-1)(q-1)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(2 \cosh \frac{J}{2} \right) + \frac{J^2 n^2}{32} \right] \times \\ &\quad \times \sum_{\{\sigma\}} \int \prod_i dQ_i^{x\beta} \exp \left\{ - \int H\{Q_i^{x\beta}\} d^2x \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где

$$\begin{aligned} H\{Q^{x\beta}\} &= (q-1) \left[\frac{1}{4} \left(\frac{2}{J^2} - 1 \right) \sum_{\alpha \neq \beta} (Q^{x\beta})^2 - \right. \\ &\quad - \frac{1}{6} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} Q^{x\beta} Q^{\beta\gamma} Q^{\gamma\alpha} - \frac{q-2}{12} \sum_{\alpha \neq \beta} (Q^{x\beta})^3 - \\ &\quad - \frac{q-2}{4} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} (Q^{x\beta})^2 Q^{\beta\gamma} Q^{\gamma\alpha} - \\ &\quad - \frac{1}{8} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta} Q^{x\beta} Q^{\beta\gamma} Q^{\gamma\delta} Q^{\delta\alpha} - \\ &\quad \left. - \frac{q^2 - 6q + 6}{48} \sum_{\alpha\beta} (Q^{x\beta})^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В [29, 31] показано, что среднеполное реплично-симметричное решение неупорядоченной модели Поттса неустойчиво при $q \geq 2$ и симметрия "нарушена"

на один шаг", отвечающий первому уровню схемы Паризи. В связи с этим решение уравнений (2.57), (2.58) следует искать в виде

$$Q^{\alpha\beta} = \begin{cases} Q, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ принадлежат одной} \\ & \text{группе из } m \text{ реплик,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.59)$$

Анализ показывает, что для $q > 4$ (наш случай) переход в спин-стекольное состояние соответствует $m = 1$, что подразумевает наличие вспомогательного условия $F_{\text{пм}} = F_{\text{сс}}$, где $F_{\text{пм}}$ и $F_{\text{сс}}$ — свободные энергии парамагнитной и спин-стекольной фаз. Переход происходит в точке

$$1 - \frac{2}{J^2} = \frac{(q-4)^2}{3(q^2 - 18q + 42)}. \quad (2.60)$$

Подставляя (2.55) в (2.60), мы получаем самосогласованное значение обратной температуры перехода в спин-стекольную фазу $\beta_{\text{кр}}$:

$$\beta_{\text{кр}} \approx 0,35. \quad (2.61)$$

Это численное значение удовлетворяет условию $\beta_{\text{кр}}^2 \ll 1$, предположенному выше при разложении (2.54).

Согласно результатам работы [29] n -репличная свободная энергия вблизи точки перехода имеет следующий вид:

$$F \simeq \frac{1}{64} N n (q-1)^2 Q_{\text{кр}} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta_{\text{кр}}^2} \right)^2, \quad (2.62)$$

где

$$Q_{\text{кр}} = \frac{2(4-q)}{q^2 - 18q + 42} > 0 \quad (2.63)$$

(напомним, что $Q_{\text{кр}}$ — спин-стекольный параметр порядка).

Из уравнения (2.62) следует, что свободная энергия $\bar{F}$ как функция переменной $A = \exp(\beta)$ достигает своего минимума в точке $A^* = \exp(\beta_{\text{кр}})$. Пользуясь (2.62) и (2.63), мы можем получить выражение для усредненного n -репличного инварианта Кауффмана $\langle K^n \rangle$ вблизи точки $\beta_{\text{кр}}$ (ср. с [29]):

$$\begin{aligned} \overline{\langle K^{2n} \rangle} \simeq \exp \left\{ N n^2 \left[(3 + 16\beta^2)^2 \ln \frac{\pi}{16\beta^2} + \frac{\beta^2}{2} \right] - \right. \\ \left. - N n \left[(3 + 16\beta^2)^2 \ln \frac{\pi}{16\beta^2} + \ln 2 + \frac{\beta^2}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(3 + 16\beta^2)^2 (\beta^{-2} - \beta_{\text{кр}}^{-2})^2 \beta_{\text{кр}}^2}{(4 + 16\beta_{\text{кр}}^2)^2 - 18(4 + 16\beta_{\text{кр}}^2) + 42} \right] \right\}. \quad (2.64) \end{aligned}$$

Подставив (2.64) в (2.52) и приняв во внимание, что $n = i$, нетрудно вычислить оставшийся гауссов интеграл по переменной y и получить результат для $\mathcal{P}_N^{(0)}(A)$. Как уже было сказано ранее, оценку вероятности образования тривиального узла мы получаем, пользуясь цепочкой неравенств (2.48) при $A = A^* \equiv \exp(\beta_{\text{кр}})$:

$$\mathcal{P}_N^{(0)}(A^*) \simeq \exp(-cN), \quad c \approx 1. \quad (2.65)$$

Данная зависимость не удивительна с точки зрения статистической механики, поскольку величина $\eta = \ln \mathcal{P}_N^{(0)}(A^*)$ имеет смысл свободной энергии. Однако, интерпретируя данную зависимость с топологической точки зрения, факт пропорциональности типичной сложности узла (см. также раздел 3) числу вершин решетки (т.е. объему системы) означает, что максимум функции распределения $P(\eta, N)$ находится в области очень сложных (далеких от тривиальных) узлов. Это обстоятельство является непосредственным проявлением эффекта некоммутативности топологических взаимодействий.

3. Случайные блуждания на локальных некоммутативных группах

Последние годы были отмечены появлением большого количества задач, связанных с рассмотрением физических процессов на некоммутативных группах. Классифицируя эти проблемы, мы можем выделить несколько общих категорий, в которых некоммутативная природа явлений проявляется наиболее полно.

1. Исследование спектральных свойств уравнения Харпера–Хофштадтера [14], описывающего динамику электрона на решетке в постоянном магнитном поле, а также изучение групп магнитных трансляций и свойств квантовых плоскостей [15, 32].

2. Исследование вопросов классического и квантового хаоса на гиперболических многообразиях: рассмотрение спектральных свойств динамических систем и вывод различных формул следа [33–35], а также построение вероятностных мер для случайных блужданий на модулярных группах [36].

3. Изучение проблем, приводящих к использованию теории квантовых групп в физике: деформации классических объектов типа гармонических осцилляторов [4] и стандартных случайных блужданий [3].

4. Рассмотрение ряда вопросов статистической топологии: построение неабелевых (некоммутативных) топологических инвариантов [5, 23], исследование вероятностного поведения слов на простейших некоммутативных группах, связанных с топологическими задачами [37], изучение статистических свойств анионных систем [38].

5. Исследование классических проблем теории случайных матриц и явления локализации: определение показателей Ляпунова произведений случайных некоммутирующих матриц [39–41], изучение спектральных свойств и вычисление плотности состояний случайных матриц [21, 42].

Конечно, такое разделение проблем на классы достаточно произвольно и характеризует нашу персональную точку зрения. Однако мы полагаем, что перечисленные пункты отражают, по крайней мере частично, растущий интерес в теоретической физике к проблемам некоммутативной геометрии. Следует подчеркнуть, что мы не касаемся чисто математических аспектов некоммутативного анализа и проблемы, обсуждаемые ниже, относятся главным образом к п. 4 и п. 5 приведенного выше списка.

В данном разделе мы продолжаем анализ статистических проблем в теории узлов, но основное внимание уделяем задачам, связанным с исследованием корреляций в марковских цепях, вызванных топологическими взаимодействиями. Методы, разработанные в разделе 2, в принципе позволяют ответить на интересующие нас

вопросы, но мы полагаем, что взгляд на проблему определения энтропии случайного узла с точки зрения предельных свойств случайных блужданий на некоммутативных гиперболических группах покажет непосредственную связь вероятностно-топологических проблем со статистикой марковских цепей в ансамблях случайных матриц [46].

Другая причина, побуждающая нас рассматривать предельные распределения (и условные предельные распределения) марковских цепей на локально некоммутативных группах, заключается в том, что данный круг проблем можно рассматривать как первый шаг в построении гармонического анализа на многосвязных многообразиях (типа пространства Тейхмюллера); см. также раздел 4.

3.1. Броуновский мост на простейших некоммутативных группах и статистика узлов

Как следует из сказанного выше, проблемы, связанные с исследованием предельных распределений случайных блужданий на некоммутативных группах, неоднократно обсуждались в статистической физике и теории вероятностей.

Тем не менее в вероятностно-топологическом контексте проблемы, имеющие отношение к изучению статистических свойств некоммутативных случайных блужданий, за исключением некоторых весьма частных случаев (см., например, [41, 43, 49]), практически не рассматривались. В этих работах была изучена статистика замкнутых случайных путей с фиксированным топологическим состоянием в регулярной решетке топологических препятствий на плоскости и было показано, что данная проблема может быть сведена к изучению предельного поведения марковских цепей на универсальной накрывающей с топологией дерева Кейли. Аналитическое построение неабелевых топологических инвариантов для траекторий на дважды проколотой плоскости и статистика простейших нетривиальных случайных кос B_3 обсуждались в работе [44].

Ниже мы вычисляем условное предельное поведение так называемых броуновских мостов (БМ) на группе кос и изучаем свойства предельного поведения степени полиномов Александра узлов, полученных из случайно генерированных B_3 -кос. Исследуя статистику случайных слов (случайных блужданий) на локально-свободных группах, мы высказываем некоторые соображения о статистике слов на группе B_n . Ряд новых результатов, касающихся статистики марковских цепей на локально-свободных группах и группах кос, содержится в недавних работах [52–54].

3.1.1. Основные определения и статистическая модель.

Группа кос B_n , содержащая n нитей, имеет $n - 1$ генераторов $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{n+1} \sigma_i &= \sigma_{n+1} \sigma_i \sigma_{n+1} \quad (1 \leq n < n-1), \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2), \\ \sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_i = e. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Любое произвольное слово, написанное в терминах букв — генераторов из множества $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$, — дает специфическую косу. Геометрическая интерпретация генераторов косы

показана ниже:

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & \dots & \diagdown & \diagup & \dots & | \\ 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n-1 \end{array} = \sigma_i,$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & \dots & \diagup & \diagdown & \dots & | \\ 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n-1 \end{array} = \sigma_i^{-1}.$$

Длина косы — общее число использованных букв, в то время как минимальная неприводимая длина, или примитивное слово, это наименьшая длина специфической косы, которая остается после применения всех возможных соотношений группы (3.1). Графически коса может быть представлена как набор пересекающихся нитей, идущих сверху вниз после последовательного склеивания генераторов.

Замкнутая коса получается склеиванием "верхних" и "нижних" свободных концов косы на цилиндре.

Любая коса соответствует некоторому узлу или зацеплению. Существует принципиальная возможность использовать представление группы кос для построения топологических инвариантов узлов и зацеплений. Однако соответствие между косами и узлами не взаимно однозначно, и каждый узел или зацепление могут быть представлены бесконечным набором различных кос.

Рассмотрим диаграмму K узла в общем положении на плоскости. Пусть $f[K]$ есть топологический инвариант узла K . Один из путей аналитического построения инварианта связан с использованием представления группы кос и заключается в следующем.

1. Представим узел некоторой косой $b \in B_n$. Определим функцию f такую, что она принимает одни и те же значения для всех кос b , представляющих данный узел K . Необходимые условия сформулированы в следующей теореме Маркова – Бирман [55].

Функция $f_K\{b\}$, определенная на косе $b \in B_n$, является топологическим инвариантом узла или зацепления тогда и только тогда, когда выполняется условие Маркова

$$\begin{aligned} f_K\{b' b''\} &= f_K\{b'' b'\}, \\ f_K\{b' \sigma_n\} &= f_K\{\sigma_n b'\} = f_K\{b'\}, \quad b', b'' \in B_n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где b' и b'' — два последовательных подслова в косе (рис. 7).

2. Инвариант $f_K\{b\}$ может быть построен с помощью линейного функционала $\varphi\{b\}$, определенного на группе кос и называющегося следом Маркова. Этот след обладает свойствами

$$\begin{aligned} \varphi\{b' b''\} &= \varphi\{b'' b'\}, \\ \varphi\{b' \sigma_n\} &= \tau \varphi\{b'\}, \\ \varphi\{b' \sigma_n^{-1}\} &= \bar{\tau} \varphi\{b'\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\tau = \varphi\{\sigma_i\}, \quad \bar{\tau} = \varphi\{\sigma_i^{-1}\}, \quad i \in [1, n-1]. \quad (3.4)$$

Инвариант $f_K\{b\}$ узла K связан с линейным функционалом $\varphi\{b\}$ следующим образом:

$$f_K\{b\} = (\tau \bar{\tau})^{-(n-1)/2} \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau} \right)^{(\#(+)-\#(-))/2} \varphi\{b\}, \quad (3.5)$$

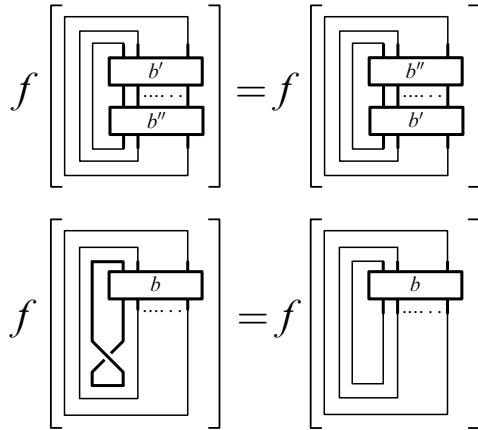


Рис. 7. Геометрическое представление уравнений (3.2).

где $\#(+)$ и $\#(-)$ — соответственно число положительных и отрицательных пересечений в данной косе.

Алгебраические полиномы Александера — первые общеизвестные инварианты такого типа. В начале 80-х В.Ф.Р. Джонс обнаружил новые инварианты узла. Он использовал представление кос, "пропущенное" через соотношение алгебры Гекке, где алгебра Гекке $H_n(t)$ для B_n удовлетворяет как соотношениям группы кос (3.1), так и дополнительному соотношению редукции (см. работы [55, 56])

$$\sigma_i^2 = (1-t)\sigma_i + t. \quad (3.6)$$

Теперь можно определить след $\varphi\{b\} = \varphi(t)\{b\}$ в кольце полиномов одной переменной t . Рассмотрим функционал $\varphi(t)$ на косах $\{b' \sigma_i b''\}$. Уравнение (3.6) позволяет получить рекуррентные соотношения для $\varphi(t)$ и для инварианта $f_K(t)$ (см. детали в работе [58]):

$$\varphi(t)\{b' \sigma_i b''\} = (1-t)\varphi(t)\{b' b''\} + t\varphi(t)\{b' \sigma_i^{-1} b''\}, \quad (3.7)$$

$$f_K^+(t) - t\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)f_K^-(t) = (1-t)\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)f_K^0(t), \quad (3.8)$$

где $f_K^+ \equiv f\{b' \sigma_i b''\}$, $f_K^- \equiv f\{b' \sigma_i^{-1} b''\}$, $f_K^0 \equiv f\{b' b''\}$ и отношение $\bar{\tau}/\tau$ зависит от используемого представления.

3. Тензорное представление генераторов группы кос может быть записано следующим образом:

$$\sigma_i(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{klmn} R_{ln}^{km}(u) I^{(1)} \otimes \dots \otimes I^{(i-1)} \otimes E_{nk}^i \otimes E_{ml}^{i+1} \otimes I^{(i+1)} \otimes \dots \otimes I^{(n)}, \quad (3.9)$$

где $I^{(i)}$ — матрица идентичности, действующая на индекс i ; E_{nk} — матрица с $(E_{nk})_{pq} = \delta_{np}\delta_{kq}$ и R_{ln}^{km} — матрица, удовлетворяющая уравнению Янга–Бакстера

$$\sum_{abc} R_{cr}^{bq}(v) R_{kc}^{ap}(u+v) R_{jb}^{ia}(u) = \sum_{abc} R_{bq}^{ap}(u) R_{cr}^{ia}(u+v) R_{ka}^{jb}(v). \quad (3.10)$$

В рамках этой схемы могут быть рассмотрены оба известных инварианта (Джонса и Александера). В частности, в работах [57, 58] было обнаружено, что решения уравнения (3.10) для групп $SU_q(2)$ и $GL(1,1)$ связаны

соответственно с инвариантами Джонса и Александера. А именно:

(а) $\bar{\tau}/\tau = t^2$ для инвариантов Джонса, $f_K(t) \equiv V(t)$; уравнение (3.8) есть

$$t^{-1}V^+(t) - tV^-(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})V^0(t); \quad (3.11)$$

(б) $\bar{\tau}/\tau = t^{-1}$ для инвариантов Александера, $f_K(t) \equiv \nabla(t)$; уравнение (3.8) есть³

$$\nabla^+(t) - \nabla^-(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})\nabla^0(t). \quad (3.12)$$

Чтобы закончить этот краткий обзор различных способов построения полиномиальных инвариантов, связанных с представлениями группы кос, следует упомянуть, что инварианты Александера допускают также другое весьма полезное описание [59]. Запишем генераторы группы кос в так называемом представлении Магнуса

$$\sigma_j \equiv \hat{\sigma}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \boxed{A} & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-я строка}, \quad (3.13)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полином Александера $\nabla(t)\{K\}$ узла, представленного замкнутой косой $W\{K\} = \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j}$ длины N , определяется следующим образом:

$$(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) \nabla(t)\{K\} = \det \left[\prod_{j=1}^N \hat{\sigma}_{x_j} - e \right], \quad (3.14)$$

где индекс j пробегает значения вдоль косы, т.е. нумерует число используемых генераторов, в то время как индекс $\alpha = \{1, \dots, n-1, n, \dots, 2n-2\}$ отмечает набор использованных генераторов, упорядоченных следующим образом: $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$. В наших дальнейших исследованиях мы будем неоднократно обращаться к этому представлению.

Мы интересуемся предельным поведением инвариантов узлов и зацеплений, когда длина косы стремится к бесконечности, т.е. когда коса растет. В этом случае мы можем строго определить понятие сложности узла, являющегося более простой (однако более грубой) характеристикой, чем соответствующий алгебраический инвариант.

Назовем сложностью узла η степень некоторого алгебраического инварианта, $f_K(t)$ (Александера, Джонса, HOMFLY; см. [26])

$$\eta = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\ln f_K(t)}{\ln t}. \quad (3.15)$$

³ Стандартные рекурсивные соотношения для полиномов Александера можно получить из (3.12) заменой $t^{1/2}$ на $-t^{1/2}$.

З а м е ч а н и е. По определению сложность узла принимает одно и то же значение для топологически различных узлов, отвечающих различным полиномиальным инвариантам одной степени, тем не менее сложность узла имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с соответствующими алгебраическими инвариантами:

(а) одно и то же значение η характеризует достаточно узкий класс топологически близких узлов, что позволяет ввести сглаженную функцию распределения для величины η ;

(б) сложность узла η корректно описывает предельные случаи; $\eta = 0$ соответствует слабо заузленным траекториям, в то время как $\eta \sim N$ отвечает случаю сильно заузленных траекторий;

(в) сложность узла сохраняет все неабелевы свойства полиномиальных инвариантов и имеет прозрачную физическую интерпретацию, соответствуя длине примитивного слова в матричном представлении образующих группы кос;

(г) полиномиальный инвариант может дать исчерпывающую информацию о топологии узла, однако, имея дело со статистикой случайных узлов, мы нуждаемся в более грубой характеристике, позволяющей различать топологически далекие узлы. (Подобная проблема возникает в статистической механике при переходе от микроканонического распределения к распределению Гиббса: мы теряем некоторую информацию относительно специфических деталей системы, но приобретаем гладкость функции распределения, в результате чего способны применять стандартные термодинамические методы к рассматриваемой системе.)

Главная цель данного раздела заключается в оценке функции распределения величины η для узлов, полученных случайно генерированными замкнутыми косами B_n длины N . Подчеркнем, что мы по существу упрощаем общую проблему определения энтропии узла, а именно мы накладываем дополнительное требование, чтобы узел был обязательно представлен косой из группы B_n .

Мы начинаем исследование вероятностных свойств алгебраических инвариантов узла, анализируя статистику случайных петель ("броуновских мостов") на простейших некоммутативных группах. В наиболее общем виде данная проблема может быть сформулирована следующим образом. Пусть есть дискретная группа $\mathcal{G}_n$ с конечным числом образующих $\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ и пусть v — однородное распределение на множестве $\{g_1, \dots, g_{n-1}, g_1^{-1}, \dots, g_{n-1}^{-1}\}$. Для удобства положим, что $h_j = g_i$ для $j = i$ и $h_j = g_i^{-1}$ для $j = i + n - 1$; $v(h_j) = 1/(2n - 2)$ для любого j . Рассмотрим (правостороннее) случайное блуждание (случайное слово) на $\mathcal{G}_n$ с переходной вероятностью v : $\{\xi_n\}$, $\xi_0 = e \in \mathcal{G}_n$ и $\text{Prob}(\xi_j = u | \xi_{j-1} = v) = v(v^{-1}u) = 1/(2n - 2)$. Это означает, что с вероятностью $1/(2n - 2)$ мы добавляем элемент h_{x_N} к слову $h_{N-1} = h_{x_1}h_{x_2} \dots h_{x_{N-1}}$ справа⁴.

Случайное слово W , составленное из N букв, выбранных независимо с равномерной плотностью вероятности $v = 1/(2n - 2)$ из множества $\{g_1, \dots, g_{n-1}, g_1^{-1}, \dots, g_{n-1}^{-1}\}$, называется *броуновским мостом (БМ) длины N на группе $\mathcal{G}_n$* , если кратчайшее (п р и м и т и в н о е) слово, соответствующее слову W , тождественно единичному (имеет нулевую длину).

В данном разделе рассмотрены следующие конкретные вопросы.

1. Какова вероятность $P(N)$ образования броуновского моста на группе $\mathcal{G}_n$?

2. Какова условная вероятность $P(k, m | N)$ того, что подслово W' , состоящее из m первых букв N -буквенного слова W , имеет примитивную длину k , если слово W как целое является броуновским мостом на группе $\mathcal{G}_n$?

В работе [41] показано, что для свободной группы соответствующая проблема может быть сведена к исследованию случайных блужданий на дереве Кейли с координационным числом 4. В случае кос более сложная структура группы не позволяет применять непосредственно такие же простые геометрические соображения. Тем не менее проблема предельного поведения случайных блужданий на B_n может быть сведена к изучению статистики марковских цепей на некотором графе $C(\Gamma)$. В случае группы B_3 мы можем явно построить этот граф, в то время как для группы B_n ($n \geq 4$) мы можем лишь дать оценку сверху для предельного распределения случайных блужданий, рассматривая статистику марковских цепей на так называемых локально свободных группах.

3.1.2. Случайный процесс на $PSL(2, \mathbb{Z})$, B_3 и распределение степеней инварианта Александера. Начнем с вычисления функции распределения для условного случайного процесса на простейшей нетривиальной группе кос B_3 . Генераторы группы B_3 имеют вид матриц 2×2 в представлении Магнуса [59]:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & -t \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где t — спектральный параметр. Хорошо известно, что для $t = -1$ матрицы σ_1 и σ_2 являются образующими группы $PSL(2, \mathbb{Z})$, а группа B_3 есть центральное расширение $PSL(2, \mathbb{Z})$ с центром

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^{4\lambda} &= (\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2)^{4\lambda} = (\sigma_1 \sigma_2)^{6\lambda} = \\ &= (\sigma_2 \sigma_1)^{6\lambda} = \begin{pmatrix} t^{6\lambda} & 0 \\ 0 & t^{6\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ограничиваясь для начала рассмотрением группы $PSL(2, \mathbb{Z})$, определим $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1$ и $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2$ (при $t = -1$). Каноническое представление $PSL(2, \mathbb{Z})$ задается унитарными матрицами

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Групповое соотношение $\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2$ в представлении $\{S, T\}$ принимает вид

$$S^2 T S^{-2} T^{-1} = 1. \quad (3.19)$$

Кроме того, мы имеем

$$S^4 = (ST)^3 = 1. \quad (3.20)$$

Связь $\{S, T\}$ и $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ такова:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= T & (T = \tilde{\sigma}_1), \\ \tilde{\sigma}_2 &= T^{-1} S T^{-1} & (S = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1). \end{aligned} \quad (3.21)$$

⁴ Аналогично можно строить и левосторонние марковские цепи.

Модулярная группа $PSL(2, \mathbb{Z})$ является дискретной подгруппой группы $PSL(2, \mathbb{R})$. Фундаментальная область $PSL(2, \mathbb{Z})$ имеет форму кругового треугольника ABC с углами $\{0, \pi/3, \pi/3\}$, расположенного в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 8). Согласно определению фундаментальной области по крайней мере один элемент каждой орбиты $PSL(2, \mathbb{Z})$ находится внутри треугольника ABC , и два элемента лежат на одной и той же орбите тогда и только тогда, когда они принадлежат границе фундаментального треугольника ABC . Группа $PSL(2, \mathbb{Z})$ полностью определена основными подстановками при действии генераторов S и T :

$$\begin{aligned} S: \zeta &\rightarrow -\frac{1}{\zeta}, \\ T: \zeta &\rightarrow \zeta + 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

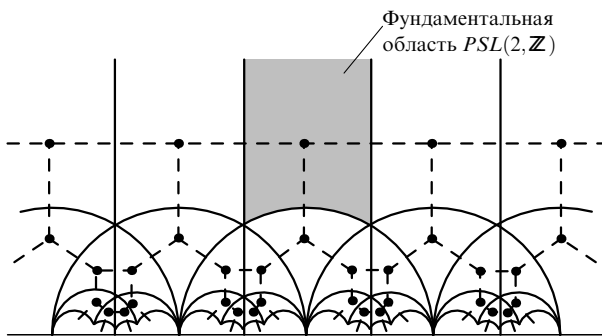


Рис. 8. Риманова поверхность для модулярной группы $PSL(2, \mathbb{Z})$. Граф $C(\Gamma)$, представляющий топологическую структуру $PSL(2, \mathbb{Z})$, показан штриховой линией.

Выберем произвольный элемент ζ_0 из фундаментальной области и построим граф $C(\Gamma)$, который соединяет соседние образы элемента ζ_0 , полученные при последовательном действии генераторов из множества $\{S, T, S^{-1}, T^{-1}\}$ на элемент ζ_0 . Соответствующий граф показан на рис. 8 штриховой линией, а его топологическая структура изображена на рис. 9. Можно заметить, что хотя граф $C(\Gamma)$ не соответствует свободной группе и имеет локальные циклы, его скелет $C(\gamma)$ имеет структуру дерева Кейли с числом ветвей, редуцированным по сравнению со свободной группой $C(\Gamma_2)$.

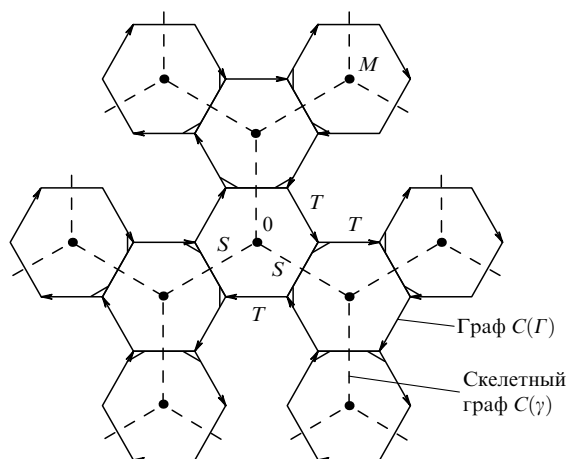


Рис. 9. Граф $C(\Gamma)$ и его скелет — граф $C(\gamma)$.

Вернемся к проблеме вычисления предельной функции распределения случайных траекторий на графе $C(\Gamma)$. Определим процесс блуждания следующим образом.

1. Выберем начальную точку случайного блуждания (корень) на графе $C(\Gamma)$. Рассмотрим дискретные случайные переходы в соседние вершины графа с вероятностями перехода v , порожденными однородным распределением на множестве образующих $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_1^{-1}, \tilde{\sigma}_2^{-1}\}$. Эти вероятности таковы (см. (3.21)):

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\xi_n = T\zeta_0 \mid \xi_{n-1} = \zeta_0) &= \frac{1}{4}, \\ \text{Prob}(\xi_n = (T^{-1}S^{-1})\zeta_0 \mid \xi_{n-1} = \zeta_0) &= \frac{1}{4}, \\ \text{Prob}(\xi_n = T^{-1}\zeta_0 \mid \xi_{n-1} = \zeta_0) &= \frac{1}{4}, \\ \text{Prob}(\xi_n = (TS^{-1}T)\zeta_0 \mid \xi_{n-1} = \zeta_0) &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При этом необходимо принять во внимание следующие факты: элементы $S\zeta_0$ и $S^{-1}\zeta_0$ совпадают, как это следует из уравнения (3.22); в терминах алфавита $\{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_2^{-1}\}$ процесс является марковским; суммарная локальная вероятность перехода за один шаг является сохраняющейся величиной.

2. Определим кратчайшее расстояние k по графу между корнем и конечной точкой случайной траектории. По построению это расстояние совпадает с длиной $|W_{\{S, T\}}|$ минимального неприводимого слова $W_{\{S, T\}}$, записанного в алфавите $\{S, T, S^{-1}, T^{-1}\}$. Связь расстояния k с длиной $|W_{\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}}|$ неприводимого слова $W_{\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}}$ в алфавите $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_1^{-1}, \tilde{\sigma}_2^{-1}\}$ такова: $|W_{\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}}| = 0$ тогда и только тогда, когда $k = 0$; для $k \geq 1$ длина $|W_{\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}}|$ имеет следующую асимптотику: $|W_{\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}}| = k + o(k)$.

Определим координаты вершин графа следующим способом (см. рис. 9).

(а) Обозначим стрелками ребра графа Γ , соответствующие образующим T . Шаг по направлению (против направления) стрелки означает применение генератора T (T^{-1}).

(б) Будем характеризовать каждую элементарную ячейку графа Γ расстоянием μ вдоль скелета графа γ от корня.

(в) Введем переменную $\alpha = \{1, 2\}$, нумерующую вершины только внутри каждой ячейки. Мы предполагаем, что блуждающая точка осталась в ячейке M , расположенной на расстоянии μ тогда и только тогда, когда она находится в одной из двух входящих вершин (см. рис. 9). Такая запись позволяет однозначно кодировать весь граф $C(\Gamma)$.

Определим вероятность $U_\alpha(\mu, N)$ того, что случайный путь длины N по графу $C(\Gamma)$, начинающийся из корня, заканчивается в вершине α ячейки, расположенной на расстоянии в μ шагов вдоль скелета. Подчеркнем, что $U_\alpha(\mu, N)$ — вероятность попасть в любую из $N_\gamma(\mu) = 3 \times 2^{\mu-1}$ ячеек, расположенных на расстоянии μ .

Нетрудно написать замкнутую систему рекуррентных соотношений для функций $U_\alpha(\mu, N)$, но мы интересуемся несколько более грубыми характеристиками случайного блуждания. А именно мы вычисляем интегральное распределение вероятности того, что траектория случайного блуждания, выйдя из произвольной вершины корневой ячейки O , закончится в произвольной вершине ячейки M , расположенной на расстоянии в μ шагов по скелетному графу. Эта вероятность есть

$$U(\mu, N) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\{1,2\}} U_{\alpha}(\mu, N).$$

Связь между расстояниями k по графу Γ и μ по скелету γ дается соотношением $k = \mu + o(\mu)$ при $\mu \gg 1$, что непосредственно следует из построения графов $C(\Gamma)$ и $C(\gamma)$.

Предположим, что точка, блуждающая по графу, находится в вершине α ячейки M , расположенной на расстоянии $\mu > 1$ от корня (вдоль графа $C(\gamma)$). Изменение величины μ после одного произвольного шага (применения генератора из множества $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_1^{-1}, \tilde{\sigma}_2^{-1}\}$) суммировано в следующей таблице:

$\alpha = 1$		$\alpha = 2$	
$\tilde{\sigma}_1 = T$	$\mu \rightarrow \mu + 1$	$\tilde{\sigma}_1 = T$	$\mu \rightarrow \mu - 1$
$\tilde{\sigma}_2 = T^{-1}ST^{-1}$	$\mu \rightarrow \mu$	$\tilde{\sigma}_2 = T^{-1}ST^{-1}$	$\mu \rightarrow \mu + 1$
$\tilde{\sigma}_1^{-1} = T^{-1}$	$\mu \rightarrow \mu - 1$	$\tilde{\sigma}_1^{-1} = T^{-1}$	$\mu \rightarrow \mu + 1$
$\tilde{\sigma}_2^{-1} = TS^{-1}T$	$\mu \rightarrow \mu + 1$	$\tilde{\sigma}_2^{-1} = TS^{-1}T$	$\mu \rightarrow \mu$

Ясно, что для любого значения α два шага увеличивают длину скелета μ на единицу длины (ребро графа), один шаг уменьшает μ и один шаг оставляет μ без изменения.

Введем эффективные вероятности: p_1 — перейти за один шаг в некоторую определенную ячейку среди трех соседних ячеек графа $C(\Gamma)$ и p_2 — остаться в данной ячейке. Из-за симметрии графа закон сохранения должен быть написан в виде $3p_1 + p_2 = 1$; по определению мы имеем $p_1 = v = 1/4$. Таким образом, мы можем выписать систему рекуррентных соотношений для интегральной вероятности $U(\mu, N)$:

$$U(\mu, N+1) = \frac{1}{4}U(\mu+1, N) + \frac{1}{4}U(\mu, N) + \frac{1}{2}U(\mu-1, N) \quad (\mu \geq 2),$$

$$U(\mu, N+1) = \frac{1}{4}U(\mu+1, N) + \frac{1}{2}U(\mu, N) \quad (\mu = 1),$$

$$U(\mu, N=0) = \delta_{\mu,1}. \quad (3.24)$$

Решение системы уравнений (3.24) дает предельное распределение для случайного блуждания на группе $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Распределение вероятности $U(k, N)$ того, что случайное N -буквенное слово $W_{\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}}$ с однородным распределением $v = 1/4$ на множестве образующих $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_1^{-1}, \tilde{\sigma}_2^{-1}\}$ может быть сокращено до примитивного слова длины $k = \mu$, имеет предельное поведение

$$U(k, N) \simeq \frac{h}{\sqrt{\pi}(4-h)} \left(\frac{h}{4(h-2)} \right)^N \times \begin{cases} \frac{1}{N^{3/2}}, & k = 0, \\ \frac{k}{N^{3/2}} 2^{k/2} \exp\left(-\frac{k^2 h}{4N}\right), & 1 \leq k, \end{cases} \quad (3.25)$$

где $h = 2 + \sqrt{2}/2$.

Следствие. Распределение плотности вероятности $U(k, m|N)$ того, что в случайно сгенерированном N -буквенном броуновском мосте, написанном в алфавите $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_1^{-1}, \tilde{\sigma}_2^{-1}\}$, подслово, состоящее из первых m букв, имеет примитивную длину k , дается гауссовым распре-

лением

$$U(k, m|N) = \frac{h}{\sqrt{\pi}(4-h)} \frac{k^2}{[m(N-m)]^{3/2}} \times \exp\left\{\frac{k^2 h}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{N-m}\right)\right\}. \quad (3.26)$$

Действительно, условное распределение плотности вероятности $U(\mu, m|N)$ того, что случайное блуждание на графе $C(\gamma)$, начавшееся и закончившееся в корневой ячейке на N -м шаге, посетит после m ($m/N = \text{const}$) первых шагов некоторую вершину графа, расположенную на расстоянии μ , определяется следующим образом:

$$U(\mu, m|N) = \frac{U(\mu, m)U(\mu, N-m)}{U(\mu=0, N)\mathcal{N}_{\gamma}(\mu)}, \quad (3.27)$$

где $\mathcal{N}_{\gamma} = 3 \times 2^{\mu-1}$ и $U(\mu, N)$ дается соотношением (3.25). Подставляя (3.25) в (3.27), мы приходим к уравнению (3.26).

Рассмотренная выше задача вычисления предельного распределения для броуновских мостов на группе $PSL(2, \mathbb{Z})$ непосредственно связана с проблемой определения условного предельного распределения старшей степени полиномов Александра узлов, образованных случайными замкнутыми косами, принадлежащими группе B_3 .

Замыкание произвольной косы $b \in B_3$ длины N дает узел (зацепление) K . Разделим косу b на две части (субкосы) b' и b'' с длинами m и $N-m$ соответственно и сделаем фантомное замыкание субкос b' и b'' , как показано на рис. 10. Фантомно замкнутые субкосы b' и b'' соответствуют множеству фантомно замкнутых частей (субузлов) узла K . Вопрос заключается в определении условной вероятности найти эти субузлы в состоянии, характеризуемом сложностью η , в то время как узел K в целом характеризуется сложностью $\eta = 0$ (т.е. топологическое состояние K близко к тривиальному).

Чтобы пренебречь несущественным коммутативным фактором, относящимся к норме матриц σ_1 и σ_2 , введем нормированные генераторы группы B_3

$$\|\sigma_j^{\pm 1}\| = (\det \sigma_j^{\pm 1})^{-1} \sigma_j^{\pm 1}.$$

Теперь мы можем переписать степень инварианта Александра (уравнение (3.14)) в виде

$$\eta = [\#(+)-\#(-)] + \bar{\eta}, \quad (3.28)$$

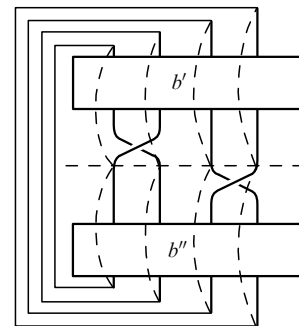


Рис. 10. Построение броуновского моста для узлов, представленных B_3 -косами.

где $\#(+)$ и $\#(-)$ — числа генераторов σ_{x_j} или $\sigma_{x_j}^{-1}$ в данной косе и $\bar{\eta}$ — степень нормированного матричного произведения $\prod_{j=1}^N \|\sigma_{x_j}\|$. Условие броуновского моста означает, что $\eta = 0$ (т.е. $\#(+)+\#(-)=0$ и $\bar{\eta}=0$).

Пусть

$$\|\sigma_1\| = T(t), \quad \|\sigma_2\| = T^{-1}(t)S(t)T^{-1}(t), \quad (3.29)$$

где $T(t)$ и $S(t)$ — генераторы t -деформированной группы $PSL_t(2, \mathbb{Z})$

$$T(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{-t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Группа $PSL_t(2, \mathbb{Z})$ сохраняет без изменений соотношение группы $PSL(2, \mathbb{Z})$, т.е. $[T(t)S(t)]^3 = S^4(t) = T(t)S^2(t)T^{-1}(t)S^{-2}(t) = 1$ (ср. с (3.19)). Следовательно, если мы строим граф $C(\Gamma_t)$ для группы $PSL_t(2, \mathbb{Z})$, соединяя соседние образы некоторого произвольно взятого элемента из фундаментальной области, мы можем заключить, что графы $C(\Gamma_t)$ и $C(\Gamma)$ (см. рис. 9) топологически эквивалентны. Это является прямым следствием того факта, что группа B_3 есть центральное расширение группы $PSL(2, \mathbb{Z})$. Следует отметить, что метрические свойства графов $C(\Gamma_t)$ и $C(\Gamma)$ отличаются из-за различных вложений групп $PSL_t(2, \mathbb{Z})$ и $PSL(2, \mathbb{Z})$ в комплексную плоскость.

Таким образом, матричное произведение $\prod_{j=1}^N \|\sigma_{x_j}\|$ для однородного распределения генераторов находится во взаимно однозначном соответствии со случайным блужданием из N шагов по графу $C(\Gamma)$. Степень произведения $\prod_{j=1}^N \|\sigma_{x_j}\|$ совпадает с длиной геодезической по графу $C(\gamma)$, и мы приходим к выводу, что предельное распределение случайного блуждания на группе B_3 в терминах нормированных генераторов (3.29) дается выражением (3.25), где k — степень произведения $\prod_{x=1}^N \|\sigma_{x_j}\|$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Рассмотрим ансамбль узлов, полученных замыканием случайной B_3 -косы длины N с однородным распределением на множестве образующих. Условное распределение вероятности $U(\bar{\eta}, t|N)$ для нормированной сложности $\bar{\eta}$ инварианта Александра (см. (3.28)) имеет гауссово поведение и дается уравнением (3.26) с $k = \bar{\eta}$.

3.2. Случайные блуждания на локально свободных группах

В данном разделе мы задаемся целью получить асимптотику условных предельных распределений броуновских мостов на группах кос B_n . Для случая $n > 3$ эта проблема до сих пор окончательно не разрешена. Тем не менее мы можем оценить предельное распределение вероятности БМ на B_n , рассматривая вероятностные свойства случайных блужданий на так называемых локальных группах [44, 48, 52–54].

Группа $\mathcal{LF}_{n+1}(d)$ называется *локально свободной*, если генераторы $\{f_1, \dots, f_n\}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

(а) каждая пара (f_j, f_k) генерирует свободную подгруппу группы $\mathcal{F}_{n+1}$, если $|j - k| < d$;

(б) $f_j f_k = f_k f_j$ для $|j - k| \geq d$.

В дальнейшем мы ограничиваемся случаем $d = 2$, где $\mathcal{LF}_{n+1}(2) \equiv \mathcal{LF}_{n+1}$.

Приведем сразу выражения для некоторых предельных распределений.

Предельное распределение вероятности случайного блуждания из N шагов ($N \gg 1$) на группе $\mathcal{F}_{n+1}$ для неприводимой (примитивной) длины μ есть

$$P(\mu, N) \simeq \frac{\text{const}}{N^{3/2}} \exp\left(-\frac{N}{6}\right) \mu \sinh \mu \exp\left(-\frac{3\mu^2}{2N}\right) \quad (n = 3),$$

$$P(\mu, N) \simeq \frac{1}{2\sqrt{14\pi N}} \exp\left\{-\frac{8}{7N}\left(\mu - \frac{3}{4}N\right)^2\right\} \quad (n \gg 1). \quad (3.31)$$

Ниже предложены независимые подходы, применимые в двух различных случаях: (1) для $n = 3$ (группа $\mathcal{LF}_4$); (2) для $n \gg 1$.

(1) Весьма полезным представляется следующий геометрический образ. Установим взаимно однозначное соответствие между случайным путем в некотором n -мерном пространстве Гильберта $\mathcal{LH}^n(x_1, \dots, x_n)$ и случайной траекторией на группе $\mathcal{LF}_{n+1}$, записанной в терминах генераторов $\{f_1, \dots, f_n^{-1}\}$. Для большей определенности предположим, что когда генератор, скажем, f_j (или f_j^{-1}), добавлен к уже существующему слову в группе $\mathcal{LF}_{n+1}$, соответствующая траектория в пространстве $\mathcal{LH}^n(x_1, \dots, x_n)$ увеличивается на один элементарный шаг по оси $[0, x_j]$ (для f_j^{-1} — против оси).

Теперь соотношения (а), (б) определения локально-свободной группы можно реформулировать в терминах метрических свойств пространства $\mathcal{LF}_n$. Фактически соотношение (б) указывает, что последовательные шаги по осям $[0, x_j]$ и $[0, x_k]$ ($|j - k| \geq 2$) коммутируют, следовательно, сечение (x_j, x_k) пространства $\mathcal{LH}_n$ плоско и имеет евклидову метрику $dx_j^2 + dx_k^2$. Ситуация со случайными путями в сечениях $(x_j, x_{j \pm 1})$ гильбертова пространства $\mathcal{LH}_n$ представляется совершенно иной. Шаги случайного блуждания удовлетворяют соотношениям (а) локально свободной группы, и блуждание сводится к блужданиям на дереве Кейли. Хорошо известно, что дерево Кейли может быть изометрически вложено (однородно и без наложений) в 3-псевдосферу, которая дает представление неевклидовой плоскости постоянной отрицательной кривизны. Таким образом, сечения $(x_j, x_{j \pm 1})$ имеют метрику плоскости Лобачевского, которая может быть записана в форме $(dx_j^2 + dx_{j \pm 1}^2)/x_j^2$.

Для группы $\mathcal{LF}_4$ эти аргументы приводят к метрике соответствующего пространства $\mathcal{LH}^{(3)}$

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_2^2}. \quad (3.32)$$

Действительно, сечение (x_1, x_3) плоско, тогда как сечения (x_1, x_2) и (x_2, x_3) имеют метрику плоскости Лобачевского. Неевклидово (гиперболическое) расстояние между двумя точками, M' и M'' , в пространстве $\mathcal{H}^3$ определено следующим образом:

$$\cosh \mu(M'M'') = 1 + \frac{1}{x_2(M')x_2(M'')} \times \sum_{i=1}^3 [x_i(M') - x_i(M'')]^2, \quad (3.33)$$

где $\{x_1, x_2, x_3\}$ — евклидовы координаты в трехмерном полупространстве $x_2 > 0$ и μ — геодезическая на 4-псевдосфере (пространстве Лобачевского).

Некоторые хорошо известные результаты относительно предельного поведения случайного блуждания в пространствах постоянной отрицательной кривизны рассмотрены в следующем разделе, где приведены решения уравнений диффузионного типа в плоскости и пространстве Лобачевского (см. уравнения (3.49) и (3.51)). Таким образом, мы можем прийти к выводу, что функция распределения для случайного блуждания в пространстве Лобачевского $\mathcal{P}_s(\mu, N)$ (3.51)–(3.54) дает также вероятность того, что N -буквенное случайное слово (записанное в терминах однородного распределения на множестве генераторов из группы $\mathcal{F}_4$) будет иметь примитивный путь длины μ (см. уравнение (3.31)).

(2) Для группы $\mathcal{LF}_{n+1}$ ($n \geq 1$) нам не удалось найти аналог выражения (3.32), и предельное поведение соответствующей функции распределения можно определить, точно вычисляя объем максимальной некоммутиативной подгруппы $\mathcal{LF}_{n+1}$.

Пусть $V_n(\mu)$ — число всех неэквивалентных примитивных слов длины μ в группе $\mathcal{LF}_{n+1}$. Оказывается, что при $\mu \geq 1$ $V_n(\mu)$ имеет следующую асимптотику:

$$V_n(\mu) = \text{const} \left[1 + 2 \left(3 - \frac{4\pi^2}{n^2} \right) \right]^\mu \simeq 7^\mu \quad (n \geq 1). \quad (3.34)$$

Для того чтобы получить выражение (3.34), мы можем записать каждое примитивное слово W_p длины μ в группе $\mathcal{LF}_{n+1}$ в так называемом нормальном порядке [51], подобном символической динамике, часто используемой при рассмотрении динамических систем

$$W_p = (f_{x_1})^{m_1} (f_{x_2})^{m_2} \dots (f_{x_s})^{m_s}, \quad (3.35)$$

где $\sum_{i=1}^s |m_i| = \mu$ ($m_i \neq 0 \forall i$; $1 \leq s \leq \mu$) и последовательность генераторов f_{x_i} в (3.35) удовлетворяет для всех f_{x_i} (соседние f_{x_i} различны) следующим локальным правилам:

- (i) если $f_{x_i} = f_1$, то $f_{x_{i+1}} \in \{f_2, f_3, \dots, f_{n-1}\}$;
- (ii) если $f_{x_i} = f_k$ ($1 < k \leq n-1$), то $f_{x_{i+1}} \in \{f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_{n-1}\}$;
- (iii) если $f_{x_i} = f_n$, то $f_{x_{i+1}} = f_{n-1}$.

Эти локальные правила позволяют однозначно перечислить все различающиеся примитивные слова. Если последовательность генераторов в примитивном слове W_p не удовлетворяет правилам (i)–(iii), мы коммутируем генераторы в слове W_p до восстановления нормального порядка. Таким образом, нормальное представление обеспечивает однозначное кодирование всех неэквивалентных примитивных слов в группе $\mathcal{LF}_{n+1}$.

Число различных примитивных слов $V_n(\mu)$ данной длины μ определяется формулой

$$V_n(\mu) = \sum_{s=1}^{\mu} R(s) \sum'_{\{m_1, \dots, m_s\}} \Delta \left[\sum_{i=1}^s |m_i| - \mu \right], \quad (3.36)$$

где $R(s)$ — число всех различных последовательностей из s произвольных генераторов из множества $\{f_1, \dots, f_n\}$, удовлетворяющих локальным правилам (i)–(iii); вторая сумма дает число всех возможных представлений примитивного пути длины μ для заданной последовательности генераторов (штрих означает, что суммирование идет по всем $m_i \neq 0$ и $1 \leq i \leq s$; Δ — функция Кронекера).

Следует отметить, что локальные правила (i)–(iii) определяют обобщенную цепь Маркова с состояниями, задаваемыми матрицей инцидентности $\hat{T}_n$ размера $n \times n$, где ряды и столбцы соответствуют генераторам $f_1, \dots, f_n$:

$$\hat{T}_n(d) = \begin{array}{c|cccccc} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ \hline f_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ f_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ f_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ f_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ f_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \quad (3.37)$$

В таблице (3.37) показан случай с $d = 2$.

Число всех различных нормально упорядоченных последовательностей слов длины s с разрешенными коммутационными соотношениями дается функцией распределения

$$R_n(s, d) = \mathbf{v}_{\text{in}} [\hat{T}_n(d)]^s \mathbf{v}_{\text{out}}, \quad (3.38)$$

где

$$\mathbf{v}_{\text{in}} = (\overbrace{1 \dots 1}^n), \quad \mathbf{v}_{\text{out}} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right)_n. \quad (3.39)$$

Предполагая, что главный вклад в выражение (3.36) определяется значениями $s \geq 1$, мы заменяем $R_n(s)$ асимптотическим выражением

$$R_n(s) \Big|_{s \geq 1} = (\lambda_n^{\max})^s, \quad \lambda_n^{\max} = 3 - \frac{4\pi^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (3.40)$$

где $\lambda_n^{\max}$ — старшее собственное значение матрицы $\hat{T}_n$ при $n \geq 1$.

Суммирование в (3.36) не зависит от $R(s)$ и дает

$$\sum'_{\{m_1, \dots, m_s\}} \Delta \left[\sum_{i=1}^s |m_i| - \mu \right] = 2^s \frac{(\mu-1)!}{(s-1)!(\mu-s)!}. \quad (3.41)$$

Собирая все члены формулы (3.36) и оценивая сумму по s , мы приходим к выражению (3.34). Значение $V_n(\mu, d)$ растет экспоненциально быстро с μ , и скорость этого роста определяется отношением

$$z_{\text{eff}} - 1 = \frac{V_n(\mu+1)}{V_n(\mu)} \Big|_{\mu \geq 1} \simeq 7 - \frac{8\pi^2}{n^2}, \quad (3.42)$$

где z_{eff} — эффективное координационное число дерева, ассоциированного с графом локально свободной группы.

Таким образом, случайное блуждание на группе $\mathcal{LF}_{n+1}$ может рассматриваться следующим образом. Возьмем свободную группу Γ_n с генераторами $\{f_1, \dots, f_n\}$, где все f_i ($1 \leq i \leq n$) не коммутируют. Группа Γ_n имеет структуру дерева $C(\Gamma_n)$ с $2n$ ветвями, где число различных слов длины μ равно

$$\tilde{V}_n(\mu) = 2n(2n-1)^{\mu-1}. \quad (3.43)$$

Граф $C(\mathcal{LF}_{n+1})$, соответствующий группе $\mathcal{LF}_{n+1}$, может быть построен из графа $C(\Gamma_n)$ в соответствии со следую-

щей рекурсивной процедурой: (а) возьмем корневую вершину графа $C(\Gamma_n)$ и рассмотрим все вершины на расстоянии $\mu = 2$; отождествим те вершины, которые соответствуют эквивалентным словам в группе $\mathcal{LF}_{n+1}$; (б) повторим эту процедуру, рассматривая все вершины на расстоянии $\mu = (1, 2, \dots)$ и склеивая (т.е. отождествляя) вершины на расстоянии $\mu + 2$ согласно определению локально свободной группы. Посредством описанной процедуры мы строим граф, имеющий в среднем $z_{\text{eff}} - 1$ различных ветвей, ведущих на следующую координатную сферу. Таким образом, этот граф совпадает (в среднем) с деревом с $z_{\text{eff}} \simeq 8$ ветвями.

Несмотря на то, что локальная структура графа $C(\mathcal{LF}_{n+1})$ очень сложна, уравнение (3.42) позволяет найти асимптотику случайного блуждания на графе $C(\mathcal{LF}_{n+1})$. Зная z_{eff} , мы можем написать рекуррентное уравнение для вероятности $\mathcal{P}(\mu, N)$ найти случайное блуждание на расстоянии μ от корня графа после N случайных шагов по графу $C(\mathcal{LF}_{n+1})$:

$$\mathcal{P}(\mu, N+1) = \left(1 - \frac{1}{z_{\text{eff}}}\right) \mathcal{P}(\mu-1, N) + \frac{1}{z_{\text{eff}}} \mathcal{P}(\mu+1, N) \quad (\mu \geq 2). \quad (3.44)$$

Рекуррентное соотношение (3.44) совпадает с уравнением, описывающим случайный процесс на полупрямой с дрейфом от начала. Принимая во внимание эту аналогию, мы можем дополнить (3.44) граничными и начальными условиями [52]. Точный вид граничных условий не влияет на асимптотическое поведение функции распределения (3.44) вблизи максимума, и решение имеет вид

$$\mathcal{P}(\mu, N) \simeq \frac{1}{2\sqrt{2\pi(z_{\text{eff}}-1)N}} \times \exp \left\{ -\frac{z_{\text{eff}}^2}{8(z_{\text{eff}}-1)N} \left(\mu - \frac{z_{\text{eff}}-2}{z_{\text{eff}}} N \right)^2 \right\}.$$

Таким образом, мы получаем искомую функцию распределения (3.31) примитивной длины слова для случайного блуждания на группе $\mathcal{LF}_{n+1}$.

Уравнение (3.31) дает оценку снизу для предельного распределения примитивных слов на группе B_n при $n \gg 1$.

Мы полагаем, что дальнейшее исследование случайного блуждания на группах $\mathcal{LF}_{n+1}(d)$ для различных значений d очень перспективно и может дать импульс для рассмотрения статистических свойств случайных блужданий на частично коммутативных группах. Кроме того, обсуждаемый круг вопросов непосредственно связан со спектральными проблемами, возникающими в теории случайных матриц.

3.3. Броуновские мосты на плоскости Лобачевского и произведениях некоммутативных случайных матриц

Рассмотрение задач о статистике слов в локально некоммутативных группах логически привело нас к проблеме изучения статистических свойств марковских цепей на графах, имеющих структуру, сходную с деревом Кейли, что в свою очередь послужило стимулом к исследованию случайных блужданий на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. (Мы уже отмечали выше, что графы типа бесконечного дерева Кейли изометрически вкладываются именно в поверхности постоянной отрицательной кривизны.)

Функция распределения $P(\mathbf{r}, t)$ для свободного случайного блуждания в D -мерном евклидовом пространстве удовлетворяет стандартному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D} \Delta P(\mathbf{r}, t)$$

с коэффициентом диффузии $\mathcal{D} = 1/(2D)$ и соответствующими начальным условием и нормировкой

$$P(\mathbf{r}, t=0) = \delta(\mathbf{r}), \quad \int P(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1.$$

Соответственно уравнение диффузии для скалярной плотности $P(\mathbf{q}, t)$ свободного случайного блуждания на римановом многообразии (см., например, [62]) есть

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{q}, t) = \mathcal{D} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{g} (g^{-1})_{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) P(\mathbf{q}, t), \quad (3.45)$$

где

$$P(\mathbf{q}, t=0) = \delta(\mathbf{q}), \quad \int \sqrt{g} P(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = 1 \quad (3.46)$$

и g_{ik} — метрический тензор пространства; $g = \det g_{ik}$.

Уравнение (3.45) хорошо исследовано для многообразий постоянной отрицательной кривизны. Ниже мы воспроизводим соответствующие решения для двух самых известных случаев: для плоскости и пространства Лобачевского, часто обозначаемых как 3- и 4-псевдосферы.

Для плоскости Лобачевского мы имеем

$$\|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \mu \end{vmatrix}, \quad (3.47)$$

где μ — длина геодезической на 3-псевдосфере. Соответствующее уравнение диффузии есть

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\Pi}(\mu, \varphi, t) = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \coth \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\sinh^2 \mu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \times P_{\Pi}(\mu, \varphi, t). \quad (3.48)$$

Решение (3.48) имеет следующий вид:

$$P_{\Pi}(\mu, t) = \frac{\exp(-t\mathcal{D}/4)}{4\pi\sqrt{2\pi(t\mathcal{D})^3}} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\xi \exp[-\xi^2/(4t\mathcal{D})]}{\sqrt{\cosh \xi - \cosh \mu}} d\xi \simeq \frac{\exp(-t\mathcal{D}/4)}{4\pi t\mathcal{D}} \left(\frac{\mu}{\sinh \mu} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4t\mathcal{D}}\right). \quad (3.49)$$

Для пространства Лобачевского метрический тензор g_{ik} может быть записан как

$$\|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 \mu \sin^2 \theta \end{vmatrix}. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.50) в (3.45), мы имеем

$$P_c(\mu, t) = \frac{\exp(-t\mathcal{D})}{8\pi\sqrt{\pi(t\mathcal{D})^3}} \frac{\mu}{\sinh \mu} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4t\mathcal{D}}\right). \quad (3.51)$$

Впервые эти сферически-симметричные решения для случайного блуждания на плоскости и в пространстве Лобачевского были получены в работах [63].

Мы бы хотели особо подчеркнуть следующий факт. Функции распределения $P_n(\mu, t)$ и $P_c(\mu, t)$ дают вероятности найти случайное блуждание в момент времени t в определенной точке, расположенной на расстоянии μ в соответствующем неевклидовом пространстве. С другой стороны, вероятности найти конец траектории случайного блуждания в момент времени t в произвольной точке на расстоянии μ есть

$$P_{n,c}(\mu, t) = P_{n,c}(\mu, t) \mathcal{N}_{n,c}(\mu), \quad (3.52)$$

где

$$\mathcal{N}_n(\mu) = \sinh \mu \quad (3.53)$$

— периметр круга радиуса μ на плоскости Лобачевского и

$$\mathcal{N}_c(\mu) = \sinh^2 \mu \quad (3.54)$$

— площадь сферы радиуса μ в пространстве Лобачевского.

Различие между $P_{n,c}$ и $\mathcal{P}_{n,c}$ несущественно в евклидовой геометрии, в то время как в неевклидовой геометрии различие этих функций распределения становится принципиальным.

Используя определение броуновского моста, вычислим вероятности того, что случайное блуждание из N шагов, начавшееся и закончившееся в точке $\mu = 0$, попало после первых t шагов в некоторую точку на расстоянии μ от начала на плоскости (в пространстве) Лобачевского. Эти вероятности есть (при $N \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(\mu, t|0, N) &= \frac{P_n(\mu, t) \mathcal{P}_n(\mu, N-t)}{P_n(0, t)} \simeq \\ &\simeq \frac{N}{4\pi D t(N-t)} \mu \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{4D} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{N-t} \right) \right\}, \\ \mathcal{P}_c(\mu, t|0, N) &= \frac{P_c(\mu, t) \mathcal{P}_c(\mu, N-t)}{P_c(0, t)} \simeq \\ &\simeq \frac{N^{3/2}}{8\pi t^{3/2}(N-t)^{3/2}} \mu^2 \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{4D} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{N-t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Таким образом, мы получаем обычную гауссову функцию распределения с нулевым средним.

Уравнения (3.55), описывающие случайный процесс на римановой поверхности постоянной отрицательной кривизны, имеют прямое отношение к условным распределениям показателей Ляпунова произведения некоммутирующих матриц. Рассмотрим первое из выражений (3.55). Делая замену переменных $\mu = \ln(1 + |z|)/(1 - |z|)$; $\varphi = \arg z$, $z = x + iy$ ($\bar{z} = x - iy$), мы отображаем 3-псевдосферу (μ, φ) на единичный диск $|z| < 1$ (модель Пуанкаре). Соответствующая метрика в конформном виде имеет вид $dl^2 = (4 dz d\bar{z})/(1 - |z|^2)^2$. Использование конформного преобразования $z = (1 + iw)/(1 - iw)$ восстанавливает представление Клейна, где $dl^2 = -(4 dw d\bar{w})/(w - \bar{w})^2$ и $\text{Im} w > 0$ ($w = u + iv$; $\bar{w} = u - iv$).

Следующие соотношения могут быть проверены с помощью конформного представления метрики плоскости Лобачевского (см., например, [17]). Группа дробно-линейных преобразований плоскости Лобачевского изоморфна:

(i) группе $SU(1, 1)/\pm 1 \equiv PSU(1, 1)$ в модели Пуанкаре;

(ii) группе $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1 \equiv PSL(2, \mathbb{R})$ в модели Клейна.

Кроме того, известно (см., например, [34]), что плоскость Лобачевского H может быть идентифицирована с группой $\mathcal{H} = SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$. Эта связь позволяет нам разрешить (по крайней мере качественно) следующую проблему. Рассмотрим броуновский мост на группе $\mathcal{H}$, т.е. потребуем, чтобы произведение N независимых случайных матриц $\widehat{M}_k \in \mathcal{H}$ ($0 \leq k \leq N$) было тождественно единичной матрице. Изучим предельное распределение показателей Ляпунова $\hat{\delta}$ для первых m матриц в произведении. Для того чтобы иметь полное соответствие данной проблемы случайному блужданию на плоскости Лобачевского, напомним соответствующее стохастическое рекуррентное уравнение для некоторого вектора $\mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{W}_{k+1} = \widehat{M}_k \mathbf{W}_k, \quad \mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

где $M_k \in \mathcal{H}$ для всех $k \in [1, N]$. Условие броуновского моста означает, что

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{W}_1 \quad \text{для } N \gg 1. \quad (3.57)$$

Рассмотрим простейший случай

$$\widehat{M}_k = 1 + \widehat{M}_k, \quad \text{norm}[\widehat{M}_k] \ll 1. \quad (3.58)$$

В этом случае дискретное динамическое уравнение (3.56) может быть заменено дифференциальным. Его стационарное распределение определяется соответствующим уравнением Фоккера – Планка (3.45). Показатель Ляпунова $\hat{\delta}$ произведения случайных матриц $\widehat{M}$ совпадает с длиной геодезической в представлении Клейна плоскости Лобачевского. Следовательно, при условиях (3.57), (3.58) мы имеем для $\hat{\delta}$ обычное распределение Гаусса, совпадающее с первым из уравнений (3.55). Без условия БМ (т.е. для открытых случайных путей) мы воспроизводим стандартный результат Фюрстенберга [39].

Несмотря на то, что приведенное выше рассмотрение кажется довольно схематичным, оно ясно отражает следующий основной результат.

Условие броуновского моста для случайного блуждания в пространстве постоянной отрицательной кривизны делает это пространство "эффективно плоским", в результате чего соответствующее предельное распределение вероятности удовлетворяет центральной предельной теореме с нулевым средним.

Вопрос о том, имеет ли данный результат силу для случайного блуждания в неевклидовых пространствах непостоянной отрицательной кривизны, пока остается открытым.

Наконец, мы хотели бы высказать две гипотезы, которые естественным образом обобщают наше рассмотрение.

Сложность η любых известных алгебраических инвариантов (Александра, Джонса, HOMFLY) для узла, представленного косой длины N из группы B_n с однородным распределением на множестве образующих, имеет следующее предельное поведение:

$$P(\eta, N) \sim \frac{\text{const}}{N^{3/2}} \eta \exp \left(-\alpha(n)N + \beta(n)\eta - \frac{\eta^2}{\delta(n)N} \right), \quad (3.59)$$

где $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\delta(n)$ — константы, зависящие лишь от n .

Сложность узла η в ансамбле броуновских мостов (БМ) на группе B_n имеет гауссово распределение, где

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{2} \delta(n) N. \quad (3.60)$$

Эти гипотезы пока строго не доказаны. Главная идея предполагаемого доказательства состоит в том, чтобы использовать соотношение между сложностью узла η , длиной неприводимого (примитивного) слова на группе кос (и локально свободной группе) и длиной геодезической на некотором гиперболическом многообразии.

4. Конформные методы в статистике случайных блужданий с топологическими ограничениями

Последние годы были отмечены значительными достижениями в области построения алгебраических инвариантов узлов и зацеплений и их связи с топологической и конформной теориями поля (см., например, работы [64]). Однако несмотря на развитие общих концепций их применение в таких областях математики и физики, как теория вероятностей и статистика длинных цепных молекул, остается весьма ограниченным.

Данный раздел посвящен конформным методам в теории двумерных случайных блужданий с топологическими взаимодействиями. Предложенный подход позволяет связать задачи, рассмотренные в разделах 2 и 3, с проблемами вычисления предельных распределений случайных блужданий на многосвязных римановых поверхностях. Мы показываем, как классические методы аналитической теории дифференциальных уравнений могут быть использованы при построении некоммутативного топологического инварианта, являющегося неабелевым обобщением простейшего топологического инварианта Гаусса. Мы также изучаем связь топологических свойств случайного блуждания на дважды проколотой плоскости с поведением четырехчастичной корреляционной функции конформной теории поля с центральным зарядом $c = -2$. Разработанные в данном разделе методы применены к исследованию статистики случайных блужданий в периодической решетке топологических препятствий на плоскости.

4.1. Построение неабелевой связности для групп Γ_2 и $PSL(2, \mathbb{Z})$ с помощью конформных методов

Мы анализируем случайное блуждание длины L с эффективным элементарным шагом a ($a \equiv 1$) на комплексной плоскости $z = x + iy$ с двумя выколотыми точками. Пусть координаты этих точек есть A ($z_1 = (0, 0)$) и B ($z_2 = (c, 0)$) ($c \equiv 1$). Такой выбор не ограничивает общности, так как одновременной перенормировкой длины эффективного шага a случайного блуждания и расстояния c между выколотыми точками мы можем получить любые произвольные значения a и c .

Рассмотрим некоторый замкнутый путь на z и сопоставим обходам вокруг точек A и B генераторы g_1, g_2 некоторой группы G в случае, если мы движемся вдоль пути по часовой стрелке, и g_1^{-1}, g_2^{-1} для движения против часовой стрелки (рис. 11б). Контур, отвечающий обходу вокруг особых точек, принадлежит одному классу гомотопий, но представляют различные гомотопические классы.

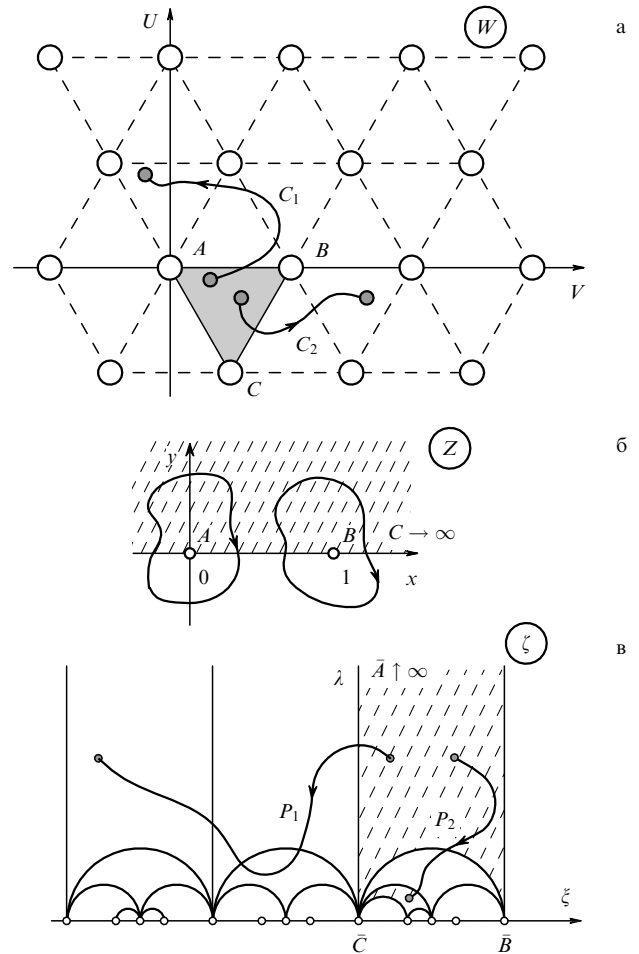


Рис. 11. Последовательные конформные отображения равностороннего треугольника на комплексной плоскости w на фундаментальную область $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ накрывающей ζ : (а) плоскость с решеткой особых точек; (б) дважды проколота плоскость z в точках A и B с базисными петлями; (в) универсальная накрывающая ζ с фундаментальной областью, соответствующей свободной группе Γ_2 ; P_1 и P_2 являются образами C_1 и C_2 .

Основной вопрос заключается в следующем. Необходимо вычислить вероятность $P(\mu, L)$ образования случайным блужданием длины L замкнутой петли на плоскости z при условии, что неприводимое слово, записанное в терминах генераторов $\{g_1, g_2, g_1^{-1}, g_2^{-1}\}$, имеет длину μ .

Искомую функцию распределения $P(\mu, L)$ можно формально записать в виде функционального интеграла с мерой Винера:

$$P(\mu, L) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \dots \int \mathcal{D}\{z\} \exp \left\{ -\frac{1}{a^2} \int_0^L \left(\frac{dz(s)}{ds} \right)^2 ds \right\} \times \delta[W\{g_1, g_2, g_1^{-1}, g_2^{-1}|z\} - \mu], \quad (4.1)$$

где $\mathcal{Z} = \int P(\mu, L) d\mu$ и $W\{\dots|z\}$ — длина примитивного слова в группе G как функционал траектории на комплексной плоскости.

Конформные методы позволяют построить связность и топологический инвариант W для треугольных групп с заданным матричным представлением образующих, а также переписать функцию распределения (4.1) в замкнутом аналитическом виде.

Пусть $\zeta(z)$ — конформное отображение дважды проколотой плоскости $z = x + iy$ на универсальную накрывающую $\zeta = \xi + i\eta$. Риманова поверхность ζ построена следующим образом. Сделаем три разреза на комплексной плоскости z между точками A и B , между B и (∞) и между (∞) и A по линии $\text{Im } z = 0$. Эти разрезы разделяют верхнюю ($\text{Im } z > 0$) и нижнюю ($\text{Im } z < 0$) полуплоскости плоскости z . Теперь осуществим конформное преобразование полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на фундаментальную область группы $G\{g_1, g_2\}$ — круговой треугольник, находящийся в полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ плоскости ζ . Каждая фундаментальная область представляет собой лист римановой поверхности, соответствующий расслоению над z . Вся накрывающая поверхность ζ является объединением всех таких листов (рис. 11в).

Координаты начальных и конечных точек любой траектории на универсальной накрывающей ζ определяют (см. [66]): (а) соответствующие координаты точек на z ; (б) гомотопический класс любого пути на z . В частности, контуры на ζ замкнуты тогда и только тогда, когда $W\{g_1, g_2|z\} \equiv 1$, т.е. когда они принадлежат тривиальному гомотопическому классу.

Координаты концов траектории на универсальной накрывающей ζ могут быть использованы в качестве топологического инварианта для пути на дважды проколотой плоскости z относительно действия группы G .

Таким образом, мы характеризуем топологический инвариант $\text{Inv}(C)$ некоторого замкнутого направленного пути C , начинающегося и кончающегося в произвольной точке $z_0 \neq \{z_1, z_2, \infty\}$ на плоскости z , с координатами начальной $\zeta_n(z_0)$ и конечной $\zeta_k(z_0)$ точек соответствующего контура P на накрывающей ζ . Контур P соединяет образы точки z_0 на различных римановых листах. Представим $\text{Inv}_{(z)}(C)$ в виде полной производной вдоль контура C :

$$\text{Inv}_{(z)}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_n - \zeta_k = \oint_C \frac{d\zeta(z)}{dz} dz. \quad (4.2)$$

Существует очень наглядная физическая интерпретация производной $d\zeta(z)/dz$. Фактически инвариант $\text{Inv}(C)$ может быть связан с потоком через контур C на плоскости (x, y) :

$$\begin{aligned} \text{Inv}(C) &\equiv \text{Inv}_{(x,y)}(C) = \oint_C \nabla \zeta(x, y) \mathbf{n} \, d\mathbf{r} = \\ &= \oint_C \mathbf{v} \times \nabla \zeta(x, y) \mathbf{v}(s) \, ds, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к кривой C , $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy$ на плоскости (x, y) ; $\mathbf{v}(s) = d\mathbf{r}/ds$ обозначает "скорость" вдоль траектории; ds — дифференциал приращения длины траектории. При преобразовании выражения (4.3) мы использовали следующие простые соображения: (а) $\mathbf{n} d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dy - \mathbf{e}_y dx = d\mathbf{r} \times \mathbf{v}$; (б) $\nabla \zeta(x, y)(d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \nabla \zeta(x, y)) d\mathbf{r}$; $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ — вектор нормали к плоскости (x, y) .

Векторное произведение

$$\mathbf{A}(x, y) = \mathbf{v} \times \nabla \zeta(x, y) \quad (4.4)$$

может рассматриваться в качестве неабелева обобщения векторного потенциала соленоидального магнитного поля, нормального к плоскости (x, y) и пересекающего плоскость в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Таким образом, $\mathbf{A}$ определяет плоскую связность дважды проколотой плоскости z относительно действия группы G .

Нетрудно показать, как основные формулы (4.2) и (4.3) преобразуются в случае коммутативной группы $G_{\text{комм}}\{g_1, g_2\}$, которая различает лишь классы гомологий контура C относительно исключенных точек на плоскости. В этом случае соответствующее конформное отображение осуществляется функцией $\zeta(z) = \ln(z - z_1) + \ln(z - z_2)$. Это выражение немедленно дает абелеву связность и интеграл Гаусса в качестве топологического инварианта:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \times \sum_{j=\{1,2\}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2},$$

$$\text{Inv}(C) = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 2\pi(n_1 + n_2),$$

где n_1 (n_2) — число обходов контура C точки M_1 (M_2) плоскости (x, y) .

Подставляя уравнение (4.3), записанное в координатах (x, y) , в уравнение (4.1) и используя преобразование Фурье для δ -функции, мы можем привести уравнение (4.1) к виду

$$P(\mu, L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iq\mu) P(q, L) \, dq, \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} P(q, L) &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \dots \int \mathcal{D}\{\mathbf{r}\} \exp \left\{ -\frac{1}{a^2} \int_0^L \left[\left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - iq\mathbf{A}(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right] ds \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Функция $P(q, L)$ совпадает с функцией Грина $P(\mathbf{r}_0, \mathbf{r} = \mathbf{r}_0, q, L)$ нестационарного уравнения Шрёдингера для движения свободной заряженной частицы в магнитном поле с векторным потенциалом (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, q, L) - \left(\frac{1}{2a} \nabla - iq\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 P(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, q, L) = \\ = \delta(L) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где q играет роль заряда и магнитное поле трансверсально, т.е. $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

Опишем теперь конструктивный способ получения необходимого конформного преобразования. Однозначная функция $z(\zeta) \equiv \zeta^{-1}(z)$ задана в фундаментальной области ζ — треугольнике ABC . Определим многозначную функцию $\phi(\zeta)$ следующим образом:

— функция $\phi(\zeta)$ совпадает с $z(\zeta)$ в основной фундаментальной области;

— во всех других областях накрывающей ζ функция $\phi(\zeta)$ получена аналитическим продолжением функции $z(\zeta)$ через границы с помощью дробно-линейных преобразований, соответствующих действию группы G .

Рассмотрим два базисных контура, P_1 и P_2 , на поверхности ζ , которые являются конформными образами контуров C_1 и C_2 (рис. 11в). Функция $\phi(z)$ ($z \neq \{z_1, z_2, \infty\}$) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \phi[z \xrightarrow{C_1} z] &\rightarrow \tilde{\phi}_1(z) = \frac{a_1 \phi(z) + b_1}{c_1 \phi(z) + d_1}, \\ \phi[z \xrightarrow{C_2} z] &\rightarrow \tilde{\phi}_2(z) = \frac{a_2 \phi(z) + b_2}{c_2 \phi(z) + d_2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = g_1, \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = g_2 \quad (4.9)$$

— матрицы подстановок группы $G\{g_1, g_2\}$.

Примем, что $\zeta(z)$ является отношением двух фундаментальных решений, $u_1(z)$ и $u_2(z)$, некоторого дифференциального уравнения второго порядка с особыми точками $\{z_1 = (0, 0), z_2 = (0, 1), z_3 = (\infty)\}$. Как следует из аналитической теории дифференциальных уравнений [68], решения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ испытывают линейные подстановки при изменении переменной z вдоль контуров C_1 и C_2 на комплексной плоскости z :

$$C_1: \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(z) \\ \tilde{u}_2(z) \end{pmatrix} = g_1 \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}, \quad C_2: \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(z) \\ \tilde{u}_2(z) \end{pmatrix} = g_2 \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Проблема восстановления формы дифференциального уравнения по его матрицам монодромии g_1 и g_2 группы G известна как классическая проблема Римана — Гильберта (см., например, [68]). Мы ограничиваемся случаем хорошо исследованных групп Γ_2 (свободной группы) и $PSL(2, \mathbb{Z})$ (модулярной группы). С ними связаны следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} u^{(f)}(z) + (2z-1) \frac{d}{dz} u^{(f)}(z) + \frac{1}{4} u^{(f)}(z) = 0 \quad (4.11)$$

для свободной группы и

$$z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} u^{(m)}(z) + \left(\frac{5}{3}z-1\right) \frac{d}{dz} u^{(m)}(z) + \frac{1}{12} u^{(m)}(z) = 0 \quad (4.12)$$

для модулярной группы.

Функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на фундаментальную область (круговой треугольник) ABC универсальной накрывающей ζ , есть

$$\zeta(z) = \frac{u_1^{(f,m)}(z)}{u_2^{(f,m)}(z)}, \quad (4.13)$$

где $u_{1,2}^{(f)}(z)$ и $u_{1,2}^{(m)}(z)$ — фундаментальные решения уравнений (4.11) и (4.12) для групп Γ_2 и $PSL(2, \mathbb{Z})$ соответственно.

В качестве примера ниже мы приводим явный вид комплексного потенциала $A(z)$ для свободной группы Γ_2 . Подставляя (4.13) в (4.2), мы получаем

$$A(z) = \frac{d\zeta(z)}{dz} = \frac{1}{2(z-1)} \left(\frac{F_1(z)F_4(z)}{F_2^2(z)} - \frac{F_3(z)}{F_2(z)} \right), \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \int_1^{1/\sqrt{z}} \frac{d\kappa}{\sqrt{(1-\kappa^2)(1-z\kappa^2)}}, \\ F_2(z) &= \int_0^1 \frac{d\kappa}{\sqrt{(1-\kappa^2)(1-z\kappa^2)}}, \\ F_3(z) &= \int_1^{1/\sqrt{z}} \sqrt{\frac{1-\kappa^2}{1-z\kappa^2}} d\kappa, \quad F_4(z) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\kappa^2}{1-z\kappa^2}} d\kappa. \end{aligned}$$

Асимптотика выражения (4.14) такова:

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} \sim \begin{cases} z^{-1}, & z \rightarrow 0, \\ (z-1)^{-1}, & z \rightarrow 1 \end{cases}$$

(ср. с абелевым случаем).

4.2. Случайные блуждания на дважды проколотовой плоскости и конформная теория поля

Геометрические построения, описанные в предыдущем разделе, очевидно, связаны с конформной теорией поля. Наиболее наглядно эту связь можно продемонстрировать следующим образом. Зададим себе вопрос: можно ли обыкновенные дифференциальные уравнения (4.11) и (4.12) ассоциировать с уравнениями на четырехчастичные корреляционные функции некоторой (пока не определенной) конформной теории поля? В частности, мы хотели бы понять, существует ли способ подобрать такие значения центрального заряда c алгебры Виросоро и конформной размерности Δ некоторой критической конформной теории, чтобы соответствующее уравнение на четверной коррелятор совпадало с уравнением (4.11). Ответ на этот вопрос положителен, и ниже мы покажем это на примере случайного блуждания на дважды проколотовой плоскости с монодромией свободной группы Γ_2 .

Мы ограничимся рассмотрением критического случая бесконечно длинных траекторий, т.е. будем предполагать, что $L \rightarrow \infty$. На теоретико-полевым языке это означает рассмотрение безмассовой свободной теории поля на комплексной плоскости z . Статсумма самопересекающегося случайного блуждания на z в полевым представлении генерирована скалярным гамильтонианом $H = (\nabla\phi)^2/2 + m\phi^2$, где масса m играет роль химического потенциала, сопряженного длине траектории ($m \sim 1/L$). Таким образом, для $L \rightarrow \infty$ мы имеем $m = 0$, что соответствует критической конформной теории [65].

Введем конформный оператор $\phi(z)$ на комплексной плоскости z . Размерность Δ этого оператора определена конформным коррелятором

$$\langle \phi(z)\phi(z') \rangle \sim \frac{1}{|z-z'|^{2\Delta}}. \quad (4.15)$$

Предположим, что $\phi(z)$ является примарным полем; тогда четырехточечная корреляционная функция $\langle \phi(z_1)\phi(z_2)\phi(z_3)\phi(z_4) \rangle$ удовлетворяет уравнению, следующему из тождества Уорда [65, 69, 70]. В форме обыкновенного дифференциального уравнения Римана уравнение на конформный коррелятор $\psi(z|z_1, z_2, z_3) = \langle \phi(z)\phi(z_1)\phi(z_2)\phi(z_3) \rangle$ с заданными точками $\{z_1 = (0, 0), z_2 = (1, 0), z_3 = \infty\}$ есть [65, 69]

$$\left\{ \frac{3}{2(2\Delta+1)} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \frac{1}{z-1} \frac{d}{dz} - \frac{\Delta}{z^2} - \frac{\Delta}{(z-1)^2} + \frac{2\Delta}{z(z-1)} \right\} \psi(z|z_1, z_2, z_3) = 0.$$

Осуществляя замену $\psi(z|z_1, z_2, z_3) = [z(z-1)]^{-2\Delta} u(z)$, мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} z(z-1)u''(z) - \frac{2}{3}(1-4\Delta)(1-2z)u'(z) - \\ - \frac{2}{3}(2\Delta-8\Delta^2)u(z) = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

которое совпадает с уравнением (4.11) при одном значении

$$\Delta = -\frac{1}{8}. \quad (4.17)$$

Конформные свойства тензора энергии-импульса $T(z)$ определены коэффициентами L_n лорановского разложения $T(z)$: $T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n/z^{n+2}$. Эти коэффициенты образуют алгебру Вирасоро [65]

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}c(n^3 - n)\delta_{n+m,0},$$

где параметр c является центральным зарядом теории. Используя связь $c = 2\Delta(5 - 8\Delta)/(2\Delta + 1)$, установленную в [69], и уравнение (4.17), мы получаем

$$c = -2. \quad (4.18)$$

Следующий факт, отмеченный Б. Дюплантье, представляется весьма интригующим. А именно он указал на то, что значение $\Delta = -1/8$ (уравнение (4.17)) совпадает со значением конформной размерности двухчастичного коррелятора вблизи поверхности для плотной фазы решеточной $O(n=0)$ -модели (или, что то же самое, модели Поттса с $q=0$), описывающей статистику так называемого манхеттенского случайного блуждания (известного также как модель плотных полимеров; см. работу [27]). Напомним, что модель Поттса уже упоминалась в разделе 2 в связи с проблемой построения алгебраических инвариантов узлов. Трудно поверить в случайность такого совпадения, и мы надеемся, что связь между этими проблемами будет прояснена в ближайшем будущем.

Конформная инвариантность случайного блуждания [66, 67] вместе с геометрической интерпретацией свойств монодромии четырехчастичного конформного коррелятора позволяют прийти к следующему выводу.

Критическая конформная теория, характеризуемая центральным зарядом $c = -2$ и конформной размерностью $\Delta = -1/8$, отвечает бесконечно длинному случайному блужданию на дважды проколотой комплексной плоскости.

Относительно четырехчастичной корреляционной функции мы можем задаться вопросом: что происходит со связностью $A_j(z)$, если аргумент z_j примарного поля $\varphi(z_j)$ перемещается вдоль замкнутого контура C вокруг трех особых точек на плоскости? Из общей теории известно, что потенциал $A_j(z)$ может быть записан, как

$$A_j(z) = \frac{2}{k} \sum_{i \neq j} \frac{R_i R_j}{z - z_i}, \quad (4.19)$$

где k — уровень соответствующего представления алгебры Каца–Мури и R_i, R_j — генераторы представления примарных полей $\varphi(z_i), \varphi(z_j)$ рассматриваемой группы [71]. Оператор голономии $\chi(C)$, связанный с $A_j(z)$, есть

$$\chi(C) = P \exp \left(- \oint_C A_j(z) dz \right). \quad (4.20)$$

Было бы интересно сравнить выражение (4.14) (с одной особой точкой в бесконечности) с выражением (4.19). Кроме того, можно ожидать, что уравнение (4.2) позволит нам представить оператор голономии (4.20) следующим образом:

$$\chi(C) = \exp(\zeta_h - \zeta_k).$$

На этом мы хотели бы закончить краткое обсуждение теоретико-полевых аспектов геометрического подхода к построению топологических инвариантов на многосвязных римановых поверхностях.

4.3. Статистика случайных блужданий с топологическими ограничениями в двумерной решетке препятствий

Конформный метод может быть применен к проблеме вычисления функции распределения случайного блуждания в периодической решетке топологических препятствий на комплексной плоскости $w = u + iv$ (см. рис. 11). Пусть элементарной ячейкой решетки является равно-сторонний треугольник со стороной длины c .

Введем функцию распределения $P(w_0, w, L|\text{hom})$, определяющую вероятность того, что траектория случайного блуждания, начавшаяся в точке w_0 , заканчивается в момент времени L в точке w и все траектории, идущие из w_0 в w , принадлежат одному гомотопическому классу hom относительно решетки препятствий. Функция $P(w_0, w, L|\text{hom})$ удовлетворяет формальному уравнению диффузии

$$\frac{a}{4} \Delta_w P(w, L|\text{hom}) = \frac{\partial}{\partial L} P(w, L|\text{hom}) \quad (4.21)$$

со следующими начальным условием и условием нормировки:

$$P(w, L=0|\text{hom}) = \delta(z_0),$$

$$\sum_{\{\text{hom}\}} P(w_0, w, L|\text{hom}) = \frac{1}{\pi a L} \exp \left(- \frac{|w - w_0|^2}{aL} \right).$$

Изложенный выше конформный метод может быть использован для того, чтобы найти асимптотическое решение уравнения (4.21) при $L \gg a$. Благодаря конформной инвариантности броуновского движения новый случайный процесс на накрывающей будет снова случайным, но в зависящем от метрики новом времени. В частности, мы заинтересованы в вычислении вероятности найти замкнутую случайную траекторию длины L , стягиваемой (незацепленной) в решетке топологических препятствий.

Построение конформного отображения $\zeta(w)$ (см. [66]), может быть осуществлено в два этапа и изображено на рис. 11.

1. Посредством вспомогательного отображения $w(z)$ мы отображаем элементарную ячейку плоскости w на верхнюю полуплоскость $\text{Im}(z) > 0$ дважды проколотой плоскости z . Функция $w(z)$ определяется интегралом Кристоффеля–Шварца

$$w(z) = \frac{c}{B(1/3, 1/3)} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^{2/3}(1-\bar{z})^{2/3}}. \quad (4.22)$$

Соответствие точек ветвления (т.е. вершин треугольника ABC) до и после преобразования $w(z)$ таково:

$$A(w=0) \rightarrow \tilde{A}(z=0), \quad B(w=c) \rightarrow \tilde{B}(z=1),$$

$$C\left(w=c \exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)\right) \rightarrow \tilde{C}(z=\infty).$$

2. Построение универсальной накрывающей ζ для дважды проколотой комплексной плоскости z реали-

зается с помощью автоморфных функций. Если потребовать, чтобы накрывающая была свободна от особых точек, то соответствующее конформное преобразование должно быть

$$-\frac{1}{(z'(\zeta))^2} \{z(\zeta)\} = \frac{z^2 - z + 1}{2z^2(z-1)^2}, \quad (4.23)$$

где $\{z(\zeta)\}$ — так называемая производная Шварца

$$\{z(\zeta)\} = \frac{z'''(\zeta)}{z'(\zeta)} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right)^2, \quad z'(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta}.$$

Из аналитической теории дифференциальных уравнений хорошо известно, что решение уравнения (4.23) может быть представлено как отношение двух фундаментальных решений некоторого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками ветвления, а именно уравнения (4.11) (см. предыдущий раздел и [68]). В результате мы имеем

$$z(\zeta) \equiv k^2(\zeta) = \frac{\theta_2^4(0, \exp(i\pi\zeta))}{\theta_3^4(0, \exp(i\pi\zeta))}, \quad (4.24)$$

где $\theta_2(0, \zeta)$ и $\theta_3(0, \zeta)$ — эллиптические тэта-функции Якоби [60];

$$\begin{aligned} \theta_2(\chi, \exp(i\pi\zeta)) &= 2 \exp\left(i \frac{\pi}{4} \zeta\right) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \exp[i\pi\zeta n(n+1)] \cos(2n+1)\chi, \\ \theta_3(\chi, \exp(i\pi\zeta)) &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\pi\zeta n^2) \cos 2n\chi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Точки ветвления $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ имеют образы в вершинах треугольника с нулевыми углами, лежащего в верхней полуплоскости комплексной плоскости ζ . Мы имеем из уравнения (4.24)

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z=0) &\rightarrow \bar{A}(\zeta=\infty), \quad \tilde{B}(z=1) \rightarrow \bar{B}(\zeta=0), \\ \tilde{C}(z=\infty) &\rightarrow \bar{C}(\zeta=-1). \end{aligned}$$

Полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ играет роль универсальной накрывающей для плоскости w с регулярной решеткой топологических препятствий. Полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ не содержит ни одной точки ветвления и состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности, каждый из которых имеет форму кругового треугольника с нулевыми углами и соответствует расслоению над w .

Конформный подход дает хорошо определенный неабелев топологический инвариант — неевклидово расстояние между начальной и конечной точками траектории на накрывающей (см. раздел 4.1). Таким образом, уравнение диффузии для функции распределения $P(\zeta, L)$ на накрывающей ζ с заданной начальной точкой ζ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{a}{4} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} P(\zeta, \zeta_0, L) = |w'(\zeta)|^2 \frac{\partial}{\partial L} P(\zeta, \zeta_0, L), \quad (4.26)$$

где мы приняли во внимание, что при конформном отображении оператор Лапласа преобразуется следую-

щим образом:

$$\Delta_w = \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 \Delta_\zeta, \quad \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 = \frac{1}{|w'(\zeta)|^2}.$$

Выражение для якобиана конформного преобразования $|w'(\zeta)|^2$ можно найти, используя свойства тэта-функций Якоби [72]. Пусть $w'(\zeta) = w'(z) z'(\zeta)$, где

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{c}{B(1/3, 1/3)} \frac{\theta_3^{16/3}}{\theta_2^{8/3} \theta_0^{8/3}}, \quad z'(\zeta) = i\pi \frac{\theta_2^4 \theta_0^4}{\theta_3^4}, \\ i \frac{\pi}{4} \theta_0^4 &= \frac{d}{d\zeta} \ln \left(\frac{\theta_2}{\theta_3} \right). \end{aligned}$$

(Мы опускаем аргументы для большей компактности изложения.)

Тождество

$$\begin{aligned} \theta_1'(0, \exp(i\pi\zeta)) &\equiv \left. \frac{d\theta_1(\chi, \exp(i\pi\zeta))}{d\chi} \right|_{\chi=0} = \\ &= \pi \theta_0(\chi, \exp(i\pi\zeta)) \theta_2(\chi, \exp(i\pi\zeta)) \theta_3(\chi, \exp(i\pi\zeta)) \end{aligned}$$

позволяет нам получить финальное выражение

$$\begin{aligned} |w'(\zeta)|^2 &= c^2 h^2 |\theta_1'(0, \exp(i\pi\zeta))|^{8/3}, \\ h &= \frac{1}{\pi^{1/3} B(1/3, 1/3)} \simeq 0,129, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(\chi, \exp(i\pi\zeta)) &= 2 \exp\left(i \frac{\pi}{4} \zeta\right) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp[i\pi n(n+1)\zeta] \sin(2n+1)\chi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Вернемся к уравнению (4.26) и осуществим конформное преобразование верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ во внутренность круга единичного радиуса на комплексной плоскости τ . Это преобразование мы осуществляем в целях более полного использования свойств симметрии нашей системы. Удобно выбрать следующее соответствие вершин фундаментального треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ до и после преобразования:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\zeta=\infty) &\rightarrow A'(\tilde{\zeta}=1), \\ \bar{B}(\zeta=0) &\rightarrow B'(\tilde{\zeta}=\exp(-i \frac{2\pi}{3})), \\ \bar{C}(\zeta=-1) &\rightarrow C'(\tilde{\zeta}=\exp(i \frac{2\pi}{3})). \end{aligned}$$

Отображение, осуществляющее это преобразование, имеет вид

$$\zeta(\tau) = \exp\left(-i \frac{\pi}{3}\right) \frac{\tau - \exp(i2\pi/3)}{\tau - 1} - 1, \quad (4.29)$$

соответственно якобиан $|w'(\tau)|^2$ есть

$$|w'(\tau)|^2 = \frac{3c^2 h^2}{|1-\tau|^4} \left| \theta_1'\left(0, \exp(i\pi\zeta(\tau))\right) \right|^{8/3}. \quad (4.30)$$

На рисунке 12 изображена функция $g(r, \psi) = (1/c^2)|w'(\tau)|^2$, где $\tau = r \exp(i\psi)$.

Преимущество такого представления становится ясным, если мы усредним функцию $g(r, \psi)$ по углу ψ . Численный анализ дает

$$\lim_{r \rightarrow 1} \langle g(r, \psi) \rangle_\psi \equiv \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \psi) d\psi = \frac{\bar{\omega}}{(1-r^2)^2}, \quad (4.31)$$

где $\bar{\omega} \simeq 0,0309$ (рис. 13).

Таким образом, ясно, что для значений r , близких к 1, диффузия управляется лапласианом на поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскости Лобачевского). Представление плоскости Лобачевского в единичном круге и в верхней полуплоскости (т.е. в моделях Пуанкаре и Клейна) было обсуждено в разделе 3.4. Соответственно уравнение диффузии (4.26) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial N} P(r, \psi, N) = \mathcal{D}(1-r^2)^2 \Delta_{r, \psi} P(r, \psi, N), \quad (4.32)$$

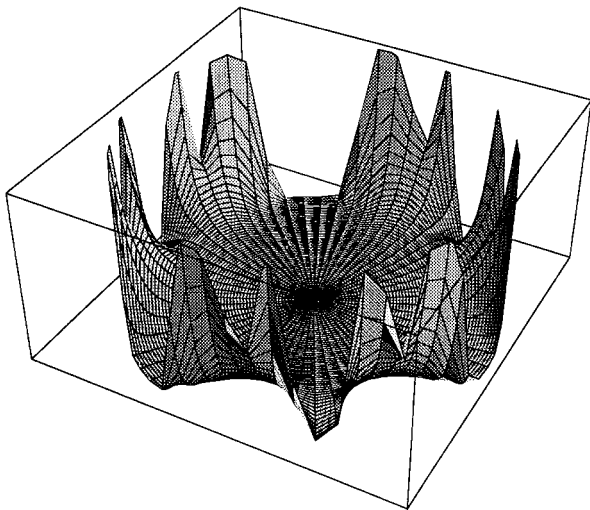


Рис. 12. Рельеф функции $g(r, \psi)$.

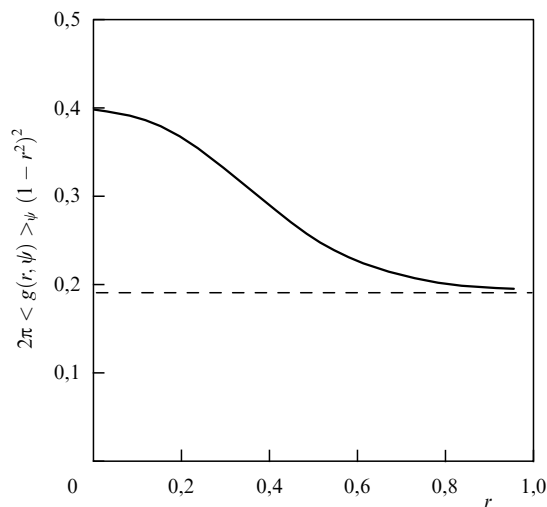


Рис. 13. График зависимости произведения $2\pi \langle g(r, \psi) \rangle_\psi \times (1-r^2)^2$ как функции r .

где $\mathcal{D} = a^2/4\bar{\omega}c^2$ — коэффициент диффузии на плоскости Лобачевского и $N = L/a$ — безразмерная длина цепи (т.е. эффективное число шагов случайного блуждания).

Осуществляя замену переменных $(r, \psi) \rightarrow (\mu, \psi)$, где $\mu = \ln(1+r)/(1-r)$, мы приходим к случайному блужданию на 3-псевдосфере (см. уравнение (3.49) раздела 3.4). Соответствующая функция распределения $P(\mu, N)$ есть

$$P(\mu, N) = \frac{\exp(-ND/4)}{4\pi \sqrt{2\pi(ND)^3}} \int_\mu^\infty \frac{\xi \exp(-\xi^2/(4ND))}{\sqrt{\cosh \xi - \cosh \mu}} d\xi. \quad (4.33)$$

Легко понять физический смысл длины геодезической μ на 3-псевдосфере: μ есть длина примитивного пути в решетке препятствий, т.е. кратчайшая длина пути, оставшаяся после всех топологически разрешенных сокращений случайной траектории в решетке препятствий. Следовательно, μ может рассматриваться как неабелев топологический инвариант, гораздо более мощный, чем индекс зацепления Гаусса. Этот инвариант не является полным, за исключением одного значения $\mu = 0$, однозначно характеризующего траектории, принадлежащие тривиальному гомотопическому классу. Нетрудно также понять, что величина μ пропорциональна длине неприводимого слова, записанного в терминах образующих свободной группы.

5. Физические приложения. Полимерный язык в статистике линейных цепных объектов с топологическими ограничениями

Топологические взаимодействия существенно модифицируют термодинамические свойства статистических систем, состоящих из линейных цепных объектов независимо от их физической природы. Проблемы узлов и зацеплений неоднократно обсуждались в контексте квантовой теории поля, двумерной гравитации, статистики вихревых линий в сверхпроводниках, квантового эффекта Холла, термодинамических свойств зацепленных полимерных молекул и т.д. Современные методы теоретической физики позволяют достаточно полно описывать влияние зацеплений на физические свойства каждой из перечисленных систем, однако остаются совершенно неясными следующие вопросы.

Как модифицируются термодинамические свойства линейных марковских цепей с зацеплениями при изменении их взаимного топологического состояния?

Как могут быть использованы результаты, полученные в статистической топологии для построения флуктуационной теории типа Гинзбурга–Ландау, описывающей поведение цепных линейных объектов с топологическими взаимодействиями?

Чтобы иметь полный и физически ясный образ систем флуктуирующих цепей со всеми присущими им топологическими свойствами, представляется весьма естественным формулировать общие топологические проблемы в терминах физики полимеров. Это позволяет: использовать геометрически ясный образ полимера с топологическими ограничениями как модели, соответствующей формализму интегралов по траекториям в теории поля; продвинуться в исследовании специфических физических свойств биологических и синтетических полимеров, где топологические ограничения играют принципиальную роль.

Сформулированный круг вопросов имеет, по-видимому, наиболее наглядное и физически значимое приложение в статистической физике полимерных цепей. Объединение мономеров в цепные молекулы принципиальным образом меняет все статистические и динамические свойства рассматриваемых систем, в результате чего флуктуации полимеров определяются гораздо большими пространственно-временными масштабами, чем у систем разорванных звеньев. Наличие цепной структуры порождает целый ряд особенностей физического поведения макромолекулярных систем (см., например, [73]): так называемую линейную память (т.е. строго установленное положение каждой мономерной единицы вдоль цепи); низкую трансляционную энтропию (т.е. ограничения на независимое перемещение мономерных единиц благодаря наличию химических связей); большие пространственные флуктуации (т.е. даже отдельная макромолекула может рассматриваться как статистическая система с большим количеством степеней свободы).

Следует подчеркнуть, что наличие линейной памяти ведет к тому, что различные части полимерной молекулы, флуктуирующие в пространстве, не могут "пройти друг сквозь друга" непрерывным образом (без разрыва цепи). Для системы нефантомных кольцевых цепей это означает, что топологически доступными друг для друга являются лишь те конформации, которые могут быть совмещены друг с другом с помощью непрерывного преобразования. Тем самым мы с неизбежностью возвращаемся к проблеме определения энтропии узла, определенной в разделе 2.

5.1. Полимерная цепь

в трехмерной решетке препятствий

Трехмерная (3D) модель "полимерная цепь в решетке препятствий" (ПЦРП) может быть определена следующим образом [43, 49, 66]. Предположим, что макромолекула длины $L = Na$ помещена между ребрами простой кубической решетки с периодом a , где N и a — соответственно число мономерных единиц в цепи и размер мономера. Мы предполагаем, что цепь не может пересечь ("пройти сквозь") любое ребро решетки.

Модель ПЦРП является в настоящее время общепризнанным базисом для среднеполевых теорий, описывающих термодинамические свойства ансамблей полимерных цепей с топологическими ограничениями. В этих теориях обычно предполагается, что решетка препятствий моделирует зацепления пробной макромолекулы за другие цепи системы (среды). Пренебрегая флуктуациями среды, а также топологическими ограничениями, которые выделенная цепь создает сама для себя, мы теряем информацию о корреляциях пробной цепи и среды, однако даже в таком простейшем случае можем получить нетривиальные выводы о статистике пробной макромолекулы. Таким образом, для исследования свойств реальных полимерных систем с топологическими ограничениями недостаточно уметь вычислять статистические характеристики цепей в решетках препятствий, а необходимо также научиться сопоставлять конкретную решетку препятствий изучаемой физической системе, что в общем случае является очень сложной задачей.

Итак, рассмотрим замкнутую полимерную цепь без объемных взаимодействий (т.е. цепь с самопересечениями), не зацепленную за ребра трехмерной решетки

препятствий. Из-за топологических препятствий макромолекула будет принимать более компактную конформацию, чем стандартное случайное блуждание без каких-либо топологических ограничений.

Начнем рассмотрение с решеточной реализации модели. В этом случае полимерная цепь представляет собой случайное блуждание из N шагов на кубической решетке с шагом $a = c$. Общий случай $a \neq c$ будет рассмотрен позже.

Случайное блуждание на трехмерной кубической решетке при наличии регулярного множества топологических ограничений — ребер дуальной решетки — эквивалентно свободному случайному блужданию на графе — дереве Кейли с координационным числом $z = 6$.

Средний размер $R(N) \equiv \sqrt{R^2(N)}$ замкнутой незацепленной траектории случайного блуждания из N шагов [43] есть

$$R \sim aN^{1/4}. \quad (5.1)$$

Изложим кратко основные идеи вывода соотношения (5.1). Прежде всего заметим, что дерево Кейли с z ветвями (далее называемое z -деревом с $z = 2D$) играет роль универсальной накрывающей и представляет собой наглядный геометрический образ свободной группы Γ_∞ с бесконечным числом образующих. В то же время $\Gamma_\infty/\mathbb{Z}^D = \Gamma_{z/2}$, где $\Gamma_{z/2}$ — свободная группа с z генераторами. Выписывая рекуррентные соотношения для вероятности $P(k, N)$ для случайного блуждания из N шагов на z -дереве (ср. с уравнениями (3.24)–(3.44)), мы можем легко найти предельную условную функцию распределения величины $P(k, m|N) = P(k, m)P(k, N-m)/z(z-1)^{k-1}$. Напомним, что $P(k, m|N)$ дает условное распределение вероятности того, что две субцепи, C_1 и C_2 , содержащие m и $N-m$ сегментов, имеют общий примитивный путь длины k при условии броуновского моста (см. раздел 3.1), т.е. при условии, что цепь, составленная из участков C_1 и C_2 , замкнута и не зацеплена ни за одно из топологических препятствий:

$$P(k, m|N) \simeq \left(\frac{N}{2m(N-m)} \right)^{3/2} k^2 \exp \left(-\frac{k^2 N}{2m(N-m)} \right). \quad (5.2)$$

Это уравнение позволяет получить следующее выражение для средней длины примитивного пути $\langle k(m) \rangle$ замкнутой незацепленной цепи длины N , разделенной на две части с длинами m и $N-m$ соответственно:

$$\langle k(m) \rangle = \sum_{k=0}^N k P(k, m|N) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2m(N-m)}{N}} \quad (N \gg 1). \quad (5.3)$$

Примитивная траектория сама по себе может рассматриваться как случайное блуждание в трехмерном пространстве, если потребовать, чтобы любой шаг примитивного пути не был строго противоположен предыдущему. Таким образом, среднеквадратичное расстояние $\langle (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_m)^2 \rangle$ между концами примитивного пути из $k(m)$ шагов равно

$$\langle (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_m)^2 \rangle = \frac{z}{z-2} ka^2, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{r}_m$ — радиус-вектор звена с номером m и граничными условиями $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_0 = 0$. Среднеквадратичный радиус инерции $\langle R_g^2 \rangle$ N -звенной замкнутой незацепленной случайной траектории в регулярной решетке препятствий есть

$$\begin{aligned} \langle R_g^2 \rangle &= \frac{1}{2N^2} \sum_{n \neq m} \langle (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)^2 \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{m=1}^N \langle (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_m)^2 \rangle = \\ &= \frac{z}{z-2} \frac{\sqrt{2\pi}}{8} a^2 \sqrt{N}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Этот результат следует сопоставить со среднеквадратичным радиусом инерции замкнутой цепи без каких-либо топологических ограничений $\langle R_{g,0}^2 \rangle = a^2 N/12$.

Зависимость $R \sim N^{1/4}$ напоминает хорошо известное выражение для типичного размера случайно ветвящейся идеальной макромолекулы. Радиус инерции идеальной "решеточной зверушки" (*lattice animal*), содержащей N мономерных звеньев, пропорционален $N^{1/4}$. Это означает, что обе системы принадлежат одному и тому же классу универсальности. Конформные методы, рассмотренные в разделе 4, позволяют получить такую же скейлинговую зависимость для задачи о статистике континуальных случайных блужданий в решетке препятствий на плоскости.

Перейдем теперь к среднеполевому вычислению критического индекса ν несамопересекающегося случайного блуждания в регулярной решетке препятствий [74, 75]. В рамках среднеполевой теории типа Флори неравновесная свободная энергия $F(R)$ полимерной цепи размера R с объемными взаимодействиями может быть записана следующим образом:

$$F(R) = F_{\text{вз}}(R) + F_{\text{эл}}(R), \quad (5.6)$$

где $F_{\text{вз}}(R)$ — энергия взаимодействий мономеров цепи и $F_{\text{эл}}(R)$ — эластический (т.е. чисто энтропийный) вклад в общую свободную энергию системы. Минимизируя $F(R)$ по R для цепи заданной длины $L = Na$, мы получаем исковое соотношение $R \sim N^\nu$.

Запишем свободную энергию взаимодействия цепи в вириальном разложении

$$F_{\text{вз}}(R) = V(B\rho^2 + C\rho^3), \quad (5.7)$$

где $V \sim R^D$ — объем, занятый цепью в D -мерном пространстве; $\rho = N/V$ — плотность цепи; $B = b(T - \theta)/\theta$ и $C = \text{const} > 0$ — соответственно константы двух- и трехчастичных внутрицепных взаимодействий. В случае $B > 0$ вкладом третьего вириального коэффициента в уравнение (5.7) можно пренебречь [73].

Эластическая часть свободной энергии $F_{\text{эл}}(R)$ замкнутой незацепленной цепи размера R и длины Na в решетке препятствий может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{\text{эл}}(R) &\approx \text{const} + \ln P(R, N) = \\ &= \text{const} + \ln \int dk P(k, N) P(R, k), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где функция распределения $P(k, N)$ такая же, как в уравнении (5.2), и $P(R, k)$ дает вероятность того, что примитивный путь длины k будет иметь пространственное расстояние между концами R :

$$P(R, k) = \left(\frac{D}{2\pi a c k} \right)^{D/2} \exp \left(- \frac{DR^2}{2ack} \right). \quad (5.9)$$

Подставляя уравнения (5.2) и (5.9) в уравнение (5.8), получаем следующую оценку:

$$F_{\text{эл}}(R) = - \left(\frac{R^4}{a^2 c^2 N} \right)^{1/3} + o(R^{4/3}). \quad (5.10)$$

Уравнения (5.7) и (5.10) позволяют переписать (5.6) в форме

$$F(R) \simeq B \frac{N^2}{R^D} - \left(\frac{R^4}{a^2 c^2 N} \right)^{1/3}. \quad (5.11)$$

Минимизируя (5.11) относительно R при фиксированном значении N , получаем

$$R \sim B^{3/(4+3D)} (ac)^{2/(4+3D)} N^\nu, \quad \nu = \frac{7}{4+3D}. \quad (5.12)$$

Верхняя критическая размерность для данной системы $D_{\text{кр}} = 8$. Для $D = 3$ уравнение (5.12) дает $\sim N^{7/13}$.

Интересно сравнить выражение (5.12) с критическим показателем $\nu_{\text{зв}}$ "решеточной зверушки" с исключенным объемом в D -мерном пространстве, $\nu_{\text{зв}} = 3/(4+D)$ ($\nu_{\text{зв}} = 3/7$ для $D = 3$). Различие в показателях означает, что незацепленное кольцо с объемными взаимодействиями и самонепересекающаяся "решеточная зверушка" принадлежат различным классам универсальности.

5.2. Сколлапсированная фаза незаузленного полимера

В этом разделе мы покажем, какие предсказания относительно фрактальной структуры сильно сколлапсированной (глобулярной) фазы незаузленного кольцевого полимера могут быть сделаны в области $\langle R_g^2 \rangle \ll \langle R_{g,0}^2 \rangle$ в рамках самосоогласованного анализа на основе представления о полимерной цепи в решетке топологических препятствий.

5.2.1. Концепция складчатой глобулы в статистике сильно сколлапсированной полимерной цепи.

Рассмотрим замкнутую самонепересекающуюся полимерную цепь длины N в тривиальном топологическом состоянии⁵. После понижения температуры формирование сколлапсированной (глобулярной) структуры становится термодинамически выгодным [78]. Предполагая, что глобулярное состояние может быть описано в вириальном приближении, мы, как обычно, можем ввести константы двух- и трехчастичных взаимодействий: $B = b(T - \theta)/\theta < 0$ и $C = \text{const} > 0$. Но в дополнение к стандартным объемным взаимодействиям мы хотим принять во внимание нелокальные топологические ограничения, которые, очевидно, имеют характер дополнительного отталкивания. В связи с этим мы высказываем следующее утверждение [79].

Условие образования тривиального узла замкнутой полимерной цепью исключительно сильно влияет на все термодинамические свойства макромолекулы и ведет к необычным фрактальным свойствам линии, изображающей траекторию цепи в глобуле.

⁵ То, что замкнутая цепь не может пересечь сама себя, влечет два типа взаимодействий: а) объемные взаимодействия, которые исчезают для бесконечно тонких цепей; б) топологические ограничения, которые остаются даже для цепи нулевой толщины.

Мы называем такую структуру *складчатой (фрактальной) глобулой*.

Ниже мы приводим ряд аргументов в поддержку этого утверждения, описывая способ образования данной складчатой структуры и показывая ее термодинамическую устойчивость.

Хорошо известно, что в плохом растворителе ($B < 0$) существует некоторая критическая длина цепи g^* , зависящая от температуры и энергии объемных взаимодействий, такая, что цепи, имеющие длины больше, чем g^* , коллапсируют. Если взять достаточно длинную цепь, мы можем определить эти g^* -звенные участки как новые блочные мономерные единицы (складки минимального масштаба).

Рассмотрим часть цепи, содержащую несколько блочных мономеров, т.е. складок минимального масштаба. Эта новая часть цепи должна снова коллапсировать "сама в себе", т.е. должна формировать складку следующего масштаба, если другие части цепи не проникают внутрь данной. Цепь новых субблоков (складок нового масштаба) коллапсирует снова и так далее до тех пор, пока цепь как целое не образует наибольшую складку (рис. 14). Процедура завершится, когда все начальные мономеры будут объединены в одну складку наибольшего масштаба. Отметим, что линия, представляющая траекторию цепи и построенная по описанной схеме, является трехмерным аналогом хорошо известной самоподобной кривой Пеано.

Специфическая особенность складчатой глобулы заключается в том, что на всех масштабах начиная с g^* и вплоть до максимального участка цепи не перепутаны друг с другом и плотно заполняют предоставленный им объем, т.е. сколлапсированы "сами в себе". Можно было бы предположить, что пространственные флуктуации разрушают такую термодинамически невыгодную

масштабно-инвариантную структуру, однако, основываясь на модели ПЦРП, удастся показать, что если длина цепи в складке произвольного масштаба превосходит N_c , то складки не перемешиваются, оставаясь сегрегированными в пространстве (N_c — феноменологический параметр, имеющий смысл типичного числа звеньев между соседними по цепи зацеплениями [73], $N_c \sim 30 \div 300$).

Так как топологическое состояние части цепи в каждой складке зафиксировано и совпадает с состоянием цепи в целом (которое является тривиальным), эта часть цепи в складке может быть расценена как незацепленное кольцо. Другие части цепи (другие складки) играют роль эффективной решетки топологических препятствий, окружающих пробную цепь (рис. 15). Используя результаты раздела 5.1 (см. формулу (5.5)), мы можем заключить, что любая кольцевая M -звенная субцепь без объемных взаимодействий, не зацепленная ни за одно из препятствий, имеет размер $R^{(0)}(M) \sim aM^{1/4}$. Если $R^{(0)}$ — размер участка цепи в термодинамическом равновесии в решетке препятствий, то энтропийные потери кольцевой цепи S как функции размера R достигают максимума при $R \simeq R^{(0)}$ (см. (5.10)), и набухание цепи до значений R , превышающих $R^{(0)}(M)$, является энтропийно невыгодным. В то же самое время в присутствии исключенного объема должно быть выполнено очевидное неравенство $R(M) \geq aM^{1/3}$, которое следует из факта, что плотность цепи $\rho \sim R^3/N$ в глобулярной фазе постоянна. В связи с очевидным соотношением $R(M) > R^{(0)}(M)$ мы можем

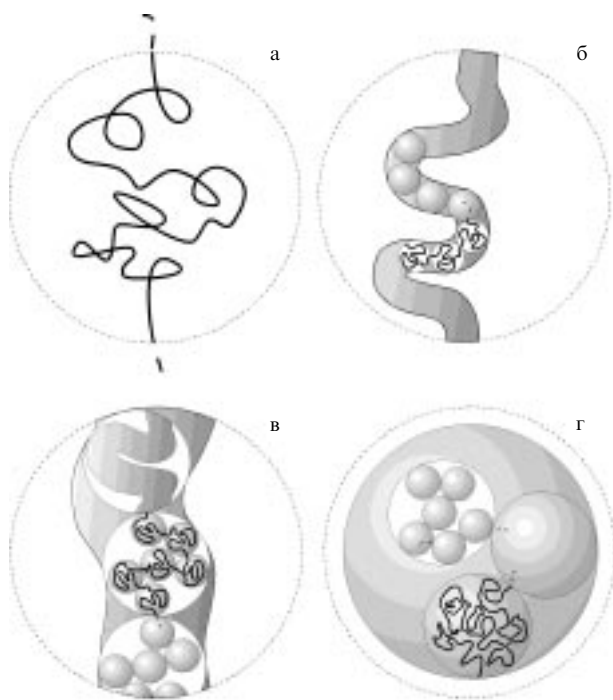


Рис. 14. Последовательные этапы формирования складчатой (фрактальной) глобулы (а–в). Самоподобная структура складчатой глобулы, сегрегированной на всех масштабах (г).

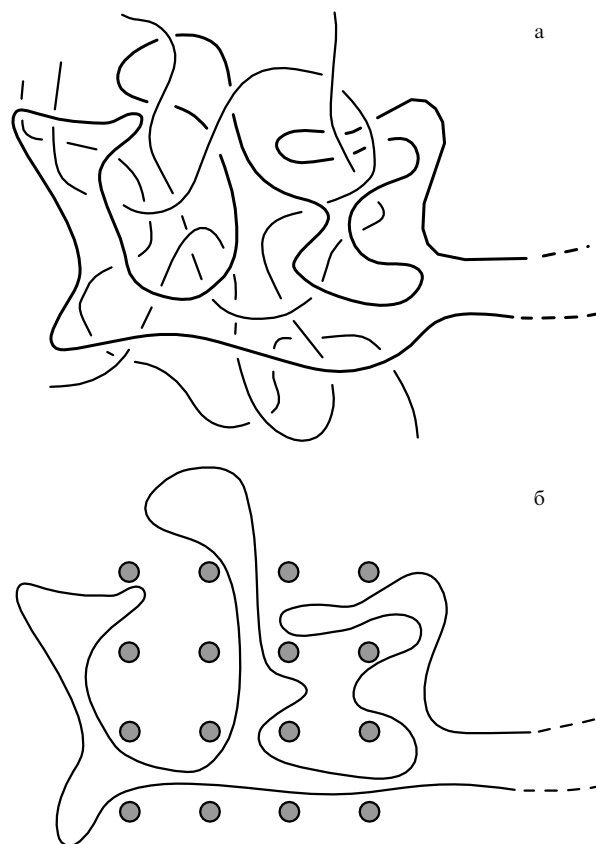


Рис. 15. Часть замкнутой незацепленной цепи, окруженной другими частями той же самой цепи (а). Незацепленное кольцо в решетке препятствий (б). Препятствия играют роль топологических ограничений, производимых другой частью той же самой цепи.

заклучить, что набухание цепей в складках из-за их взаимопрониновения петлями не приводит к энтропийному выигрышу, и поэтому не происходит в системе с постоянной плотностью. Это означает, что размер складок на каждом масштабе имеет порядок размера участка цепи в состоянии плотной упаковки, и складки остаются взаимно сегрегированы в пространстве. Эти вопросы обсуждены в деталях в работе [79].

Система плотно упакованных глобулярных складок соответствует траектории цепи с фрактальной размерностью $D_f = 3$ (размерность $D_f = 3$ реализуется начиная с минимального масштаба g^* и вплоть до масштаба целой глобулы). Значение g^* может быть оценено как

$$g^* = N_c(\rho a^3)^{-2}, \quad (5.13)$$

где ρ — плотность глобулы. Эта оценка была получена в [79] с помощью следующих соображений: $g = (\rho a^3)^{-2}$ — средняя длина части цепи между двумя соседними (по цепи) контактами с другими частями; следовательно, $N_c g$ — среднее число звеньев части цепи между топологическими контактами (зацеплениями).

Энтропийные потери, связанные с формированием складчатого состояния, могут быть оценены следующим образом:

$$S \simeq -\frac{N}{g^*}. \quad (5.14)$$

Используя уравнение (5.14), плотность складчатой глобулы ρ можно оценить в среднеполевом приближении, минимизируя соответствующую неравновесную свободную энергию. Плотность складчатой глобулы меньше плотности обычной равновесной, что связано с дополнительными топологическими взаимодействиями, ведущими к избыточному отталкиванию между складками:

$$\rho_{\text{скл}} = \frac{\rho_{\text{равн}}}{1 + \text{const}(a^6/CN_c)} < \rho_{\text{равн}}, \quad (5.15)$$

где $\rho_{\text{равн}}$ — плотность глобулы Лифшица.

Непосредственная экспериментальная проверка описанной самоподобной фрактальной структуры незаузелненного кольцевого полимера в сколлапсированной фазе сталкивается с рядом технических трудностей. Тем не менее ряд косвенных экспериментов хорошо согласуется с гипотезой о складчатой глобуле (СГ).

1. Формирование СГ ведет к двухстадийной динамике коллапса линейной макромолекулы после резкого ухудшения качества растворителя. Данный результат был недавно обнаружен в экспериментах по светорассеиванию Б. Чу и др. [80].

2. Концепция СГ позволила теоретически объяснить [84] экспериментально наблюдаемый эффект улучшения совместимости в расплаве кольцевых и линейных полимеров [85], а также построить количественную теорию коллапса N -изопропилакриламидного геля в воде при изменении температуры [83].

3. Некоторые свойства складчатой глобулы обнаружены в численном эксперименте [82].

5.2.2. Вероятность образования узла. Мы можем также использовать концепцию складчатой глобулы, чтобы оценить вероятность формирования тривиального узла в глобулярной фазе полимерной цепи. Напомним, что основная часть современных представлений о статистике

узлов и зацеплений была получена с помощью численного моделирования с использованием алгебраических инвариантов узла. Среди наиболее важных результатов можно упомянуть следующие.

— Вероятность спонтанного заузливания цепи $p(N)$ определена как функция длины цепи N при случайном замыкании ее концов [1, 86]. В работе [87] (см. также статью [88]) процедура моделирования была продлена до цепей, содержащих до 2000 сегментов. Для вероятности формирования тривиального узла в хорошем и θ -растворителях была получена асимптотика типа (ср. с уравнением (2.65))

$$P_0 \sim \exp\left(-\frac{N}{N_0(T)}\right).$$

Статистическое изучение вероятности случайного заузливания длинной цепи с использованием инвариантов Васильева было предпринято в недавней работе [88].

— Вероятность формирования узла p определена как функция параметра набухания α , где $\alpha = (\langle R_g^2 \rangle / \langle R_{g,0}^2 \rangle)^{1/2}$, $\langle R_g^2 \rangle$ — среднеквадратичный радиус инерции замкнутой цепи и $\langle R_{g,0}^2 \rangle = Na^2/12$ — то же самое для невозмущенной ($\alpha = 1$) цепи (см. рис. 16 [1]). Показано, что эта вероятность резко уменьшается, когда клубок переходит из набухшего состояния с $\alpha > 1$ в гауссово с $\alpha = 1$ [89] и особенно когда он сжимается в глобулу $\alpha \ll 1$ [1, 86].

— Было установлено, что в области $\alpha > 1$ топологические ограничения практически полностью экранируются объемными взаимодействиями [89].

— Показано, что две незаузелненные цепи одной и той же длины даже в отсутствии объемных взаимодействий в состоянии гауссова клубка отталкиваются как непроницаемые сферы с радиусом инерции порядка $(\langle R_{g,0}^2 \rangle)^{1/2}$ [1, 90].

Вернемся к рис. 16, где вероятность формирования узла p изображена как функция параметра набухания α в глобулярной области ($\alpha < 1$). Заметим, что в области сжатия, особенно для $\alpha < 0,6$, данные численного экспе-

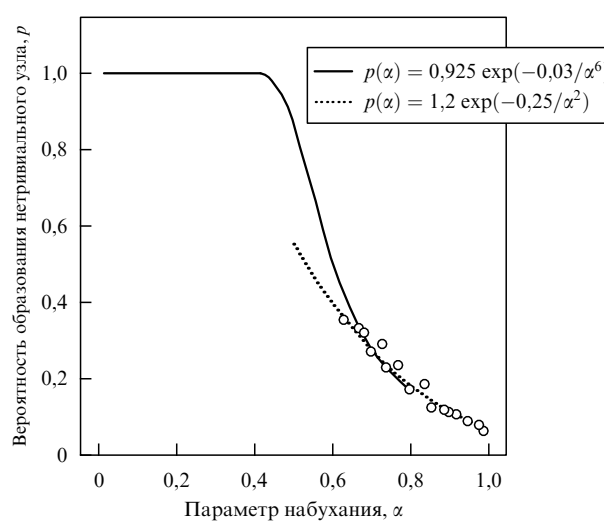


Рис. 16. Зависимость вероятности формирования тривиального узла p от параметра набухания α в глобулярном состоянии. Точки — данные работы [1]; пунктирная линия — приближение для слабого режима сжатия (см. выражение (5.21)); непрерывная линия — приближение, основанное на концепции складчатой глобулы (выражение (5.23)).

римента отсутствуют, так как очень трудно дискриминировать с помощью компьютера топологически различные узлы с большим количеством самопересечений на диаграмме.

Ниже мы приводим теоретические оценки вероятности формирования нетривиального узла $p(\alpha)$ в плотном глобулярном состоянии ($\alpha < 0,6$). Наши соображения основаны на концепции СГ. Вероятность формирования тривиального узла при случайном замыкании линейной цепи может быть определена соотношением

$$q(\alpha) = \frac{Z(\alpha)}{Z_0(\alpha)}, \quad q(\alpha) = 1 - p(\alpha), \quad (5.16)$$

где $Z(\alpha)$ — функция распределения (статистическая сумма) замкнутой цепи с объемными взаимодействиями при заданном значении параметра набухания α и $Z_0(\alpha)$ — статистическая сумма теневой цепи без топологических ограничений, но с теми же самыми объемными взаимодействиями. Обе статистические суммы могут быть оценены в рамках теории среднего поля. Чтобы это сделать, воспользуемся классическим представлением Флори для свободной энергии цепи с данным значением α (в уравнениях ниже мы предполагаем, что $T \equiv 1$)

$$F(\alpha) = -\ln Z(\alpha) = F_{\text{вз}}(\alpha) + F_{\text{эл}}(\alpha), \quad (5.17)$$

где

$$F_{\text{эл}}(\alpha) = -S(\alpha). \quad (5.18)$$

Вклады $F_{\text{эл}}(\alpha)$ от объемных взаимодействий в свободные энергии незаузленной и теневой цепи той же самой плотности (т.е. с тем же самым значением α) эквивалентны. Поэтому единственное различие касается упругой части свободной энергии $F_{\text{эл}}$, или, другими словами, конформационной энтропии. Таким образом, уравнение (5.16) может быть представлено в форме

$$q(\alpha) = \exp(-F(\alpha) - F_0(\alpha)) = \exp(S(\alpha) - S_0(\alpha)). \quad (5.19)$$

В соответствии с вычислениями Фиксмана [91] энтропия фантомной цепи $S_0(\alpha)$ ($S_0(\alpha) = \ln Z_0(\alpha)$) в области $\alpha < 1$ может быть написан в следующем виде:

$$S_0(\alpha) \simeq -\alpha^{-2}. \quad (5.20)$$

В области слабого сжатия $0,6 < \alpha \leq 1$ вероятность нетривиального заузливания $p(\alpha)$ может быть оценена исходя из выражения для энтропии фантомной цепи (уравнение (5.20)). Объединяя уравнения (5.19) и (5.20) и сравнивая выражение (5.20) с данными численного эксперимента [1], мы можем написать

$$p(\alpha) = 1 - A_1 \exp(-B_1 \alpha^{-2}) \quad (0,6 < \alpha \leq 1), \quad (5.21)$$

где A_1 и B_1 — числовые константы (их значения приведены ниже).

Нетривиальная часть нашей проблемы сводится тем самым к оценке энтропии сильно сжатой ($\alpha \ll 1$) кольцевой незаузленной полимерной цепи. Используя уравнения (5.13) и (5.14) и определение α , находим

$$S(\alpha) \simeq -\frac{1}{N_e} \alpha^{-6}. \quad (5.22)$$

В интересующей нас области ($\alpha < 0,6$) мы можем пренебречь членом α^{-2} по сравнению с членом α^{-6} . Поэтому финальная оценка вероятности имеет вид

$$p(\alpha) = 1 - A_2 \exp\left(-\frac{1}{N_e} \alpha^{-6}\right) \quad (\alpha < 0,6), \quad (5.23)$$

где A_2 и N_e — числовые константы (их значения также приведены ниже).

Вероятности формирования нетривиального узла $p(\alpha)$ в слабых и сильных областях сжатия изображены на рис. 16 соответственно пунктирной и непрерывной линиями. Значения констант таковы: $A_1 = 1,2$, $B_1 = 0,25$, $A_2 = 0,925$, $N_e = 34$; напомним, что они выбраны из сравнения выражений (5.21) и (5.23) с численными данными работы [1].

5.2.3. Концепция квазиузлов в сколлапсированной (глобулярной) фазе незаузленных полимеров. Результаты разделов 2 и 3 помогают ответить на принципиальный вопрос: почему складки остаются сегрегированными в слабо заузленном топологическом состоянии на всех масштабах при флуктуациях цепи в пространстве и не перепутываются друг с другом? Чтобы разъяснить это обстоятельство, следует начать с определения топологического состояния складки, т.е. части кольцевой цепи. Разумеется, математически строгое определение топологического состояния может быть сформулировано лишь для замкнутого (или бесконечного) контура. Тем не менее каждодневный опыт завязывания шнурков на ботинках говорит нам, что даже незамкнутая нить может быть заузлена. Таким образом, представляется привлекательным ввести понятие *квазиузла* для описания длинных линейных цепей со свободными концами.

Впервые подобные идеи высказывались в 1973 г. И.М. Лифшицем и А.Ю. Гроссбергом [92] для глобулярного состояния цепи. Рассмотрим незамкнутую цепь в глобулярном состоянии. Расстояние между концами цепи по порядку величины есть $R \sim aN^{1/3}$, т.е. гораздо меньше, чем контурная длина цепи $L \sim Na$. Поэтому топологическое состояние замкнутой петли, представляющей собой объединение самой незамкнутой цепи и отрезка, соединяющего концы траектории, могло бы грубо характеризовать топологию рассматриваемой цепи в целом. Составную петлю следует рассматривать как квазиузел для линейной цепи.

Топологическое состояние квазиузла может характеризоваться сложностью η , введенной в разделе 3 (см. уравнение (3.15)). Следует отметить, что концепция квазиузла потерпела неудачу при попытке описания гауссовых цепей, где большие пространственные флуктуации расстояния между концами цепи приводят к неопределенности квазитопологического состояния.

Наша модель складчатой глобулы может быть переформулирована в терминах квазиузлов. Рассмотрим множество всех замкнутых петель, образованных случайным замыканием концов цепи в глобулярной фазе, и выделим подмножество петель с $\eta(L) = 0$. Определим теперь среднее значение сложности квазиузла $\langle \eta(l) \rangle$, отвечающего произвольной субчасти длины l ($l/L = h = \text{const}$; $0 < h < 1$) рассматриваемой петли длины L . В глобулярном состоянии вероятность $\pi(\mathbf{r})$ найти конец цепи длины L в некоторой точке $\mathbf{r}$ внутри объема глобулы R^3 по порядку величины есть

$\pi(\mathbf{r}) \sim 1/R^3$, т.е. является величиной, не зависящей от точки $\mathbf{r}$ (это соотношение справедливо при $La \gg R^2$). Таким образом, для глобулярной фазы макромолекулы мы можем предположить, что петли в ансамбле генерированы с однородным распределением. Если это так, то наша система удовлетворяет условию броуновского моста и согласно гипотезе раздела 3 (формула (3.60)) мы можем применить предложенную в разделе 3 масштабно-инвариантную оценку усредненной сложности квазиузла $\sqrt{\langle \eta^2(l) \rangle}$

$$\sqrt{\langle \eta^2(l) \rangle} \sim l^{1/2} = h^{1/2} L^{1/2}. \quad (5.24)$$

Это значение следует сопоставить с усредненной сложностью $\sqrt{\langle \eta^2(l) \rangle}$ участка той же самой длины l равновесной глобулы, образованной линейной (незамкнутой) цепью длины L , т.е. без условия броуновского моста

$$\sqrt{\langle \eta^2(l) \rangle} \sim l = hL. \quad (5.25)$$

Сравнивая (5.24) и (5.25), мы заключаем, что любая часть кольцевой незаузленной цепи в глобулярном состоянии заузлена гораздо слабее, чем та же самая часть линейной цепи в равновесной глобуле. Подчеркнем, что данное утверждение является статистически достоверным и не связано с кинетикой образования конденсированного состояния (фрактальной глобулы).

6. Некоторые узловые проблемы теории вероятности и статистической физики

Обычно в заключении принято делать выводы и незаметно подводить читателя к мысли о масштабности проделанной автором работы. Не хотелось бы идти обычным путем и подводить итог сказанному, поскольку резюме полученных результатов вместе с концептивным изложением идей и методов было приведено во введении, а некоторая незавершенность изложения лишь пробуждает фантазию.

Следует обратить внимание на "подводные камни", которые постоянно встречались в процессе работы, а также сформулировать возможные, еще не решенные проблемы, логически вытекающие из данного рассмотрения. Таким образом, можно схематично обозначить границы данного исследования и предоставить право читателю самому решать, заслуживает ли данный предмет дальнейшего внимания.

6.1. Замечания и комментарии к разделу 2

1. Вывод формул (2.57), (2.58) предполагал переход от модели с короткодействием к среднеполевой теории, в которой все спины взаимодействуют со всеми. С точки зрения топологии такая аппроксимация является нефизичной и требует обоснования. Мы полагаем, что рассмотренная модель может быть исследована с помощью конформных и ренормгрупповых методов в случае "слабого беспорядка", т.е. когда существует сильная асимметрия в выборе проходов и переходов на решетке.

2. Как было показано выше, использование топологического инварианта Джонса с необходимостью приводит нас к изучению термодинамических свойств модели Поттса. В работе [57] отмечалось, что полиномы Александра естественным образом связаны со статистической суммой модели свободных фермионов и, следовательно, с моделью Изинга. Возможно, что ис-

пользование подобного функционального представления полиномов Александра в рамках нашей неупорядоченной модели привело бы к более простым уравнениям, имеющим отношение к статистическим свойствам спиновых стекол Изинга.

3. Все полученные результаты относятся к модели, которая является эффективно двумерной, так как мы интересуемся статистическими свойствами планарной проекции узла, и в которой отсутствуют все пространственные степени свободы и сохранен лишь топологический беспорядок. Таким образом, модель соответствует физической ситуации, отвечающей глобулярной фазе полимерной цепи, находящейся в узкой двумерной щели. В связи с этим представляет значительный интерес следующий вопрос: как пространственные флуктуации траектории в трехмерном пространстве модифицируют наше рассмотрение и, в частности, оценку (2.65)?

6.2. Замечания и комментарии к разделам 3 и 4

1. Исследование топологических свойств траекторий на многосвязных многообразиях (на плоскостях с набором выколотых точек) с точки зрения конформной теории поля предполагает построение топологических инвариантов исходя из свойств монодромии корреляционных функций соответствующих конформных теорий. В связи с этим возникает вопрос о возможности построения конформной теории поля с монодромиями локально-свободной группы, рассмотренной в работе.

2. Несомненно, важным представляется нам вопрос об установлении связи между конструированием инвариантов узлов и спектральными свойствами динамических систем на гиперболических многообразиях. Природа упомянутой связи состоит в предполагаемой зависимости между инвариантами узлов (в простейшем случае полиномов Александра), записанными в терминах следа от произведения элементов некоторой гиперболической группы (см. выражение (3.14)), и следа Сельберга для некоторой динамической системы на той же группе.

3. Сопоставляя функцию распределения примитивных путей μ (4.33) с функцией распределения сложности узла η (3.15), мы можем заключить, что оба этих инварианта имеют один и тот же физический смысл: случайное блуждание на накрывающей, построенной для решетки препятствий, эквивалентно, с топологической точки зрения, к случайному блужданию на дереве Кейли. Таким образом, сложность узла пропорциональна длине кратчайшего (неприводимого) слова, записанного в терминах генераторов группы кос, т.е. пропорциональна длине геодезической на некоторой поверхности постоянной отрицательной кривизны. Мы полагаем, что детальное изучение этой взаимосвязи окажется весьма полезным для использования алгебраических инвариантов при решении задач о статистике ансамблей флуктуирующих цепных молекул с фиксированным топологическим состоянием каждой отдельной цепи.

3. Вопросы, рассматриваемые в разделе 3, допускают интерпретацию в духе проблем теории спиновых стекол, обсужденных в разделе 2. Предположим, что имеется замкнутая траектория длины L , которую мы случайно бросаем на плоскость с регулярным множеством выколотых точек (особенностей). Пусть одна точка траектории зафиксирована. Возникает следующий вопрос:

какова вероятность обнаружить случайную траекторию в заданном топологическом состоянии? Топологическое состояние траектории является типичным примером замороженного беспорядка. Согласно общей концепции, чтобы найти соответствующую функцию распределения (статистическую сумму), необходимо усреднить моменты топологического инварианта по распределению Гаусса (мере траекторий на плоскости). Те же самые предположения позволяют нам предположить, что функция $g(r, \psi)$ (якобиан конформного преобразования; см. рис. 12) имеет смысл ультраметрического потенциала, в котором происходит случайное блуждание и где каждая долина соответствует некоторому данному топологическому состоянию. Чем ближе r к 1, тем выше барьеры между соседними долинами. Таким образом, все достаточно длинные ($La \gg c^2$) случайные траектории в таком потенциале станут локализованными в некоторых сильно зацепленных состояниях в том смысле, что вероятность спонтанного распутывания траектории длины La по порядку величины есть $\exp[-\text{const} \cdot (La/c^2)]$. Возможно, что эта аналогия могла бы быть полезна для обычной теории спиновых стекол, что связано с наличием явного выражения для ультраметрического фазового пространства Паризи [20] в терминах аналитических двоякопериодических функций.

6.3. Замечания и комментарии к разделу 5

1. Мы хотели бы высказать соображение (см. также [93]) относительно возможности переформулировки некоторых статистико-топологических проблем для сильно сколлапсированных полимерных цепей (см. раздел 5.4) в терминах интеграла по путям с заданной фрактальной размерностью (однако без явного задания топологических характеристик).

Мы показали, что в ансамбле сильно сколлапсированных незаузленных цепей (путей) наибольшая доля из них имеет фрактальную размерность $D_f = 3$.

Мы полагаем, что почти все пути в ансамбле траекторий с фрактальной размерностью $D_f = 3$ топологически изоморфны достаточно простому (т.е. близкому к тривиальному) узлу.

Напомним, что проблема вычисления функции распределения для замкнутой полимерной цепи с топологическими ограничениями может быть представлена в виде интеграла по множеству Ω замкнутых путей с фиксированным значением топологического инварианта (см. раздел 2)

$$Z = \int_{\Omega} D_w\{r\} e^{-H} = \int \dots \int D_w\{r\} e^{-H} \delta[I - I_0], \quad (5.26)$$

где $D_w\{r\}$ означает интегрирование с обычной мерой Винера и $\delta[I - I_0]$ вырезает пути с заданным значением топологического инварианта (I_0 соответствует тривиальным узлам).

Если наше соображение верно, то интегрирование по Ω в (5.26) для цепей в глобулярной фазе (т.е. когда $La \gg R^2$) может быть заменено интегрированием по всем путям без каких-либо топологических ограничений, но со специальной новой мерой $D_f\{r\}$:

$$Z = \int \dots \int D_f\{r\} e^{-H}. \quad (5.27)$$

Обычная мера Винера $D_w\{r\}$ сконцентрирована на траекториях с фрактальной размерностью $D_f = 2$. Мы пред-

полагаем, что для описания статистики кольцевых незаузленных цепей должна использоваться мера $D_f\{r\}$ с фрактальной размерностью $D_f = 3$.

2. Мы полагаем, что найденное распределение сложности узла для некоторых модельных систем может служить отправной точкой в построении среднеполевой теории типа Гинзбурга–Ландау для флуктуирующих полимерных цепей с фиксированной топологией. В качестве физической модели представляется важным построение теории среднего поля, учитывающей влияние топологических ограничений на свойства фазовых переходов в пучках перепутанных направленных полимеров.

3. Отметим, что несмотря на наличие ряда экспериментальных работ, свидетельствующих в пользу существования фрактальной глобулы (см. раздел 5 и список литературы), непосредственное наблюдение этой структуры в эксперименте связано со значительными техническими трудностями и до сих пор не осуществлено. Мы полагаем, что постановка эксперимента по определению микроструктуры незаузленной кольцевой молекулы в глобулярной фазе могла бы внести ясность в вопрос о существовании фрактальной глобулы.

Список литературы

1. Франк-Каменецкий М Д, Вологодский А В *УФН* **134** 641 (1981); Вологодский А В и др. *ЖЭТФ* **66** 2153 (1974); Вологодский А В, Лукашин А В, Франк-Каменецкий М Д *ЖЭТФ* **67** 1875 (1974); Frank-Kamenetskii M D, Lukashin A V, Vologodskii A V *Nature* (London) **258** 398 (1975)
2. Wilsceck F *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (Singapore: WSPC, 1990)
3. Majid S *Int. J. Mod. Phys. A* **8** 4521 (1993)
4. Gómez C, Sierra G J. *Math. Phys.* **34** 2119 (1993)
5. Jones V F R *Pacific J. Math.* **137** 311 (1989); Likorish W B R *Bull. London Math. Soc.* **20** 558 (1988); Wadati M, Deguchi T, Akutsu Y *Phys. Rep.* **180** 247 (1989)
6. Alekseev A *Integrable Models and Strings Lect. Not. Phys.* **436** (Springer: Heidelberg, 1994); Kauffman L H *AMS Contemp. Math. Series* **78** 263 (1989)
7. Kauffman L H *Topology* **26** 395 (1987)
8. Vassiliev V A *Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications Math. Monographs* **98** (Trans. AMS, 1992); Bar-Natan D, Preprint Harvard, 1992
9. Edwards S F *Proc. Phys. Soc. London* **91** 513 (1967)
10. Yor M J. *Appl. Prob.* **29** 202 (1992); *Math. Finance* **3** 231 (1993)
11. Comtet A, Desbois J, Monthus C J. *Stat. Phys.* **73** 433 (1993); Desbois J J. *Phys. A* **25** L-195, L-755 (1992); Desbois J, Comtet A J. *Phys. A* **25** 3097 (1992)
12. Wiegand F *Introduction to Path-Integrals Methods in Physics and Polymer Science* (Singapore: WSPC, 1986)
13. Khandekar D C, Wiegand F W J. *Phys. A* **21** L563 (1988); *J. Phys. (Paris)* **50** 263 (1989)
14. Hofstadter D R *Phys. Rev. B* **14** 2239 (1976); Guillemin J P, Helffer B, Treton P J. *Phys. (Paris)* **50** 2019 (1989)
15. Wiegmann P B, Zabrodin A V *Phys. Rev. Lett.* **72** 1890 (1994); *Nucl. Phys. B* **422** 495 (1994)
16. Bellissard J, in *Statistical mechanics and field theory: Mathematical aspects: Proc. of the International Conference, Groningen, Netherlands 26–30 August 1985* (Lecture Notes in Physics, Vol. 257) (Berlin: Springer-Verlag, 1986) p. 99
17. Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т *Современная геометрия: Методы и приложения* (М.: Наука, 1979)
18. Wu F Y *Rev. Mod. Phys.* **54** 235 (1982)
19. Baxter R J *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics* (London: Academic Press, 1982)
20. Mezard M, Parisi G, Virasoro M *Spin Glass Theory and Beyond* (Singapore: WSPC, 1987)
21. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982)
22. Reidemeister K *Knotentheorie* (Berlin: Springer, 1932)

23. Kauffman L H *Knots and Physics* (Teaneck, NJ: World Scientific, 1991)
24. Grosberg A Yu, Nechaev S J. *Phys. A* **25** 4659 (1992)
25. Wu F Y J. *Knot Theory Ramific.* **1** 32 (1992)
26. Grosberg A Yu, Nechaev S. *Europhys. Lett.* **20** 613 (1992)
27. Duplantier B, David F J. *Stat. Phys.* **51** 327 (1988)
28. Edwards S F, Anderson P W J. *Phys. F* **5** 965 (1975)
29. Cwiliich G, Kirkpatrick T R J. *Phys. A* **22** 4971 (1989)
30. De Santis E, Parisi G, Ritort F, Preprint: cond-mat/9410093
31. Gross D J, Kanter I, Sompolinsky H. *Phys. Rev. Lett.* **55** 304 (1985)
32. Bellissard J, Simon B J. *Funct. Anal.* **48** 408 (1982)
33. Gutzwiller M *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (NY: Springer-Verlag, 1990)
34. Terras A *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications* (NY: Springer-Verlag, 1979)
35. Hejhal D *The Selberg Trace Formula for PSL(2, IR) Lect. Notes in Math.* **548** (Berlin: Springer, 1976); **1001** (Berlin: Springer, 1983)
36. Chassaing P, Letac G, Mora M *Probability Measures on Groups Lect. Not. Math.* **1064** (1983)
37. Nechaev S K *Statistics of Knots and Entangled Random Walks* (Piver Edge, NJ: World Scientific, 1996)
38. Lerda A *Anyons Lect. Notes in Phys.* **14** (Berlin: Springer, 1992)
39. Fürstenberg H *Trans. Am. Math. Soc.* **198** 377 (1963); Тутубалин В *Теор. вер. и ее примен.* **10** 19 (1965)
40. Nechaev S, Sinai Ya *Bol. Sci. Bras. Mat.* **21** 121 (1991)
41. Korolov L, Nechaev S, Sinai Ya *Prob. Theor. Appl.* **38** 331 (1993)
42. Mirlin A, Fyodorov Y J. *Phys. A* **24** 227 (1991); Fyodorov Y *Basic Features of Efetov's supersymmetry approach Mesoscopic Quantum Physics, Les Houches, session LXI, 1994* (Amstredam: Elsevier, 1995)
43. Khokhlov A R, Nechaev S K. *Phys. Lett. A* **112** 156 (1985); Nechaev S, Semenov A, Koleva M. *Physica A* **140** 506 (1987)
44. Nechaev S, Vershik A J. *Phys. A* **27** 2289 (1994)
45. Monastyrsky M, Nechaev S. *Mod. Phys. Lett. A* **12** 589 (1997)
46. Nechaev S K, Grosberg A Yu, Vershik A M. *J. Phys. A* **29** 2411 (1996)
47. Kesten H. *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** 336 (1959)
48. Vershik A M. *Topics in Algebra* **26** pt. 2 467 (1990); *Proc. Am. Math. Soc.* **148** 1 (1991)
49. Helfand E, Pearson D S J. *Chem. Phys.* **79** 2054 (1983); Rubinstein M, Helfand E J. *Chem. Phys.* **82** 2477 (1985)
50. Cates M E, Deutsch J M J. *Phys. (Paris)* **47** 2121 (1986)
51. Вершик А М *частное сообщение*
52. Desbois J, Nechaev S J. *Stat. Phys.* **88** 201 (1997)
53. Comtet A, Nechaev S, J. *Phys. A* в печати preprint cond-mat/9707120
54. Desbois J, Nechaev S J. *Phys. A* в печати preprint cond-mat/9707121
55. Jones V F R. *Bull. Am. Math. Soc.* **12** 103 (1985)
56. Вершик А М, Керов С В *ДАН СССР* **301** 777 (1988)
57. Kauffman L H, Saleur H. *Comm. Math. Phys.* **141** 293 (1991)
58. Akutsu Y, Deguchi T. *Phys. Rev. Lett.* **67** 777 (1991); Akutsu Y, Wadati M J. *Phys. Soc. Jpn.* **56** 839, 3039 (1987)
59. Birman J *Knots, Links and Mapping Class Groups Ann. Math. Stud.* **82** (Princeton: Princeton Univ. Press, NJ, 1976)
60. Mumford M *Tata Lectures on Theta, I, II* (Boston, MA: Birkhauser, 1983)
61. Летчиков А В *УМН* **51**(1) 51 (1996)
62. Zinn-Justin J *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon, 1996)
63. Герценштейн М Е, Васильев В Б *Теор. вер. и ее примен.* **4** 424 (1959); Карпелевич Ф И, Тутубалин В Н, Шур М Г *Теор. вер. и ее примен.* **4** 432 (1959)
64. Polyakov A M. *Mod. Phys. Lett. A* **3** 325 (1988); Witten E. *Comm. Math. Phys.* **121** 351 (1989)
65. Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B. *Nucl. Phys. B* **241** 333 (1984)
66. Nechaev S K. *J. Phys. A* **21** 3659 (1988)
67. Ito K, McKean H P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths* (Berlin, New York: Springer-Verlag, 1965)
68. Голубев В В *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений* (М.-Л.: ГИТТЛ, 1950); Венков А Б, Препринт ЛОМИ P/2/86
69. Dotsenko V I S. *Nucl. Phys. B* **235** [FS11] 54 (1984)
70. Knizhnik V G, Zamolodchikov A B. *Nucl. Phys. B* **247** 83 (1984)
71. Guadagni E, Martinelli M, Mintchev M. CERN-TH preprints 5419/89, 5420/89, 5479/89
72. Chandrasekharan K. *Elliptic Functions* (Berlin: Springer, 1985)
73. Гросберг А Ю, Хохлов А Р *Статистическая физика макромолекул* (М.: Наука, 1993)
74. Korolov L B, Nechaev S K, Sinai Ya G. *Chaos* **1** 131 (1991)
75. Gutan A M, Grosberg A Yu, Shakhnovich E I. *Macromolecules* **26** 1293 (1993)
76. De Gennes P G. *Scaling Concepts in Polymer Physics* (Ithaca: Cornell Univ. Press, 1979)
77. Холоденко А *частное сообщение*
78. Lifshitz I M, Grosberg A Yu, Khokhlov A R. *Rev. Mod. Phys.* **50** 683 (1978)
79. Grosberg A Yu, Nechaev S K, Shakhnovich E I. *J. Phys. (Paris)* **49** 2095 (1988)
80. Chu B, Ying Q, Grosberg A. *Macromolecules* **28** 180 (1995)
81. Grosberg A, Rabin Y, Havlin S, Neer A. *Europhys. Lett.* **23** 373 (1993); Grosberg A, Rabin Y, Havlin S, Neer A. *Biofizika* **38** 75 (1993)
82. Ma J, Straub J E, Shakhnovich E I. *J. Chem. Phys.* **103** 2615 (1995)
83. Grosberg A Yu, Nechaev S K. *Macromolecules* **24** 2789 (1991)
84. Khokhlov A R, Nechaev S K. *J. Phys. II* (Paris) **6** 1547 (1996)
85. Nachlis W L, Kambour R P, McKnight W J. *Abstracts of the 35th IUPAC Congress* **2** 796; Nachlis W L, Kambour R P, McKnight W J. *Polymer* **39** 3643 (1994)
86. Michels J P J, Wiegell F W. *Proc. Soc. London Ser. A* **403** 269 (1986)
87. Koniaris K, Muthukumar M. *Phys. Rev. Lett.* **66** 2211 (1991)
88. Tsurusaki K, Deguchi T. *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** 1506 (1995); Deguchi T, Tsurusaki K. *Knot Theory Ramific.* **3** 321 (1994)
89. Klenin K V, Vologodski A V, Anshelevich V V, Dykhne A M. *J. Biomol. Struct. Dyn.* **5** 1173 (1988)
90. Van Rensburg E J, Whittington S G J. *Phys. A* **23** 3573 (1990); Le Bret M. *Biopolymers* **19** 619 (1980)
91. Fixman M J. *Chem. Phys.* **36** 306 (1962)
92. Лифшиц И М, Гросберг А Ю *ЖЭТФ* **65** 2399 (1973)
93. Grosberg A Yu, Nechaev S K. *Adv. Polym. Sci.* **106** 1 (1993)

Problems of probabilistic topology: statistics of knots and noncommutative random walks

S.K. Nechaev

L D Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow
ul. Kosygina 2, 117334 Moscow, Russia
E-mail: nechaev@landau.ac.ru

The paper reviews the state of affairs in a modern branch of mathematical physics called probabilistic topology. In particular we consider the following problems: (i) we estimate the probability of a trivial knot formation on the lattice using the Kauffman algebraic invariants and show the connection of this problem with the thermodynamic properties of 2D disordered Potts model; (ii) we investigate the limiting behavior of random walks in multiconnected spaces and on noncommutative groups related to the knot theory. We discuss the application of the above-mentioned problems in the statistical physics of polymer chains. On the basis of noncommutative probability theory we derive some new results in the statistical physics of entangled polymer chains which unite rigorous mathematical facts with intuitive physical arguments.

PACS numbers: 02.40.Re, 02.50.Cw, 36.20.Ey
Bibliography — 93 references

Received 8 July 1997, revised 10 November 1997