

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

# Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом

А.И. Олемской

*Рассмотрены стохастические системы с межчастичным взаимодействием и шумом, интенсивность которого изменяется с амплитудой гидродинамической моды  $x$  согласно степенной зависимости  $x^{2a}$ ,  $a \in [0, 1]$ . Показано, что область определения в фазовом пространстве стохастической переменной  $x$  образует самоаффинное множество с фрактальной размерностью  $D = 2(1 - a)$ . В рамках калибровочной процедуры фиксирован выбор исчисления, сводящийся не только к случаям Ито и Стратоновича. Обобщение микроскопической картины фазовых переходов показывает, что при  $1 < D \leq 2$  система может испытывать потерю симметрии, а при  $0 < D \leq 1$  — потерю эргодичности. Кроме того, во всем интервале  $D \in [0, 2]$  реализуется переход, индуцированный шумом.*

PACS numbers: 05.40.+j, 05.70.Fh, 64.60.-i, 82.20.Fd

## Содержание

1. Введение (287).
  2. Методы описания стохастической системы (290).
    - 2.1. Стохастическое уравнение движения. 2.2. Решение стохастического уравнения движения. 2.3. Полевое представление стохастической системы. 2.4. Уравнение Фоккера – Планка. 2.5. Решение уравнения Фоккера – Планка.
  3. Описание стохастической системы с сингулярным мультипликативным шумом (300).
    - 3.1. Калибровка распределения вероятности стохастической системы. 3.2. Фазовые переходы в стохастической системе. 3.3. Фрактальная природа фазового пространства.
  4. Нарушение симметрии и эргодичности стохастических систем с межчастичным взаимодействием (309).
    - 4.1. Введение межчастичного взаимодействия при описании стохастической системы. 4.2. Теория стохастической системы с нарушенной симметрией. 4.3. Теория неэргодической стохастической системы. 4.4. Связь фрактальной природы фазового пространства с характером поведения стохастической системы.
  5. Влияние шума на характер поведения синергетической системы (315).
    - 5.1. Стохастическая система Лоренца. 5.2. Описание синергетического перехода при аддитивном шуме. 5.3. Описание синергетического перехода при мультипликативном шуме.
  6. Заключение (320).
- Список литературы (321).

## 1. Введение

Начиная с работ Максвелла – Больцмана – Гиббса теория стохастических систем является объектом повышенного внимания, и в последнее время их исследование занимает ведущее место в теоретической физике. Прежде всего это связано, по-видимому, с универсальностью концепции стохастичности, использование которой обусловлено тем, что поведение системы с бесконечным числом степеней свободы не может быть представлено однозначным детерминированным образом. Данный факт осознавался уже Гиббсом, предложившим схему статистической физики, основанную на эргодической гипотезе [1]. Основным ее положением является то обстоятельство, что в состоянии термодинамического равновесия поведение макроскопической системы, характеризуемое средними по времени, может быть представлено распределением по статистическому ансамблю, имитирующему эволюцию этой системы. В результате усреднение по ансамблю Гиббса позволяет описать, с точностью до флуктуационных поправок, измеряемые в эксперименте средние по времени. По сути дела, на тех же идеях основан и метод Больцмана для кинетического описания неравновесных систем [2]. Решение предложенного им кинетического уравнения позволяет найти не только распределение по статистическому ансамблю, но и его эволюцию со временем. При этом принципиально важное значение имеет теорема о возрастании энтропии. Она означает, что несмотря на обратимость движения отдельных частиц, их ансамбль ведет себя таким образом, что беспорядок в распределении этих частиц не может спадать со временем. Таким образом, Больцман впервые столкнулся с проблемой связи механической обратимости и статистической необратимости. Согласно возвратной теореме Пуанкаре и Цермело такая связь объясняется тем обстоятельством, что

А.И. Олемской. Сумский государственный университет,  
244007 Сумы, ул. Римского-Корсакова 2, Украина  
Тел. (0542) 33-55-13  
E-mail: alexander@olem.sumy.ua

Статья поступила 23 сентября 1997 г.

любая точка фазовой траектории эргодической системы многих частиц по истечении достаточно большого времени возвращается сколь угодно близко к исходному положению [3]. Поэтому после усреднения по конечному участку пространства, которое всегда проводится при переходе к макроскопическим величинам, происходит такое огрубление в представлении стохастической системы, которое приводит к потере тонких деталей фазовой траектории и тем самым обуславливает необратимость. В последнее время выяснилось, что с геометрической точки зрения это связано с фрактальными свойствами фазовой траектории, которая представляет собой самоаффинный геометрический образ, обладающий дробной размерностью [4]. В то же время оказалось, что данное свойство проявляется уже в фазовом пространстве, размерность которого не меньше трех [5].

Характерная особенность представленных систем состоит в том, что в силу их консервативности необратимость поведения обусловлена детерминированным хаосом [6, 7]. Это означает, что точные уравнения движения исходных степеней свободы носят совершенно детерминистический характер, однако при переходе к усредненным величинам появляются стохастические слагаемые. В последнее время в связи с развитием синергетической концепции выяснилось весьма забавное свойство таких систем — оказалось, что нарастание интенсивности стохастических слагаемых может приводить не только к росту беспорядка, но и образованию упорядоченных структур, т.е. самоорганизации системы, уменьшающей ее энтропию [5, 8–11]. Очевидно, последнее связано с неконсервативностью объема фазового пространства, по которому проводится усреднение, поскольку в полной замкнутой системе энтропия не может уменьшаться. При значительном удалении от равновесия в поведении открытых систем проявляются качественно новые особенности. В частности, становится возможным автоколебательное поведение типа реакции Белоусова–Жаботинского [12], образование иерархически соподчиненных структур [13] и т.д.

При построении теории статистических систем основная идея состоит в переходе от точного уравнения механического движения многих частиц к приближенным стохастическим уравнениям, которые описывают поведение гидродинамических степеней свободы, характеризующих динамическими переменными, усредненными по конечному объему фазового пространства. Кроме взаимодействия этих мод, которое представляется детерминистическими слагаемыми, следует учитывать также действие среды, имитирующей не учитываемые явным образом негидродинамические степени свободы. Оно может приводить как к детерминистическому вкладу, так и к появлению флуктуаций. Принципиально важным является отличие этих флуктуаций — внешних по отношению к выделенным степеням свободы, от внутренних флуктуаций, наличие которых связано со случайным отклонением динамических переменных от своих средних значений. Относительная величина таких флуктуаций изменяется с ростом числа частиц  $N$ , по которым проводится усреднение, как  $N^{-1/2}$ , и поэтому при  $N \rightarrow \infty$  внутренними флуктуациями, как правило, можно пренебречь. Совершенно отличная ситуация наблюдается для внешних флуктуаций: поскольку они обусловлены действием внешней среды, то их интенсивность не может зависеть от числа частиц  $N$ ,

являющегося характеристикой выделенной подсистемы, а не окружающей ее среды. Поэтому в отличие от внутренних флуктуаций действие внешних может привести к значительным изменениям в поведении системы. Наиболее популярным примером такого рода являются стохастические системы, испытывающие фазовые переходы, индуцированные шумом [14]. Они состоят в том, что нарастание интенсивности внешних флуктуаций приводит к качественным изменениям вида стационарной функции распределения микросостояний.

Первым примером стохастической системы, в которой внешние флуктуации играют определяющую роль, явилась задача о броуновском движении частицы под действием столкновений с молекулами жидкости, в которую погружена эта частица [15]. Ее решение показало, что среднее значение квадрата смещения частицы равно времени, умноженному на удвоенный коэффициент диффузии. Соответственно стационарное распределение возможных значений координаты имеет гауссовский вид. Если величина коэффициента диффузии не меняется с координатой, то принято говорить, что стохастическая система обладает аддитивным шумом [14–18]. Однако оказывается, что не только внешние флуктуации влияют на стохастическую систему, но и последняя оказывает обратное воздействие на их интенсивность (применительно к задаче о броуновском движении это означает, что коэффициент диффузии приобретает зависимость от координаты частицы). В таком случае принято говорить, что внешние флуктуации имеют мультипликативный характер. На их наличие было указано в работах [19–21]. Понятие мультипликативного шума впервые использовалось Кубо [22] при описании стохастической формы спектральной линии. В [23, 24] исследовалось влияние внешнего гауссовского шума на хаотическое поведение системы, которое моделировалось логистической последовательностью. Оказалось, что вблизи аттракторов, определяющих предельное поведение стохастической системы, такие флуктуации либо генерируют бифуркации, либо приводят к трансформации хаотического режима в автоколебательный.

Одна из проблем описания стохастической системы с мультипликативным шумом состоит в выборе исчисления. Это связано с тем, что решение стохастического уравнения движения является не единственным, а реализуется континуальный набор таких решений. Каждое из них реализуется с вероятностью, величину которой получают при решении уравнения Фоккера–Планка [15]. Оказывается, что сила, входящая в эти уравнения, определяется неоднозначным образом. В исчислении Ито [25] она сводится к реальной силе, действующей на выделенную степень свободы. При переходе к исчислению Стратоновича [26] возникает добавка, пропорциональная интенсивности шума и производной от эффективного коэффициента диффузии. В кинетическом представлении Климонтовича [27] величина этой добавки удваивается. Можно показать, что множество возможных исчислений является континуальным и, таким образом, указанная добавка представляет собой произвольную величину. Характерно, что она существенным образом влияет на поведение стохастической системы, в результате чего представляется актуальным вопрос о физической природе указанной добавки и выборе исчисления.

Предлагаемая работа посвящена теоретическому исследованию стохастических систем с сингулярным белым шумом, интенсивность которого, изменяясь с величиной стохастической переменной  $x$ , принимает нулевое значение при  $x = 0$ . Раздел 2 посвящен изложению математического аппарата, используемого для представления стохастической системы. В разделе 2.1 приведена стандартная схема получения стохастического уравнения движения. Исследована природа мультипликативного шума для однородных и пространственно распределенных систем. Раздел 2.2 посвящен изложению схемы, приводящей к различным исчислениям при решении стохастического уравнения движения. Выяснено, что выбор исчисления задается фиксацией точки, в которой определяется производная временной зависимости стохастической переменной. В исчислении Ито эта точка отвечает левой границе бесконечно малого временного интервала, приводящего к дифференциалу времени. Соответственно в представлениях Стратоновича и Климонтовича данная точка отвечает центру и правой границе этого интервала. В общем случае выбор исчисления определяется параметром  $\lambda \in [0, 1]$ , принимающим для указанных случаев значения 0,  $1/2$ , 1. Решение стохастического уравнения движения содержит фиктивную силу, величина которой пропорциональна параметру  $\lambda$  и производной от мультипликативной функции. Раздел 2.3 посвящен приложению теоретико-полевых методов к исследованию стохастической системы. Показано, что стандартная полевая схема, основывающаяся на выражении производящего функционала через обобщенное действие, применима только к системам с аддитивным шумом. В этой связи для систем с мультипликативным шумом изложена схема перехода к новой стохастической переменной, шум которой становится аддитивным. Основой нашего исследования является уравнение Фоккера – Планка, решение которого описывает распределение вероятности реализации значений стохастической переменной. Его выводу посвящен раздел 2.4, а в разделе 2.5 рассмотрены методы его решения. Простейший путь получения уравнения Фоккера – Планка (см. раздел 2.4.1) основывается на рассмотрении уравнения движения для среднего значения произвольной функции от исходной стохастической переменной. Данный метод имеет формальный характер и основывается на том обстоятельстве, что в стохастическом уравнении движения Ито дифференциал дрейфового слагаемого имеет порядок второй степени дифференциала диффузионной составляющей. Более физичным представляется изложенный в разделе 2.4.2 метод, аналогичный выводу кинетического уравнения. Он основывается на усредненном уравнении непрерывности для одночастичной функции распределения. Показано, что ее коррелятор со случайной составляющей силы равен сумме фиктивной силы, зависящей от выбора исчисления, и составляющей, которая по своему виду напоминает диффузионный поток Онзагера, но не сводится к нему. В разделе 2.4.3 приведена схема получения уравнения Фоккера – Планка, которая в отличие от ранее изложенных носит не феноменологический, а микроскопический характер. Она применима для марковских процессов, описываемых управляющим уравнением, использование которого позволяет представить силу и мультипликативную функцию в виде моментов интенсивности микроскопических переходов. Замечательно,

что получающееся при этом значение фиктивной силы, зависящей от выбора исчисления, оказывается вдвое больше значения, полученного в разделе 2.2 при решении стохастического уравнения. Заключительный раздел 2.5 посвящен исследованию случаев, когда уравнение Фоккера – Планка имеет аналитическое решение. Показано, что такая ситуация реализуется либо в стационарном случае, либо в автомоделном режиме, где зависимость от времени содержится только в характерном значении стохастической переменной, которое выбирается в качестве масштаба. В обоих случаях функция распределения имеет квазигиббсовский вид, где роль температуры играет интенсивность шума, а эффективный гамильтониан сводится к затравочному лишь для аддитивного шума.

Раздел 3 посвящен исследованию влияния сингулярного мультипликативного шума на характер поведения стохастической системы. Поскольку наше рассмотрение основывается на стационарном решении уравнения Фоккера – Планка, то в разделе 3.1 исследован вопрос о наличии силы, возникающей за счет произвола в выборе исчислений. Показано, что эта сила может быть компенсирована, если затравочную плотность вероятности умножить на экспоненту с показателем, величина которого также зависит от выбора исчислений. Такая калибровка вероятности снимает вопрос о выборе исчисления. В то же время указанный показатель экспоненты определяет характер поведения стохастической системы во всем интервале ее эволюции. Рассмотрение проведено как для прямого уравнения Колмогорова (раздел 3.1.1), так и для обратного (раздел 3.1.2). Оказывается, что разница калибровочной схемы для этих уравнений сводится к изменению знака перед показателем экспоненты. Центральное место занимает раздел 3.2, посвященный описанию поведения стохастической системы в зависимости от характера мультипликативного шума. В разделе 3.2.1 исследуется индуцированный шумом переход, при котором плотность вероятности качественно изменяет свой вид, но не приобретает сингулярностей. Показано, что этот переход имеет непрерывный характер только в предельных случаях аддитивного шума и при линейном характере мультипликативной функции. Раздел 3.2.2 посвящен исследованию природы расходимости функции распределения, возникающей при значительных скоростях нарастания мультипликативной функции, когда плотность вероятности приобретает неинтегрируемый характер. Показано, что эта сингулярность отражает наличие детерминистического конденсата, в котором стохастическая переменная сводится к константе в зависимости от времени. Оказалось, что в такой режим может попадать конечная доля степеней свободы, образующих детерминистический конденсат. Найдена зависимость плотности конденсата от характера мультипликативной функции и интенсивности шума. В разделе 3.3 выяснено, что произвол в выборе исчисления, а также представленная в разделе 3.2 картина фазовых переходов обусловлены тем, что область определения стохастической переменной в фазовом пространстве имеет фрактальный вид. Величина фрактальной размерности определяется характером мультипликативной функции. На основе соображений подобия показано, что вероятность переходов между микроскопическими состояниями имеет неаналитический вид. Это приводит к появлению сингулярной силы типа той, что

возникала при выборе исчисления. Однако величина этой силы не является произвольной и пропорциональна не интенсивности шума, а его амплитуде.

Обычно при рассмотрении стохастической системы принимается, что в моделируемом ею многочастичном ансамбле отсутствует взаимодействие. По этой причине до последнего времени не были обнаружены фазовые переходы, понимаемые в обычном смысле [28]. Раздел 4 посвящен исследованию влияния межчастичного взаимодействия на характер поведения стохастической системы. В разделе 4.1 получено стохастическое уравнение движения, содержащее силу межчастичного взаимодействия, записанную в приближении среднего поля, и на его основе найдено стационарное распределение вероятности. Оказалось, что межчастичное взаимодействие приводит к перенормировке параметров разложения Ландау и появлению вклада в эффективный потенциал, который обладает минимальной степенью величины стохастической переменной. Раздел 4.2 посвящен исследованию картины нарушения симметрии стохастической системы. Показано, что оно приводит к асимметрии функции распределения относительно обращения знака стохастической переменной. Найдено условие самосогласования для определения параметра дальнего порядка. Показано, что нарушение симметрии реализуется при размерности фазового пространства, ограниченного значениями 1 и 2. Построена зависимость параметра дальнего порядка от интенсивности шума, а также соответствующая фазовая диаграмма. Их характерная особенность состоит в немонотонности получающихся зависимостей. Показано, что эта немонотонность обусловлена фрактальным характером области определения стохастической системы в фазовом пространстве. Раздел 4.3 посвящен исследованию потери эргодичности стохастической системы с межчастичным взаимодействием. Оказалось, что его влияние на картину потери эргодичности является не таким существенным, как на потерю симметрии. Такая же ситуация имеет место и для перехода, индуцированного шумом. Показано, что отличие от систем без межчастичного взаимодействия состоит в перенормировке критической температуры, входящей в разложение Ландау. В заключительном разделе 4.4 содержится анализ связи фрактальной природы фазового пространства с характером поведения стохастической системы. При этом учитывается не только сила межчастичного взаимодействия, но и сингулярная сила, введенная в разделе 3.3. Оказалось, что ее влияние подобно эффективному возрастанию интенсивности шума. Так, с ростом сингулярной силы происходит уменьшение плотности детерминистического конденсата, параметра дальнего порядка и абсциссы максимума функции распределения.

Раздел 5 посвящен исследованию влияния шума на поведение синергетической системы, представленной стандартной схемой Лоренца. Такая схема подробно исследована в детерминистическом режиме, когда параметр порядка, сопряженное поле и управляющий параметр не имеют флуктуирующих составляющих [5, 10]. В отличие от этого основная задача, поставленная в разделе 5, сведена к выяснению вопроса — каким образом изменится поведение синергетической системы, если все три степени свободы обладают аддитивным шумом? В разделе 5.1 показано, что соподчинение в изменении управляющего параметра и сопряженного

поля величине параметра порядка приводит к трансформации аддитивного шума двух первых степеней свободы в мультипликативный. При этом оказывается, что мультипликативные функции сопряженного поля и управляющего параметра не совпадают. В заключение раздела 5.1 найдено стационарное решение уравнения Фоккера–Планка и положение максимума плотности вероятности в зависимости от интенсивностей шумов. В разделе 5.2 показано, что аддитивный шум параметра порядка не приводит к качественному изменению поведения синергетической системы. Найдена временная зависимость параметра порядка в отсутствие шума. Центральное место в главе занимает раздел 5.3, посвященный исследованию влияния мультипликативного шума на картину самоорганизации. В разделе 5.3.1 показано, что мультипликативный шум сопряженного поля приводит только к сдвигу точки синергетического превращения. Намного более существенным оказывается влияние стохастического управляющего параметра, исследованного в разделе 5.3.2. Оказывается, что нарастание интенсивности шума приводит к подавлению неупорядоченного состояния. Построена фазовая диаграмма, определяющая области существования упорядоченной и неупорядоченной фаз. Показано, что аналогично системам, рассмотренным в разделе 3.2.2, при малой интенсивности шума синергетическая система также может образовывать детерминистический конденсат. В заключительном разделе 5.3.3 проведено обобщение результатов, полученных в 5.3.1 и 5.3.2, на случай совместного учета шумов сопряженного поля и управляющего параметра. Оказалось, что при этом на фазовой диаграмме появляются области метастабильных состояний упорядоченной и неупорядоченной фаз.

В заключительном разделе 6 приведены основные результаты и показано, каким образом приведенный формализм позволяет описать эффекты памяти и незергодичности при наличии мультипликативного шума.

## 2. Методы описания стохастической системы

### 2.1. Стохастическое уравнение движения

Рассмотрим простейший случай стохастической системы, описываемой единственной гидродинамической степенью свободы  $x = x(t)$ , величина которой случайным образом изменяется со временем  $t$ . Как указывалось во введении, для системы многих частиц величина  $x$  представляет собой амплитуду гидродинамической моды типа концентрации (квази)частиц, их потока и т.д. [29]. Если случайная переменная  $x(t)$  обладает ненулевым средним  $\langle x(t) \rangle \equiv \eta$ , то в рассматриваемой системе имеется дальний порядок, определяемый параметром  $\eta \neq 0$ . В качестве наглядного образа стохастической системы удобно рассматривать броуновское движение макроскопической частицы, подверженной действию внешней силы  $f$  и случайным соударениям молекул жидкости, в которую помещена данная частица. При этом стохастическая переменная  $x(t)$  сводится к координате частицы, а параметр порядка  $\eta$  определяет среднее положение.

Для нахождения стохастического уравнения движения, определяющего зависимость  $x(t)$ , рассмотрим детерминистическую систему, характеризующуюся несохраняющейся величиной  $x$  и силой  $f$ . Ее уравнение

движения имеет вид [30]

$$\rho \ddot{x} + \gamma^{-1} \dot{x} = f, \quad (2.1)$$

где точка означает дифференцирование по времени. Для механической системы величина инерциального слагаемого  $\rho \ddot{x}$  определяется эффективной плотностью  $\rho$ , а диссипативная составляющая  $\gamma^{-1} \dot{x}$  — кинетическим коэффициентом  $\gamma$ . При самосогласованном поведении системы сила  $f = f(x)$  задается координатой  $x$ . В линейном приближении имеем  $f = -x/\chi$ , где  $\chi$  — обобщенная восприимчивость, и решение уравнения (2.1) приводит к зависимости  $\exp(\pm i\omega_0 t - t/\tau)$ , где  $\omega_0 = (\chi\rho)^{1/2}$  — частота собственных колебаний,  $\tau = \chi/\gamma$  — время релаксации. Таким образом, инерциальное слагаемое обуславливает наличие колебаний с частотой  $\omega_0$  (реактивный режим), а диссипативное — затухание, характеризуемое временем релаксации  $\tau$ . Для стохастического случая реактивный режим проявляется только в системах, обладающих поведением типа реакции Белоусова–Жаботинского [31]. Обычно же выполняется условие  $\omega_0 \tau \equiv \chi^{3/2} \gamma^{-1} \rho^{1/2} \ll 1$ , и в уравнении (2.1) инерциальным слагаемым можно пренебречь. Тогда, учитывая, что для потенциальных систем сила  $f$  определяется величиной синергетического потенциала  $V(x)$  согласно определению

$$f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (2.2)$$

приходим к уравнению регрессии

$$\dot{x} = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (2.3)$$

которое описывает диссипативный режим эволюции неравновесной системы в стационарное состояние. Первоначально оно было предложено Ландау и Халатниковым для термодинамических систем, где синергетический потенциал сводится к свободной энергии Ландау  $F(\eta)$ . Она отличается от обычного термодинамического потенциала тем, что кроме параметров состояния типа температуры и объема, ее значение определяется параметром порядка  $\eta$ . Это означает, что фиксируется неравновесное квазистатическое состояние, отвечающее заданному значению  $\eta$ . В равновесном состоянии ( $\dot{\eta} = 0$ ) реализуется условие  $\partial F/\partial \eta = 0$ , определяющее стационарное значение параметра порядка [28].

Уравнение Ландау–Халатникова (2.3), описывающее эволюцию термодинамической системы в равновесное состояние, имеет детерминистический характер, в связи с чем под переменной  $x$  в (2.3) следует понимать параметр порядка  $\eta$ , а  $V(x)$  заменить на  $F(\eta)$ . Очевидно, для описания флуктуаций системы вблизи стационарного состояния необходимо учесть стохастическую составляющую  $\zeta = \zeta(t)$  скорости  $\dot{x}$ , что приводит к уравнению Ланжевена

$$\dot{x} = \gamma f + \zeta. \quad (2.4)$$

Здесь детерминистическая сила  $f$  определяется выражением (2.2), а стохастическая скорость  $\zeta(t)$  — своими моментами. Первый из них по определению равен нулю. Для нахождения второго перейдем к фурье-образам  $x(\omega)$ ,  $\zeta(\omega)$  по времени ( $\omega$  — частота) и воспользуемся

флуктуационно-диссипационной теоремой [28]

$$\langle |\delta x(\omega)|^2 \rangle = \frac{2T}{\omega} \text{Im} \chi(\omega), \quad (2.5)$$

где  $\delta x = x - \langle x \rangle$ ,  $\chi(\omega)$  — обобщенная восприимчивость,  $T$  — температура в энергетических единицах. В пределе  $\omega \rightarrow 0$  имеем  $\omega^{-1} \text{Im} \chi(\omega) \rightarrow \gamma \tau_0^2$ , где  $\tau_0$  — затравочное время релаксации [32]. Тогда, учитывая, что  $\zeta \rightarrow \delta x/\tau_0$ , из (2.5) получаем

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle |\zeta(\omega)|^2 \rangle = 2\gamma T. \quad (2.6)$$

В случае белого шума все спектральные составляющие  $\zeta(\omega) = \text{const}$  представлены одинаковым образом, и знак предела в (2.6) можно опустить. Возвращаясь к временному представлению, получаем

$$\langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = 2\gamma T \delta(t - t'). \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что в приближении белого шума корреляция стохастической составляющей силы  $\zeta/\gamma$  наблюдается только в совпадающие моменты времени  $t = t'$ . Очевидно, такая ситуация имеет место при условии, что макроскопическое время релаксации  $\tau = \chi/\gamma$  намного превосходит микроскопическое  $\tau_0$ . При их соизмеримости  $\delta$ -функция в (2.7) размывается в куполообразную зависимость шириной  $\sim \tau_0$ . При этом фурье-образ  $\zeta(\omega)$  стохастической силы приобретает частотную зависимость, и белый шум становится цветным. Его интенсивность определяется величиной  $T$ , сводящейся для термодинамических систем к температуре. Характерно, что множитель  $2\gamma$ , стоящий перед интенсивностью  $T$ , не зависит от переменной  $x$ . В этой связи принято говорить, что шум является аддитивным.

Основной объект нашего рассмотрения — стохастические системы с мультипликативным шумом. Следуя [14], покажем, что в этом случае вместо множителя 2 в (2.6), (2.7) появляется фактор  $g^2(x)$ , определяемый видом мультипликативной функции  $g(x)$ . С этой целью учтем, что сила  $f = f_x(x)$  в (2.4) зависит не только от переменной  $x$ , определяющей стохастическую систему, но и от управляющего параметра  $\alpha$ , задаваемого средой, в которую помещена данная система (для броуновской частицы роль такого параметра играет интенсивность ее соударений с молекулами среды). В линейном по  $\alpha \ll 1$  приближении можно записать

$$f_x(x) \approx f_0(x) + \alpha g(x), \quad g(x) \equiv \left. \frac{\partial f_x(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (2.8)$$

Очевидно, в теории Ландау такая аппроксимация отвечает разложению по температуре для коэффициента, стоящего в квадратичном слагаемом свободной энергии [28]. Учитывая стохастическую добавку  $\zeta(t)$  к составляющей  $f_0(x)$ , независимой от действия среды, выше мы изложили схему перехода от детерминистического уравнения Ландау–Халатникова (2.3) к стохастическому уравнению Ланжевена (2.4). Очевидно, при этом принимались во внимание только внутренние флуктуации системы. Для учета внешних в разложении (2.8) следует придать стохастический характер не только внутренней силе  $f_0(x)$ , но и управляющему параметру  $\alpha$ , приписывая

ему зависимость от времени:

$$\alpha(t) = \alpha + \frac{\sigma}{\gamma} \xi(t), \quad (2.9)$$

где параметр  $\alpha$  описывает среднее воздействие среды,  $\sigma$  — его дисперсию. Величина последней определена таким образом, чтобы стохастическая составляющая  $\xi(t)$  имела  $\delta$ -коррелированный характер:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), а результат в (2.4), находим общий вид стохастического уравнения движения, подверженного действию внешнего  $\zeta_e$  и внутреннего  $\zeta$  шумов:

$$\dot{x} = \gamma f_x(x) + \zeta_e(x, t) + \zeta(t); \quad (2.11)$$

$$f_x(x) \equiv f_0(x) + \alpha g(x), \quad (2.12)$$

$$\zeta_e(x, t) \equiv \sigma g(x) \xi(t). \quad (2.13)$$

В соответствии с условием (2.7) внутренний шум всегда является аддитивным, тогда как для внешнего с учетом (2.10) имеем

$$\langle \zeta_e(x, t) \zeta_e(x, t') \rangle = \gamma T g^2(x) \delta(t - t'), \quad (2.14)$$

где введена интенсивность <sup>1</sup>  $T \equiv \sigma^2$ . Сравнивая (2.7) и (2.14), видим, что в том случае, когда внешний шум носит аддитивный характер, мультипликативная функция является постоянной:

$$g^2(x) = 2. \quad (2.15)$$

Согласно определению (2.8) это означает, что реакция системы на действие среды не зависит от ее состояния, задаваемого стохастической переменной  $x$ . Иными словами, отсутствует обратная связь между состояниями стохастической системы и окружающей среды.

Выше мы изложили схему получения стохастического уравнения для несохраняющейся величины  $x$ . Эта схема основана на аналогии с механической задачей определения координаты  $x$  материальной точки, находящейся во внешней среде под действием силы  $f_x + \gamma^{-1}(\zeta_e + \zeta)$ . Характерно, что стохастическая переменная  $x$  не зависит от координаты  $\mathbf{r}$ , т.е. система является пространственно однородной. Совершенно отличная ситуация возникает, если величина  $x$  является сохраняющейся (например, представляет собой концентрацию частиц). В этом случае следует исходить из уравнения непрерывности  $\dot{x} + \nabla \mathbf{j} = 0$ , где  $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{j}$  — обобщенный поток, определяемый соотношением Онзагера  $\mathbf{j} = -M \nabla \mu$ , в котором  $M = D/T$  — подвижность частиц, задаваемая их коэффициентом диффузии  $D$  и температурой  $T$ . В рамках теории Гинзбурга–Ландау величина химического потенциала  $\mu = \partial V/\partial x - \beta \nabla^2 x - h$  определяется синергетическим потенциалом  $V = V(x)$ , внешним полем  $h = h(\mathbf{r}, t)$  и параметром неоднородности  $\beta$ . Принимая, что поле  $h$  имеет чисто стохастический характер, а

также учитывая соответствующие вклады  $\tilde{\mathbf{j}}, \zeta$  для потока  $\mathbf{j}$  и скорости  $\dot{x}$ , находим общий вид стохастического уравнения пространственно распределенной системы:

$$\dot{x} = \frac{D}{T} \nabla^2 \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \beta \nabla^2 x - h \right) - \nabla \tilde{\mathbf{j}} + \zeta. \quad (2.16)$$

Проводя рассуждение типа изложенных при выводе формулы (2.14), получаем условие нормировки стохастической составляющей скорости:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}, t') \rangle = \gamma V T g^2(x) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (2.17)$$

Здесь  $V$  — объем системы, кинетический коэффициент  $\gamma = D/\beta$  определяется температурой  $T$  и градиентным параметром  $\beta$ , а появление дополнительной  $\delta$ -функции от  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  обусловлено неоднородностью системы. В отсутствие обратной связи между величинами  $x$  и  $\mathbf{j}$  для стохастической составляющей потока  $\tilde{\mathbf{j}}$  имеет место соотношение типа (2.7), где, однако, роль интенсивности шума играет не температура  $T\gamma$ , а коэффициент диффузии  $D$  (множитель  $\gamma$  вводится из размерных соображений). Если же изменение стохастической переменной  $x(\mathbf{r}, t)$  влияет на величину потока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , то его флуктуации приобретают мультипликативный характер, и получаем равенство типа (2.14):

$$\langle \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t') \rangle = D V g_j^2(x) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (2.18)$$

где при переходе к аддитивному шуму мультипликативный множитель  $g_j^2(x)$  переходит в постоянную 2. Флуктуации  $h(\mathbf{r}, t)$  поля, сопряженного стохастической переменной  $x(\mathbf{r}, t)$ , всегда носят мультипликативный характер, и для них имеем

$$\langle h(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{r}, t') \rangle = S V g_h^2(x) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (2.19)$$

где введены интенсивность  $S$  и мультипликативная функция  $g_h(x)$ , задающие характер шума сопряженного поля. Особенность пространственно распределенных систем состоит в том, что при переходе от флуктуаций потока  $\tilde{\mathbf{j}}$  к соответствующему вкладу  $\zeta_j = -\nabla \tilde{\mathbf{j}}$  в шум скорости  $\dot{x}$  в правой части равенства (2.18) появляется оператор  $-\nabla^2$  [31]. Соответственно для полевой составляющей  $\zeta_h = -(D/T) \nabla^2 h$  в соотношении (2.19) получаем множитель  $(D/T)^2 \nabla^4$ . Это означает, что с ростом масштаба  $l$ , на котором наблюдаются флуктуации  $\zeta$ ,  $\zeta_j$ ,  $\zeta_h$ , имеем зависимости  $\zeta \propto l^0$ ,  $\zeta_j \propto l^{-1}$ ,  $\zeta_h \propto l^{-2}$ .

При рассмотрении стохастических уравнений (2.11), (2.16) зачастую им удобно придать безразмерный вид. Для несохраняющейся величины  $x$  это достигается, если время  $t$  измерять в единицах  $\tau = \chi/\gamma$ , силу  $f_x(x)$  — в масштабе  $\chi^{-1}$ , а стохастические составляющие  $\zeta_e, \zeta$  — в единицах  $\tau^{-1}$  (что касается стохастической переменной  $x$ , то она изначально выбрана в безразмерном виде с масштабом 1). Тогда в уравнении (2.11) пропадает множитель  $\gamma$ , а в правых частях условий (2.7), (2.14) появляется множитель  $\tau$ , приводящий к безразмерной интенсивности шума  $\Theta = \chi T$ .

В случае пространственно распределенных систем величины  $t, \mathbf{r}, V(x), h, j, \zeta$  в уравнении (2.16) удобно измерять в единицах  $\beta/(DT)$ ,  $(\beta/T)^{1/2}$ ,  $T, T, D(T/\beta)^{1/2}$ ,  $DT/\beta$  соответственно. Тогда после перехода к пространственным фурье-образам стохастическое уравнение

<sup>1</sup> Отметим, что обычно используется определение  $T = \sigma^2/2$  [14], и в (2.14) появляется дополнительный множитель 2. Однако нам удобнее включить этот множитель в мультипликативный множитель  $g^2(x)$ .

(2.16) принимает вид

$$\dot{x} = -\mathbf{k}^2 \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{k}^2 x \right) + \mathbf{k}^2 h - i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}} + \zeta. \quad (2.20)$$

Соответственно в условиях (2.17)–(2.19) пропадает  $\delta$ -функция от  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и коррелируют только множители, отвечающие волновым векторам  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}'$ . При указанном выборе единиц измерения интенсивности шумов скорости  $\zeta$  в (2.17) и потока  $\tilde{\mathbf{j}}$  в (2.18) оказываются равными 1, а для сопряженного поля  $h$  в (2.19) имеем  $\Theta_h = SD/(\beta T)$ .

С учетом сказанного безразмерное стохастическое уравнение движения принимает каноническую форму

$$\dot{x} = f + \zeta, \quad (2.21)$$

где детерминистическая сила  $f$  имеет вид (2.2) для однородной системы и

$$f = -\mathbf{k}^2 \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{k}^2 x \right) \quad (2.22)$$

— для пространственно распределенной. Стохастическая составляющая  $\zeta$  представляет собой суммарный вклад внешних флуктуаций  $\zeta_e = \zeta_h + \zeta_j$  сопряженного поля  $\zeta_h = \mathbf{k}^2 h$  и потока  $\zeta_j = -i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}$ , а также внутренний шум  $\zeta$  стохастической переменной  $x$ . Согласно условиям (2.14), (2.7), (2.17)–(2.19), записанным в безразмерном виде, указанные составляющие представляются следующими соотношениями:

$$\zeta_e = \Theta^{1/2} g(x) \xi, \quad \zeta = (2\Theta)^{1/2} \xi; \quad (2.23)$$

$$\zeta_h = \mathbf{k}^2 \Theta_h^{1/2} g_h(x) \xi, \quad \zeta_j = -ik g_j(x) \xi; \quad \xi = 2^{1/2} \xi, \quad (2.24)$$

где (2.23) относится к однородной системе, а (2.24) — к пространственно распределенной (наличие безразмерной интенсивности шума  $\Theta = \chi T$  в (2.23) обусловлено тем, что в качестве масштаба измерения выбрана обратная восприимчивость  $\chi^{-1}$ , тогда как в (2.24) роль масштаба играет сама интенсивность шума:  $D$  — для  $\zeta_j$  и  $T$  — для  $\zeta$ ). В отсутствие обратной связи системы с окружающей средой мультипликативные функции  $g(x)$ ,  $g_h(x)$ ,  $g_j(x)$  сводятся к множителю  $2^{1/2}$ , а стохастическая переменная  $\xi = \xi_{\mathbf{k}}(t)$  носит  $\delta$ -коррелированный характер:

$$\langle \xi_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_{\mathbf{k}}^*(t) \xi_{\mathbf{k}'}(t') \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta(t - t'). \quad (2.25)$$

Для однородных систем волновой вектор  $\mathbf{k}$  следует опустить (см. (2.10)).

## 2.2. Решение стохастического уравнения движения

При исследовании броуновского движения было выяснено впервые, что закон движения  $x(t)$  имеет неаналитическую форму. В частности, зависимость  $x(t)$ , хотя всюду и непрерывна, не является дифференцируемой [4, 33]. Поэтому стохастическое уравнение движения (2.21) имеет весьма условный смысл, поскольку его левая часть содержит производную  $\dot{x}$  этой зависимости.

Покажем, что данная особенность приводит к неоднозначности решения стохастического уравнения, имеющей принципиальный характер. Эта неоднозначность

состоит в возможности выбора континуального множества исчислений типа тех, что введены Ито [25], Стратоновичем [26], Климонтовичем [27] и т.д. Каждому из этих исчислений отвечает свое решение  $x(t)$ .

Будем исходить из дифференциального представления стохастического уравнения движения [14–17]:

$$dx = f(x) dt + \sigma g(x) dw(t), \quad (2.26)$$

где первое слагаемое описывает дрейф в поле  $f(x)$ , второе — диффузию с коэффициентом  $D = (\sigma^2/2)g^2(x)$ . Стохастическая переменная  $w = w(t)$  определена таким образом, что ее дифференциал заменяет некорректно определенную величину  $\xi(t) dt$  в (2.21)–(2.24). Характерная особенность стохастического уравнения (2.26) состоит в том, что дифференциал времени  $dt$  имеет второй порядок малости относительно дифференциала  $dw$  стохастической переменной. Действительно, оставляя в (2.26) только диффузионное слагаемое, имеем  $(dx)^2 = 2D(dw)^2$ , тогда как по определению  $(dx)^2 = 2D dt$ . В результате получаем

$$(dw)^2 = dt. \quad (2.27)$$

Формальное решение уравнения (2.26) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t f(x(t')) dt' + \sigma \int_{w(0)}^{w(t)} g(x(t')) dw(t'), \quad (2.28)$$

где принято  $x(0) = 0$ . Поскольку функция  $x(t')$  непрерывна, то вычисление первого интеграла в правой части (2.28) не приводит к каким-либо особенностям. Однако при нахождении диффузионной составляющей

$$I(t) \equiv \int_{w(0)}^{w(t)} g(x(t')) dw(t') \quad (2.29)$$

интегрирование проводится не по времени, а по стохастической переменной  $w(t')$ , которая имеет особенности. Для выяснения ситуации представим выражения (2.26), (2.29) в конечно-разностном виде, разбивая интервал времени  $[0, t]$  на  $N \rightarrow \infty$  одинаковых отрезков  $\Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$ , где  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $N\Delta t_i = t$ :

$$\Delta x(t_i) = f(x(t_i)) \Delta t_i + \sigma g(x(\tilde{t}_i)) \Delta w_i, \quad (2.30)$$

$$I(t) \equiv \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} g(x(\tilde{t}_i)) \Delta w_i, \quad (2.31)$$

где введено обозначение  $\Delta w_i \equiv w(t_{i+1}) - w(t_i)$ . Характерная особенность этих выражений состоит в том, что ввиду сингулярного характера зависимости  $w(t_i)$  результат существенно зависит от выбора точки

$$\tilde{t}_i = t_i + \lambda \Delta t_i, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (2.32)$$

в которой определяется значение мультипликативной функции  $g(x(\tilde{t}_i))$ . При  $\lambda = 0$  эта точка находится на левой границе интервала  $\Delta t_i$ , что отвечает исчислению Ито. При  $\lambda = 1/2$  время  $\tilde{t}_i$  фиксируется посередине отрезка  $\Delta t_i$ , и мы приходим к исчислению Стратоновича. Наконец, при  $\lambda = 1$  величина  $\tilde{t}_i = t_{i+1}$  отвечает правой границе интервала  $\Delta t_i$  — такой выбор предложен Климонтовичем. Однако нет никаких физических причин для

фиксации определенного значения  $\lambda \in [0, 1]$ . Поэтому можно заключить, что существует континуальный набор исчислений, связанных с различным выбором точки (2.32).

Для определения интеграла  $I(t)$  выразим в (2.31) величину  $g(x(t_i))$  мультипликативной функции внутри интервала  $\Delta t_i$  через значение  $g(x(t_i))$  на его границе. С этой целью запишем разложение

$$x(\tilde{t}_i) \approx x(t_i) + \dot{x}(t_i)\lambda\Delta t_i = x(t_i) + \lambda\Delta x(t_i), \quad (2.33)$$

следующее из (2.32). Аналогичным образом получаем

$$g(x(\tilde{t}_i)) \approx g(x(t_i)) + \lambda\nabla g(x(t_i))\Delta x(t_i), \quad (2.34)$$

где обозначено  $\nabla g(x(t_i)) \equiv dg/dx|_{x=x(t_i)}$ . Подставляя сюда  $\Delta x(t_i)$  из (2.30), приходим к искомому выражению:

$$g(x(\tilde{t}_i)) \approx g(x(t_i)) + \lambda\sigma g(x(t_i))\nabla g(x(t_i))\Delta w_i + \lambda f(x(t_i))\nabla g(x(t_i))\Delta t_i. \quad (2.35)$$

Согласно (2.27) последнее слагаемое имеет второй порядок по  $\Delta w_i$  и может быть опущено. Подставляя оставшиеся члены (2.35) в (2.31) и возвращаясь к континуальному представлению (2.29), (2.28), получаем выражение

$$x(t) = \int_0^t [f(x(t')) + h(x(t'))] dt' + \sigma \int_{w(0)}^{w(t)} g(x(t')) dw(t'), \quad (2.36)$$

которое, в отличие от (2.28), содержит силу

$$h(x) = \frac{\lambda}{2} \Theta \nabla g^2(x), \quad \Theta \equiv \sigma^2, \quad (2.37)$$

зависимую от выбора исчисления. Характерно, что для систем с аддитивным шумом, где функция  $g(x)$  сводится к постоянной, эта сила тождественно равна нулю, и такие системы нечувствительны к выбору исчисления.

Проводя последовательно дифференцирование и усреднение равенства (2.36), из условия  $\langle \dot{x} \rangle = f$  с учетом определения  $\dot{w} = \xi$  получаем

$$\langle g(x(t))\xi(t) \rangle = -\lambda\sigma \langle g(x(t))\nabla g(x(t)) \rangle. \quad (2.38)$$

Таким образом, в общем случае  $\lambda \neq 0$  стохастическая скорость  $\xi(t)$  коррелирует с мультипликативной функцией  $g(x)$ . Такая корреляция отсутствует только для исчисления Ито ( $\lambda = 0$ ), что выделяет его в ряду остальных. В частности, только при  $\lambda = 0$  использованное нами условие  $\langle \dot{x} \rangle = f$  совпадает с результатом усреднения уравнения (2.21).

### 2.3. Полевое представление стохастической системы

Использование полевых методов при описании стохастических систем является одним из наиболее перспективных направлений их исследования. Полевой подход, как известно, предназначен для описания систем, обладающих континуальным множеством степеней свободы [34, 35]. Для стохастических систем их роль играют пространственно-временные флуктуации, представляемые зависимостью  $x(\mathbf{r}, t)$ .

Основой построения полевой схемы служит стохастический производящий функционал [35, 36]

$$Z\{u(t)\} = \int Z\{x(t)\} \exp\left\{\int u(t)x(t) dt\right\} Dx, \quad (2.39)$$

$$Z\{x(t)\} = \left\langle \prod_t \delta\{\dot{x} - f - \zeta(t)\} \det\left|\frac{\delta\zeta}{\delta x}\right| \right\rangle_\zeta, \quad (2.40)$$

варьирование которого по пробному полю  $u(t)$  дает корреляторы стохастической переменной  $x(t)$ . Равенство (2.39) выражает функциональное преобразование Лапласа от зависимости  $Z\{x\}$ , представляемой соотношением (2.40), где наличие  $\delta$ -функции отражает стохастическое уравнение движения (2.21), детерминант обеспечивает переход от континуального интегрирования по  $\zeta$  к  $x$ , угловые скобки означают усреднение по случайной силе  $\zeta$ . От детерминанта можно избавиться, вводя пару грассманово сопряженных полей, конденсат которых определяет плотность антифазных границ [31]. В пространственно однородных системах такие границы отсутствуют, и детерминант выражается через исходные зависимости  $x(t)$ ,  $f(x)$ ,  $\zeta(t)$ . Согласно [37] в исчислении Ито его величина сводится к интенсивности шума  $\Theta$ , при переходе к исчислению Стратоновича получается более сложное выражение

$$\det\left|\frac{\delta\zeta}{\delta x}\right| = \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{\partial f}{\partial x} dt\right). \quad (2.41)$$

Для усреднения по полю  $\zeta(t)$  рассмотрим приближение аддитивного шума, описываемого распределением Гаусса:

$$P\{\zeta(t)\} = (2\pi\Theta)^{-1/2} \exp\left(-\int \frac{|\zeta(t)|^2}{2\Theta} dt\right), \quad (2.42)$$

которое отвечает условию нормировки (2.7) для комплексной величины  $\zeta$ . Используя интегральное представление

$$\delta\{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int v(t)\varphi(t) dt\right) \frac{D\varphi}{2\pi i} \quad (2.43)$$

и производя усреднение по распределению (2.42), приводим функционал (2.40) к стандартному виду

$$Z\{x(t)\} = \int \exp\left[-S\{x(t), \varphi(t)\}\right] \frac{D\varphi}{2\pi i}, \quad (2.44)$$

где осуществлен переход к безразмерным величинам (в частности,  $\Theta = 1$ ). Действие  $S = \int \mathcal{L} dt$  определяется лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который в исчислении Ито имеет вид

$$\mathcal{L} = \varphi(\dot{x} - f) - \frac{\varphi^2}{2}. \quad (2.45)$$

Согласно (2.41) переход к исчислению Стратоновича приводит к добавке  $(1/2)\partial f/\partial x$ , которая может быть включена в показатель экспоненты выражения (2.39).

Для придания лагранжиану (2.45) канонического вида следует ввести новое поле  $\phi(t)$ , определенное равенством

$$\dot{x} = \phi + f. \quad (2.46)$$



В результате получаем выражение

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \left( \phi f - \frac{\phi^2}{2} \right) - f \dot{x}. \quad (2.47)$$

С учетом (2.2) находим, что последнее слагаемое представляет собой полную производную по времени от функции  $V(x(t))$  и приводит к обычному выражению для статистической суммы [28]. Оставшиеся члены (2.47) — это сумма кинетической энергии  $\dot{x}^2/2$  и потенциальной  $\phi f - \phi^2/2$ . Последняя принимает каноническую форму  $\phi^2/2$  при условии  $\phi = f$ , согласно которому поле  $\phi$  сводится к силе  $f$ , сопряженной параметру порядка  $x$ . Сравнение уравнения движения (2.21) с уравнением Эйлера (2.46), отвечающим минимуму действия  $S$  в (2.44), показывает, что  $\phi$  — наиболее вероятное значение амплитуды флуктуации сопряженного поля (ее среднее значение  $\langle \zeta \rangle = 0$ ). Отсюда ясно, что распределение, стоящее под интегралом в (2.44), имеет в отличие от гауссиана (2.42) бимодальный вид.

Очевидно, представленная ситуация имеет место только в случае аддитивного шума  $\zeta(t)$ . При переходе к мультипликативному в распределении (2.42) следует произвести замену  $2\theta$  на  $\theta g^2(x)$ , в результате чего усреднение по шуму  $\zeta$  в (2.40) теряет гауссовский характер. Для его восстановления перейдем к новой переменной

$$y(x) = \int \frac{dx}{g(x)}. \quad (2.48)$$

Согласно (2.27) слагаемые дифференциала  $dx$  в (2.26) имеют различный порядок малости, в связи с чем для дифференциала новой стохастической переменной  $y(x)$  имеем

$$dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} (dx)^2, \quad (2.49)$$

где в рамках диффузионного приближения следует положить

$$(dx)^2 = \sigma^2 g^2(x) (dw)^2 = \theta g^2(x) dt. \quad (2.50)$$

Определяя из (2.48) производные функции  $y(x)$  и подставляя дифференциалы (2.26), (2.50), из (2.49) находим стохастическое уравнение движения для новой переменной:

$$dy = p(y) dt + \sigma dw, \quad (2.51)$$

$$p(y) \equiv \frac{f(x(y))}{g(x(y))} + \theta \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \frac{dg}{dx} \Big|_{x=x(y)}. \quad (2.52)$$

Согласно (2.51), ее шум имеет аддитивный характер, и можно использовать приведенную выше полевую схему. При этом эффективная сила определяется выражением (2.52), в котором учтена составляющая (2.37), связанная с произволом выбора исчисления. Отметим, что добавка, обусловленная мультипликативным характером шума (последнее слагаемое в (2.52)), в исчислении Стратоновича ( $\lambda = 1/2$ ) пропадает.

#### 2.4. Уравнение Фоккера–Планка

Кроме представленных выше особенностей, стохастический характер системы проявляется в том, что несмотря

на фиксацию начальных условий (а также одного из исчислений) уравнение движения имеет континуальное множество решений  $\{x(t)\}$ , распределенных случайным образом. Это обстоятельство является тривиальным следствием наличия случайной силы  $\zeta$  в уравнении движения (2.21). В результате становится актуальной задача определения функции

$$P(x, t) = \int \delta\{x - x(t)\} P\{x(t)\} Dx(t), \quad (2.53)$$

которая по заданному функционалу  $P\{x(t)\}$  распределения решений стохастического уравнения позволяет найти плотность вероятности реализации значения  $x$  в данный момент времени  $t$ . Функция распределения  $P(x, t)$  связана с начальным распределением  $P(x_0, 0)$  через вероятность перехода  $P(x, t|x_0, 0)$  следующим равенством [14–18]:

$$P(x, t) = \int P(x, t|x_0, 0) P(x_0, 0) dx_0. \quad (2.54)$$

Таким образом, задача сводится к определению условной вероятности  $P(x, t|x_0, 0)$ , подчиняющейся начальному условию  $P(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0)$ . Формальные методы вывода уравнения Фоккера–Планка для вероятности перехода  $P(x, t|x_0, 0)$  изложены в книге [15]. Поскольку связь (2.54) не затрагивает зависимость от  $x, t$ , то эти методы могут быть приложены и для определения плотности вероятности  $P(x, t)$ . Однако, так как нас интересует физическое содержание задачи, то далее будет исследоваться непосредственно зависимость  $P(x, t)$ . Разумеется, при этом мы приходим к тем же результатам, что получают другими методами [14–18, 38].

**2.4.1. Получение уравнения Фоккера–Планка из уравнения движения.** Рассмотрим произвольную аналитическую функцию  $y(x)$ , дифференциал которой можно представить в виде (2.49). Как уже отмечалось, необходимость учета второй степени дифференциала (2.26) обусловлена тем, что его дрейфовая и диффузионная составляющие имеют различный порядок малости, отражаемый равенством (2.27). Поэтому диффузионный вклад (2.50) второго порядка по  $dx$  соизмерим с величиной дрейфовой составляющей  $f dt$  в (2.26), которая имеет первый порядок по  $dt$ .

Подставляя в (2.49) дифференциалы (2.26), (2.50) и усредняя по распределению (2.54), получаем

$$\begin{aligned} d\langle y(x) \rangle &= \left\langle \frac{dy}{dx} f(x) \right\rangle dt + \sigma \left\langle \frac{dy}{dx} g(x) dw \right\rangle + \\ &+ \frac{\theta}{2} \left\langle \frac{d^2 y}{dx^2} g^2(x) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Здесь в левой части изменен порядок операций усреднения и дифференцирования и учтено равенство (2.27). Согласно (2.38) в приближении Ито ( $\lambda = 0$ ) величины  $g(x)$  и  $dw = \xi dt$  не коррелируют, в связи с чем во втором слагаемом (2.55) можно выделить множитель  $\langle dw \rangle = 0$  (см. (2.10)). Тогда, переходя к производной по времени и учитывая определение среднего

$$\langle y \rangle = \int y(x) P(x, t) dx, \quad (2.56)$$

получаем

$$\int y(x) \dot{P}(x, t) dx = \int f(x) P(x, t) \frac{dy}{dx} dx + \frac{\Theta}{2} \int g^2(x) P(x, t) \frac{d^2 y}{dx^2} dx. \quad (2.57)$$

Проводя в правой части интегрирование по частям, выделяем функцию  $y(x)$  в качестве множителя в подынтегральных выражениях (2.57) (при этом операция дифференцирования  $\nabla \equiv \partial/\partial x$  перебрасывается на функцию распределения  $P(x, t)$ ). Поскольку функция  $y(x)$  выбрана произвольной, то равенство интегралов выполняется только при равенстве соответствующих подынтегральных выражений. В результате, сокращая на  $y(x)$ , приходим к уравнению Фоккера–Планка:

$$\dot{P} = \nabla \left[ -fP + \frac{\Theta}{2} \nabla (g^2 P) \right], \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.58)$$

Оно может быть представлено в виде уравнения непрерывности:

$$\dot{P} + \nabla J = 0 \quad (2.59)$$

в пространстве стохастической переменной  $x$ , где поток вероятности  $J = J_{\text{dr}} + J_{\text{dif}}$  складывается из дрейфовой  $J_{\text{dr}}$  и диффузионной  $J_{\text{dif}}$  составляющих:

$$J_{\text{dr}} = fP, \quad J_{\text{dif}} = -\frac{\Theta}{2} \nabla (g^2 P). \quad (2.60)$$

Здесь, в согласии с уравнением движения (2.21), сила  $f$  обеспечивает скорость дрейфа  $\langle \dot{x} \rangle = f$ , а величина

$$D(x) = \frac{\Theta}{2} g^2(x) \quad (2.61)$$

представляет собой обобщенный коэффициент диффузии, определенный равенством (2.50). Для аддитивного шума ( $g(x) = 2^{1/2}$ ) он, как и следовало, сводится к интенсивности  $\Theta$ .

Приведенная схема ограничена использованием исчисления Ито. Переходя к общему случаю  $\lambda \neq 0$ , в выражении (2.55) к реальной силе  $f(x)$  следует добавить фиктивную силу  $h(x)$ , определенную равенством (2.37). Однако, если учесть корреляцию величин  $g(x)$ ,  $dw$ , то согласно (2.38) выполняется условие

$$\left\langle \frac{dy}{dx} h(x) \right\rangle + \sigma \left\langle \frac{dy}{dx} g(x) \xi(t) \right\rangle = 0, \quad (2.62)$$

и уравнение Фоккера–Планка (2.58) остается неизменным.

**2.4.2. Вывод уравнения Фоккера–Планка в рамках кинетического подхода.** Подобно методам, изложенным в книге [15], приведенный выше метод носит формальный характер. Поэтому здесь мы, следуя Климонтовичу [27], изложим кинетический подход, восходящий к уравнению Больцмана. Основное его достоинство состоит в наглядности, обусловленной тем, что рассматривается механическая задача о диффузии выделенной частицы в импульсном пространстве. Кроме того, излагаемый метод

позволяет продемонстрировать связь между двумя важнейшими уравнениями статистической физики — уравнением Фоккера–Планка, представляющим стохастическое поведение выделенной степени свободы, и уравнением Больцмана, описывающим статистический ансамбль частиц.

Уравнение движения выделенной частицы в среде остальных имеет структуру (2.21):

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mu \mathbf{p} + (2D)^{1/2} \xi. \quad (2.63)$$

Здесь  $-\mu \mathbf{p}$  — сила трения среды с вязкостью  $\mu = \mu(\mathbf{p})$ ,  $D = D(\mathbf{p})$  — эффективный коэффициент диффузии, связанный с мультипликативной функцией  $g(\mathbf{p})$  соотношением типа (2.61),  $\xi = \xi(t)$  —  $\delta$ -коррелированный шум. Для нахождения кинетического уравнения введем одночастичную функцию распределения

$$P_1(\mathbf{p}, t) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1(t)) \quad (2.64)$$

и усредним по искомому распределению  $P \equiv \langle P_1 \rangle$  уравнение непрерывности

$$\dot{P}_1 + \nabla \mathbf{J}_1 = 0, \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.65)$$

где обобщенный поток имеет вид  $\mathbf{J}_1 = \dot{\mathbf{p}} P_1$  типа первой формулы (2.60). В результате получаем уравнение

$$\dot{P} = \nabla [\mu \mathbf{p} P - (2D)^{1/2} \langle \xi P_1 \rangle], \quad (2.66)$$

содержащее неизвестный коррелятор  $\langle \xi P_1 \rangle$ .

Наиболее простым образом его определение достигается в рамках феноменологического подхода, основанного на уравнении непрерывности (2.59), которое в отличие от (2.65) содержит не одночастичное распределение (2.64), а полное  $P = \langle P_1 \rangle$ . Поток  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{dr}} + \mathbf{J}_{\text{dif}}$  содержит как дрейфовую, так и диффузионную составляющие:

$$\mathbf{J}_{\text{dr}} = \mathbf{f}_{\text{ef}} P, \quad \mathbf{J}_{\text{dif}} = -D \nabla P. \quad (2.67)$$

В отличие от (2.60) здесь коэффициент диффузии  $D$  вынесен из-под знака производной  $\nabla = \partial/\partial \mathbf{p}$ . Это означает, что подобно методу, изложенному в конце раздела 2.3, при определении потоков (2.67) совершен переход от импульса  $\mathbf{p}$  к новой переменной  $\mathbf{q} = \int (2D)^{-1/2} d\mathbf{p}$ , для которой шум является аддитивным. Согласно (2.52) при этом эффективная сила  $\mathbf{f}_{\text{ef}}$ , определяющая дрейфовую составляющую потока  $\mathbf{J}_{\text{dr}}$ , имеет вид

$$\mathbf{f}_{\text{ef}} = -\mu \mathbf{p} + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \nabla D. \quad (2.68)$$

Здесь первое слагаемое содержит силу трения, во втором параметр  $\lambda$  учитывает неоднозначность выбора исчисления, а слагаемое  $-(1/2)\nabla D$  обусловлено диффузионным вкладом  $(d\mathbf{p})^2 = 2D dt$  в изменение новой переменной  $\mathbf{q}(\mathbf{p})$  (см. (2.49), (2.50)). Подставляя (2.68) в (2.67), из (2.59), (2.60) получаем кинетическую форму уравнения Фоккера–Планка [27]:

$$\dot{P} = \nabla \left\{ \left[ \mu \mathbf{p} + \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) \nabla D \right] P + D \nabla P \right\}. \quad (2.69)$$

Сравнивая это выражение с (2.66), находим искомым коррелятор:

$$\langle \xi P_1 \rangle = \lambda \Theta^{1/2} P \nabla g - \frac{1}{2} \Theta^{1/2} \nabla (g P), \quad (2.70)$$

где введена мультипликативная функция  $g(\mathbf{p}) \equiv [(2/\Theta)D(\mathbf{p})]^{1/2}$ . Для аддитивного шума, где  $D(\mathbf{p}) = \text{const} \equiv D$ , коррелятор  $\langle \xi P_1 \rangle = -(D/2)^{1/2} \nabla P$ , а уравнение (2.69) принимает простейший вид

$$\dot{P} = \nabla(-\mathbf{f}P + D\nabla P), \quad \mathbf{f} = -\mu\mathbf{p}. \quad (2.71)$$

Такая же ситуация имеет место для мультипликативного шума в исчислении Стратоновича ( $\lambda = 1/2$ ), чем и определяется его преимущество перед остальными исчислениями [14].

В равновесном состоянии  $\dot{P} = 0$ , и распределение  $P(\mathbf{p})$  имеет максвелловский вид [28]:

$$P \propto \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mT}\right), \quad (2.72)$$

где  $m$  — масса частицы. Подставляя это выражение в (2.69), находим уравнение для эффективного коэффициента диффузии:

$$D(\mathbf{p}) = mT \left[ \mu(\mathbf{p}) + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \frac{\mathbf{p}}{p^2} \frac{dD(\mathbf{p})}{d\mathbf{p}} \right]. \quad (2.73)$$

Соотношение Эйнштейна

$$D(\mathbf{p}) = mT\mu(\mathbf{p}) \quad (2.74)$$

имеет место либо для аддитивного шума, либо в исчислении Стратоновича.

**2.4.3. Получение уравнения Фоккера–Планка из управляющего уравнения.** Используемые выше подходы имеют феноменологический характер, не позволяющий раскрыть микроскопический смысл параметров типа обобщенного коэффициента диффузии. Такая возможность открывается, если в качестве исходного выражения использовать управляющее уравнение (в английской терминологии — master equation), представляющее собой скорость изменения функции распределения (2.54) через интенсивность переходов между микроскопическими состояниями [38].

Изложим сначала схему получения управляющего уравнения. Оно действительно только в случае марковских процессов, для которых вероятность перехода из одного микросостояния в другое не зависит от того, как система попала в исходное состояние (т.е. отсутствует микроскопическая память). Благодаря этому можно записать уравнение Колмогорова [39]:

$$P(x + dx, t + dt) = W(x, x + dx)P(x, t) dx dt, \quad (2.75)$$

характеризующее эволюцию функции распределения через отнесенную к единице времени вероятность перехода  $W(x, x + dx)dx$  из микросостояния  $x$  в  $x + dx$ . Отсюда сразу следует управляющее уравнение

$$\dot{P}(x, t) = \int [W(x + y, x)P(x + y, t) - W(x, x - y)P(x, t)] dy, \quad (2.76)$$

где первое слагаемое учитывает прямые переходы  $x + y \rightarrow x$ , а второе обратные  $x \rightarrow x - y$ . Нетрудно заметить, что последнее из них описывает процессы релаксации, эффективное время которой определяется равенством

$$\tau^{-1}(x) = \int W(x, x - y) dy. \quad (2.77)$$

С формальной точки зрения это означает, что интегральное значение интенсивности переходов равно обратному времени релаксации.

Для решения уравнения (2.76) следует определить интенсивность переходов  $W(x, y)$ , что представляет собой отдельную задачу [40]. Однако, как будет показано ниже, для наших целей оказывается достаточным знать не полную функцию распределения  $W(x, y)$ , а два ее первых момента. При их определении важную роль играет принцип детального равновесия [15, 40]

$$P(x)W(x, y) = P(y)W(y, x), \quad (2.78)$$

означающий совпадение интенсивности прямых и обратных переходов между любыми микросостояниями  $x, y$ . Очевидно, при этом подынтегральное выражение в (2.76) равно нулю, и выполняется условие  $\dot{P} = 0$ , означающее, что функция распределения (2.54) не зависит от времени. Соответствующее микросостояние называется стационарным<sup>2</sup>. Укажем, что не для всякого стационарного состояния выполняется условие детального равновесия (2.78).

Приступая к выводу уравнения Фоккера–Планка, следует отметить, что переход к нему возможен только для таких процессов, где зависимость  $W(x, y)$  является непрерывной функцией. В противоположном случае дискретных процессов такой переход невозможен, и система описывается управляющим уравнением (2.76).

Для непрерывных процессов первое слагаемое в квадратных скобках (2.76) можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} W(x + y, x)P(x + y, t) &= W(x, x - y)P(x, t) + \\ &+ \frac{\partial [W(x, x - y)P(x, t)]}{\partial x} y + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [W(x, x - y)P(x, t)]}{\partial x^2} y^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.79)$$

В результате получаем дифференциальное уравнение, содержащее моменты

$$\langle y^n(x) \rangle = \int W(x, x - y) y^n dy. \quad (2.80)$$

Согласно теореме Павулы, в случае марковских процессов, для которых действительно управляющее уравнение, при  $n > 2$  все моменты равны нулю, причем нечетные — тождественно [41]. В результате уравнение (2.76)

<sup>2</sup> Следует обратить внимание, что стационарное состояние не всегда сводится к равновесному. Так, поток жидкости, текущей по трубе, является стационарным, если постоянна его скорость, и равновесным, если эта скорость равна нулю.

принимает вид

$$\dot{P} = \nabla \left[ -fP + \frac{\Theta}{2} \nabla(g^2 P) \right], \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.81)$$

Здесь сила  $f \equiv -\langle y \rangle$  и мультипликативная функция  $g \equiv (\Theta^{-1} \langle y^2 \rangle)^{1/2}$  определяются равенствами

$$f(x) \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} y W(x, x-y) dy, \quad (2.82)$$

$$\Theta g^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 W(x, x-y) dy, \quad (2.83)$$

где  $\Theta$  — интенсивность шума.

Покажем теперь, что подобно тому, как это произошло при решении стохастического уравнения (2.26), более аккуратное рассмотрение управляющего уравнения (2.76) приводит к появлению фиктивной силы, зависящей от выбора исчисления. С этой целью представим разложение (2.79) в конечно-разностном виде

$$W(x_i + \Delta x_i, x_i) P(x_i + \Delta x_i, t) = W(\tilde{x}_i, x_i - \Delta x_i) P(\tilde{x}_i, t) + \frac{\Delta [W(\tilde{x}_i, x_i - \Delta x_i) P(\tilde{x}_i, t)]}{\Delta x_i} \Delta x_i + \dots \quad (2.84)$$

Аналогично рассмотрению, проведенному в разделе 1.2, здесь мы учли, что ввиду неаналитического характера функции  $W(x, y)$  при разложении по разности  $\Delta x_i$  результат будет зависеть от того, какая точка (ср. с (2.32))

$$\tilde{x}_i = x_i + \lambda \Delta x_i, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (2.85)$$

фиксируется на интервале  $\Delta x_i$ . Как и на оси времени, ее положение задается параметром  $\lambda \in [0, 1]$ , определяющим выбор исчисления. Для гладкой функции распределения  $P(x)$  произвол в выборе  $\lambda$  не проявляется, и в ее аргументе можно провести замену  $\tilde{x}_i$  на  $x_i$ . В отличие от этого для интенсивности стохастических переходов подобно (2.84) имеем

$$W(\tilde{x}_i, x_i - \Delta x_i) = W(x_i, x_i - \Delta x_i) + \frac{\Delta [W(x_i, x_i - \Delta x_i)]}{\Delta x_i} \lambda \Delta x_i + \dots \quad (2.86)$$

Подставляя это разложение в (2.84), а результат — в управляющее уравнение, записанное в конечно-разностной форме, после перехода к континуальному пределу получаем

$$\begin{aligned} \dot{P}(x, t) = \int & \left\{ P(x, t) \left[ \frac{\partial W(x, x-y)}{\partial x} \lambda y + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(x, x-y)}{\partial x^2} (\lambda y)^2 \Big] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ P(x, t) \left( W(x, x-y) + \frac{\partial W(x, x-y)}{\partial x} \lambda y \right) \right] y + \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [P(x, t) W(x, x-y)]}{\partial x^2} y^2 \right\} dy, \end{aligned} \quad (2.87)$$

где отброшенные слагаемые дают моменты (2.80) порядка  $n > 2$ , равные нулю. Учитывая в первом слагаемом условие  $\partial W(x, x-y)/\partial x = -\partial W(x+y, x)/\partial y$  и про-

водя по переменной  $y$  интегрирование по частям, видим, что вклад этого слагаемого сводится к нулю. Аналогичным образом можно избавиться и от второго члена. В результате с учетом определений (2.82), (2.83) получаем уравнение

$$\dot{P} = \nabla \left[ -(f+h)P + \frac{\Theta}{2} \nabla(g^2 P) \right], \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.88)$$

В сравнении с (2.81) здесь появилась сила

$$h(x) = \lambda \Theta \nabla g^2(x), \quad (2.89)$$

зависимая от выбора исчисления. Она пропадает для аддитивного шума и в исчислении Ито ( $\lambda = 0$ ).

Таким образом, как при решении стохастического уравнения движения (см. раздел 2.2), так и при корректном выводе уравнения Фоккера–Планка, определяющего вероятность распределения этих решений, кроме действительной силы  $f$  появляется фиктивная сила  $h$ , зависящая от выбора исчисления. Однако, сравнивая выражения (2.37), (2.89), можно видеть, что последнее значение  $h$  вдвое превосходит первое, и совпадают они только в тривиальном случае  $h = 0$ , имеющем место в исчислении Ито (либо для аддитивного шума).

## 2.5. Решение уравнения Фоккера–Планка

Выражение (2.88) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с переменными коэффициентами, и в общем случае его решение не представляется возможным. Достаточно полное рассмотрение методов решения уравнения Фоккера–Планка содержится в [15]. В рассматриваемом случае одной переменной наиболее популярный из этих методов сводится к преобразованию переменной (2.48), которое позволяет свести мультипликативный шум к аддитивному и придать уравнению Фоккера–Планка вид уравнения Шрёдингера (см. раздел 3.1.1). Это открывает возможность использования мощных методов решения задачи на исследование собственных функций и собственных значений соответствующего оператора Штурма–Лиувилля [15]; весьма полезным может оказаться здесь использование методов суперсимметрии [42]. В своем изложении мы не будем обращаться к этим методам, использование которых позволяет исследовать наиболее общий случай нескольких переменных в условиях, когда нарушается принцип детального равновесия. Оказывается, что при этом коэффициенты разложения по собственным функциям подчиняются триангулярным рекуррентным соотношениям, которые приводят к цепным дробям [15].

Наше рассмотрение основывается на исследовании стационарного решения уравнения Фоккера–Планка. Не говоря о том, что оно приводит к распределению Гиббса, на котором основывается статистическая физика [28], ниже будет показано, что естественное обобщение данного метода позволяет найти новый класс решений для нестационарных систем, находящихся в автомодельном режиме.

В стационарных системах распределение вероятности (2.54) не зависит от времени, в связи с чем в (2.88)  $\dot{P} = 0$ , и обобщенный поток принимает постоянное значение:

$$(f+h)P - \frac{\Theta}{2} \nabla(g^2 P) = \text{const} \equiv J, \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.90)$$

Для равновесных систем  $J = 0$ , и решение уравнения (2.90) записывается следующим образом:

$$P = Z^{-1} g^{-2(1-2\lambda)} \exp\left(\frac{2}{\Theta} \int \frac{f+h}{g^2} dx\right), \quad (2.91)$$

где постоянная  $Z$  задается условием нормировки

$$\int P(x) dx = 1. \quad (2.92)$$

В случае аддитивного шума, где  $g(x) = 2^{1/2}$ ,  $h = 0$ , распределение (2.91) принимает с учетом определения (2.2) гиббсовский вид:

$$P(x) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{V(x)}{\Theta}\right). \quad (2.93)$$

Здесь синергетический потенциал  $V = V(x)$  сводится к эффективному гамильтониану системы [28],  $\Theta$  — температура в энергетических единицах, нормировочная постоянная

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{V(x)}{\Theta}\right) dx \quad (2.94)$$

представляет собой статистическую сумму, величина которой определяет свободную энергию

$$F = -\Theta \ln Z. \quad (2.95)$$

Равновесное распределение можно записать в квазигиббсовском виде

$$P(x) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{U_{\text{ef}}(x)}{\Theta}\right) \quad (2.96)$$

и при переходе к мультипликативному шуму. Однако при этом эффективный потенциал  $U_{\text{ef}}(x)$  не сводится к исходному  $V(x)$ :

$$U_{\text{ef}}(x) = 2(1 - 2\lambda)\Theta \ln g(x) + U(x); \quad (2.97)$$

$$U(x) = -2 \int \frac{f(x)}{g^2(x)} dx, \quad f \equiv -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.98)$$

Характерная особенность выражения (2.97) — зависимость логарифмического вклада от параметра  $\lambda$ , определяющего выбор исчисления.

Рассмотрим теперь неравновесное стационарное состояние, в котором поток  $J$  хотя и является постоянным, но не сводится к нулю (очевидно, такое состояние может реализоваться только в ограниченной по объему открытой системе, на границах которой поддерживается условие  $J \neq 0$ ). В этом случае распределение вероятности сохраняет квазигиббсовский вид (2.96), однако вместо нормировочной постоянной  $Z^{-1}$  появляется функция

$$Z_{\text{ef}}^{-1}(x) = Z^{-1} - \frac{2J}{\Theta} \int (g(x))^{-4\lambda} \exp\left(\frac{U(x)}{\Theta}\right) dx, \quad (2.99)$$

где зависимость от  $x$  обеспечивается вычитаемым, величина которого пропорциональна  $J/\Theta$ . Если поток вероятности направлен в окружающую среду, то  $J > 0$ , и согласно (2.99) его рост приводит к уменьшению свобод-

ной энергии (2.95). В обратном случае  $J < 0$  ее величина превышает равновесное значение, то есть происходит накачка системы.

Исследование нестационарного распределения достигается только в автомоделном режиме, где зависимость от двух аргументов  $x$ ,  $t$  выражается через единственную переменную  $y = x/a(t)$ :

$$P(x, t) = a^\alpha \varphi(y), \quad (2.100)$$

где функции  $a(t)$ ,  $\varphi(y)$  и показатель  $\alpha$  подлежат определению. С математической точки зрения равенство (2.100) означает, что распределение вероятности представляет собой однородную функцию порядка  $\alpha$ . Физически переход к новой переменной  $y = x/a$  отвечает выбору масштаба измерения стохастической величины  $x$ , значение которой  $a(t)$  изменяется со временем. Свойство однородности (2.100) отражает самоподобие фазового пространства стохастической системы, наличие которого позволяет измерять величину  $x$  в произвольном масштабе  $a(t)$ . Как известно, указанным свойством обладают фрактальные объекты [4, 33]. Таким образом, предположение (2.100) означает, что область определения фазового пространства стохастической системы является фрактальным множеством, размерность которого  $D$  ограничена значениями 2 (обычная фазовая плоскость) и 0 (точка, отвечающая положению равновесия).

Для определения показателя  $\alpha$  подставим зависимость (2.100) в условие нормировки (2.92). В результате получаем равенство

$$(a(t))^{-(1+\alpha)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy, \quad (2.101)$$

левая часть которого содержит зависимость от времени, а правая не содержит. Отсюда вытекает результат

$$\alpha = -1, \quad (2.102)$$

учет которого приводит к обычному условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = 1. \quad (2.103)$$

Вид функции  $\varphi(y)$  может быть найден только при задании скейлинговых свойств силы  $f(x)$  и мультипликативной функции  $g(x)$ . По аналогии с (2.100) принимаем

$$f(x) = a^\beta F(y), \quad (2.104)$$

$$g(x) = a^\gamma G(y), \quad y = \frac{x}{a}, \quad (2.105)$$

где зависимости  $F(y)$ ,  $G(y)$  и показатели  $\beta$ ,  $\gamma$  принимаются заданными (в разделе 3.3 будет показано, что последние определяются величиной фрактальной размерности  $D$  согласно равенствам  $\beta = 1 - D$ ,  $\gamma = 1 - D/2$ ). Подставляя соотношения (2.100), (2.104), (2.105) в уравнение Фоккера–Планка (2.88), с учетом равенств  $P = (\alpha\varphi - y\varphi')a^{\alpha-1}\dot{a}$ ,  $\nabla \equiv \partial/\partial x = a^{-1}\partial/\partial y$  получаем

$$(a^{-\beta}\dot{a})(\alpha\varphi - y\varphi') = -[(F + H)\varphi]' + \frac{\Theta}{2} a^{2\gamma-\beta-1}(G^2\varphi)'' \quad (2.106)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $y$ , а также сделано предположение, что фиктивная сила (2.89) подчиняется тому же условию скейлинга (2.104), что и действительная:

$$h(x) = a^\beta H(y). \quad (2.107)$$

Равенство (2.106) принимает вид обычного дифференциального уравнения

$$\frac{\Theta}{2} (G^2 \varphi)'' - [(F + H)\varphi]' + \mu(y\varphi' - \alpha\varphi) = 0 \quad (2.108)$$

при условии, что его коэффициенты теряют зависимость от времени. С этой целью следует положить  $a^{-\beta} \dot{a} = \text{const} \equiv \mu$ ,  $2\gamma - \beta - 1 = 0$ , откуда получаем соотношения:

$$a = [\mu(1 - \beta)]^{1/(1-\beta)} t^{1/(1-\beta)}, \quad (2.109)$$

$$\gamma = \frac{1 + \beta}{2}. \quad (2.110)$$

Найденная связь (2.110) показателей  $\beta$ ,  $\gamma$  подтверждает предположение (2.107).

Таким образом, соображения подобия позволяют найти временную зависимость (2.109) характерного значения  $a(t)$  стохастической переменной  $x(t)$ , а также фиксировать показатель (2.102) функции распределения (2.100). Определяющая ее зависимость  $\varphi(y)$  подчиняется обычному дифференциальному уравнению (2.108). Нетрудно заметить, что оно представляется в виде

$$\Theta(G^2 \varphi)'' = (\tilde{F}_{\text{ef}} G^2 \varphi)', \quad (2.111)$$

где введена эффективная сила (ср. с (2.2))

$$\tilde{F}_{\text{ef}}(y) = -\frac{\partial \tilde{U}_{\text{ef}}(y)}{\partial y}, \quad (2.112)$$

величина которой определяется потенциалом

$$\tilde{U}_{\text{ef}}(y) = -4\lambda\Theta \ln G(y) + U_\mu(y) + U(y); \quad (2.113)$$

$$U_\mu(y) = \mu \int G^{-2}(y) dy^2, \quad (2.114)$$

$$U(y) = -2 \int \frac{F(y)}{G^2(y)} dy. \quad (2.115)$$

Понижая порядок дифференциального уравнения (2.111), с учетом граничных условий

$$\varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm\infty \quad (2.116)$$

находим общее решение уравнения Фоккера–Планка в автомодельном режиме:

$$\varphi(y) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{U_{\text{ef}}(y)}{\Theta}\right). \quad (2.117)$$

Здесь эффективный синергетический потенциал  $U_{\text{ef}} \equiv \tilde{U}_{\text{ef}} + 2\Theta \ln G$ , перенормированный за счет множителя  $G^2$  в (2.111), имеет вид (ср. с (2.113))

$$U_{\text{ef}}(y) = U_\Theta(y) + U_\mu(y) + U(y), \quad (2.118)$$

где

$$U_\Theta(y) = 2(1 - 2\lambda)\Theta \ln G(y), \quad (2.119)$$

а остальные слагаемые определяются равенствами (2.114), (2.115). Нормировочная постоянная  $Z$  задается условием (2.103).

Проведенное рассмотрение показывает, что описание нестационарного автомодельного режима может быть проведено по аналогии со стационарным, если от исходной стохастической переменной  $x$  и функций  $P(x, t)$ ,  $f(x)$ ,  $h(x)$ ,  $g(x)$  перейти к переменным  $y = x/a$ ,  $\varphi = P/a^\alpha$ ,  $F = f/a^\beta$ ,  $H = h/a^\beta$ ,  $G = g/a^\gamma$ , величины которых определяются масштабом  $a = a(t)$ , задающим характерное значение переменной  $x$ . Сравнение выражений (2.97), (2.118) показывает, что переход к нестационарному режиму приводит также к появлению дополнительного слагаемого (2.114), обусловленного изменением масштаба  $a(t)$  согласно закону (2.109).

Укажем в заключение, что впервые описание нестационарной стохастической системы, находящейся в автомодельном режиме, было проведено, по-видимому, И.М. Лифшицем и В.В. Слезовым [43] применительно к задаче о коалесценции выделений новой фазы, где  $g(x) \equiv 0$ . В настоящее время идеи подобия широко используются при описании эволюции пространственной структуры, возникающей в ходе фазового превращения [31, 44].

### 3. Описание стохастической системы с сингулярным мультипликативным шумом

#### 3.1. Калибровка распределения вероятности стохастической системы

Как показало рассмотрение, проведенное в разделах 2.2, 2.4, неаналитический характер зависимости  $x(t)$ , определяющей изменение стохастической переменной с течением времени, приводит к появлению силы  $h$ , величина которой зависит от выбора исчисления (см. формулы (2.37), (2.89)). В отличие от ситуации, имеющей место в теории поля, где произвол в выборе потенциала не сказывается на величине напряженности, измеряемой в эксперименте [45], указанная сила  $h$  существенным образом определяет распределение вероятности реализации стохастической переменной.

С математической точки зрения появление силы  $h$  связано с произвольностью выбора точки (2.85) на оси  $x$ . Сингулярный характер функции  $\xi(t)$ , определяющей  $\delta$ -коррелированный характер белого шума (см. (2.10)), обуславливает выделение данной точки. Очевидно, при размытии  $\delta$ -коррелятора, которое всегда имеет место в действительности, автоматически происходит зануление силы  $h$  [14]. Иными словами, появление силы, зависящей от выбора исчисления и поэтому не имеющей физического смысла, является артефактом приближения белого шума. В этой связи следует либо отказаться от него, что намного усложняет формализм [14], либо использовать калибровочную схему, обеспечивающую компенсацию указанной неоднозначности для  $\delta$ -коррелированного шума. Впервые такая схема была предложена в работе [46] и приведена в настоящем разделе, причем мы рассмотрим отдельно как прямое, так и обратное уравнения Колмогорова (см. соответственно разделы 3.1.1 и 3.1.2).

Рассмотрим для простоты пространственно одно-родный случай, где время измеряется в единицах  $\tau = \chi/\gamma$  ( $\chi$  — восприимчивость,  $\gamma$  — кинетический коэффициент), сила — в масштабе  $\chi^{-1}$ , стохастическая составляющая скорости  $\dot{x}$  — в единицах  $\tau^{-1}$ . Тогда стохастическое уравнение движения принимает вид (см. (2.21), (2.23))

$$\dot{x} = f(x) + T^{1/2}g(x)\xi(t). \quad (3.1)$$

Здесь явным образом выделены безразмерная интенсивность шума  $T$  (в разделе 2.1 она обозначена  $\Theta$ ) и мультипликативная функция  $g(x)$ ; сила  $f(x)$  и функция  $\xi(t)$  определены соотношениями (2.2), (2.10). Согласно (2.88), уравнение Фоккера — Планка, определяющее функцию распределения (2.54), удобно записать в виде уравнения непрерывности в пространстве стохастической переменной:

$$\dot{P}_\lambda + \nabla J_\lambda = 0, \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Здесь поток вероятности задается выражением

$$J_\lambda = (f + h_\lambda)P_\lambda - \frac{T}{2} \nabla(g^2 P_\lambda), \quad (3.3)$$

в котором сила (см. (2.89))

$$h_\lambda(x) = \lambda T \nabla g^2(x) \quad (3.4)$$

зависит от параметра  $\lambda \in [0, 1]$ , фиксирующего выбор исчисления.

**3.1.1. Прямое уравнение Колмогорова.** Как известно, в зависимости от направления стрелы времени эволюция системы в пространстве вероятности описывается либо прямым, либо обратным уравнением Колмогорова [14–18]. Рассмотрим сначала первое из них, которое сводится к уравнению Фоккера — Планка.

В качестве наводящего соображения приведем известный переход от уравнения Фоккера — Планка к уравнению Шрёдингера с мнимым временем для системы с аддитивным шумом, где в силу условия  $g(x) = 2^{1/2}$  мнимая сила  $h_\lambda \equiv 0$  и выбор параметра  $\lambda$  несуществен [47]. Этот переход обеспечивается заменой вероятности  $P_\lambda$  в (3.2), (3.3) "волновой функцией"  $\Psi = P_\lambda \exp(-\alpha)$ . В результате уравнение Фоккера — Планка с аддитивным шумом принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = & \Psi [\nabla^2 V + (\nabla V) \nabla \alpha + T(\nabla \alpha)^2 + T \nabla^2 \alpha] + \\ & + (\nabla V + 2T \nabla \alpha) \nabla \Psi + T \nabla^2 \Psi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это равенство сводится к виду уравнения Шрёдингера при отсутствии слагаемых, содержащих  $\nabla \Psi$ , для чего следует выбрать мнимую фазу  $\alpha$ , согласно условию

$$\nabla \alpha = -\frac{\nabla V}{2T}. \quad (3.6)$$

Оно означает, что смещение начала отсчета синергетического потенциала  $V$  на величину  $\delta V$  приводит к изменению фазы на величину  $\delta \alpha = -\delta V/(2T)$ , не меняя самого уравнения Шрёдингера

$$-T \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -T^2 \nabla^2 \Psi + U \Psi \quad (3.7)$$

с мнимым временем  $-it$ , потенциальной энергией

$$U \equiv \frac{1}{4} (\nabla V)^2 - \frac{T}{2} \nabla^2 V \quad (3.8)$$

и "постоянной Планка"  $T$  (масса эффективной частицы равна  $1/2$ ).

Найденное выше отсутствие зависимости начала отсчета фазы  $\alpha$  от "координаты"  $x$  отвечает условию глобальной калибровочной инвариантности в стандартной полевой схеме [48], которое, как нетрудно видеть, выполняется благодаря аддитивному характеру шума. При переходе к мультипликативному его интенсивность приобретает зависимость от  $x$ , которая обуславливает изменение фазы  $\alpha(x)$ . В результате условию калибровки следует придать локальный смысл, и приведенная схема существенно усложняется.

Для рассмотрения локальной калибровочной инвариантности выразим исходное распределение  $P_\lambda(x, t)$  в (3.2), (3.3) через перенормированную функцию распределения

$$P(x, t) = P_\lambda(x, t) \exp[-\alpha(x)], \quad (3.9)$$

подчиняющуюся каноническому уравнению Фоккера — Планка

$$\dot{P} = \nabla \left[ (\nabla V) P + \frac{T}{2} \nabla(g^2 P) \right], \quad (3.10)$$

в котором перенормированный потенциал  $V = V(x)$  не сводится к исходному  $V_0(x) \equiv -\int f(x) dx$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{P} = & \nabla \left[ (\nabla V_0) P + \frac{T}{2} \nabla(g^2 P) - \lambda T (\nabla g^2) P + T (\nabla \alpha) g^2 P \right] + \\ & + (\nabla V_0) (\nabla \alpha) P - \lambda T (\nabla g^2) (\nabla \alpha) P - \frac{T}{2} g^2 (\nabla^2 \alpha) P + \\ & + \frac{T}{2} g^2 (\nabla \alpha)^2 P, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где в правой части добавлено и вычтено слагаемое  $(T/2)g^2 P \nabla^2 \alpha$ . Поскольку уравнение (3.10) не содержит слагаемых, пропорциональных величине  $P$ , то следует положить

$$(\nabla V_0 - \lambda T \nabla g^2) \nabla \alpha = \frac{T}{2} g^2 [\nabla^2 \alpha - (\nabla \alpha)^2]. \quad (3.12)$$

Кроме того, должны совпадать выражения для потоков, стоящие в (3.10), (3.11) под знаком  $\nabla$ :

$$\nabla V_0 - \lambda T \nabla g^2 + T (\nabla \alpha) g^2 = \nabla V. \quad (3.13)$$

Полученные уравнения удобно переписать в виде системы:

$$\nabla \alpha - \nabla \ln \nabla \alpha = -\frac{2 \nabla V_0}{T g^2} + 2 \lambda \nabla \ln g^2, \quad (3.14)$$

$$\nabla \alpha = \frac{\nabla(V - V_0)}{T g^2} + \lambda \nabla \ln g^2, \quad (3.15)$$

определяющей распределение фазы  $\alpha(x)$  и перенормированный потенциал  $V(x)$  по заданным затравочному потенциалу  $V_0(x)$  и параметру исчисления  $\lambda$ . Исключая

слагаемое  $\lambda \nabla \ln g^2$ , получаем уравнение

$$\nabla \alpha + \nabla \ln \nabla \alpha = \frac{2 \nabla V}{T g^2},$$

первый интеграл которого имеет вид

$$\nabla \exp \alpha = \exp \left( \frac{2}{T} \int \frac{\nabla V}{g^2(x)} dx \right). \quad (3.16)$$

Отсюда находим окончательное выражение для фазового множителя

$$\exp[\alpha(x)] = \int \exp \left[ \frac{U(x)}{T} \right] dx, \quad (3.17)$$

характеризуемое видом эффективного потенциала (ср. с (2.98))

$$U(x) = 2 \int \frac{dV(x)/dx}{g^2(x)} dx. \quad (3.18)$$

Как будет показано ниже, физический смысл фазы, определяемой равенствами (3.17), (3.18), состоит в том, что вид зависимости  $\alpha(x)$  задает тип границы  $x = 0$  и характер перехода стохастической системы в детерминистический режим  $x(t) = 0$ .

Проведенное рассмотрение показывает, что фиктивная сила  $\hbar$ , возникающая в уравнении Фоккера–Планка в приближении  $\delta$ -коррелированного шума, может быть компенсирована за счет перехода от исходного синергетического потенциала  $V_0(x)$  к перенормированному  $V(x)$ . При этом начальное распределение вероятности  $P_\lambda(x, t)$  приобретает множитель  $\exp[-\alpha(x)]$ , где фаза  $\alpha(x)$  также определяется перенормированным потенциалом  $V(x)$ . Физический смысл указанной перенормировки состоит в том, что в рамках приближения белого шума следует использовать не исходное уравнение Фоккера–Планка (3.2)–(3.4), решение которого зависит от выбора исчисления (параметра  $\lambda$ ), а перенормированное уравнение (3.10), полученное в результате калибровки распределения вероятности  $P(x, t)$  с помощью соотношения (3.9). При этом подобно процедуре перенормировок, принятой в квантовой электродинамике [49], синергетический потенциал  $V(x)$  следует рассматривать как зависимость, имеющую изначальный физический смысл, а  $V_0(x)$  — как не обладающий им затравочный потенциал.

Для определения связи между  $V(x)$  и  $V_0(x)$  перепишем левую часть уравнения (3.14) в виде  $-\nabla(\ln \nabla \exp(-\alpha))$ , приводящем к решению

$$\alpha(x) + \alpha_\lambda(x) = \text{const}. \quad (3.19)$$

Оно связывает фазу  $\alpha$ , задаваемую перенормированным потенциалом (3.18), и затравочную фазу  $\alpha_\lambda$ , величина которой определяется равенствами

$$\exp[\alpha_\lambda(x)] = \int (g(x))^{-4\lambda} \exp \left[ \frac{U_0(x)}{T} \right] dx, \quad (3.17a)$$

$$U_0(x) \equiv 2 \int \frac{dV_0(x)/dx}{g^2(x)} dx. \quad (3.18a)$$

В отличие от  $\alpha$ , фаза  $\alpha_\lambda$  определяется не только видом затравочного потенциала  $V_0(x)$ , но и величиной пара-

метра  $\lambda$  (в исчислении Ито ( $\lambda = 0$ ) определения (3.17), (3.17a) с точностью до замены  $V$  на  $V_0$  совпадают). Физический смысл условия (3.19) состоит в том, что перенормировка потенциала приводит (с точностью до постоянной) к изменению знака затравочной фазы  $\alpha_\lambda$ .

**3.1.2. Обратное уравнение Колмогорова.** Для использования методов, развитых в квантовой теории [40], уравнению Фоккера–Планка полезно придать форму уравнения Лиувилля:

$$\dot{P}_\lambda(x, t) = L_\lambda(x) P_\lambda(x, t), \quad (3.20)$$

где оператор  $L_\lambda$  имеет вид

$$L_\lambda = \nabla[(\nabla V_0) - \lambda T(\nabla g^2)] + \frac{T}{2} \nabla^2 g^2. \quad (3.21)$$

В рамках такого подхода калибровочное преобразование (3.9) выражается равенством

$$P(x, t) = U(x) P_\lambda(x, t), \quad (3.22)$$

которое означает переход к новому базису. Он задается оператором

$$U(x) = \exp[-\alpha(x)], \quad (3.23)$$

действие которого определяется распределением фазы  $\alpha(x)$ . В базисе  $P$  уравнение Лиувилля принимает форму (3.20), если от выражения (3.21) перейти к оператору

$$L = U L_\lambda U^{-1}. \quad (3.24)$$

Его вид фиксируется условием, что в новом базисе уравнение Лиувилля сводится к выражению (3.10), откуда следует

$$L = \nabla(\nabla V) + \frac{T}{2} \nabla^2 g^2. \quad (3.25)$$

Подставляя в (3.24) равенства (3.21), (3.23) и сравнивая результат с (3.25), приходим к уравнениям (3.12), (3.13), разделение которых связано с тем, что второе содержится под знаком  $\nabla$ .

Перейдем теперь к обратному уравнению Колмогорова, отвечающему повернутой стреле времени [39]. Как известно, в квантовой теории обращение времени достигается переходом к сопряженным величинам [40]. В уравнении Лиувилля (3.20) это означает замену распределения  $P_\lambda(x, t)$  на  $P_\lambda^+(x, t)$  и оператора  $L_\lambda(x)$  на  $L_\lambda^+(x)$ . При переходе к новому базису (ср. с (3.22))

$$P^+(x, t) = U^+(x) P_\lambda^+(x, t) \quad (3.26)$$

уместно ожидать, что оператор

$$U^+(x) = \exp[\alpha(x)] \quad (3.27)$$

будет иметь обратный знак перед фазой  $\alpha(x)$  по сравнению с выражением (3.23) при прямом течении времени.

Для доказательства подставим в уравнение Лиувилля (ср. с (3.20))

$$\dot{P}_\lambda^+(x, t) = L_\lambda^+(x) P_\lambda^+(x, t), \quad (3.28)$$



отвечающее обратному течению времени, обращенное выражение (3.26), а также оператор (ср. с (3.21))

$$L_{\lambda}^{+} = [(\nabla V_0) - \lambda T(\nabla g^2)]\nabla - \frac{T}{2} g^2 \nabla^2, \quad (3.29)$$

вид которого следует из обычного представления обратного уравнения Колмогорова [15]. Тогда в базисе  $P^{+}$  уравнение Лиувилля принимает вид (3.28), где вместо  $L_{\lambda}^{+}$  фигурирует оператор

$$L^{+} = (\nabla V)\nabla - \frac{T}{2} g^2 \nabla^2, \quad (3.30)$$

не содержащий фиктивной силы  $h = \lambda T \nabla g^2$ , если выполняются те же условия (3.12), (3.13), что и для прямого уравнения.

Таким образом, предположение (3.27) оказывается верным, и из его сравнения с (3.23) можно сделать вывод об унитарности оператора  $U(x)$ . В этом можно убедиться также, проводя операцию сопряжения для равенства (3.24) и подставляя в него выражения (3.27), (3.29), (3.30). В результате получаются те же условия (3.12), (3.13).

Проведенное рассмотрение приводит к важному выводу: группа калибровочных преобразований уравнения Фоккера – Планка, позволяющая избавиться от произвола в выборе исчисления, является унитарной. Что касается оператора Лиувилля, то сравнение выражений (3.25), (3.30) указывает на его неэрмитовский характер. Однако с помощью преобразования  $\exp[U_{\text{ef}}(x)/(2T)]$ , где эффективный потенциал имеет вид (2.97), он сводится к эрмитовской форме [15].

### 3.2. Фазовые переходы в стохастической системе

В отличие от обычных переходов, где качественная перестройка системы связана с появлением интегральных особенностей функции распределения, при переходах, индуцированных шумом, она испытывает менее существенные изменения — например, с уменьшением интенсивности шума появляются дополнительные максимумы. Однако в случае мультипликативного шума, когда его амплитуда зависит от стохастической переменной  $x$ , кроме указанных максимумов может происходить бесконечное нарастание плотности вероятности вблизи точки  $x = 0$  [14]. Если указанная особенность является неинтегрируемой, то теряется условие нормировки, и в стохастической системе выпадает детерминистический конденсат — конечная часть из полного набора степеней свободы, сводящегося ко всем возможным временным зависимостям  $x(t)$ , приобретает вид  $x(t) = 0$ . В этой связи возникает вопрос: каким образом будут распределяться состояния системы между максимумами, отвечающими детерминистическому режиму и упорядоченному состоянию?

С формальной точки зрения требуется провести классификацию возможных типов границы  $x = 0$  по виду мультипликативной функции. С этой целью можно воспользоваться изложенным в [14] рецептом, согласно которому следует определить некие параметры  $L_1, L_2, L_3$  и по их расхождению классифицировать тип указанной границы. Однако, не говоря уже о том, что из [14] совершенно не ясен физический смысл параметров  $L_1, L_2, L_3$ , для их определения надо найти функцию распределения, вид которой, как известно, зависит от выбора

исчисления. В предыдущем разделе была изложена калибровочная схема, позволившая за счет введения фазового множителя в функцию распределения придать уравнению Фоккера – Планка каноническую форму Ито, не содержащую произвольную силу. Кроме устранения неоднозначности в выборе функции распределения, такого рода калибровка стохастической системы позволяет придать физический смысл указанным выше параметрам  $L_1, L_2, L_3$  — они определяются фазовым множителем (3.17), обеспечивающим калибровку уравнения Фоккера – Планка.

Наша задача состоит в исследовании особенностей равновесного распределения (см. (2.96))

$$P(x) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{U_{\text{ef}}(x)}{T}\right). \quad (3.31)$$

Здесь и ниже имеется в виду откалиброванное распределение (3.22), в связи с чем в эффективном потенциале (2.97) следует положить  $\lambda = 0$ . Будем аппроксимировать затравочный потенциал разложением Ландау [28]:

$$V(x) = \frac{A}{2} x^2 + \frac{B}{4} x^4, \quad (3.32)$$

$$A = \alpha(T - T_c), \quad (3.33)$$

где  $\alpha, T_c, B$  — положительные постоянные,  $T$  — интенсивность шума (температура). Имея в виду исследование особенностей вблизи точки  $x = 0$ , для мультипликативной функции принимаем

$$g(x) = 2^{1/2} x^a, \quad (3.34)$$

где  $a$  — произвольный показатель (в разделе 3.3 будут приведены аргументы, указывающие, что степенная зависимость (3.34) имеет общий характер для самоподобных систем). Тогда эффективный синергетический потенциал (2.97), (2.98) принимает вид

$$U_{\text{ef}}(x) = 2Ta \ln x + U(x), \quad (3.35)$$

$$U(x) = \frac{A}{2(1-a)} x^{2(1-a)} + \frac{B}{2(2-a)} x^{2(2-a)}. \quad (3.36)$$

Характерная особенность систем с мультипликативным шумом состоит в неаналитическом виде зависимости (3.36) перенормированного потенциала  $U(x)$  несмотря на то, что затравочный  $V(x)$  имеет простейший вид (3.32). При  $a = 0$  шум имеет аддитивный характер, и потенциалы  $V(x), U(x)$  совпадают. Случаи  $a = 1, a = 2$ , где выражение (3.36) становится неприменимым, будут рассмотрены отдельно. И, наконец, согласно (2.113), (2.114) при переходе к нестационарному автомодельному режиму эффективный потенциал (3.35) приобретает слагаемое  $U_{\mu}$ , имеющее тот же характер, что и первый член выражения (3.36). Это означает, что данное слагаемое может быть учтено за счет перенормировки критической температуры  $T_c$ , входящей в выражение (3.33).

**3.2.1. Фазовый переход, индуцированный шумом.** Как уже отмечалось, данный переход состоит в том, что с уменьшением интенсивности шума  $T$  распределение (3.31) приобретает максимумы в точках  $\pm x_0 \neq 0$  [14]. Их

положение задается условием

$$\frac{\partial U_{\text{ef}}(x)}{\partial x} = 0, \quad (3.37)$$

определяющим минимумы эффективного потенциала. Подставляя сюда выражения (3.33), (3.35), (3.36), для положения максимума  $x_0$ , измеренного в единицах  $\alpha T_c/B$ , находим уравнение

$$x_0^2 + \frac{2a}{\alpha} \Theta x_0^{-2(1-a)} = 1 - \Theta, \quad (3.38)$$

где введена безразмерная температура

$$\Theta \equiv \frac{T}{T_c}. \quad (3.39)$$

Это уравнение имеет решение только при величинах  $\Theta$ , ограниченных некоторым максимальным значением  $\Theta_0$ . Для его определения учтем, что в точке  $\Theta = \Theta_0$  зависимость  $U_{\text{ef}}(x)$  имеет нулевую производную не только первого, но и второго порядков. Это приводит к дополнительному уравнению

$$x_0^{2(2-a)} = \frac{2a}{\alpha} (1-a)\Theta_0. \quad (3.40)$$

Исключая из уравнений (3.38), (3.40) величину  $x_0$ , для температуры перехода находим

$$\frac{(1-\Theta_0)^{2-a}}{\Theta_0} = \frac{2a}{\alpha} \frac{(2-a)^{2-a}}{(1-a)^{1-a}}, \quad \Theta_0 \equiv \frac{T_0}{T_c}. \quad (3.41)$$

Зависимость предельной интенсивности  $\Theta_0$  от показателя  $a$  приведена для различных значений  $\alpha$  на рис. 1. В пределе  $a = 0$ , отвечающем аддитивному шуму, точка перехода  $T_0$  совпадает с критическим значением  $T_c$ . Нарастание показателя в области малых значений  $a$  приводит к понижению величины  $T_0$  — тем более сильному, чем меньше параметр  $\alpha$ , определяющий движущую силу фазового перехода. С дальнейшим

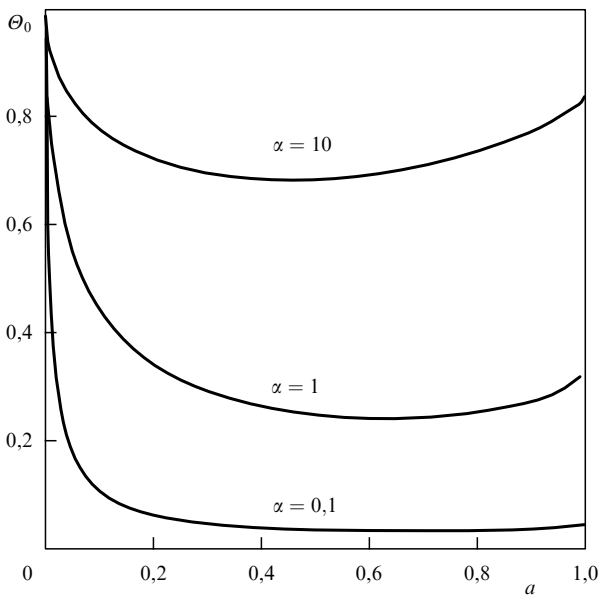


Рис. 1. Зависимость предельного значения  $\Theta_0 = T_0/T_c$  интенсивности шума от показателя  $a$  мультипликативной функции.

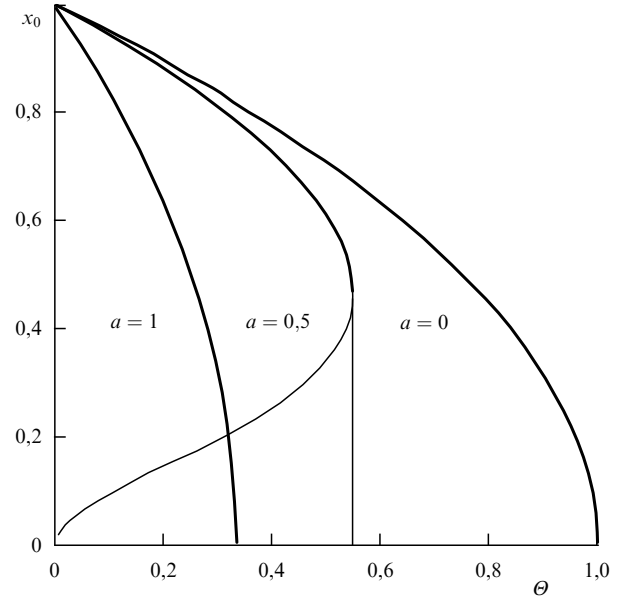


Рис. 2. Зависимость наиболее вероятного значения  $x_0$  стохастической переменной от интенсивности шума  $\Theta = T/T_c$ .

увеличением  $a$  величина  $T_0$  проходит через минимум и затем возрастает до значения (3.44), отвечающего  $a = 1$ . При этом наиболее вероятное значение  $x_0(T)$  стохастической переменной уменьшается с ростом интенсивности шума, согласно рис. 2. Характерно, что в предельных случаях  $a = 0, a = 1$  фазовый переход носит непрерывный характер, тогда как в промежуточной области величина  $x_0$  испытывает скачок в точке перехода  $T_0$ .

В случае  $a = 1$  вместо (3.35) получаем

$$U_{\text{ef}} = 2T \ln x + U(x), \quad U = A \ln x + \frac{B}{2} x^2. \quad (3.42)$$

При этом распределение (3.31) имеет максимум в точке

$$x_0 = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \right) \Theta \right]^{1/2}, \quad \Theta \equiv \frac{T}{T_c}, \quad (3.43)$$

а интенсивность шума, отвечающая появлению этого максимума, приобретает вид

$$T_0 = \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \right)^{-1} T_c. \quad (3.44)$$

**3.2.2. Переход стохастической системы в детерминистический режим.** Представленный выше максимум распределения  $P(x)$  не является единственно возможным. Действительно, подставляя (3.35) в (3.31), видим, что при положительных значениях параметра  $a$  функция распределения обладает особенностью  $P \simeq Z^{-1} x^{-2a}$  при  $x \rightarrow 0$ . Это означает, что нормировочная постоянная  $Z$  имеет на нижнем пределе интегрирования  $b \rightarrow 0$  вид  $Z \sim b^{1-2a}$ . Следовательно, если показатель мультипликативной функции  $a$  лежит в интервале от 0 до 1/2, то указанная особенность распределения (3.31) является интегрируемой, и система ведет себя обычным образом. Однако при  $a > 1/2$  получаем  $Z = \infty$ , и распределение  $P(x)$  в пределе  $x = 0$  становится ненормируемым. Это означает образование конденсата, отвечающего детерминистическому

поведению системы при  $x = 0$ . С учетом (3.35) функцию распределения (3.31) удобно разбить на два сомножителя:

$$P(x) = P_0(x)P'(x); \quad (3.45)$$

$$P_0(x) = Z_0^{-1}x^{-2a}, \quad P'(x) = \frac{1}{Z'} \exp\left[-\frac{U(x)}{T}\right], \quad (3.46)$$

где потенциал  $U(x)$  задается равенством (3.36). В первом сомножителе, отвечающем конденсату, постоянная  $Z_0$  бесконечна, во втором  $Z' = Z/Z_0 < \infty$ . При  $a = 1$  сомножители распределения (3.45) принимают вид

$$P_0(x) = Z_0^{-1}x^{-2}, \quad P'(x) = \frac{1}{Z'} x^{-A/T} \exp\left(-\frac{B}{2T}x^2\right). \quad (3.47)$$

Таким образом, в системах с мультипликативным шумом (3.34) точка  $x = 0$  приобретает характер аттрактора, наличие которого существенным образом сказывается на всей оси значений  $x$ . Моделируя стохастическую систему диффузионным процессом частицы с координатой  $x$ , можно представить такой аттрактор как притягивающую границу. Следуя [14], изложим рецепт, позволяющий классифицировать различные типы диффузионных процессов в зависимости от наличия границы  $b \rightarrow 0$ .

Введем функцию

$$\phi(x) = \exp\left[-\int \frac{2f(x)}{Tg^2(x)} dx\right] \quad (3.48)$$

и исследуем сходимость следующих интегралов:

$$L_1 = \int_b^\beta \phi(x) dx, \quad (3.49)$$

$$L_2 = \int_b^\beta \frac{1}{Tg^2(y)} \int_b^y \exp\left[-\int_\beta^x \frac{2f(z)}{Tg^2(z)} dz\right] dx \times \\ \times \exp\left[\int_\beta^y \frac{2f(z)}{Tg^2(z)} dz\right] dy, \quad (3.50)$$

$$L_3 = \int_b^\beta (g^2(x)\phi(x))^{-1} dy, \quad (3.51)$$

где  $b, \beta$  — нижняя и верхняя границы интервала диффузии. Если бесконечное значение принимает первый из этих интегралов ( $L_1 = \infty$ ), то граница  $b$  называется естественной и она недостижима даже за время  $t = \infty$ . При  $L_1 < \infty, L_2 = \infty$  реализуется притягивающая граница, достижимая частицей только в пределе  $t \rightarrow \infty$ . В случае  $L_1, L_2 < \infty, L_3 = \infty$  граница  $b$  достигается за конечное время, и при описании системы следует фиксировать граничные условия. И наконец, при конечных значениях всех параметров  $L_1, L_2, L_3$  граница является регулярной, и частица в любой момент времени может находиться в точке  $x = b$ .

Неудобство проведенной классификации связано с громоздкостью выражений (3.49)–(3.51) и неясностью физического смысла параметров  $L_1, L_2, L_3$ . Однако, сравнивая выражения (3.17), (3.18) с (3.48), можно видеть, что функция  $\phi(x)$ , определяющая указанные параметры  $L_1, L_2, L_3$ , связана с фазой  $\alpha(x)$ , задающей калибровку уравнения Фоккера–Планка, следующим

соотношением:

$$\exp[\alpha(x)] = \int \phi(x) dx. \quad (3.52)$$

Тогда определения (3.49)–(3.51) принимают вид

$$L_1(b, \beta) = \exp[\alpha(\beta)] - \exp[\alpha(b)], \quad (3.53)$$

$$L_2(b, \beta) = \frac{Z}{T} \int_b^\beta \exp[\alpha(x)] P(x) dx, \quad (3.54)$$

$$L_3(b, \beta) = Z \int_b^\beta P(x) dx, \quad (3.55)$$

где  $\beta$  — произвольный параметр. Таким образом, использование фазы  $\alpha(x)$  позволяет придать прозрачный смысл параметрам  $L_1, L_2, L_3$ . Поскольку фазовый множитель  $\exp(\alpha)$  представляет собой, согласно (3.17), интегральный эффект экспоненциального действия эффективного потенциала  $U(x)$ , отнесенного к интенсивности шума  $T$ , то (3.53) определяет разность этих эффектов на пределах  $\beta$  и  $b$ . Соответственно зависимость (3.54) есть фазовый множитель, усредненный по распределению (3.31), в котором проведено сокращение на нормировочную константу  $Z$ . И наконец, (3.55) определяет, с точностью до того же сокращения, интегральный эффект накопления вероятности (3.31) на интервале  $[b, \beta]$ .

Согласно представленному выше рецепту [14], детерминистический режим  $x = 0$  не достигается даже за бесконечное время, если величина  $L_1 = \infty$  в пределе  $b \rightarrow 0$ . При  $L_1 < \infty$  и расходимости величины  $L_2$  детерминистическое поведение достигается только в пределе  $t \rightarrow \infty$ . Иными словами, несмотря на то, что такое поведение проявляется при  $x \rightarrow 0$  в виде бесконечного максимума сингулярного сомножителя  $P_0(x)$ , в действительности оно недостижимо. Поэтому при нормировке распределения (3.45) следует ввести обрезание на нижнем пределе  $b \rightarrow 0$ , величина которого определяет постоянную

$$Z_0 = 2(2a - 1)^{-1} b^{1-2a}. \quad (3.56)$$

Если значения  $L_1, L_2$  конечны, но  $L_3 = \infty$ , то детерминистический режим достигается за конечное время, поскольку согласно (3.55) система с бесконечной вероятностью сосредоточена в области  $[b, \beta]$ . Это означает, что при нормировке функции распределения следует явным образом учитывать наличие конденсата, приводящего к выделению  $\delta$ -образной особенности:

$$P(x) = C\delta(x) + P_0(x)P'(x). \quad (3.57)$$

Здесь интенсивность  $C$  детерминистического конденсата определяется указанным условием нормировки. И наконец, если все параметры  $L_1, L_2, L_3$  конечны, то в любой момент времени детерминистический режим реализуется, как и стохастический, согласно своему распределению  $P_0(x)$ .

Поскольку наиболее существенной оказывается окрестность точки  $x = 0$ , в которой реализуется расходимость функции  $P(x)$ , то можно найти асимптотику зависимости  $\alpha(x)$  в пределе  $x \rightarrow 0$ . Полагая в разложе-

нии Ландау  $B = 0$ , из (3.17), (3.36) при  $a \neq 1$  имеем

$$\exp(\alpha) = \int dx \exp \left[ \frac{A}{2T(1-a)} x^{2(1-a)} \right]. \quad (3.58)$$

Вводя новую переменную  $y \equiv x^{2(1-a)}$ , перепишем это выражение в виде

$$\exp(\alpha) = [2(1-a)]^{-1} \int y^{-\gamma} \exp(\lambda y) dy, \quad (3.59)$$

где введены константы

$$\gamma = \frac{1-2a}{2(1-a)}, \quad \lambda = \frac{A}{2T(1-a)}. \quad (3.60)$$

Поскольку всегда  $\exp(\alpha) > 0$ , то из (3.59) следует прежде всего, что положительный параметр  $a$  ограничен сверху значением 1 и, следовательно, параметр  $\lambda > 0$ . При  $x \ll 1$  основной вклад в интеграл (3.59) дает степенная функция, и для фазового множителя получаем  $\exp(\alpha) \simeq x$ . Следовательно, параметр  $L_1$ , определяемый зависимостью (3.53), принимает конечные значения. Функция распределения определяется в области  $x \ll 1$  выражением

$$2ZP(x) \simeq x^{-2a} \exp[-\lambda x^{2(1-a)}]. \quad (3.61)$$

Подставляя его в (3.54), получаем

$$L_2 = \frac{1}{2T} \int_b^\beta x^{-2a+1} \exp[-\lambda x^{2(1-a)}] dx. \quad (3.62)$$

После перехода к переменной  $y = x^{2(1-a)}$  этот интеграл легко вычисляется:

$$L_2(b, \beta) = (2A)^{-1} \left\{ \exp[\lambda \beta^{2(1-a)}] - \exp[\lambda b^{2(1-a)}] \right\}. \quad (3.63)$$

Отсюда видно, что в пределе  $b \rightarrow 0$  величина  $L_2$  всегда конечна. Аналогичным образом для  $L_3$  получаем

$$L_3(b, \beta) = [2(2a-1)]^{-1} (\beta^{1-2a} - b^{1-2a}). \quad (3.64)$$

Параметр  $L_3$  принимает конечные значения при  $a < 1/2$  и бесконечные при  $a > 1/2$ .

Проведенный анализ показывает, что в области  $0 < a \leq 1/2$  детерминистический режим реализуется наравне со стохастическим в любой момент времени, а при  $1/2 < a < 1$  система достигает положения  $x = 0$  за конечное время. При этом характерное время  $\tau_{\text{ef}}$  эволюции стохастической подсистемы определяется при  $x \ll 1$  выражением  $\tau_{\text{ef}}^{-1} = (T/2) \nabla^2 g^2$ , следующим из уравнения Фоккера – Планка (3.10), в котором удержаны члены, проявляющие наиболее сингулярное поведение в пределе  $x \rightarrow 0$ . В результате получаем равенство

$$\tau_{\text{ef}} = [2a(2a-1)T]^{-1} x^{2(1-a)}, \quad (3.65)$$

из которого видно, что  $\tau_{\text{ef}} < 0$  в области  $a < 1/2$  и  $\tau_{\text{ef}} > 0$  при  $a > 1/2$ . Таким образом, время достижения детерминистического режима  $x = 0$  увеличивается с ростом переменной  $x \ll 1$ .

Самосогласованное поведение конденсата, определяемое константой  $C$ , задается условием нормировки распределения (3.57). Используя зависимости (3.46) и нормировочную постоянную (3.56), находим

$$C = 1 - \frac{2a-1}{Z'} b^{2a-1} \int_b^\infty x^{-2a} \exp \left[ -\frac{U(x)}{T} \right] dx. \quad (3.66)$$

Перейдем к переменной интегрирования  $y = x/b$ , нормированной на величину  $b \rightarrow 0$ , обрезающую нижний предел интегрирования. Тогда

$$C = 1 - \frac{2a-1}{Z'} \int_1^\infty y^{-2a} \exp \left[ -\frac{U(by)}{T} \right] dy. \quad (3.67)$$

Как видно из (3.36), при  $a \neq 1$  показатель экспоненты в пределе  $b \rightarrow 0$  принимает значение 0, и в результате получаем

$$C = 1 - \frac{1}{Z'}, \quad (3.68)$$

$$Z' = \int_0^\infty \exp \left[ -\lambda x^{2(1-a)} - \mu x^{2(2-a)} \right] dx, \quad (3.69)$$

где выражение для нормировочной константы  $Z'$  следует из (3.31), (3.35), (3.36),  $\mu = B/[2T(2-a)]$ ,  $1/2 < a < 1$ .

Численное интегрирование в (3.68) приводит к зависимостям  $C(\Theta)$ , показанным при различных значениях параметров  $a, \alpha$  на рис. 3. Видно, что с ростом интенсивности шума  $\Theta = T/T_c$  плотность детерминистического конденсата плавно падает от значения  $C = 1$  при  $\Theta = 0$

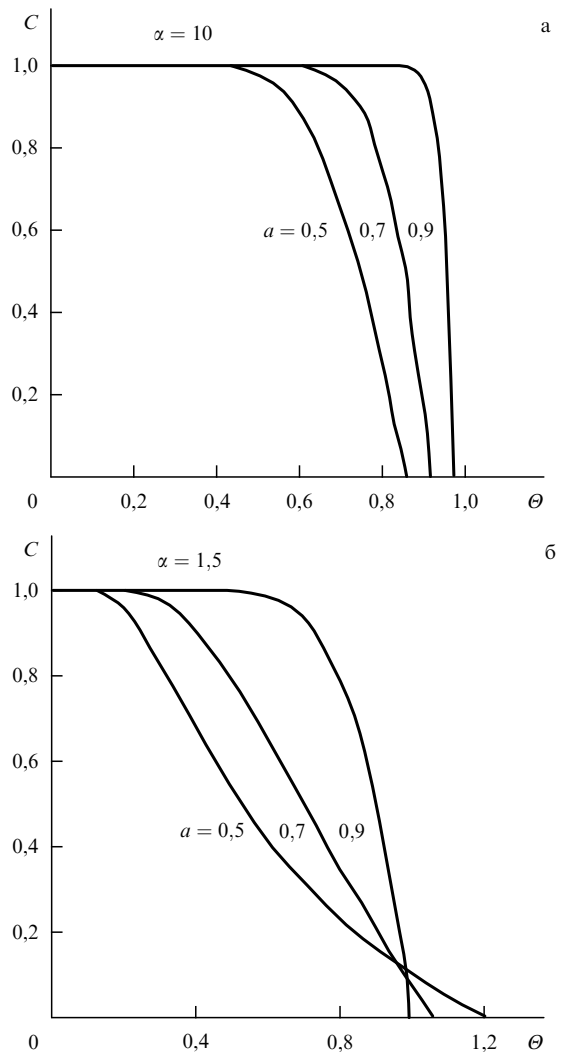


Рис. 3. Зависимость плотности детерминистического конденсата от интенсивности шума  $\Theta$  при различных значениях показателя  $a$  и параметра  $\alpha$ .

до  $C = 0$  при критической величине  $\Theta_c$ . При больших значениях постоянной  $\alpha$  в разложении Ландау (рис. 3а) спадание плотности конденсата  $C$  происходит при тем больших значениях  $\Theta$  интенсивности шума, чем выше значение показателя  $a$ . При величинах  $\alpha \simeq 1$  зависимость  $C(\Theta)$  принимает более сложный вид (рис. 3б): при малых  $\Theta$  рост показателя  $a$  по-прежнему приводит к увеличению плотности конденсата, а при больших  $\Theta$  — к уменьшению.

На рисунке 4 приведены зависимости критической интенсивности шума  $\Theta_c$  от показателя  $a$  при различных значениях  $\alpha$ . Видно, что при малых значениях  $\alpha$  она имеет монотонно спадающий вид, а при больших — нарастающий. Характерно, что при  $\alpha < 1$  критическое значение  $\Theta_c$  с уменьшением показателя  $a$  становится бесконечным. Это означает, что при медленном нарастании мультипликативного шума (3.34) с величиной стохастической переменной  $x$ , ввиду малости термодинамического стимула к упорядочению детерминистический конденсат реализуется при всех значениях интенсивности шума  $\Theta$ .

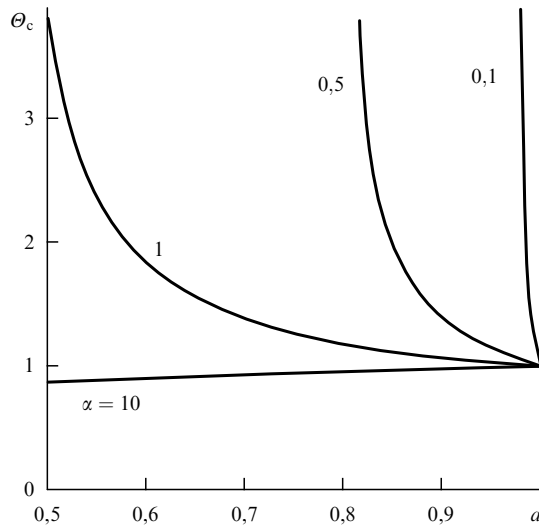


Рис. 4. Зависимость критической интенсивности шума  $\Theta_c = T/T_c$  от показателя  $a$ .

В случае  $a = 1$  для области  $x \ll 1$  имеем

$$\exp(\alpha) \simeq \left(\frac{A}{T} + 1\right)^{-1} x^{A/T+1}, \quad P(x) \simeq Z^{-1} x^{-(A/T+2)}. \quad (3.70)$$

Следовательно, в области, ограниченной интенсивностью шума

$$T^0 = (1 + \alpha^{-1})^{-1} T_c, \quad (3.71)$$

получаем  $L_1 = \infty$ , а при  $T > T^0$  величина  $L_1$  конечна. Согласно (3.54)

$$L_2(b, \beta) \simeq (A + T)^{-1} \ln \frac{\beta}{b}, \quad (3.72)$$

так что в области  $T > T^0$  имеем  $L_2 = \infty$ . Таким образом, при предельном значении  $a = 1$  показателя мультипликативной функции детерминистический режим вообще не проявляется. Однако, если в области  $T < T^0$  он недости-

жим даже за бесконечное время, то при  $T > T^0$  за время  $t \rightarrow \infty$  происходит выпадение конденсата при  $x = 0$ .

Как видно из рис. 3, с ростом показателя мультипликативной функции (3.34) до предельного значения  $a = 1$  зависимость  $C(\Theta)$  плотности конденсата от интенсивности шума  $\Theta = T/T_c$  принимает ступенчатый вид: ниже критического значения  $T_c$  имеем  $C = 1$ , а при закритическом ( $T > T_c$ )  $C = 0$ . Такое поведение отвечает хорошо известной модели Ферхюльста [14]. Ступенчатый вид зависимости  $C(\Theta)$  обеспечивается неограниченным нарастанием множителя  $x^{2\delta}/(2\delta)$ ,  $\delta \equiv 1 - a > 0$ , стоящего в первом слагаемом потенциала (3.36), в пределе  $\delta \rightarrow 0$ . При  $T < T_c$  имеем  $A < 0$ , и отвечающий этому слагаемому первый член в подэкспоненциальном выражении (3.69) оказывается положительным. В результате получаем  $Z' \gg 1$ , откуда в согласии с (3.68) следует  $C = 1$ . В обратном случае  $T > T_c$  оба подэкспоненциальных слагаемых в (3.69) оказываются отрицательными, так что  $Z' \ll 1$  и, следовательно,  $C = 0$ . Интересно отметить, что при точном выполнении равенства  $a = 1$ , когда потенциал  $U(x)$  имеет логарифмический вид (3.42), ступенька  $C(\Theta)$  переворачивается:  $C = 0$  при  $\Theta < 1$  и  $C = 1$  при  $\Theta > 1$ . Очевидно, это связано с изменением знака при переходе от предельной зависимости  $x^{2\delta}/(2\delta) > 0$ ,  $\delta \rightarrow +0$  к логарифму  $\ln x < 0$  при  $\delta = 0$  ( $x \ll 1$ ). С ростом показателя  $a > 1$  обратная ступенька зависимости  $C(\Theta)$  постепенно размывается.

### 3.3. Фрактальная природа фазового пространства

Представим полученную картину функций  $x(t)$ , описывающей временную зависимость координаты частицы в процессе обобщенной диффузии [4]. Поскольку согласно (3.3) ее коэффициент сводится к величине  $(T/2)g^2$ , то имеем  $\langle x^2 \rangle = T(g(x))^2 t$ , откуда для  $a(t) \equiv \langle x^2(t) \rangle^{1/2}$  следует  $a(t) = (2Tt)^{1/2(1-a)}$ . В то же время процесс обобщенной диффузии описывается соотношением Херста  $a(t) \propto t^H$ , где  $H$  сводится к показателю Гёльдера, задающему максимальный порядок производной от неаналитической функции  $x(t)$  [33]. Таким образом, получаем связь<sup>3</sup>

$$H^{-1} = 2(1 - a) \quad (3.73)$$

между показателем Гёльдера  $H$  и параметром  $a$  нашей теории. Согласно (3.73), при аддитивном шуме ( $a = 0$ ) реализуется процесс  $a(t) \propto t^{1/2}$ , отвечающий обычной диффузии. При этом зависимость  $x(t)$  не имеет даже первой производной. Хотя с ростом параметра  $a$  показатель Гёльдера  $H$  увеличивается, такая ситуация сохраняется до значений  $a = 1/2$ . В интервале  $1/2 < a < 3/4$  имеем  $1 < H < 2$ . При этом сама зависимость  $x(t)$  является гладкой, однако ее первая производная уже неаналитична. Легко видеть, что для произвольного интервала  $(2n - 1)/2n < a < (4n - 1)/2n$  гладкими функциями являются все производные до  $n$ -го порядка включительно. Поскольку детерминистический конденсат имеет место при  $1/2 < a < 1$ , то это означает, что здесь стохастическая зависимость  $x(t)$  становится настолько гладкой, что конечная доля степеней свободы

<sup>3</sup> Учитывая важность результата (3.73), приведем другой способ его получения, основанный на переходе (2.48) к переменной  $y$ , обладающей аддитивным шумом. По определению  $y \propto t^{1/2}$ , а подстановка (3.34) в (2.48) дает связь  $y \propto x^{1-a}$ . Таким образом,  $x \propto t^{1/2(1-a)}$  и сравнение с определением  $x \sim t^H$  приводит к равенству (3.73).

вырождается в константу  $x(t) = 0$ . Соответственно при  $0 < a < 1/2$  неаналитическая зависимость  $x(t)$  имеет настолько сложный вид, что стохастический процесс "запутывается" в ней, и детерминистический конденсат не образуется.

Приведенные особенности зависимости  $x(t)$  означают, что ее график имеет фрактальный вид типа того, что реализуется для функции Вейерштрасса [4]. Количественной характеристикой такой зависимости является, как известно, фрактальная размерность [4, 33]. Однако при этом следует иметь в виду, что поскольку стохастическая переменная  $x$  и время  $t$  имеют различные масштабы измерения, то график зависимости  $x(t)$  представляет собой не самоподобное, а самоаффинное множество. В отличие от первого, последнее характеризуется не одним значением фрактальной размерности, а тремя: глобальной  $D = 1$ , локальной  $D = 2 - H$  и внутренней  $D = H^{-1}$  [33]. Для наглядного восприятия указанных размерностей рассмотрим плоскую нить, форма которой совпадает с графиком зависимости  $x(t)$ . Тогда глобальная размерность указывает размерность области новой фазы, возникшей в результате ее зарождения на нити. Локальная размерность характеризует процесс адсорбции заряженных частиц и, наконец, внутренняя размерность определяет длину нити. Очевидно, именно последняя отражает природу стохастического процесса. Используя (3.73), для нее получаем

$$D = 2(1 - a). \quad (3.74)$$

При  $0 < a < 1/2$  имеем  $2 > D > 1$ , и график зависимости  $x(t)$  представляет собой геометрический объект, занимающий промежуточное положение между линией и плоскостью. Это означает настолько значительное расширение области определения функции распределения  $P(x, t)$  в (3.57), что конденсатная составляющая  $C\delta(x)$  не проявляется (в (3.68)  $C = 0$ ). Соответственно при  $1/2 < a < 1$  равенство (3.74) дает  $1 > D > 0$ , и область определения функции  $P(x, t)$  занимает промежуточное положение между линией и точкой. Столь значительное обеднение стохастического процесса обуславливает замерзание системы в детерминистическом конденсате  $x(t) = 0$ .

Очевидно, изначальной причиной представленного поведения стохастической системы является фрактальный характер зависимости  $W(x, y)$ , входящей в управляющее уравнение (2.76). Свойства самоаффинности позволяют найти вид этой функции в пределах  $x, y \rightarrow 0$ . Действительно, учитывая, что для фрактальной области определения искомая функция является однородной [33], запишем

$$W(x, y) = x^b \varphi(u), \quad u \equiv \frac{y}{x}; \quad (3.75)$$

$$W(x, y) = y^c \psi(v), \quad v \equiv \frac{x}{y}, \quad (3.76)$$

где  $b, c$  — показатели, подлежащие определению. Поскольку эти соотношения переходят в асимптотики  $W(x, y) \sim x^b$  при  $x \rightarrow 0$  и  $W(x, y) \sim y^c$  при  $y \rightarrow 0$ , то можно заключить, что функции  $\varphi(u), \psi(v)$  стремятся на бесконечности к постоянным значениям. В этой связи выражение (3.75) определяет область  $x \ll y$  ( $u \gg 1$ ), а (3.76) —  $y \ll x$  ( $v \gg 1$ ).

Для определения показателей  $b, c$  воспользуемся асимптотикой  $P(x) \propto x^{D-2}$  в условии детального равновесия (2.78). Тогда в областях  $x \ll y \ll 1$ ,  $y \ll x \ll 1$  оно приводит к функциональным уравнениям

$$x^{D-2} x^b \varphi(u) = y^{D-2} x^c \psi(u), \quad u \gg 1; \quad (3.77)$$

$$x^{D-2} y^c \psi(v) = y^{D-2} y^b \varphi(v), \quad v \gg 1. \quad (3.78)$$

Отсюда в пределах  $x, y \rightarrow 0$  получаем соотношения

$$c = b + D - 2; \quad (3.79)$$

$$\varphi(u) = y^{D-2} \psi(u), \quad (3.80)$$

$$\varphi(v) = x^{D-2} \psi(v). \quad (3.81)$$

Для определения показателя  $b$  подставим соотношение (3.75) в определение мультипликативной функции (2.83). Тогда получаем искомое значение

$$b = -(1 + D) \quad (3.82)$$

и условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \varphi(1 - u) du = 2T. \quad (3.83)$$

В результате соотношения подобия (3.75), (3.76) принимают окончательный вид

$$W(x, y) = x^{-(1+D)} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \ll y, \quad (3.84)$$

$$W(x, y) = y^{-3} \psi\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{при} \quad y \ll x. \quad (3.85)$$

Очевидно, как в пределе  $x \ll y$ , где  $W \sim x^{-(1+D)}$ , так и при  $x \gg y$ ,  $W \sim y^{-3}$  функция  $W(x, y)$  имеет сингулярный характер. Соответственно дрейфовая и диффузионная составляющие имеют асимптотики  $f_s \propto x^{1-D}$ ,  $g \propto x^{1-D/2}$ . Как и следовало ожидать, с ростом параметра  $a$  (уменьшением фрактальной размерности  $D$ ) найденные сингулярности ослабевают, что и обуславливает при  $a > 1/2$  ( $D < 1$ ) выпадение детерминистического конденсата.

Проведенный фрактальный анализ показывает, что степенная аппроксимация (3.34) мультипликативной функции  $g(x, t)$  является отражением ее однородности, выражаемой равенством (ср. с (2.105))

$$g(x, t) = a^{1-D/2} G(y), \quad y = \frac{x}{a(t)}, \quad (3.86)$$

где  $a(t)$  — характерный масштаб стохастической переменной, изменяющийся со временем, функция  $G(y) \rightarrow 2^{1/2}$  при  $y \rightarrow \infty$ . Таким образом, применимость результатов, полученных в разделе 3.2, ограничена системами, для которых область определения стохастической переменной представляет собой самоаффинное множество, характеризуемое внутренней фрактальной размерностью  $D$  [33].

Интересно заметить, что в пределе  $x \rightarrow 0$  сингулярная сила  $f_s \propto x^{1-D}$  имеет тот же характер, что и мнимая сила  $h = 2\lambda(2 - D)Tx^{1-D}$  в уравнении Фоккера — Планка (3.2) — (3.4). Поскольку изначальной причиной появления обеих сил является фрактальный характер фазового пространства (для  $h(x)$  это видно из приведенного в разделе 2.4.3 вывода уравнения Фоккера — Планка), то можно поло-

жить, что они совпадают. Однако такое совпадение относится только к виду зависимости от стохастической переменной  $x$ . Что касается зависимости от интенсивности шума  $T$ , то из определений (2.82), (2.83) сразу следует, что, будучи моментом первого порядка, сила  $f \propto T^{1/2}$  пропорциональна амплитуде шума, а сила  $h \propto T$  — его интенсивности. Кроме того, сингулярная сила  $f_s$  не содержит произвольного параметра  $\lambda$ , величина которого определяет мнимую силу  $h \propto \lambda$ , а тем самым и выбор исчисления.

Полученная сингулярная сила обусловлена зависимостью  $g(x)$  мультипликативной функции от стохастической переменной. Еще большей степенью сингулярности обладает сила  $f = -\partial U / \partial x \propto x^{D-1}$ , обусловленная зависимостью

$$U(x) = \frac{A}{D} x^D + \frac{B}{2+D} x^{D+2} \quad (3.87)$$

синергетического потенциала (3.36). Однако, если сила  $f_s(x)$  всегда направлена в сторону точки  $x = 0$ , то для составляющей  $f(x)$  такая ситуация имеет место только при интенсивности шума, превышающей критическое значение  $T_c$ . При этом  $A > 0$ , и зависимость  $U(x)$  имеет минимум в точке  $x = 0$ , где происходит запираание системы. Оно отвечает образованию детерминистического конденсата, плотность которого определяется равенством (3.68). При  $T < T_c$  получаем  $A < 0$ , и сила  $f(x)$  меняет направление в сторону точки  $x^0 = (-A/B)^{1/2}$ . В этом случае выпадение детерминистического конденсата целиком обеспечивается действием силы  $f_s(x)$ , приобретающей вблизи точки  $x = 0$  наиболее сингулярный характер.

#### 4. Нарушение симметрии и эргодичности стохастических систем с межчастичным взаимодействием

Как известно, основной характеристикой фазового перехода, понимаемого в обычном смысле, является параметр порядка  $\eta = \langle x \rangle$  — среднее значение флуктуирующей величины  $x(t)$  (в случае магнетика она сводится к спиновой переменной) [28]. Появление ненулевого момента  $\eta$  означает, что функция распределения  $P(x)$  приобретает асимметрию относительно замены  $-x \rightarrow x$ , приводящую к нарушению симметрии, присущей фазовым переходам. При этом в фазовом пространстве выделяется область наиболее предпочтительных значений микроскопической переменной  $x$ . Очевидно, более радикальная перестройка происходит при нарушении эргодичности [50] — в фазовом пространстве появляются запрещенные области, в которых плотность вероятности  $P(x)$  намного превосходит значения в других точках  $x$  (см. раздел 3.2.2). Наиболее наглядным примером таких точек является дискретный набор координат атомов застекловывшейся жидкости. Характерная особенность неэргодических систем состоит в том, что среднее по распределению  $P(x)$  не сводится к среднему по времени  $t$  [50]. Как видно из раздела 3.2.1, в системах с индуцированными шумом переходами не происходит нарушения симметрии или эргодичности, поскольку в ходе превращения распределение  $P(x)$  испытывает более слабое изменение — появляются максимумы при  $x \neq 0$ .

Поскольку при исследовании стохастических систем, как правило, не учитывается межчастичное взаимодействие, являющееся причиной обычного фазового перехода, то возникает вопрос: не приведет ли его включение к потере симметрии? В работе [51] был получен положительный ответ на этот вопрос. Однако там рассматривался случай несингулярного мультипликативного шума, интенсивность которого остается конечной при любых значениях  $x$ . В разделе 5 будет показано, что при моделировании стохастической системы уравнениями Лоренца, в которых каждая из трех степеней свободы изначально обладает аддитивным шумом, иерархия их времен релаксации приводит не только к хорошо известному соподчинению этих мод [5], но и к трансформации шума для некоторых из них из аддитивного в мультипликативный [52]. В частности, мультипликативная функция управляющего параметра имеет в пределе  $x \rightarrow 0$  линейно спадающий характер, и модель [51] оказывается неприемлемой.

Таким образом, возникает задача исследования стохастической системы с межчастичным взаимодействием и сингулярным мультипликативным шумом (3.34). При этом эффективный коэффициент диффузии  $D \propto x^{2a}$  имеет вид, показанный на рис. 5. При  $a < 1/2$  значение  $D$  очень быстро возрастает с увеличением  $x$ , и наличие сингулярной точки  $x$ , в которой  $D = 0$ , практически не сказывается на характере поведения стохастической системы, присущем случаю аддитивного шума — с уменьшением интенсивности шума  $T$  система может терять симметрию, но всегда остается эргодичной. Совершенно отличная ситуация наблюдается при показателе  $a > 1/2$ , когда эффективный коэффициент диффузии  $D$  принимает малые значения в окрестности точки  $x = 0$  и значительно возрастает при  $x \gg 1$ . Оказывается, что при этом стационарное распределение всегда имеет симметричный вид с  $\delta$ -образной особенностью при  $x = 0$ . Иными словами, при увеличении показателя мультипликативной функции до значений  $a > 1/2$  симметрия стохастической системы полностью восстанавливается, но происходит образование детерминистического конденсата. Это означает, что несмотря на наличие шума, конечная доля частиц "примержает" к своим начальным положениям. Иными словами, стохастическая система

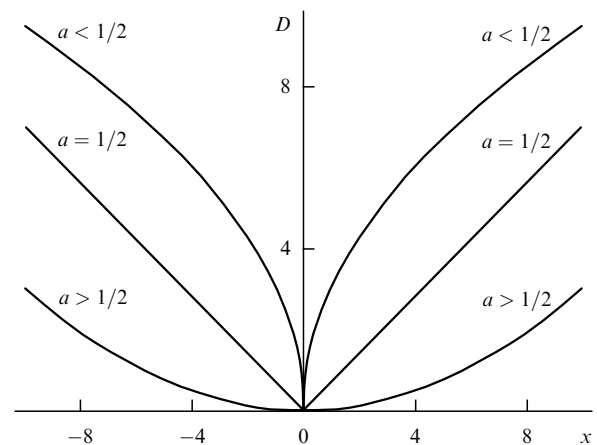


Рис. 5. Вид зависимости эффективного коэффициента диффузии  $D$  от стохастической переменной  $x$  при различных значениях  $a$  показателя мультипликативной функции.

приобретает память, присущую состоянию стекла, а также теряет эргодичность.

#### 4.1. Введение межчастичного взаимодействия при описании стохастической системы

Как видно из раздела 2, формализм, используемый при описании стохастической системы, имеет феноменологический характер, в связи с чем учет межчастичного взаимодействия, которое по своей сути является микроскопическим, приводит к нетривиальной задаче. Для ее решения воспользуемся простейшей моделью гармонических колебаний, совершаемых атомами одномерной периодической цепочки [53]. Потенциальная энергия взаимодействия ближайших соседей с атомом в узле  $x$  определяется в виде

$$V_{\text{int}}(x) = \frac{c}{2} \sum_i (x - x_i)^2, \quad (4.1)$$

где  $c$  — жесткость эффективной пружинки, суммирование проводится по положениям  $x_i$  ближайших соседей. В рамках приближения среднего поля проведем замену  $x_i$  средним значением  $\langle x_i \rangle \equiv \eta$ , после чего сила взаимодействия  $f_{\text{int}} = -\partial V_{\text{int}}/\partial x$  принимает вид

$$f_{\text{int}} = -w(x - \eta), \quad (4.2)$$

где введено характерное значение энергии взаимодействия  $w = cz$ ,  $z$  — число ближайших соседей. Приведенные при выводе соотношения (4.2) модельные соображения носят наводящий характер. По своей форме равенство (4.2) совпадает с предложенным в [51], и далее мы будем использовать его как простейшую из возможных аппроксимаций, считая  $w$  параметром теории.

Найденная сила взаимодействия  $f_{\text{int}}$  должна учитываться наравне с силой самодействия  $f$  в выражениях (2.96)–(2.98), определяющих стационарное распределение значений стохастической переменной. В результате это распределение представляется следующими выражениями:

$$P = Z^{-1} \exp \left[ -\frac{U_{\text{ef}}(x)}{T} \right], \quad (4.3)$$

$$U_{\text{ef}}(x) = 2aT \ln x + \tilde{U}(x), \quad (4.4)$$

$$\tilde{U} = U(x) + U_{\text{int}}(x), \quad (4.5)$$

$$U(x) = \frac{A}{2(1-a)} x^{2(1-a)} + \frac{B}{2(2-a)} x^{2(2-a)}, \quad (4.6)$$

$$A = \alpha(T - T_{c0}),$$

$$U_{\text{int}}(x) = w \left( \frac{x^{2(1-a)}}{2(1-a)} - \eta \frac{x^{1-2a}}{1-2a} \right). \quad (4.7)$$

Здесь  $Z$  — нормировочная постоянная, задаваемая условием (2.92), мультипликативная функция принята в том же виде (3.34), что и в разделе 3. Логарифмическое слагаемое в эффективном потенциале (4.4) обусловлено мультипликативным характером шума, составляющая (4.6) представляет собой перенормированный потенциал Ландау, а вклад (4.7) обусловлен взаимодействием. Сравнение выражений (4.6) и (4.7) показывает, что взаимодействие  $w$  перенормирует критическую температуру  $T_c = T_{c0} - w/\alpha$  в разложении Ландау. При наличии порядка  $\eta \neq 0$  оно дает также вклад, обладающий минимальной степенью величины  $x$ .

Согласно (4.4)–(4.7) характер распределения (4.3) задается, в основном, значением показателя  $a$ , который определяет величину сингулярного вклада в эффективный потенциал (4.4): при  $x \rightarrow 0$  мультипликативная функция приводит к особенности  $P \propto g^{-2}(x) \propto x^{-2a}$ . В интервале  $0 < a < 1/2$  указанная расходимость носит интегрируемый характер и не сказывается существенным образом. Кроме того, последнее слагаемое в (4.7) имеет спадающий характер, и потенциал  $\tilde{U}(x)$  не является сингулярным. При  $a > 1/2$  расходимость распределения  $P(x)$  становится неинтегрируемой, а указанное слагаемое в  $\tilde{U}(x)$  принимает расходящийся характер. Поэтому область больших показателей  $a$  требует отдельного рассмотрения.

#### 4.2. Теория стохастической системы с нарушенной симметрией

Исследуем сначала случай  $a < 1/2$ . Согласно условию нормировки (2.92) статистическая сумма имеет вид

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2a} \tilde{P}(x) P_{\eta}(x) dx; \quad (4.8)$$

$$\tilde{P}(x) \equiv \exp \{ -\lambda x^{2(1-a)} - \mu x^{2(2-a)} \}, \quad (4.9)$$

$$P_{\eta}(x) \equiv \exp(v\eta x^{1-2a}), \quad (4.10)$$

где введены обозначения  $\lambda = \alpha(1 - \Theta^{-1})/[2(1 - a)]$ ,  $\mu = B/[2(2 - a)\Theta T_c]$ ,  $v = w/[(1 - 2a)\Theta T_c]$ , а температура  $\Theta = T/T_c$  измерена в единицах перенормированной критической температуры  $T_c = T_{c0} - w/\alpha$ . Укажем, что первые два множителя в подынтегральном выражении (4.8) симметричны относительно замены  $-x \rightarrow x$ , тогда как фактор  $P_{\eta}(x)$ , связанный с дальним порядком  $\eta \neq 0$ , содержит асимметрию, которая и обуславливает потерю симметрии при упорядочении. Величина  $\eta = \langle x \rangle$  задается условием самосогласования

$$\eta = Z^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{1-2a} P_{\eta}(x) \tilde{P}(x) dx. \quad (4.11)$$

Поскольку при  $\eta = 0$  множитель  $P_{\eta}(x) = 1$ , то подынтегральное выражение в (4.11) приобретает антисимметричный характер, и интеграл тождественно равен нулю. Таким образом, условие (4.11) всегда имеет корень  $\eta = 0$ , отвечающий неупорядоченной фазе. Как и при обычных фазовых превращениях, ненулевое решение появляется, когда графики зависимостей правой и левой частей равенства (4.11) касаются друг друга. Очевидно, это условие определяет точку фазового перехода или, иными словами, фазовую диаграмму системы.

Для построения последней продифференцируем по  $\eta$  обе части равенства (4.11) и устремим значение  $\eta$  к нулю:

$$1 = \frac{\partial Z^{-1}}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{1-2a} P_{\eta}(x) \tilde{P}(x) dx \Big|_{\eta=0} + Z^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{1-2a} P_{\eta}(x) \tilde{P}(x) dx \Big|_{\eta=0}. \quad (4.12)$$

Согласно (4.8), (4.10), в первом слагаемом имеем

$$\frac{\partial Z^{-1}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -v Z^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{1-4a} \tilde{P}(x) dx. \quad (4.13)$$



Это выражение сводится к нулю, поскольку первый из подынтегральных сомножителей является антисимметричным, а второй, согласно (4.9), — симметричным относительно замены  $x$  на  $-x$ . В результате условие (4.12) принимает вид

$$1 = \frac{v}{Z(0)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(1-2a)} \tilde{P}(x) dx, \quad (4.14)$$

где  $Z(0) \equiv Z(\eta = 0)$ . Поскольку интеграл в правой части имеет положительное значение, то  $v > 0$  и параметр взаимодействия  $w = (1 - 2a)\Theta T_c v$  также положителен.

Для проведения численного анализа выражений (4.8), (4.11), (4.14) удобно содержащееся в них интегрирование по полной оси  $-\infty < x < \infty$  свести к положительной полуоси  $0 \leq x < \infty$ . С этой целью представим интеграл  $I$ , стоящий в правой части равенства (4.11), суммой слагаемых

$$I_+ \equiv \int_0^{\infty} x^{1-2a} \tilde{P}(x) P_{\eta}(x) dx, \quad (4.15)$$

$$I_- \equiv \int_{-\infty}^0 x^{1-2a} \tilde{P}(x) P_{\eta}(x) dx. \quad (4.16)$$

Проводя в (4.16) замену  $x$  на  $-x$ , с учетом четности функции  $\tilde{P}(x)$  находим

$$I_- = - \int_0^{\infty} x^{1-2a} \tilde{P}(x) P_{\eta}(-x) dx. \quad (4.17)$$

Поскольку в согласии с (4.10)  $P_{\eta}(-x) = (P_{\eta}(x))^{-1}$ , то для полного значения  $I = I_+ + I_-$  имеем

$$I = \int_0^{\infty} x^{1-2a} \tilde{P}(x) \left[ P_{\eta}(x) - \frac{1}{P_{\eta}(x)} \right] dx. \quad (4.18)$$

Аналогичным образом для нормировочной константы  $Z$  в (4.8) получаем

$$Z = \int_0^{\infty} x^{-2a} \tilde{P}(x) \left[ P_{\eta}(x) + \frac{1}{P_{\eta}(x)} \right] dx. \quad (4.19)$$

С учетом равенств (4.10), (4.18), (4.19) уравнения (4.8), (4.11), (4.14) принимают вид

$$Z = 2 \int_0^{\infty} x^{-2a} \tilde{P}(x) \cosh(v\eta x^{1-2a}) dx, \quad (4.20)$$

$$\eta = 2Z^{-1} \int_0^{\infty} x^{1-2a} \tilde{P}(x) \sinh(v\eta x^{1-2a}) dx, \quad (4.21)$$

$$Z(0) = 2v \int_0^{\infty} x^{2(1-2a)} \tilde{P}(x) dx. \quad (4.22)$$

Интересно сопоставить эти выражения со стандартной моделью Изинга, для которой переменная  $x$  может принимать только значения  $\pm 1$ , а шум имеет аддитивный характер [28]. В рамках нашего подхода это означает, что распределение  $\tilde{P}(x) = \delta(x - 1) + \delta(x + 1)$ , а мультипликативный показатель  $a = 0$  (соответственно параметр  $v = w/T$ ). В результате выражения (4.20), (4.21) принимают стандартную форму [28]:

$$Z = 2 \cosh\left(\frac{w\eta}{T}\right), \quad \eta = \tanh\left(\frac{w\eta}{T}\right). \quad (4.23)$$

Таким образом, использованная нами модель фазового перехода представляет собой обобщение модели Изинга. Это обобщение состоит в том, что  $\delta$ -образная функция

распределения  $\tilde{P}(x)$  размывается на всю ось  $x$ , а шум принимает мультипликативный характер.

Численное решение уравнения (4.21) для различных показателей  $a$  приведено на рис. 6. Характерно, что при аддитивном шуме ( $a = 0$ ) температурная зависимость параметра порядка  $\eta(\Theta)$  имеет обычный монотонно спадающий вид [28]. При  $a > 0$  она приобретает нерегулярные изломы, число которых увеличивается с ростом  $a$ . Вблизи предельного значения  $a = 1/2$  с приближением к температуре фазового перехода появляются также скачки параметра порядка, за которыми следуют достаточно протяженные хвосты малых значений  $\eta$ . Указанная нерегулярность зависимости  $\eta(\Theta)$  не связана с точностью численного счета, а обусловлена мультипликативным характером шума. Ее физическая природа будет выяснена в конце раздела.

На рисунке 7 приведена фазовая диаграмма системы, следующая из равенства (4.22). Она представляет собой зависимость температуры фазового перехода  $\Theta_0$  от

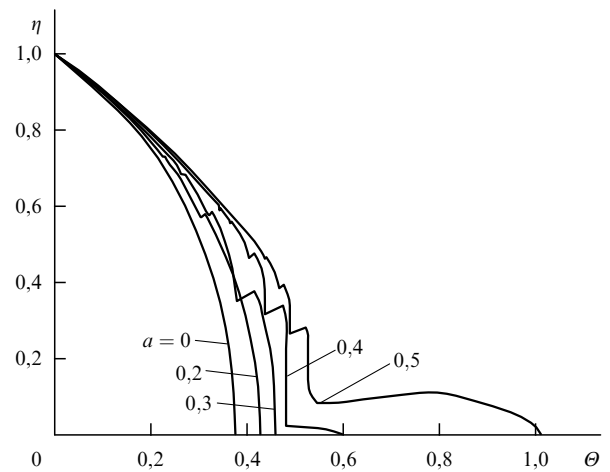


Рис. 6. Температурная зависимость параметра дальнего порядка при различных значениях показателя  $a$ .

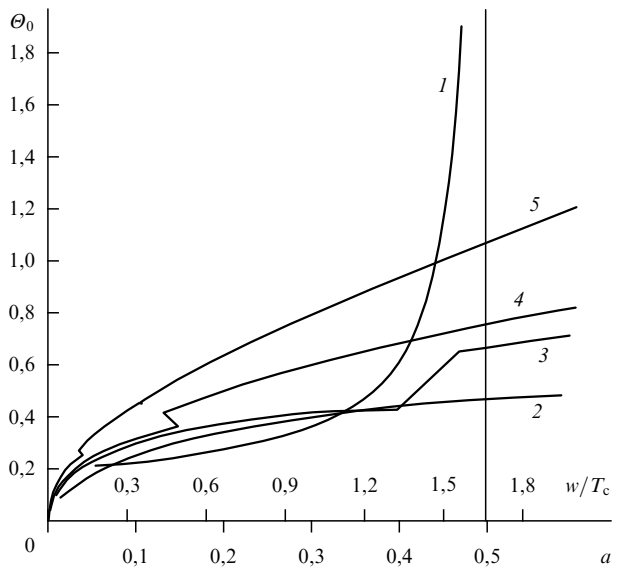


Рис. 7. Зависимости температуры потери симметрии  $\Theta_0$  от показателя  $a$  при  $w = 0,3$  (кривая 1) и от параметра межатомного взаимодействия  $w$  при  $a = 0,3; 0,4; 0,42; 0,45$  (кривые 2–5).

показателя  $a$  и от параметра межатомного взаимодействия  $w$ . Как видно из зависимости  $\Theta_0(a)$ , представленной кривой 1, с ростом  $a$  величина  $\Theta_0$  плавно возрастает от конечного значения  $\Theta_0$  при  $a = 0$  до бесконечности при  $a = 1/2$ . При малых  $a$  монотонно нарастающий характер имеет также и зависимость  $\Theta_0(w)$  (кривая 2). Однако появление хвостов на зависимости  $\eta(\Theta)$ , происходящее с ростом показателя  $a$ , приводит к наличию пологих (кривая 3) и даже немонотонных участков (кривые 4, 5) на фазовой диаграмме  $\Theta_0(w)$ .

Рассмотрим теперь условия нарушения симметрии в зависимости от величины фрактальной размерности  $D$ . Согласно проведенному выше анализу дальний порядок  $\eta \neq 0$  имеет место при значениях показателя мультипликативной функции  $0 < a < 1/2$ . В разделе 4.3 будет показано, что при  $1/2 < a < 1$  дальний порядок отсутствует ( $\eta = 0$ ). Учитывая связь (3.74) фрактальной размерности  $D$  с показателем  $a$ , видим, что дальний порядок реализуется при значениях фрактальной размерности  $1 < D < 2$ , а при  $0 < D < 1$  имеем  $\eta = 0$ . Очевидно, такое поведение отвечает хорошо известному факту флуктуационного разрушения дальнего порядка в системах с размерностью  $D < 1$  [28].

Дробной размерностью  $1 < D < 2$  объясняются также представленные на рис. 6, 7 нерегулярности температурной зависимости параметра порядка  $\eta(\Theta)$  и фазовой диаграммы  $\Theta_0(w)$ . Ранее было выяснено, что они проявляются с приближением показателя  $a$  к значению  $1/2$ . Согласно определению фрактальной размерности это означает, что с уменьшением размерности до критического значения  $D = 1$  происходит настолько сильное сужение фазового пространства, что несмотря на сохранение порядка  $\eta \neq 0$  начинают сказываться нерегулярности, приводящие к указанным особенностям. В частности, высокотемпературные хвосты малых значений  $\eta$  на рис. 6 и отвечающие им особенности на фазовой диаграмме (рис. 7) обусловлены тем, что с увеличением температуры за счет кластеризации фрактального фазового пространства происходит не плавное, а скачкообразное сужение области, отвечающей упорядоченной фазе.

#### 4.3. Теория неэргодической стохастической системы

Перейдем теперь к обсуждению области  $a > 1/2$ , отвечающей более быстрому нарастанию мультипликативного шума. При этом множитель  $x^{-2a}$  приводит к расходимости интеграла в выражении (4.20). Покажем сначала, что данная расходимость обуславливает отсутствие порядка во всей области температур. С этой целью введем нижний предел интегрирования  $b \rightarrow 0$ . Тогда, учитывая, что основной вклад дают малые значения  $x$ , где  $\tilde{P}(x) \simeq 1$ , из (4.20) для  $\eta = 0$  получаем  $Z(0) \sim b^{1-2a}$ . Соответствующая оценка для интеграла  $I$ , стоящего в правой части (4.22), дает  $I \sim b^{3-4a}$ . В результате из (4.22) следует  $v^{-1} \sim b^{2(1-a)}$  и при  $a < 1$  в пределе  $b \rightarrow 0$  получаем  $v = \infty$ . Таким образом, касание графиков левой и правой частей условия самосогласования (4.21) происходит только при  $\Theta = 0$ . При конечных значениях температуры график правой части (4.21) выходит из точки  $\eta = 0$  под углом  $\alpha \sim vb^{2(1-a)}$ . Не говоря уже о том, что условие  $\alpha > 0$  требует отрицательных значений параметра взаимодействия  $w \propto (1 - 2a)v$ , в пределе  $b \rightarrow 0$  этот угол бесконечно мал, и условие (4.21) выполняется только в точке  $\eta = 0$ .

Таким образом, несмотря на наличие взаимодействия (4.2) при значениях показателя мультипликативной функции (3.34), превышающих  $1/2$ , условие самосогласования (4.21) дает только тривиальное решение  $\eta = 0$ , указывающее на восстановление симметрии во всей области температур. В результате картина индуцированного шумом перехода и потери эргодичности (см. раздел 3.2) оказывается той же, что и в отсутствие взаимодействия. Единственное отличие состоит в перенормировке критической температуры

$$T_c = T_{c0} - \frac{w}{\alpha}, \quad (4.24)$$

где  $T_{c0}$  — ее затравочное значение в синергетическом потенциале (4.6),  $w$  — интенсивность взаимодействия,  $\alpha$  — параметр, входящий в разложение Ландау (3.32), (3.33).

Представленная картина восстановления симметрии при  $a > 1/2$  может быть получена не только из анализа уравнений (4.20)–(4.22), но и непосредственно из вида зависимости  $U_{\text{ef}}(x)$  эффективного потенциала от стохастической переменной. Согласно (4.4)–(4.7) первое слагаемое в (4.4) дает настолько глубокий минимум в точке  $x = 0$ , что асимметрия, обусловленная вкладом  $U_{\text{int}}(x)$ , оказывается несущественной, и условие самосогласования (4.21) приводит к  $\eta = 0$ . В то же время минимум в точке  $x = 0$  является причиной выпадения детерминистического конденсата. Поэтому можно сказать, что наличие последнего является причиной восстановления симметрии. Поскольку замерзание  $C$ -той доли степеней свободы в точке  $x = 0$  означает нарушение эргодичности стохастической системы, то из сделанного вывода следует, что с ростом показателя  $a$  режим потери симметрии, присущий области  $a < 1/2$ , трансформируется при  $a > 1/2$  в режим потери эргодичности.

Указанное обстоятельство поддается простой интерпретации при переходе от показателя  $a$  к фрактальной размерности  $D$ , определенной равенством (3.74). Действительно, при  $0 < a < 1/2$  имеем  $2 > D > 1$ , и график зависимости  $x(t)$  представляет собой геометрический объект, занимающий промежуточное положение между линией и плоскостью. Это означает настолько значительное расширение области определения подынтегральной функции в (4.21), что условие самосогласования удовлетворяется при  $\eta \neq 0$ . Вклад же  $\delta$ -образного слагаемого в распределение (3.57) оказывается при этом пренебрежимо малым, и детерминистический конденсат не проявляется ( $C = 0$ ). При  $1/2 < a < 1$  получаем  $1 > D > 0$ , и область определения функции распределения (4.3) занимает промежуточное положение между линией и точкой. Столь значительное обеднение стохастического процесса обуславливает выделение  $\delta$ -образного вклада в распределение (3.57), означающее замерзание системы в детерминистическом конденсате  $x(t) = 0$ . Соответственно в интеграл, стоящий в правой части равенства (4.21), основной вклад вносит область  $x \ll 1$ , в которой его значение пренебрежимо мало и, следовательно,  $\eta = 0$ .

#### 4.4. Связь фрактальной природы фазового пространства с характером поведения стохастической системы

Проведенное рассмотрение показывает, что моделирование мультипликативного шума степенной зависимо-

стью (3.34) (или, в более общем виде, соотношением (3.86)) эквивалентно предположению, что область определения стохастической системы в фазовом пространстве является фрактальным объектом, размерность которого  $D$  связана с показателем мультипликативной функции  $a$  равенством (3.74). В простейшем случае самосогласованное поведение стохастической системы определяется силой самодействия, отвечающей перенормированному потенциалу Ландау (см. (4.6))

$$U(x) = \frac{A}{D} x^D + \frac{B}{(D+2)} x^{D+2}, \quad A = \alpha(T - T_{c0}). \quad (4.25)$$

При этом во всем интервале значений  $D \in [0, 2]$  оказывается возможным только переход, индуцированный шумом, когда стационарная функция распределения (4.9) приобретает максимумы при  $x \neq 0$ . При малых значениях фрактальной размерности ( $D < 1$ ) появляется неинтегрируемая особенность в точке  $x = 0$ , которая приводит к выпадению детерминистического конденсата, означающему потерю эргодичности. Включение межчастичного взаимодействия, характеризуемого потенциалом (см. (4.7))

$$U_{\text{int}}(x) = w \left( \frac{x^D}{D} - \eta \frac{x^{D-1}}{D-1} \right), \quad (4.26)$$

где  $\eta \equiv \langle x \rangle$  — параметр дальнего порядка,  $w$  — интенсивность взаимодействия, приводит к выделению значений  $D \in (1, 2]$ , при которых стохастическая система теряет симметрию относительно обращения знака переменной  $x$ . При этом происходит фазовый переход типа того, что имеет место в термодинамических системах [28].

Приведенная картина является неполной, поскольку выше не учитывалось действие сингулярной силы, наличие которой обусловлено фрактальной природой стохастической системы. Как показано в разделе 3.3, зависимость  $f_s(x) \propto T^{1/2} x^{1-D}$  этой силы от стохастической переменной имеет тот же вид, что и для фиктивной силы (3.4), связанной с выбором исчисления, однако она не содержит произвольного параметра  $\lambda \in [0, 1]$  и пропорциональна не интенсивности шума  $T$ , а его амплитуде  $T^{1/2}$ .

Настоящий раздел посвящен исследованию стохастической системы, в которой кроме самодействия  $U(x)$  и взаимодействия  $U_{\text{int}}(x)$ , определенных равенствами (4.25), (4.26), учитывается также вклад  $U_s(x)$ , обусловленный сингулярной силой  $f_s(x)$  [54]. Для определения этого вклада перепишем в размерном виде соотношения (2.82), (2.83), выражающие макроскопические характеристики  $f(x)$ ,  $g(x)$  через интенсивность  $W(x, x-y)$  микроскопических переходов. Сравнивая запись стохастического уравнения в размерном виде (2.11) и безразмерном (2.21), видим, что при переходе к размерным величинам в уравнении Фоккера–Планка (2.81) перед силой  $f(x)$  и мультипликативным множителем  $g^2(x)$  появляется кинетический коэффициент  $\gamma$ , имеющий размерность  $^4$  эрг $^{-1}$  с $^{-1}$ . Отсюда нетрудно видеть, что определения (2.82), (2.83) запишутся в размерном виде следующим

образом:

$$f(x) = -\gamma^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} y W(x, x-y) dy, \quad (4.27)$$

$$Tg^2(x) = \gamma^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 W(x, x-y) dy. \quad (4.28)$$

Здесь переменные  $x$ ,  $y$  безразмерны по определению, а интенсивность переходов  $W(x, x-y)$  имеет размерность с $^{-1}$ . Поэтому, учитывая микроскопический характер этих переходов, для преобразования безразмерных соотношений подобия (3.84), (3.85) к размерному виду следует выделить множитель  $\tau_0^{-1}$ , определенный микроскопическим временем  $\tau_0$ . В результате интенсивность переходов в определениях (4.27), (4.28) принимает вид:

$$W(x, x-y) = \tau_0^{-1} x^{-(1+D)} \varphi(1-u), \quad (4.29)$$

где  $u = y/x$  — новая переменная,  $\varphi(1-u)$  — неизвестная функция, величина которой спадает с ростом  $u$ . Определение этой функции представляет собой отдельную задачу, и мы воспользуемся простейшей гауссовой аппроксимацией:

$$\varphi(1-u) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.30)$$

Подставляя это выражение в (4.29), а результат в (4.28), находим величину дисперсии

$$\sigma = (2\tau_0\gamma T)^{1/2}. \quad (4.31)$$

Тогда соотношения (4.27), (4.29), (4.30) приводят к следующему выражению для сингулярной силы:

$$f_s(x) = -T \left( \frac{T_s}{T} \right)^{1/2} x^{1-D}, \quad (4.32)$$

где введена характерная температура

$$T_s \equiv \frac{4}{\pi\tau_0\gamma}. \quad (4.33)$$

Если подобно тому, как это делалось в разделе 2.1, в качестве единицы измерения этой температуры выбрать обратную восприимчивость  $\chi^{-1}$ , то получим

$$T_s\chi = \frac{4}{\pi} \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau \equiv \frac{\gamma}{\gamma}. \quad (4.34)$$

Таким образом, температура  $T_s$  определяет отношение макроскопического времени релаксации  $\tau$  к микроскопическому  $\tau_0$ .

Для получения выражения  $U_s(x)$  сингулярного вклада в эффективный потенциал (ср. с (4.4))

$$U_{\text{ef}}(x) = (2-D)T \ln x + U(x) + U_{\text{int}}(x) + U_s(x) \quad (4.35)$$

необходимо сделать выбор между соотношениями (2.2), (2.98), связывающими силу  $f(x)$  и отвечающий ей синергетический потенциал  $U(x)$ . При этом следует исходить из того обстоятельства, что второе из этих соотношений отличается от первого учетом мультипликативного характера шума. Именно это обстоятельство привело к тому, что в выражениях (4.25), (4.26) для перенормированных потенциалов самодействия и межчастичного

<sup>4</sup> Интересно отметить, что размерность параметра  $\gamma^{-1}$  совпадает с размерностью действия  $S$ , и величину  $\gamma^{-1}$  можно рассматривать как единицу его измерения в выражении (2.44).

взаимодействия показатели содержат фрактальную размерность  $D$ , которая в затравочных потенциалах (3.32), (4.1) сводится к значению  $D = 2$ . Однако выражение (4.32) для сингулярной силы изначально содержит учет мультипликативного характера шума, поскольку при его выводе мы основывались на соотношении подобия (4.29), отражающем фрактальный характер фазового пространства, а следовательно, и мультипликативность системы (см. (3.74)). В этой связи для определения сингулярного потенциала нужно воспользоваться соотношением (2.2), из которого следует

$$U_s(x) = \frac{(T_s T)^{1/2}}{2 - D} x^{2-D}. \quad (4.36)$$

В отличие от составляющих (4.25), (4.26), здесь рост фрактальной размерности приводит к уменьшению показателя стохастической переменной  $x$ . Для аддитивного шума ( $D = 2$ ) сингулярное слагаемое, как и следовало ожидать, пропадает.

В области  $D \leq 1$  в стохастической системе выпадает детерминистический конденсат, плотность которого определяется соотношениями

$$C = 1 - \frac{1}{Z'}, \quad (4.37)$$

$$Z' = \int_0^\infty \tilde{P}(x) dx, \quad (4.38)$$

$$\tilde{P}(x) = \exp(-\kappa x^{2-D} - \lambda x^D - \mu x^{2+D}), \quad (4.39)$$

$$\kappa = \frac{(T_s/T_c)^{1/2}}{2 - D} \Theta^{1/2}, \quad (4.40)$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{D} (1 - \Theta^{-1}), \quad \mu = \frac{\alpha}{2 + D} \Theta^{-1},$$

обобщающими выражения (3.68), (3.69). Соответствующий вид температурной зависимости  $C(\Theta)$  приведен на рис. 8. Из него видно, что рост отношения  $T_s/T_c$  характерных температур, означающий увеличение вклада сингулярной силы, приводит к плавному умень-

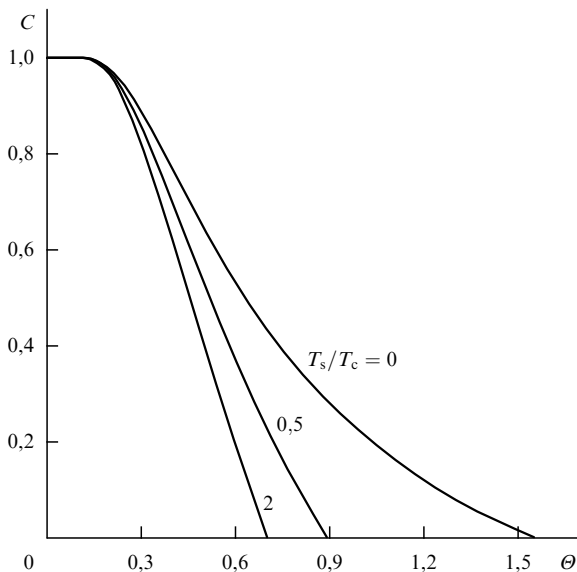


Рис. 8. Зависимость плотности детерминистического конденсата  $C$  от интенсивности шума  $\Theta$  при  $a = 0,7$ .

шению плотности конденсата. Характерно, что в распределении (4.39) отсутствует дальний порядок ( $\eta = 0$ ). Он появляется при возрастании фрактальной размерности до значений  $D \in (1, 2]$ , однако детерминистический конденсат при этом пропадает (последнее следует из того, что при  $D > 1$  функция распределения (3.57) становится нормируемой и без учета  $\delta$ -образного вклада). Условие самосогласования, определяющее параметр дальнего порядка, имеет вид (ср. с (4.20), (4.21)):

$$\eta = 2Z^{-1} \int_0^\infty x^{D-1} \sinh(v\eta x^{D-1}) \tilde{P}(x) dx; \quad (4.41)$$

$$Z = 2 \int_0^\infty x^{D-2} \cosh(v\eta x^{D-1}) \tilde{P}(x) dx, \quad (4.42)$$

$$v = \frac{w/T_c}{D-1} \Theta^{-1}, \quad (4.43)$$

где распределение  $\tilde{P}(x)$  задается равенствами (4.37), (4.38). Точка фазового перехода определяется уравнением (ср. с (4.22))

$$Z(0) = 2v \int_0^\infty x^{2(D-1)} \tilde{P}(x) dx, \quad (4.44)$$

где  $Z(0) \equiv Z(\eta = 0)$ . Температурная зависимость параметра дальнего порядка и вид фазовой диаграммы приведены на рис. 9, 10.

Полученные температурные зависимости  $C(\Theta)$ ,  $\eta(\Theta)$  и их фазовая диаграмма (см. рис. 8–10) показывают, что сингулярная сила (4.32), действие которой определяется отношением  $T_s/T_c$ , сказывается следующим образом: увеличение вклада, обусловленного сингулярной составляющей, приводит к понижению температуры образования детерминистического конденсата и порога образования несимметричной фазы ( $\eta \neq 0$ ). Поскольку как указанные величины, так и сингулярная сила (4.32) возрастают с уменьшением фрактальной размерности

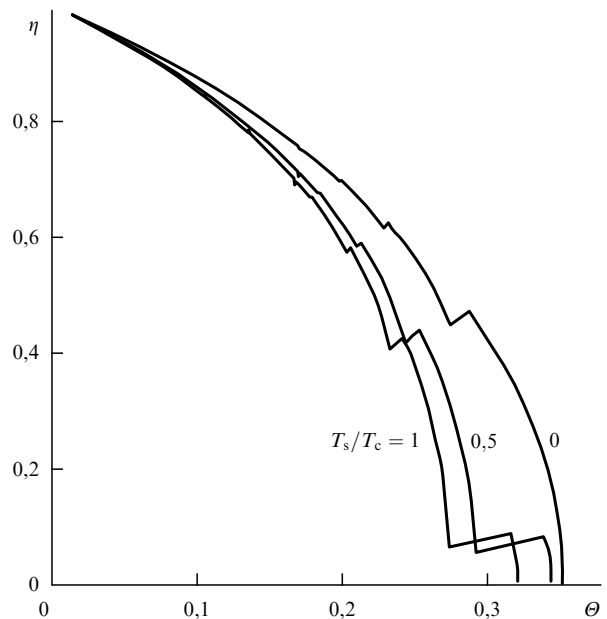


Рис. 9. Зависимость параметра дальнего порядка  $\eta$  от интенсивности шума  $\Theta$  при различных значениях  $T_s/T_c$ .

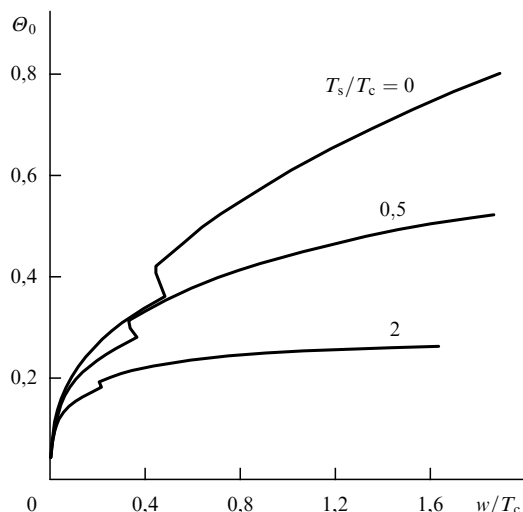


Рис. 10. Зависимость температуры потери симметрии от параметра межатомного взаимодействия  $w$  при  $D = 1,16$ .

$D$ , то можно говорить, что указанная сила действует в согласии с обобщенным принципом Ле-Шателье — подавляет следствия фрактальной структуры фазового пространства, которой обусловлено появление этой силы.

## 5. Влияние шума на характер поведения синергетической системы

В предыдущих разделах мы исследовали стохастические системы, которые представляются единственной гидродинамической модой, параметризуемой величиной  $x$ . Было показано, что в том случае, если действие среды, представляющей негидродинамические степени свободы, зависит от состояния стохастической системы  $x$ , то шум приобретает мультипликативный характер, что обуславливает весьма нетривиальные изменения в поведении системы. В частности, область определения стохастической системы в фазовом пространстве приобретает фрактальный характер, в связи с чем происходит перенормировка синергетического потенциала, с одной стороны, и он приобретает сингулярное слагаемое, с другой. Следует отметить, что при этом мы моделировали мультипликативный шум степенной функцией (3.34).

В связи со сказанным возникает естественный вопрос: насколько реалистичной является принятая модель мультипликативного шума? Очевидно, для ответа на этот вопрос следует изначально выделить не одну, а несколько гидродинамических степеней свободы и рассмотреть их самосогласованное поведение, учитывая наличие шумов для каждой из них. Если в дальнейшем выделить одну из этих степеней, то должен автоматическим образом получиться вид мультипликативной функции, что и даст ответ на поставленный вопрос [52, 55].

В разделе 5.1 рассмотрена стохастическая система Лоренца, которая отличается от стандартной синергетической схемы [5] только тем обстоятельством, что для каждой гидродинамической моды кроме детерминистических слагаемых введены стохастические добавки — по той же схеме, как это делалось при переходе от уравнения Ландау — Халатникова (2.3) к уравнению Ланжевена (2.4). Исследование модернизированной таким образом

синергетической схемы показывает, что даже в том случае, когда все степени свободы изначально обладают аддитивным шумом, наличие иерархического соподчинения, выделяющего одну из этих мод, приводит к трансформации аддитивного шума выделенной моды в мультипликативный. Кроме того, использование синергетической схемы позволяет независимым образом воспроизвести данные, полученные для однопараметрической системы (см. раздел 3.2).

### 5.1. Стохастическая система Лоренца

Как известно, синергетика представляет собой обобщение термодинамики фазовых переходов [28] на открытые системы, которые с ростом интенсивности внешнего воздействия, удаляющего их от равновесного состояния, могут испытывать самоорганизацию [5, 10, 11, 14, 56]. Согласно теореме Рюэля — Таккенса, нетривиальная картина самоорганизации, включающая в себя наличие странных аттракторов, наблюдается, если число выделенных степеней свободы составляет не менее трех [57]. Наиболее популярной трехпараметрической схемой является система Лоренца [58]. Первоначально предложенная для объяснения атмосферных явлений, она была использована впоследствии в задачах физики, химии, биологии, социологии и т.д. [5, 10, 11, 14–18]. В последнее время синергетическая концепция была приложена к объяснению структурной перестройки конденсированной среды [59, 60].

Переходя к построению синергетической схемы Лоренца, введем величины  $\eta$ ,  $h$ ,  $S$ , которые согласно устоявшейся терминологии называются параметром порядка, сопряженным полем и управляющим параметром соответственно. Рассмотрим для простоты пространственно однородную систему, для которой задача сводится к определению временных зависимостей  $\eta(t)$ ,  $h(t)$ ,  $S(t)$ . С этой целью воспользуемся феноменологическим подходом, в рамках которого уравнения движения характеризуют скорости  $\dot{\eta}$ ,  $\dot{h}$ ,  $\dot{S}$  изменения величин  $\eta$ ,  $h$ ,  $S$  в зависимости от их значений. При записи этих уравнений следует учесть прежде всего, что в автономном режиме изменение всех гидродинамических мод имеет диссипативный характер. Кроме того, важное значение имеет принцип Ле-Шателье: поскольку причиной самоорганизации является рост управляющего параметра  $S$ , то параметр порядка  $\eta$  и сопряженное поле  $h$  должны изменяться таким образом, чтобы препятствовать росту  $S$ . С формальной точки зрения этот факт можно отразить как наличие отрицательной обратной связи между величинами  $\eta$  и  $h$ . И, наконец, принципиально важное значение имеет положительная обратная связь между параметром порядка  $\eta$  и управляющим параметром  $S$ , приводящая к росту сопряженного поля  $h$  — именно наличие этой связи является причиной самоорганизации.

Система Лоренца наиболее простым образом учитывает указанные выше обстоятельства. С учетом флуктуационных добавок она имеет вид:

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta}{\tau_{\eta}} + \gamma h + 2^{1/2} \sigma_{\eta} \xi, \quad (5.1)$$

$$\dot{h} = -\frac{h}{\tau_h} + g_h \eta S + 2^{1/2} \sigma_h \xi, \quad (5.2)$$

$$\dot{S} = \frac{S_0 - S}{\tau_S} - g_S \eta h + 2^{1/2} \sigma_S \xi. \quad (5.3)$$

Здесь первые слагаемые в правых частях описывают автономную релаксацию величин  $\eta, h, S$  к стационарным значениям  $\eta = 0, h = 0, S = S_0$  с временами релаксации  $\tau_\eta, \tau_h, \tau_S$ ;  $\gamma$  представляет собой кинетический коэффициент; положительные константы  $gh, g_S$  являются мерой обратной связи системы;  $\xi$  —  $\delta$ -коррелированная стохастическая составляющая (см. (2.10));  $\sigma_\eta^2, \sigma_h^2, \sigma_S^2$  — интенсивности шумов соответствующих величин.

При выполнении условий  $\tau_h, \tau_S \ll \tau_\eta$  принцип соподчинения дает возможность положить в (5.2), (5.3)  $\tau_h \dot{h} = \tau_S \dot{S} = 0$ , сохраняя, однако, стохастические добавки. Тогда последние два уравнения позволяют выразить сопряженное поле и управляющий параметр через параметр порядка:

$$h = \left(1 + \frac{\eta^2}{\eta_m^2}\right)^{-1} [A_h \eta (S_0 + 2^{1/2} \sigma_S \tau_S \xi) + 2^{1/2} \sigma_h \tau_h \xi], \quad (5.4)$$

$$S = S_0 - A_S \eta h + 2^{1/2} \sigma_S \tau_S \xi, \quad (5.5)$$

где введены обозначения

$$A_h \equiv g_h \tau_h, \quad A_S \equiv g_S \tau_S, \quad \eta_m^{-2} \equiv A_S A_h. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.4) в (5.1), получаем стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$\tau_\eta \dot{\eta} = -\eta + \frac{S_c^{-1} \eta (S_0 + 2^{1/2} \sigma_S \tau_S \xi) + 2^{1/2} \sigma_h \tau_h \gamma \tau_h \xi}{1 + \eta^2 / \eta_m^2}, \quad (5.7)$$

где обозначено

$$S_c^{-1} = \gamma \tau_\eta g_h \tau_h. \quad (5.8)$$

Разделяя детерминистическую и стохастические составляющие, придадим уравнению (5.7) каноническую форму (ср. с (2.11))

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial V}{\partial \eta} + [\sigma_S g_S(\eta) + \sigma_h g_h(\eta)] \xi + 2^{1/2} \sigma_\eta \xi, \quad (5.9)$$

где время  $t$  измерено в единицах  $\tau_\eta$ , параметр порядка — в масштабе  $\eta_m$ , интенсивности шумов  $\sigma_\eta, \sigma_h$  и  $\sigma_S$  — в единицах  $\tau_\eta^{-1}, (\tau_\eta \tau_h \gamma)^{-1}$  и  $S_c / \tau_S$  соответственно. Синергетический потенциал  $V(\eta)$  имеет вид

$$V = \frac{1}{2} [\eta^2 - \Theta \ln(1 + \eta^2)], \quad \Theta \equiv \frac{S_0}{S_c}. \quad (5.10)$$

Раскладывая по степеням  $\eta^2 \ll 1$ , нетрудно видеть, что это выражение сводится к разложению Ландау (3.32) с параметрами  $A = 1 - \Theta \ll 1, B = \Theta \approx 1$ . Мультипликативные функции  $g_S(\eta), g_h(\eta)$  имеют вид:

$$g_S(\eta) = \eta g_h(\eta) = 2^{1/2} \eta (1 + \eta^2)^{-1}, \quad (5.11)$$

$$g_h(\eta) = 2^{1/2} (1 + \eta^2)^{-1}. \quad (5.12)$$

Проведенное рассмотрение показывает, что в рамках адиабатического приближения  $\tau_h, \tau_S \ll \tau_\eta$  синергетическая система с аддитивными шумами сводится к однопараметрической стохастической системе с мультипликативным шумом. Ее исследование может быть проведено с помощью методов, изложенных в разделе 2, если под стохастической переменной  $x$  понимать параметр

порядка  $\eta$ , обладающий максимальным временем релаксации. Синергетический потенциал (5.10) приобретает минимум в точке

$$\eta_0 = \pm(\Theta - 1)^{1/2}, \quad (5.13)$$

которая, в отличие от использованной выше схемы, лежит не при малых, а при больших стационарных значениях  $\Theta = S_0 / S_c$  управляющего параметра.

Стохастическая составляющая в уравнении (5.9)

$$\zeta(t) = [\sigma_S g_S(\eta) + \sigma_h g_h(\eta)] \xi(t) + 2^{1/2} \sigma_\eta \xi(t) \quad (5.14)$$

складывается из мультипликативных шумов управляющего параметра и сопряженного поля, а также аддитивной составляющей параметра порядка. Характерно, что нарастание шума с величиной  $\eta$  имеет место только для управляющего параметра, мультипликативная функция которого при  $\eta^2 \ll 1$  принимает вид:

$$g_S(\eta) \simeq 2^{1/2} \eta. \quad (5.15)$$

Сравнивая с (3.34), видим, что показатель  $a = 1$ , и равенство (3.74) приводит к минимальному значению фрактальной размерности  $D = 0$ . Таким образом, область определения синергетической системы в фазовом пространстве сводится к набору изолированных точек. Очевидно, это могут быть либо точки максимумов стационарного распределения (2.96), либо точка  $\eta = 0$ , отвечающая детерминистическому конденсату (см. раздел 3.2). Расширения области определения синергетической системы до значений  $D > 0$  можно добиться, полагая, что множитель  $\eta$  приобретает в уравнении (5.2) степень  $1 - D/2$ , а в (5.3) — показатель  $1 + D$ . Это означает, что при указанном расширении положительная обратная связь усиливается ( $\eta^{1-D/2} > \eta$ ), а отрицательная ослабляется ( $\eta^{1+D} < \eta$ ). Характерно, что показатель параметра порядка  $\eta$  приобретает дробные значения только в нелинейных слагаемых системы (5.1)–(5.3), которые ответственны за наличие обратной связи. Этот факт представляется естественным, если вспомнить, что мультипликативный характер шума обусловлен наличием обратной связи среды со стохастической системой (см. раздел 2.1).

Приведем в заключение основные соотношения, определяющие экстремальные точки стационарного распределения (ср. с (2.96))

$$P(\eta) = Z^{-1} \exp[-U_{\text{ef}}(\eta)] \quad (5.16)$$

синергетической системы (5.1)–(5.3). Здесь эффективный потенциал (ср. с (2.97), (2.98))

$$U_{\text{ef}}(\eta) = \ln g^2(\eta) + 2 \int \frac{\partial V / \partial \eta}{g^2(\eta)} d\eta \quad (5.17)$$

определяется затравочным синергетическим потенциалом (5.10) и квадратом эффективной мультипликативной функции

$$g^2(\eta) = 2\sigma_\eta^2 + \sigma_h^2 g_h^2(\eta) + \sigma_S^2 g_S^2(\eta). \quad (5.18)$$

Это выражение следует из известного результата [39] об аддитивности квадратов дисперсий независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону

(см. (2.10)). Комбинируя формулы (5.10)–(5.12), (5.17), (5.18), находим явный вид зависимости  $U_{\text{ef}}(\eta)$ . Однако она весьма громоздка, и мы ее не приводим. Гораздо проще выглядит уравнение

$$x^3 - \Theta x^2 - 2\sigma_S^2 x + 4(\sigma_S^2 - \sigma_h^2) = 0, \quad x \equiv 1 + \eta^2, \quad (5.19)$$

определяющее положения максимумов распределения (5.16). Согласно (5.19), будучи нечувствительными к изменению интенсивности шума  $\sigma_\eta^2$  параметра порядка, они определяются стационарной величиной  $\Theta$  управляющего параметра и соотношением интенсивностей  $\sigma_S^2$ ,  $\sigma_h^2$  мультипликативных шумов.

## 5.2. Описание синергетического перехода при аддитивном шуме

В простейшем случае  $\sigma_\eta = \sigma_h = \sigma_S = 0$  уравнения (5.1)–(5.3) сводятся к классической системе Лоренца [58], а стохастическое уравнение (5.9) принимает детерминистическую форму Ландау–Халатникова:

$$\dot{\eta} = -\eta \left( 1 - \frac{\Theta}{1 + \eta^2} \right). \quad (5.20)$$

Переходя к переменной  $x = 1 + \eta^2$ , приводим его к виду

$$\frac{x dx}{(x-1)(x-\Theta)} = -2 dt, \quad (5.21)$$

откуда сразу следует

$$\eta^{-2} |\eta^2 - (\Theta - 1)|^\Theta \propto \exp[-2(\Theta - 1)t]. \quad (5.22)$$

Таким образом, в предкритической области  $\Theta < 1$  система релаксирует в неупорядоченное состояние  $\eta = 0$ , а в закритической  $\Theta > 1$  — в упорядоченное (5.13). В согласии с устоявшейся терминологией [28] будем называть соответствующие фазы симметричной и несимметричной. Функция распределения (5.16) имеет один центральный максимум в первом случае и два максимума в точках (5.13) — во втором. Характерно, что в силу отсутствия шума все эти максимумы имеют  $\delta$ -образный характер:

$$P(\eta) \propto \delta \left( \frac{dV}{d\eta} \right). \quad (5.23)$$

С появлением аддитивного шума параметра порядка ( $\sigma_\eta \neq 0$ ,  $\sigma_h = \sigma_S = 0$ ), согласно (5.19), стационарные состояния системы не меняются. Однако, как видно из (5.16)–(5.18),  $\delta$ -образные пики функции распределения размываются, принимая вид:

$$P(\eta) = Z^{-1} \exp \left[ -\frac{V(\eta)}{\sigma_\eta^2} \right]. \quad (5.24)$$

Их ширина определяется интенсивностью шума параметра порядка.

## 5.3. Описание синергетического перехода при мультипликативном шуме

Вычислим интегральный вклад  $U(\eta)$  в выражении (5.17) для эффективного потенциала при  $\sigma_\eta = 0$ . Согласно (5.11), (5.12), (5.18) имеем

$$U(\eta) \equiv \int \frac{\eta(1 + \eta^2)(1 - \Theta + \eta^2)}{\sigma_h^2 + \sigma_S^2 \eta^2} d\eta. \quad (5.25)$$

Введем отношение интенсивностей шума  $\alpha \equiv \sigma_h / \sigma_S$  и переменную  $y \equiv \alpha^2 + \eta^2$ . Тогда (5.25) примет вид:

$$\sigma_S^2 U(y) = \frac{y^2}{4} + \left( \frac{1}{2} - \alpha^2 \right) y + \frac{1}{2} (1 - \alpha^2) (1 - \alpha^2 - \Theta) \ln y - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (5.26)$$

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая, что потенциал определен с точностью до произвольной константы, которую можно перенести в нормировочную постоянную распределения (5.16), для эффективного синергетического потенциала окончательно получаем

$$U_{\text{ef}}(\eta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\eta^4}{2} + (2 - \Theta - \alpha^2) \eta^2 + (1 - \alpha^2) (1 - \Theta - \alpha^2) \ln(\alpha^2 + \eta^2) \right] + \sigma_S^2 \ln [g_S^2(\eta) + \alpha^2 g_h^2(\eta)], \quad \alpha \equiv \frac{\sigma_h}{\sigma_S}. \quad (5.27)$$

**5.3.1. Учет стохастичности сопряженного поля.** Производя разложение (5.27) по  $\sigma_S$ , с точностью до несущественной постоянной получаем

$$\sigma_h^2 U_{\text{ef}}(\eta) = 2^{1/2} 3^{-1} (g_h(\eta))^{-3} - 2\Theta (g_h(\eta))^{-2} + 2\sigma_h^2 \ln g_h(\eta). \quad (5.28)$$

Соответствующая функция распределения (5.16) имеет минимум в точке  $\eta = 0$ , если стационарное значение  $\Theta$  управляющего параметра не превышает критическое значение

$$\Theta_c^h = 1 - 4\sigma_h^2, \quad (5.29)$$

величина которого спадает с ростом интенсивности шума сопряженного поля. В этом случае система находится в симметричном состоянии. При  $\Theta > \Theta_c^h$  решение уравнения (5.19) дает положения  $\eta_+ = -\eta_-$  максимумов распределения (5.16) в несимметричной фазе. Зависимость  $\eta_\pm = \eta(\Theta, \sigma_h)$  показана на рис. 11. При малых значениях  $\Theta$  и  $\sigma_h$  имеем

$$\eta_\pm^2 \approx \begin{cases} (4\sigma_h^2)^{1/3} - 1 + \frac{\Theta}{3} (1 + 3^{-1/2}), & \Theta \rightarrow 0; \\ \Theta - 1 + \frac{4\sigma_h^2}{\Theta^2}, & \sigma_h^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Выражения (5.30) и рис. 11 указывают на наличие перехода второго рода при критическом значении  $\Theta = \Theta_c^h$ . Характерно, что и при  $\Theta = 0$  может происходить синергетический переход в несимметричное состояние, если выполняется условие  $\sigma_h > \sigma_c = 1/2$ . Очевидно, такой переход относится к категории индуцированных шумом (см. раздел 3.2.1).

**5.3.2. Учет стохастичности управляющего параметра.** Исследуем теперь стационарные состояния синергетической системы в присутствии шума управляющего параметра. Аналогично предыдущему случаю можно показать, что стационарная функция распределения (5.16)

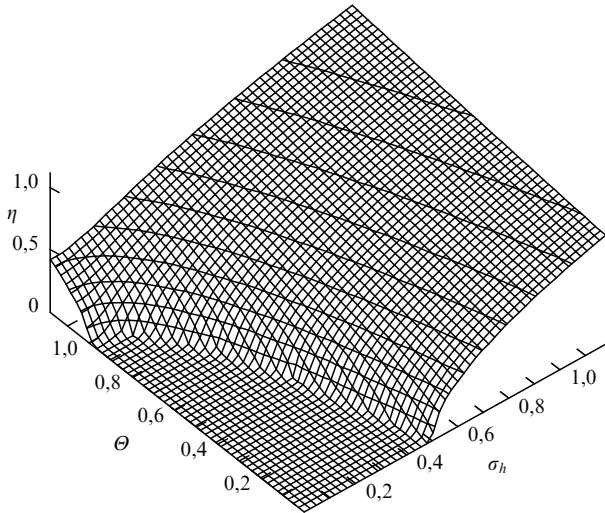


Рис. 11. Зависимость параметра порядка  $\eta$  от управляющего параметра  $\Theta$  и интенсивности шума сопряженного поля  $\sigma_h$ .

определяется эффективным потенциалом

$$U_{\text{ef}}(\eta) = \frac{\eta^4}{4} + \left(1 - \frac{\Theta}{2}\right)\eta^2 + (1 - \Theta + 2\sigma_S^2) \ln \eta - 2\sigma_S^2 \ln(1 + \eta^2). \quad (5.31)$$

Уравнение минимума зависимости (5.31) получается из (5.19) при  $\sigma_h = 0$ . Проанализируем решения этого уравнения в зависимости от значений параметров  $\Theta$ ,  $\sigma_S$ . Подобно (5.29) критическое значение

$$\Theta_c^S = 1 + 2\sigma_S^2 \quad (5.32)$$

ограничивает сверху область существования нулевого корня уравнения (5.19). Кроме него существуют решения  $\eta_{\pm}$ , отвечающие несимметричной фазе. Исключая корень  $\eta^2 = 0$ , для них получаем биквадратное уравнение

$$\eta^4 + (3 - \Theta)\eta^2 - (2\Theta + 2\sigma_S^2 - 3) = 0, \quad (5.33)$$

имеющее решение

$$\eta_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(3 - \Theta)^2 + 4(2\Theta - 3 + 2\sigma_S^2)} \right]. \quad (5.34)$$

На линии (5.32) оно принимает минимальное значение

$$\eta_c^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(\Theta + 7)(\Theta - 1)} \right]. \quad (5.35)$$

При  $\Theta < 4/3$  корни  $\pm\eta_c$  комплексны, в точке  $\Theta = 4/3$  они обращаются в нуль, а при  $\Theta > 4/3$  являются вещественными, причем  $\eta_+ = -\eta_-$ . Таким образом, точка

$$\Theta = \frac{4}{3}, \quad \sigma_S^2 = \frac{1}{6} \quad (5.36)$$

отвечает появлению корней  $\eta_{\pm} \neq 0$  уравнения (5.19), соответствующих несимметричной фазе. При выполнении условия (5.32) корень  $\eta = 0$  отвечает минимуму потенциала (5.31) при  $\Theta < 4/3$ , тогда как при  $\Theta > 4/3$  он отвечает максимуму, а корни  $\eta_{\pm}$  — симметричным минимумам.

Найдем теперь условие существования корней  $\eta_{\pm}$ . Приравняв нулю дискриминант уравнения (5.19), приходим к равенствам

$$\sigma_S^2 = 0, \quad \sigma_S^4 - \sigma_S^2 \left[ \frac{27}{2} \left( 1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right] + \frac{\Theta^3}{2} = 0, \quad (5.37)$$

второе из которых дает

$$2\sigma_S^2 = \left[ \frac{27}{2} \left( 1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right] \pm \left\{ \left[ \frac{27}{2} \left( 1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right]^2 - 2\Theta^3 \right\}^{1/2}. \quad (5.38)$$

Это равенство определяет куполообразную кривую зависимости  $\Theta(\sigma_S)$ , которая пересекает ось абсцисс в точках  $\sigma_S = 0$  и  $\sigma_S = (27/2)^{1/2}$  и имеет максимум в точке  $\Theta = 2$ ,  $\sigma_S = \sqrt{2}$ .  $(5.39)$

Нетрудно видеть, что данная кривая касается кривой зависимости (5.32) в точке (5.36).

Проведенный анализ позволяет построить фазовую диаграмму рассматриваемой системы в условиях шума управляющего параметра (рис. 12). Здесь область  $S$  ниже кривой 2, задаваемой равенством (5.38), отвечает стабильной симметричной фазе ( $\eta = 0$ ), а область  $N$  выше кривой 1, отвечающей (5.32), — несимметричной фазе ( $\eta_{\pm} \neq 0$ ). Область  $SM$ , заключенная между кривыми 1, 2, соответствует сосуществованию устойчивой симметричной фазы и метастабильной несимметричной. Точка  $T$  пересечения кривых 1, 2, положение которой определяется равенствами (5.36), является трикритической, а точка  $C$  с координатами (5.39) — критической.

Бифуркационные диаграммы на рис. 13 показывают поведение стационарных состояний системы в зависимо-

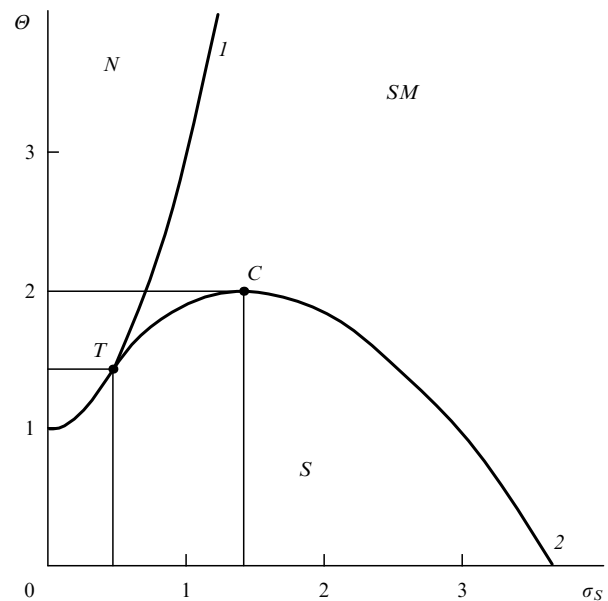


Рис. 12. Фазовая диаграмма системы с шумом управляющего параметра  $\sigma_S$ . Кривые 1, 2 отвечают равенствам (5.32), (5.38),  $S$  — область устойчивой симметричной фазы,  $N$  — несимметричной,  $SM$  — устойчивой симметричной и метастабильной несимметричной фаз,  $T$  — трикритическая точка,  $C$  — критическая.



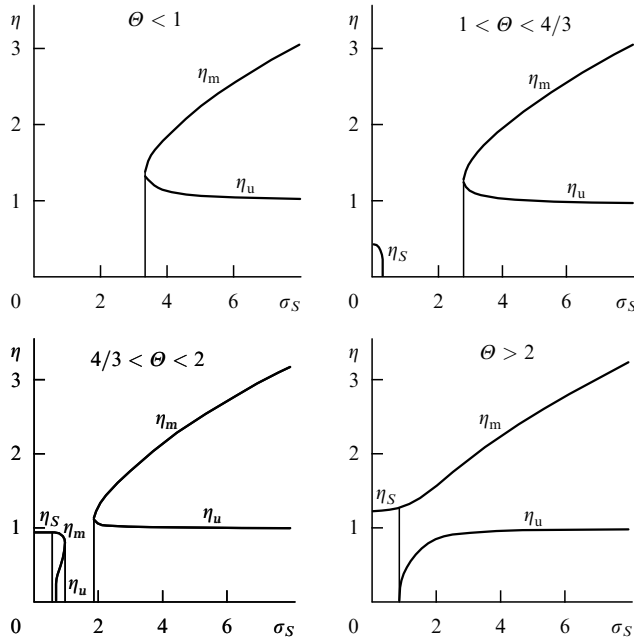


Рис. 13. Бифуркационные диаграммы для стационарных значений параметра порядка  $\eta$  в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_S$  управляющего параметра и его среднего значения  $\Theta$  ( $\eta_S$  — устойчивое,  $\eta_m$  — метастабильное и  $\eta_u$  — неустойчивое решения).

сти от интенсивности шума  $\sigma_S$  при фиксированных значениях управляющего параметра  $\Theta$ . Видно, что на границе области  $S$  при  $\sigma_S^2 > 1/6$  происходит скачкообразное появление двух экстремальных точек потенциала (5.31), одна из которых отвечает неустойчивому состоянию  $\eta_u$ , а вторая — метастабильному  $\eta_m$ .

Интересно отметить, что эффективный синергетический потенциал (5.31) имеет логарифмическую особенность при  $\eta \rightarrow 0$ , в связи с чем  $U_{\text{ef}}(\eta) \rightarrow -\infty$  ниже кривой (5.32) и  $U_{\text{ef}}(\eta) \rightarrow +\infty$  выше нее. Рассмотрим поведение системы вблизи сингулярной точки  $\eta = 0$  согласно схеме, изложенной в разделе 3.2.2. Подобно факторизации (3.45) для функции распределения (5.16) запишем

$$P(\eta) = P_0(\eta)P'(\eta), \quad (5.40)$$

где

$$P_0(\eta) = \frac{Z_0^{-1}(1+\eta^2)^2}{\eta^2}, \quad P'(\eta) = Z_1^{-1} \exp\left[-\frac{U(\eta)}{\sigma_S^2}\right], \quad (5.41)$$

а синергетический потенциал имеет вид:

$$U(\eta) = \left(1 - \frac{\Theta}{2}\right)\eta^2 + \frac{\eta^4}{4} + (1 - \Theta) \ln \eta. \quad (5.42)$$

При  $\eta \ll 1$  можно воспользоваться асимптотиками

$$U(\eta) \simeq (1 - \Theta) \ln \eta, \quad P \simeq Z^{-1} \eta^{-(2+(1-\Theta)/\sigma_S^2)}. \quad (5.43)$$

Отсюда для фазового множителя (3.17) получаем

$$\exp(\alpha) \simeq \frac{\eta^{(1-\Theta)/\sigma_S^2+1}}{(1-\Theta)/\sigma_S^2+1}. \quad (5.44)$$

Тогда параметр (3.53) принимает вид

$$L_1(b, \beta) = \left(\frac{1-\Theta}{\sigma_S^2} + 1\right)^{-1} [\beta^{(1-\Theta)/\sigma_S^2+1} - b^{(1-\Theta)/\sigma_S^2+1}]. \quad (5.45)$$

В пределе  $b \rightarrow 0$  имеем  $L_1 = \infty$  в области, ограниченной сверху интенсивностью шума

$$\sigma_c^2 = \Theta - 1, \quad (5.46)$$

и  $L_1 < \infty$  при  $\sigma_S > \sigma_c$ . Для параметра (3.54) получаем

$$L_2(b, \beta) = (1 - \Theta + \sigma_S^2)^{-1} \ln \frac{\beta}{b}. \quad (5.47)$$

При  $\sigma_S > \sigma_c$  имеем  $L_2 = \infty$ . Следовательно, в области  $\sigma_S < \sigma_c$  детерминистический конденсат недостижим даже за бесконечное время, а для  $\sigma_S > \sigma_c$  его выпадение происходит лишь при  $t \rightarrow \infty$ . Укажем, что такая картина наблюдается только в отсутствие шума сопряженного поля. При  $\sigma_h \neq 0$  конденсат пропадает, поскольку мультипликативная функция при  $\eta = 0$  приобретает конечное значение.

**5.3.3. Совместное описание стохастичности сопряженного поля и управляющего параметра.** Рассмотрим теперь общий случай, учитывающий оба мультипликативных шума  $\sigma_h$  и  $\sigma_S$ . Стационарная функция распределения имеет вид (5.16), где эффективный потенциал записывается в общем виде (5.27). В отличие от (5.31) он имеет конечный предел при  $\eta \rightarrow 0$ . Вводя параметр  $a = 1 - \alpha^2$  и перенормированные величины  $\tilde{\sigma} \equiv \sigma_S/a$ ,  $\tilde{\Theta} \equiv \Theta/a$ ,  $\tilde{\eta}^2 = (1 + \eta^2)/a - 1$ , при  $\alpha < 1$  можно представить выражение (5.27) в виде  $\tilde{U}_{\text{ef}}/\tilde{\sigma}^2$ , где  $\tilde{U}_{\text{ef}}$  получается из (5.31) заменой величин  $\sigma_S$ ,  $\Theta$ ,  $\eta$  на перенормированные  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\Theta}$ ,  $\tilde{\eta}$ . При этом действие шума сопряженного поля сводится к перенормировке минимального значения параметра порядка величиной  $(a^{-1} - 1)^{1/2}$ , так что область расходимости  $\tilde{\eta} \approx 0$  становится недоступной.

Условие экстремума потенциала (5.27) распадается на два уравнения, одно из которых сводится к равенству  $\eta = 0$ , а второе дается выражением (5.19). Анализ последнего показывает, что линия существования нулевого корня задается выражением, отличающимся от (5.32) добавкой  $-4\sigma_h^2$  в правой части. Положение трикритической точки определяется координатами

$$\Theta = \frac{4}{3}(1 - \sigma_h^2), \quad \sigma_S^2 = \frac{1}{6}(1 + 8\sigma_h^2). \quad (5.48)$$

Вид фазовой диаграммы при фиксированных значениях  $\sigma_h$  приведен на рис. 14. Видно, что при  $\sigma_h^2 < 1$  она качественно не отличается от представленной на рис. 13. В случае  $\sigma_h^2 = 1$  трикритическая точка (5.48) попадает на ось  $\sigma_S$  (рис. 14б), а при  $\sigma_h^2 > 2$  исчезает область симметричной фазы. Основная особенность данного случая состоит в том, что вследствие конечности потенциала (5.27) на фазовой диаграмме появляется кривая 3 сосуществования симметричной и несимметричной фаз (бинодаль). Ниже этой линии стабильной является симметричная фаза, а несимметричная метастабильна (выше — наоборот). Кривая 1 (спинодаль) дает границу абсолютной потери устойчивости симметричной фазы, и выше нее система находится в устойчивом несимметричном состоянии.

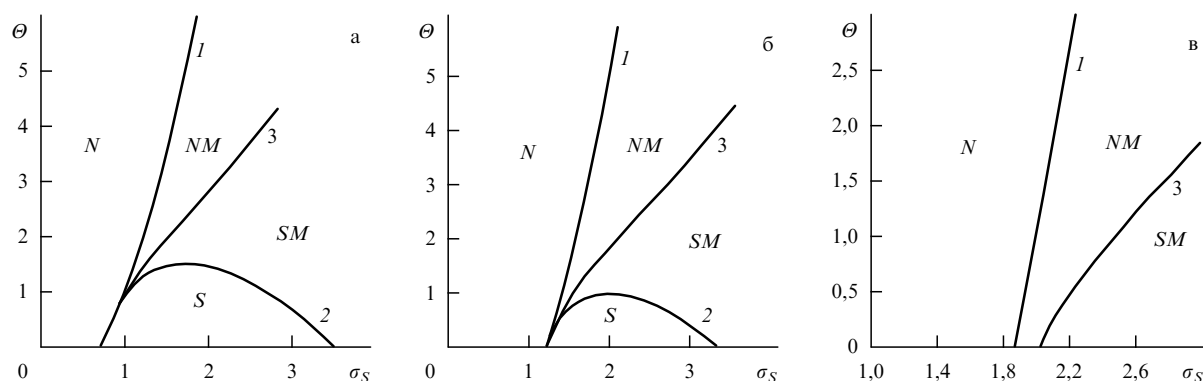


Рис. 14. Вид фазовой диаграммы при фиксированных значениях шума сопряженного поля: (а)  $\sigma_h = 0,5$ ; (б)  $\sigma_h = 1$ ; (в)  $\sigma_h = 2$ . Кривые 1, 2 определяют границу устойчивости несимметричной и симметричной фаз, кривая 3 — линия их сосуществования;  $N$  — несимметричная,  $NM$  — несимметричная метастабильная,  $S$  — симметричная,  $M$  — метастабильная,  $SM$  — симметричная метастабильная фазы.

## 6. Заключение

Работа посвящена исследованию стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом и межчастичным взаимодействием. Исследована система, обладающая одной степенью свободы, и синергетическая система, параметризуемая тремя гидродинамическими модами. При этом подразумевалось, что в начальном состоянии могут реализоваться все значения стохастической переменной  $x$  (иными словами, начальная функция распределения не имеет локального характера). Хотя мы, ограничившись исследованием стационарного распределения, не рассматривали временную эволюцию системы, указанное обстоятельство играет принципиальную роль, поскольку при сингулярном шуме коэффициент диффузии принимает нулевое значение при  $x = 0$  и полуоси положительных и отрицательных значений  $x$  оказываются не связанными. Например, броуновская частица, обладающая  $\delta$ -образным распределением, не может преодолеть границу  $x = 0$ .

Основная цель обзора состояла в обобщении микроскопической теории фазовых переходов на системы с мультипликативным шумом. Это привело нас к необходимости исследования структуры самого уравнения Фоккера — Планка. Оказалось, что произвольная сила, возникающая при выборе исчисления, может быть компенсирована умножением исходной плотности вероятности на экспоненту, показатель которой определяет характер поведения системы во всем временном интервале. При этом следует провести также перенормировку синергетического потенциала. Однако указанная калибровка вовсе не означает предпочтительности выбора исчисления Ито. В разделе 4.4 показано, что в силу неаналитического характера интенсивности переходов между микроскопическими состояниями в уравнении Фоккера — Планка появляется сингулярная сила, которая зависит от стохастической переменной так же, как и указанная выше мнимая сила, однако не содержит произвольного множителя. Эта сила пропорциональна амплитуде (а не интенсивности) шума и квадратному корню отношения макроскопического времени к микроскопическому. Она направлена таким образом, чтобы компенсировать причины, обуславливающие ее появление.

Основной результат работы состоит в том, что наличие мультипликативного шума приводит к трансформации области определения в фазовом пространстве стохастической системы в самоаффинное фрактальное множество, имеющее размерность, заключенную в интервале от 0 до 2. Фрактальный характер фазового пространства является

причиной появления указанной выше сингулярной силы, величина которой задается производной от мультипликативной функции по стохастической переменной. Принятая нами степенная аппроксимация (3.34) мультипликативного шума отражает самоаффинный характер фазового пространства, а равенство (3.74) связывает геометрическую и динамическую характеристики стохастической системы.

Проведенное рассмотрение показывает, что при значениях фрактальной размерности  $0 < D \leq 1$  реализуется детерминистический режим, в котором стохастическая переменная становится независимой от времени. С уменьшением интенсивности шума конечная доля степеней свободы попадает в детерминистический конденсат, т.е. система теряет эргодичность аналогично тому, как это происходит при стекловании жидкости. Наличие межчастичного взаимодействия при значениях фрактальной размерности  $1 < D \leq 2$  приводит к потере симметрии, состоящей в том, что функция распределения приобретает антисимметричность относительно замены знака стохастической переменной. Температурная зависимость параметра дальнего порядка имеет немонотонный характер, обусловленный кластеризацией фрактального фазового пространства.

В качестве примера стохастической системы в разделе 5 рассмотрена популярная в теории самоорганизации система Лоренца. Показано, что включение аддитивных шумов во все уравнения Лоренца приводит в адиабатическом приближении к трансформации этих шумов в мультипликативные для сопряженного поля и управляющего параметра. Это обуславливает нетривиальную перестройку синергетического поведения в зависимости от интенсивности шума управляющего параметра.

Касаясь использованных приближений, отметим, что везде выше мы имели в виду пространственно однородную систему и несохраняющуюся стохастическую переменную. Кроме того, при описании неэргодических систем мы ограничились только указанием на эффекты памяти, а сами параметры неэргодичности и памяти не определяли (очевидно, последний из них связан с введенной в разделе 3.2.2 плотностью детерминистического конденсата). Их нахождение достигается в рамках полевой схемы, основанной на использовании корреляционной техники [31]. Однако при наличии мультипликативного шума (3.34) появляются корреляторы полевых величин, возведенных в дробные степени, и стандартная полевая схема оказывается неприемлемой. Эту трудность можно обойти, переходя к новой переменной (2.48) в исходном уравнении Ланжевена и строя

на его основе действие по аналогии со схемой, изложенной в разделе 2.3. Поскольку новая переменная обладает аддитивным шумом, то теперь можно использовать стандартную схему, а в окончательных результатах перейти к исходной стохастической переменной. Насколько известно автору, такая программа не реализована до настоящего времени.

Выражаю благодарность В.Г. Барьяхтару и С.В. Пелетминскому за поддержку работы и плодотворные обсуждения. Представленные здесь оригинальные результаты были получены совместно с Д.О. Харченко и Е.А. Тороповым, которым я признателен за сотрудничество.

Работа выполнена при поддержке ГКНТ Украины, грант 2.4/4, и частично поддержана Международной Соросовской Программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP), грант № SPU072044.

## Список литературы

1. Гиббс Дж В *Термодинамика. Статистическая механика* (М.: Наука, 1982)
2. Больцман Л *Лекции по теории газов* (М.: Гостехтеориздат, 1956)
3. Пуанкаре А *Избранные труды* Т. III (М.: Наука, 1984)
4. Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)
5. Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1980)
6. Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Введение в синергетику* (М.: Мир, 1990)
7. Шустер Г *Детерминированный хаос* (М.: Мир, 1988)
8. Пригожин И *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций* (М.: Мир, 1973)
9. Пригожин И, Николис Дж *Самоорганизация в неравновесных системах* (М.: Мир, 1979)
10. Хакен Г *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (М.: Мир, 1985)
11. Хакен Г *Информация и самоорганизация* (М.: Мир, 1991)
12. Tyson J J *The Belousov-Zhabotinsky Reaction. Lecture Notes in Biomath.* **10** (Berlin: Springer-Verlag, 1976)
13. Николис Дж *Динамика иерархически соподчиненных систем: Эволюционное представление* (М.: Мир, 1989)
14. Хорстхемке В, Лефевр Р *Индукцированные шумом переходы* (М.: Мир, 1987)
15. Risken H *The Fokker-Planck Equation* (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
16. Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)
17. Ван Кампен Н Г *Стохастические процессы в физике и химии* (М.: Высшая школа, 1990)
18. Стратонович Р Л *Нелинейная неравновесная термодинамика* (М.: Наука, 1985)
19. Кузнецов П И, Стратонович Р Л, Тихонов В И *ЖЭТФ* **28** 509 (1955)
20. Стратонович Р Л, Ланда П С *Изв. вузов. Радиофизика* **2** (1) 37 (1959)
21. Стратонович Р Л *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (М.: Сов. радио, 1961)
22. Kubo R A, in *Fluctuation, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems* (Ed. D Ter Haar) (Edinburgh: Oliver and Boyd, 1962)
23. Mayer-Kress G, Haken H J. *Stat. Phys.* **21** 149 (1981)
24. Crutchfield J P, Farmer J D, Huberman B A *Phys. Rep.* **92** 45 (1982)
25. Ito K *Nagoya Math. J.* **3** 55 (1951)
26. Stratonovich R L *SIAM J. Control.* **4** 362 (1966)
27. Климонтович Ю Л *УФН* **164** 811 (1994)
28. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Наука, 1976)
29. Форстер Д *Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции* (М.: Атомиздат, 1980)
30. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1988)
31. Олемской А И, Коплык И В *УФН* **165** 1105 (1995)
32. Кацнельсон А А, Олемской А И *Микроскопическая теория неоднородных структур* (М.: Изд-во МГУ, 1987)
33. Olemskoï A I, in *Physics Reviews* (Ed. I M Khalatnikov) **18** Part 1 1 (1996)
34. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантовых полей* (М.: Наука, 1976)
35. Ициксон К, Зюбер Ж-Б *Квантовая теория поля* Т. 2 (М.: Мир, 1984)
36. Parisi G, Sourlas N *Phys. Rev. Lett.* **43** 744 (1979)
37. Zinn-Justin J *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (New York: Oxford Science, 1990)
38. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
39. Гнеденко Б В *Курс теории вероятностей* (М.: Наука, 1967)
40. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1984)
41. Pawula R F *IEEE Trans. Inform. Theory* **IT-13** 33 (1967)
42. Cooper F, Khare A, Sukhatme U *Phys. Rep.* **251** 268 (1995)
43. Лифшиц И М, Слезов В В *ЖЭТФ* **35** 479 (1958)
44. Bray A J *Adv. Phys.* **43** 357 (1994)
45. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Мир, 1973)
46. Олемской А И, Харченко Д О *Изв. вузов. Сер. Физика* (2) 121 (1996)
47. Фейгельман М В, Цвелик А М *ЖЭТФ* **83** 1430 (1982)
48. Ахизер А И, Пелетминский С В *Поля и фундаментальное взаимодействие* (Киев: Наукова Думка, 1986)
49. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989)
50. Palmer R G *Adv. Phys.* **31** 669 (1982)
51. Van der Broeck C, Parrondo J M R, Toral R *Phys. Rev. Lett.* **73** 3395 (1994)
52. Торопов Е А, Харченко Д О *Изв. вузов. Сер. Физика* (4) 75 (1996)
53. Косевич А М *Физическая механика реальных кристаллов* (Киев: Наукова Думка, 1981)
54. Олемской А И, Харченко Д О *Металлофизика* (8) 3 (1996)
55. Олемской А И, Флат А Я *ФТТ* **35** 542 (1993)
56. Олемской А И, Хоменко А В *ЖЭТФ* **110** 2144 (1996)
57. Рюэль Д, Таккенс Ф В, в кн. *Странные аттракторы* (М.: Мир, 1981)
58. Lorenz E J *Atmos. Sci.* **20** 1675 (1963)
59. Олемской А И, Петрунин В А *Изв. вузов. Сер. Физика* (1) 82 (1987)
60. Олемской А И, Скляр И А *УФН* **162** 29 (1991)

## Theory of singular-noise stochastic systems

A.I. Olemskoï

Sumy State University,

ul. Rimskogo-Korsakova 2, 244007 Sumy, Ukraine

Tel. (7-0542) 32-64 11

E-mail: alexander@olem.sumy.ua

Noisy, interacting, stochastic systems are analyzed for the case in which their noise intensity varies with the hydrodynamic mode amplitude  $x$  according to the power law  $x^{2a}$ ,  $x \in [0, 1]$ . It is shown that the phase space domain of the stochastic variable  $x$  forms a self-affine set of fractal dimensionality  $D = 2(1 - a)$ . Using the gauge procedure, a system of calculus is chosen which is not reducible either to the Ito case or the Stratonovich case. By generalizing the microscopic picture of phase transitions it is demonstrated that the system may reduce its symmetry (for  $1 < D \leq 2$ ) or lose ergodicity (for  $0 \leq D \leq 1$ ). Over the entire interval  $D \in [0, 2]$ , a noise-induced transition is shown to be possible.

PACS numbers: **05.40.+j**, **05.70.Fh**, **64.60.-i**, **82.20.Fd**

Bibliography — 60 references

Received 23 September 1997