

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони

Р. Х. Зейтуниан

С физической точки зрения неустойчивость в совместной задаче о конвекции с учетом плавучести (Бенар) и термокапиллярности (Марангони) в вязком слое слабосжимаемой жидкости, ограниченном снизу нагретой твердой поверхностью, а сверху свободной поверхностью с действующими на ней зависящими от температуры силами поверхностного натяжения, обусловлена двумя основными механизмами. Первый — это неравномерность распределения плотности по объему жидкости вследствие ее теплового расширения. Вторая причина неустойчивости — наличие градиентов поверхностного натяжения вследствие флуктуаций температуры вдоль верхней свободной поверхности. В этой статье мы рассмотрим только второй эффект, как и Бенар в своих экспериментах (так называемая проблема Бенара – Марангони). Так, мы покажем, что в тонком слое рассмотрение обоих эффектов одновременно неоправданно, а в разделе 3 сформулируем альтернативный подход с учетом роли плавучести. По сути, необходимо рассмотреть две кардинально различные проблемы: первая проблема — это классическая задача о конвекции в мелкой воде с недеформируемой верхней поверхностью с частичным учетом эффекта Марангони (усеченная проблема БМ, или УБМ), а вторая — полная задача БМ для деформируемой свободной поверхности без учета эффекта плавучести. Основное внимание будет уделено проблеме термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони на свободно падающей вертикальной пленке, так как именно эта задача рассматривается в большинстве экспериментов и теорий (волновая динамика на наклонной поверхности, по сути, ей аналогична). Мы рассмотрим три основные возможные ситуации в случае тонкой пленки в соответствии со значением эффективного числа Рейнольдса (Re) и для каждой из них получим разные модельные уравнения. Эти модельные уравнения будут проанализированы с различных точек зрения. Главная же задача статьи состоит в выяснении роли числа Марангони в эволюции свободной поверхности в пространстве и времени. Наконец, мы приведем некоторые последние числовые результаты.

PACS numbers: 44.25. + f, 44.30. + v, 47.10 + g, 47.27. + i

Содержание

1. Введение (259).
2. Определяющие уравнения и граничные условия (260).
 - 2.1. Уравнения. 2.2. Граничные условия. 2.3. Безразмерная основная задача.
3. Проблема Бенара – Марангони (262).
 - 3.1. О роли плавучести — две альтернативы. 3.2. Проблема БМ с недеформируемой верхней поверхностью (проблема УБМ). 3.3. Проблема БМ для тонкого слоя (пленки) с деформируемой свободной поверхностью. 3.4. Проблема БМ для свободно падающей вертикальной пленки.
4. Режим пограничного слоя при больших числах Рейнольдса: $Re \gg 1$ (266).

- 4.1. Обобщенные интегральные модельные уравнения пограничного слоя. 4.2. Анализ линейной задачи. 4.3. Уравнение Стюарта – Ландау. 4.4. Представление в виде динамической системы конечной размерности.
5. Умеренные числа Рейнольдса, режим Пуазейля: $Re = O(1)$ (273).
 - 5.1. Уравнения КС. 5.2. Иерархия бифуркаций и аттракторов уравнения КС.
6. Малые числа Рейнольдса, второй режим Пуазейля: $Re \ll 1$ (279).
 - 6.1. Уравнения КС – КдВ. 6.2. Некоторые особенности решения уравнения КС – КдВ. 6.3. Уравнения для амплитуды.
7. Выводы и комментарии (284).

Список литературы (285).

1. Введение

При рассмотрении множества задач гидродинамики и конвективного тепло- и массопереноса в двухфазных системах с деформируемой граничной поверхностью между фазами (или со свободной поверхностью между жидкостью и газом) исследователь сталкивается с так называемыми капиллярными явлениями, т.е. явлениями, обусловленными наличием сил поверхностного натяжения на поверхности раздела фаз. Физическое описание

R.Kh. Zeytounian. University of Lille I,
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
for the correspondence: 12 rue Saint-Fiacre, 75002 Paris, France
E-mail: vipavlov@omega.univ-lille1.fr (for Prof. R. Kh. Zeytounian)
belous@francemultimedia.fr

Статья поступила 29 мая 1997 г.

эффектов поверхностного натяжения заинтересованный читатель может найти в обзоре Левича и Крылова [1]. Кроме того, он может обратиться к весьма любопытной статье Сарпкая, содержащей богатый фактический материал [2], где автор обсуждает различные эффекты поверхностного натяжения, роль поверхностно-активных веществ (ПАВ), топологию поверхности раздела и природу гидромеханических явлений на чистых и загрязненных поверхностях.

Как правило, капиллярные явления имеют место в двух случаях:

- а) поверхность раздела фаз имеет значительную кривизну;
- б) поверхностное натяжение различно в разных точках поверхности.

В обоих случаях вблизи границы раздела фаз возникают силы, меняющие саму природу движения в каждой из фаз и вызывающие движение, которого изначально не было. С формальной точки зрения, поверхностное натяжение оказывает влияние на гидродинамику (и через гидродинамику на тепло- и массоперенос) через измененные граничные условия на поверхности раздела (см. раздел 2.2). Волновое движение свободной поверхности в слое жидкости, контактирующей с окружающим неподвижным воздухом (при постоянных температуре T° и давлении p_a), представляет один из наиболее важных случаев проявления поверхностных сил. На самом деле действие сил поверхностного натяжения является определяющим фактором в процессе образования волн с "малой" длиной волны λ° (большие числа Вебера), но для поверхностных волн в тонком слое $\varepsilon = h/\lambda^\circ \ll 1$, где h° — толщина жидкого слоя (приближение длинных волн). С другой стороны, изменение поверхностного натяжения вдоль деформируемой свободной поверхности приводит к возникновению касательного напряжения на этой граничной поверхности, и, как следствие, в жидкости неизбежно возникают конвективные потоки (как в экспериментах Бенара [3]). Движение, вызванное касательными градиентами поверхностного натяжения, носит название эффекта Марангони (по имени одного из первых ученых, давших объяснения этого эффекта). Мы рассмотрим некоторые конкретные примеры, когда изменение поверхностного натяжения оказывает влияние на гидродинамику. Обзор по проблеме неустойчивости Марангони читатель может найти в статье Дэвиса [4]. Прекрасными источниками информации по различным особенностям эффекта переменного поверхностного натяжения являются статьи Стернинга и Скривена [5], Левича [6], Кеннинга [7], Нормана и др. [8], Веларде и Чу [9] и Пробштейна [10].

В данной статье мы рассмотрим только термокапиллярный эффект, когда поверхностное натяжение σ является только функцией температуры T :

$$\sigma = \sigma(T).$$

В рассматриваемом нами случае простой геометрии — однослойной системы слой (слабосжимаемой) жидкости ограничен снизу твердой поверхностью, а сверху свободной поверхностью неподвижного воздуха (с пренебрежимо малой вязкостью и плотностью).

В настоящее время имеется большое число исследований по гидродинамике волновой тонкой падающей пленки (см., например, книгу под редакцией Мейера [11]

и обзор Лина и Ванга [12] с содержащейся там библиографией (вплоть до 1984–1985 гг.)). Основные результаты по двумерному волновому течению несжимаемой жидкости (в отсутствие эффекта Марангони) приведены в недавно опубликованных статьях Трифонова и Цвелодуба [13] и Прокопиу, Ченга и Чанга [14]. Что касается вертикальной пленки, недавняя статья Чанга [15] дает прекрасный обзор различных переходных режимов на свободно падающей вертикальной пленке. Продолжение этого обзора читатель может найти в статье Чанга и Демехина [16], но в обеих этих статьях авторы не учитывают эффекта Марангони!

Исследования конкретно по эффекту Марангони читатель может найти, обратившись к библиографии в обзоре [4] (до 1985–1986 гг.), и также в более поздних статьях [17–46] (за 1990–1996 гг.).

В следующем разделе 2 мы даем точную формулировку полной трехмерной задачи для сжимаемой жидкости в горизонтальном слое и, кроме того, мы выводим связанную с ней безразмерную основную задачу (полный вывод в случае слабосжимаемой жидкости см. в [47]). Раздел 3 посвящен получению непротиворечивой формулировки проблемы Бенара – Марангони для недеформируемой (но с эффектом плавучести) и деформируемой (но без эффекта плавучести) свободной поверхности. Для этой цели мы определяем роль плавучести при наличии поверхностных эффектов, следуя [48]. Что касается проблемы неустойчивости Бенара – Марангони с недеформируемой верхней поверхностью, когда эффект плавучести является определяющим, см. [48, §4] и статьи Дауби и Лебона [49] и Винса [50].

В разделах 4–6 мы рассмотрим три предельных режима при больших, умеренных и малых числах Рейнольдса (Re) в приближении длинных волн $\varepsilon \ll 1$ и выведем модельные уравнения для толщины пленки. При $Re \gg 1$ мы обобщаем классические интегральные уравнения Шкадова для пограничного слоя [51] и выводим уравнения Стюарта – Ландау. Кроме того, мы рассматриваем представление в виде динамической системы конечной размерности (и приводим некоторые числовые результаты С. Годтса и М. Згала) и проявления бифуркаций, хаоса и странных аттракторов. При $Re = O(1)$ мы выводим уравнения Курамото – Сивашинского (КС) с учетом эффектов Марангони и Биота, а также обсуждаем иерархию бифуркаций и аттракторов в уравнениях КС (см. также статью Демехина, Токарева и Шкадова [52]). При $Re \ll 1$ мы выводим модельное уравнение КС – КдВ эволюции толщины свободной поверхности и обсуждаем некоторые особенности решений этого уравнения, а кроме того, получаем различные уравнения для амплитуды.

2. Определяющие уравнения и граничные условия

2.1. Уравнения

Пусть слой сжимаемой вязкой жидкости покоится на горизонтальной плоской поверхности с одинаковой температурой $T^\circ + \Delta T^\circ$, а его деформируемая свободная поверхность граничит с окружающим неподвижным воздухом (с температурой T° и давлением p_a и с пренебрежимо малыми вязкостью и плотностью). Сжимаемая вязкая жидкость с уравнением состояния

$$\rho = \rho(T) \quad (2.1.1)$$

представляет собой ньютоновскую жидкость с коэффициентами вязкости $\lambda(T)$ и $\mu(T)$, плотностью $\rho(T)$, удельной теплоемкостью $C(T)$ и коэффициентом теплопроводности $k(T)$; $\varkappa = k/\rho C$ — коэффициент температуропроводности, а $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости. Поверхностное натяжение предполагается линейной функцией температуры (и как следствие, член $\partial\sigma/\partial t$ отсутствует в уравнении баланса энергии, см. (2.2.3)):

$$\sigma(T) = \sigma(T^\circ) - \gamma(T - T^\circ), \quad (2.1.2)$$

где $\gamma = -d\sigma(T)/dT$ — положительная постоянная для большинства жидкостей.

Точные определяющие уравнения Навье – Стокса для сжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1.3)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p + \rho g \mathbf{k} = \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.1.4)$$

$$\rho C(T) \frac{DT}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi(\mathbf{u}), \quad (2.1.5)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости, p — давление, T — температура, $\mathbf{T}$ — (симметричный) тензор вязких напряжений в жидкости, а $\Phi(\mathbf{u})$ — функция диссипации. В уравнениях (2.1.3)–(2.1.5) используются стандартные обозначения:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_i(t, x_i)), \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{x} = (x_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

а (O, x_i) — декартова система координат, в которой сила $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ действует в отрицательном направлении вдоль оси x_3 . Для ньютоновской жидкости

$$\mathbf{T} = \lambda(T)(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu(T)\mathbf{D}, \quad (2.1.6)$$

$$\Phi(\mathbf{u}) = 2\mu(T)\mathbf{D}:\mathbf{D} + \lambda(T)(\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad \mathbf{D}:\mathbf{D} = d_{ij}^2, \quad (2.1.7)$$

и $\mathbf{D}$ — норма тензора напряжений с (декартовыми) компонентами $d_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$. Наконец, $\mathbf{I} = \delta_{ij}$ — символ Кронекера (i и $j = 1, 2, 3$).

Если $e(T)$ — удельная внутренняя энергия расширяемой жидкости с уравнением состояния (2.1.1), то

$$\frac{De}{Dt} = C(T) \frac{DT}{Dt}, \quad C(T) = \frac{De}{DT}.$$

2.2. Граничные условия

Для уравнений (2.1.3)–(2.1.5) соответствующие граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u} = 0, \quad T = T^\circ + \Delta T^\circ, \quad x_3 = 0, \quad (2.2.1)$$

$$-(p - p_a)\mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 2\sigma(T)H\mathbf{n} + \nabla_S \sigma(T), \quad (2.2.2)$$

$$-k(T)\nabla T \cdot \mathbf{n} = q^\circ(T - T^\circ) + k(T^\circ)\left(\frac{\Delta T^\circ}{h^\circ}\right), \quad (2.2.3)$$

$$x_3 = h(t, x_1, x_2).$$

Местоположение деформируемой свободной поверхности $x_3 = h(t, x_1, x_2)$ определяется из кинематического условия:

$$u_3 = \frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad x_3 = h(t, x_1, x_2). \quad (2.2.4)$$

В граничных условиях (2.2.2) и (2.2.3) $H = -(1/2)(\nabla_S \cdot \mathbf{n})$ — средняя кривизна поверхности раздела, q° — постоянный коэффициент теплопередачи, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали (направленный от жидкости в воздух) и ∇_S — градиент на свободной поверхности. Отметим, что в условии (2.2.2) мы не учитываем поверхностную вязкость.

При обычных условиях жидкость покоится и тепло распространяется только за счет теплопроводности ввиду отсутствия каких-либо течений; при этом температура покоящейся жидкости в стационарном состоянии равна

$$T_s(x_3) = T^\circ + \Delta T^\circ \left[1 - \left(\frac{x_3}{h^\circ}\right)\right], \quad (2.2.5)$$

и, как следствие, в (2.2.3) необходимо учесть наложенный градиент температуры $dT_s(x_3)/dx_3 \equiv -(\Delta T^\circ/h^\circ)$ (см. [4, с. 407]).

Вывод условий на скачке на свободной поверхности (2.2.2) и (2.2.3) можно найти в книге Джозефа и Ренарди [53, с. 20]. Кроме того, мы предполагаем, что $\Delta T^\circ > 0$.

2.3. Безразмерная основная задача

В случае слабосжимаемой жидкости, когда безразмерный параметр

$$\alpha = \beta \Delta T^\circ, \quad \beta = -\left[\frac{d(\log \rho)}{dT}\right]_{T=T^\circ}, \quad (2.3.1)$$

мал, из полной точной формулировки (2.1.3)–(2.1.5), (2.2.1)–(2.2.4) мы можем вывести упрощенную безразмерную основную задачу. Как и в [47, 48], значения коэффициентов с нижним индексом "0" принимаются равными эталонным значениям этих коэффициентов при $T = T^\circ$. Учитывая (2.1.1) и представляя возмущения температуры и давления в виде

$$\theta = \frac{T - T^\circ}{\Delta T^\circ}, \quad (2.3.2a)$$

$$\pi = \frac{1}{\text{Fr}^2} \left[\left(\frac{p - p_a}{\rho_0 g h^\circ} \right) + \left(\frac{x_3}{h^\circ} - 1 \right) \right], \quad (2.3.2b)$$

для $v_i = u_i/(v_0/h^\circ)$, θ и π как функций безразмерных переменных

$$x'_i = \frac{x_i}{h^\circ}, \quad t' = \frac{t}{h^{\circ 2}/v_0}$$

мы получаем вместо (2.1.3)–(2.1.5) следующие безразмерные основные уравнения:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x'_k} = O(\alpha), \quad (2.3.3a)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt'} + \frac{\partial \pi}{\partial x'_i} - \frac{\alpha}{\text{Fr}^2} \theta \delta_{i3} - \nabla'^2 v_i = O(\alpha), \quad (2.3.3b)$$

$$[1 - \alpha \text{Bo}(p'_a + 1 - x'_3)] \frac{D\theta}{Dt'} - \frac{1}{\text{Pr}} \nabla'^2 \theta - 2\text{Bo} \text{Fr}^2 (d'_{ij})^2 = O(\alpha). \quad (2.3.3в)$$

Здесь

$$d'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x'_i} \right), \quad \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t'} = \frac{\partial}{\partial t'} + v_i \frac{\partial}{\partial x'_i},$$

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2}, \quad p'_a = \frac{p_a}{\rho_0 g h^0}.$$

В Приложении к [48] читатель может найти выражения для членов порядка $O(\alpha)$ в правой части уравнений (2.3.3). В приведенных безразмерных соотношениях и уравнениях

$$\text{Pr} = \frac{\nu_0}{\kappa_0}, \quad \text{Fr} = \frac{v_0/h^0}{(gh^0)^{1/2}}, \quad \text{Bo} = \frac{gh^0}{C_0 \Delta T^0} \quad (2.3.4)$$

— числа Прандтля, Фруда и Буссинеска соответственно.

Теперь для основных уравнений (2.3.3) мы должны получить основные безразмерные граничные условия для v_i , θ и π из условий (2.2.1)–(2.2.4). Для этого уравнение свободной поверхности запишем в виде $x_3 = h^0 [1 + \delta \eta(t', x'_1, x'_2)]$, где δ — амплитудный параметр деформаций свободной поверхности $\eta(t', x'_1, x'_2)$ относительно плоскости $x'_3 = 1$. Из (2.2.2) и (2.2.3) с учетом (2.1.2) мы получаем следующие четыре основных безразмерных граничных условия на деформируемой свободной поверхности $x'_3 = 1 + \delta \eta(t', x'_1, x'_2)$:

$$\pi = \frac{\delta \eta}{\text{Fr}^2} + 2d'_{ij} n'_i n'_j + (\text{We} - \text{Ma} \theta)(\nabla'_S \cdot \mathbf{n}') + O(\alpha) \quad (2.3.5a)$$

$$d'_{ij} t_i^{(s)} n'_j + \frac{1}{2} \text{Ma} t_i^{(s)} \frac{\partial \theta}{\partial x'_i} = O(\alpha), \quad s = 1, 2, \quad (2.3.5b)$$

$$\nabla' \theta \cdot \mathbf{n}' + \text{Bi} \theta + 1 = O(\alpha). \quad (2.3.5в)$$

В основном безразмерном граничном условии (2.3.5б) $t_i^{(1)}$ и $t_i^{(2)}$ — безразмерные компоненты двух ортонормированных касательных векторов к свободной поверхности $x'_3 = h^0 (= 1 + \delta \eta)$ и n'_i — безразмерные компоненты вектора $\mathbf{n}'$, а именно:

$$\mathbf{t}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{N'_1}} \left(1, 0, \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right),$$

$$\mathbf{t}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{N'_1 N'}} \left[-\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial h'}{\partial x'_2}, \quad 1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2, \quad \frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right],$$

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{N'}} \left(-\frac{\partial h'}{\partial x'_1}, \quad -\frac{\partial h'}{\partial x'_2}, \quad 1 \right).$$

Согласно [54, с. 213] единичные векторы, касательные и нормальный векторы к свободной поверхности $x'_3 = h^0(t', x'_1, x'_2)$ записываются в системе (x'_1, x'_2, x'_3) . Для $(\nabla'_S \cdot \mathbf{n}')$ имеем следующее выражение:

$$\nabla'_S \cdot \mathbf{n}' = -\frac{1/h^0}{(N')^{3/2}} \left[N'_2 \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x'_1 \partial x'_1} \right) + N'_1 \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x'_2 \partial x'_2} \right) - \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x'_1 \partial x'_2} \right) \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right) \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right) \right],$$

где

$$N'_1 = 1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2, \quad N'_2 = 1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right)^2,$$

$$N' = 1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right)^2.$$

Выражения для членов $O(\alpha)$ в правой части условий (2.3.5) приведены в Приложении к [48]. Наконец, вместо (2.2.1) мы записываем

$$v_i = 0, \quad \theta = 1, \quad x'_3 = 0, \quad (2.3.6a)$$

и вместо (2.2.4) —

$$v_3 = \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t'} + v_1 \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} + v_2 \frac{\partial \eta}{\partial x'_2} \right), \quad x'_3 = 1 + \delta \eta. \quad (2.3.6b)$$

В уравнениях (2.3.5)

$$\text{We} = \frac{\sigma_0 h^0}{\rho_0 v_0^2}, \quad \text{Ma} = \frac{\gamma h^0 \Delta T^0}{\rho_0 v_0^2}, \quad \text{Bi} = \frac{q}{k_0} \quad (2.3.7)$$

— числа Вебера, Марангони (где мы учли (2.1.2)) и Биота соответственно.

3. Проблема Бенара – Марангони

3.1. О роли плавучести — две альтернативы

В литературе [55, гл. 2] задачу Релея – Бенара о конвекции в мелкой воде называют задачей о неустойчивости вследствие плавучести. Однако конвективные ячейки Бенара [3] образуются в первую очередь под действием градиента поверхностного натяжения, причем сам градиент появляется вследствие изменения температуры вдоль свободной поверхности (так называемый эффект Марангони). Естественно, в полной постановке задачи о конвекции (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6) для слабосжимаемой вязкой жидкости есть и градиент плавучести, и градиент поверхностного натяжения, поэтому с нашей точки зрения самое время задаться вопросом: каково влияние этих эффектов, когда жидкость слабосжимаема ($\alpha \rightarrow 0$)?

Необходимо также отметить, что в основных уравнениях (2.3.3б) и (2.3.3в) два члена $(\alpha/\text{Fr}^2)\theta\delta_{i3}$ и $\alpha\text{Bo}(p'_a + 1 - x'_3)(D\theta/Dt')$ содержат параметр α ! С другой стороны, граничное условие (2.3.5a) включает член $\delta\eta/\text{Fr}^2$!

Как следствие, если мы хотим учесть член $(\alpha/\text{Fr}^2)\theta\delta_{i3}$, отвечающий за плавучесть в (2.3.3б), необходимо, чтобы $\alpha \rightarrow 0$ и $\text{Fr} \rightarrow 0$ при фиксированном отношении $\alpha/\text{Fr}^2 = O(1)$. Но в таком случае в (2.3.5a) первый член в правой части (при $\delta = O(1)$) неограничен!

Таким образом, мы приходим к следующей *альтернативе*:

"Либо плавучесть принимается в расчет и тогда эффект деформации свободной поверхности пренебрежимо мал, причем эффект Марангони можно учитывать лишь частично, либо эффект деформации свободной поверхности принимается в расчет и тогда плавучесть не играет заметной роли в полной задаче термокапиллярности Бенара – Марангони".

3.2. Проблема БМ с недеформируемой верхней поверхностью (проблема УБМ)

Из уравнения (2.3.3б) при $\alpha \rightarrow 0$ следует, что если мы хотим учитывать член, отвечающий за плавучесть, $\text{Gr}\theta\delta_{i3}$, необходимо наложить условия "предельного процесса Буссинеска" [47]:

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \text{Fr} \rightarrow 0 \quad \left(\frac{\alpha}{\text{Fr}^2} = \text{Gr} = O(1) \right). \quad (3.2.1)$$

В этом случае при фиксированных переменных t' и x'_i и параметрах Pr , Bo и при членах $O(\alpha) \rightarrow 0$ мы получаем следующие классические безразмерные конвективные уравнения мелкой воды Буссинеска для v_i , θ и π :

$$\frac{\partial v_k}{\partial x'_k} = 0, \quad (3.2.2a)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt'} + \frac{\partial \pi}{\partial x'_i} - \text{Gr}\theta\delta_{i3} = \nabla'^2 v_i, \quad (3.2.2b)$$

$$\frac{D\theta}{Dt'} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla'^2 \theta. \quad (3.2.2b)$$

При $\text{Bo} = O(1)$ и $\text{Fr} \ll 1$ модельные уравнения (3.2.2) справедливы при следующих физических условиях:

$$\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^{1/3} \ll h^0 \leq C_0 \frac{\Delta T^0}{g}. \quad (3.2.3)$$

Теперь, если мы рассмотрим основные безразмерные граничные условия (2.3.5) в пределе $\text{Fr} \rightarrow 0$, то увидим, что в условии на свободной поверхности (2.3.5a) первый член в правой части (при $\delta = O(1)$) неограничен! Поэтому условие для давления на свободной поверхности (2.3.5a) в случае слабосжимаемой жидкости асимптотически согласовано с предельными модельными уравнениями (3.2.2), только когда амплитуда колебаний свободной поверхности невелика, т.е. когда

$$\delta \rightarrow 0, \quad \text{Fr} \rightarrow 0 \quad \left(\frac{\delta}{\text{Fr}^2} = \delta^* = O(1)\right). \quad (3.2.4)$$

С другой стороны, для учета влияния (большого) числа Вебера в предельной задаче БМ с недеформируемой верхней поверхностью необходимо, чтобы

$$\text{We} \gg 1, \quad \delta \ll 1, \quad \text{We} = W^* = O(1). \quad (3.2.5)$$

Наконец, так как $\delta \ll 1$, из (2.3.6б) имеем $v_3 = O(\delta)$ на плоскости $x_3 = 1$.

Следовательно, для модельных уравнений Буссинеска (3.2.2) с учетом (3.2.4) и (3.2.5), когда и Ma и Bi порядка $O(1)$, мы можем наложить следующие "недеформируемые" граничные условия на свободной поверхности (при $x'_3 = 1$):

$$\pi = \delta^* \eta - W^* \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2'^2} \right), \quad (3.2.6)$$

$$v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x'_3} = -\text{Ma} \frac{\partial \theta}{\partial x'_1}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x'_3} = -\text{Ma} \frac{\partial \theta}{\partial x'_2}, \quad (3.2.7a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'_3} + \text{Bi}\theta + 1 = 0. \quad (3.2.7b)$$

По сути, условие (3.2.6) для π при $x'_3 = 1$ представляет собой условие определения деформации свободной поверхности $\eta(t', x'_1, x'_2)$ относительно плоскости $x'_3 = 1$.

Наконец, для задачи УБМ (задачи БМ с недеформируемой верхней свободной поверхностью) с учетом эффектов Биота, Марангони и Вебера мы получаем для v_i , θ и π уравнения (3.2.2) с условиями (3.2.7a) на $x'_3 = 1$ и (2.3.6a) на $x'_3 = 0$. В задаче УБМ мы имеем три параметра подобия (Gr , δ^* и W^*) и три безразмерных параметра (Pr , Ma и Bi). В [49] рассматривалась именно эта модельная задача УБМ.

3.3. Проблема БМ для тонкого слоя (пленки) с деформируемой свободной поверхностью

Для формулировки полной модельной задачи БМ, когда деформацией свободной поверхности ($\delta = O(1)$ в уравнении $h' = 1 + \delta\eta$) нельзя пренебречь, необходимо принять, что число Фруда Fr порядка $O(1)$. Как следствие, мы должны рассмотреть следующий несжимаемый предельный процесс:

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \text{Fr} = O(1). \quad (3.3.1)$$

Но в этом случае, очевидно, $\text{Bo} \ll 1$, так как $C_0 \Delta T^0 / g \gg h^0 \approx (v_0^2 / g)^{1/3}$. В результате вместо уравнений Буссинеска (3.2.2) мы получаем следующие "несжимаемые" условия:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x'_k} = 0, \quad (3.3.2a)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt'} + \frac{\partial \pi}{\partial x'_i} = \nabla'^2 v_i, \quad (3.3.2b)$$

$$\frac{D\theta}{Dt'} = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla'^2 \theta. \quad (3.3.2b)$$

Для этих уравнений (3.3.2) ввиду того, что $\text{Fr} = O(1)$ и $\delta = O(1)$, мы должны выписать условия на деформируемой свободной поверхности $x'_3 = h'(t', x'_1, x'_2)$. Согласно (2.3.5) мы получаем следующие весьма сложные безразмерные условия (при $x'_3 = h'(t', x'_1, x'_2)$):

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{h' - 1}{\text{Fr}^2} + \frac{2}{N'} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x'_1} \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x'_2} \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right)^2 + \frac{\partial v_3}{\partial x'_3} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x'_1} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial h'}{\partial x'_2} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x'_1} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_1} - \\ & - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x'_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x'_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_2} \left. \right] - \frac{\text{We} - \text{Ma}\theta}{N'^{3/2}} \left[N'_2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x'_1 \partial x'_1} + \right. \\ & + N'_1 \frac{\partial^2 h'}{\partial x'_2 \partial x'_2} - 2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x'_1 \partial x'_2} \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial h'}{\partial x'_2} \left. \right], \end{aligned} \quad (3.3.3a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x'_3} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x'_1} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_2} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x'_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x'_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial h'}{\partial x'_2} - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{\text{Ma}}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x'_1} + \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial \theta}{\partial x'_3} \right) N'^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.3.3b)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x'_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_2} \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x'_1} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial h'}{\partial x'_2} + \\ & + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x'_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x'_3} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_2} + \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x'_1} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'_1} - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_2} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_2}{\partial x'_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x'_2} \right) = \frac{\text{Ma}}{2} \left\{ - \frac{\partial h'}{\partial x'_1} \frac{\partial h'}{\partial x'_2} \frac{\partial \theta}{\partial x'_1} + \right. \\ & + \left[1 + \left(\frac{\partial h'}{\partial x'_1} \right)^2 \right] \frac{\partial \theta}{\partial x'_2} + \frac{\partial h'}{\partial x'_2} \frac{\partial \theta}{\partial x'_3} \left. \right\} N'^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.3.3b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = \frac{\partial h'}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial h'}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - (\text{Bi}\theta + 1)N^{1/2}. \quad (3.3.3\text{г})$$

Наконец, вместо (2.3.6б) и (2.3.6а) запишем

$$v_3 = \frac{\partial h'}{\partial t'} + v_1 \frac{\partial h'}{\partial x_1'} + v_2 \frac{\partial h'}{\partial x_2'}, \quad x_3' = h'(t', x_1', x_2'), \quad (3.3.3\text{д})$$

и

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \theta = 1, \quad x_3' = 0. \quad (3.3.3\text{е})$$

Как и (3.3.2), и (3.3.3), задача БМ была рассмотрена недавно Непомнящим и Веларде [33], но наши граничные условия (3.3.3а)–(3.3.3г) несколько отличаются (наши условия (3.3.3) следуют из точных исходных граничных условий (2.2.2) и (2.2.3) с учетом определения единичных касательных ($\mathbf{t}'^{(1)}$ и $\mathbf{t}'^{(2)}$) и нормального ($\mathbf{n}$) векторов к деформированной свободной поверхности в несжимаемом пределе (3.3.1)).

3.3.1. Модельная задача БМ для пограничного слоя (БМПС). Полная модельная задача БМ (3.3.2), (3.3.3) очень сложна, но в случае течения в тонкой пленке мы можем применить приближение длинных волн. В этом случае мы получаем упрощенную модельную задачу БМПС для больших чисел Рейнольдса. В соответствии с приближением длинных волн мы предполагаем, что характеристическое значение длины горизонтальной волны $\lambda^\circ \gg h^\circ$. В этом случае вместо безразмерных переменных (t', x_1', x_2', x_3') целесообразно ввести следующие новые безразмерные переменные:

$$x = \varepsilon x_1', \quad y = \varepsilon x_2', \quad z \equiv x_3', \quad \tau = \varepsilon \text{Re} t' \quad (3.3.4)$$

и новые функции

$$u = \frac{v_1}{\text{Re}}, \quad v = \frac{v_2}{\text{Re}}, \quad w = \frac{v_3}{\varepsilon \text{Re}}, \quad \Pi = \frac{\pi}{\text{Re}^2}, \quad (3.3.5)$$

где

$$\varepsilon = \frac{h^\circ}{\lambda^\circ}, \quad \text{Re} = \frac{U^\circ h^\circ}{\nu_0}. \quad (3.3.6)$$

Наконец, вместо безразмерных параметров Fr , We и Ma мы вводим соответствующие модифицированные числа Фруда, Вебера и Марангони с характеристической скоростью U° :

$$\text{Fr} = \frac{U^\circ}{\sqrt{gh^\circ}}, \quad \text{We} = \frac{\sigma_0}{\rho_0 h^\circ U^{\circ 2}}, \quad \text{Ma} = \frac{\gamma \Delta T^\circ}{\rho_0 h^\circ U^{\circ 2}}. \quad (3.3.7)$$

При (см. [48, 56])

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{Re} \rightarrow \infty, \quad \text{We} \rightarrow \infty \quad (3.3.8\text{а})$$

и соответствующих отношениях подобия

$$\varepsilon \text{Re} = \text{Re}^* = O(1), \quad \varepsilon^2 \text{We} = \text{W}^* = O(1) \quad (3.3.8\text{б})$$

вместо полной модельной задачи БМ (3.3.2), (3.3.3) мы получаем для функций

$$u(\tau, x, y, z), \quad v(\tau, x, y, z), \quad w(\tau, x, y, z), \\ \Pi(\tau, x, y, z), \quad \theta(\tau, x, y, z), \quad h' = H(\tau, x)$$

следующие модельные уравнения для задачи БМПС:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.3.9\text{а})$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} + \mathbf{D}\Pi = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2}, \quad (3.3.9\text{б})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \Pi = \frac{H-1}{\text{Fr}^2} - \mathbf{W}^* \mathbf{D}^2 H, \quad (3.3.9\text{в})$$

$$\text{Pr} \frac{D\theta}{D\tau} = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (3.3.9\text{г})$$

При $z = 0$

$$u = v = w = 0, \quad \theta = 1, \quad (3.3.10\text{а})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\text{Re}^* \text{Ma} \left[\mathbf{D}\theta + (\mathbf{D}H) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right], \quad (3.3.10\text{б})$$

при $z = H(\tau, x, y)$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + 1 + \text{Bi}\theta = 0, \quad (3.3.10\text{в})$$

$$w = \frac{\partial H}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}H. \quad (3.3.10\text{г})$$

В этих уравнениях дифференциальные операторы имеют следующий смысл:

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В (3.3.9) и (3.3.10) параметры Fr , Ma , Pr , Bi , Re^* и W^* порядка $O(1)$. Сформулированная задача БМПС является весьма точной приближенной моделью для задачи неустойчивости в тонкой пленке слабовязкой жидкости, так что эта модель заслуживает дальнейшего исследования.

3.3.2. Предельный случай: $\text{Pr} \rightarrow 0$. При $\text{Pr} \rightarrow 0$ решение для температурного возмущения θ очень просто найти из (3.3.9г), (3.3.10а) и (3.3.10в):

$$\theta = 1 - (1 + \text{Bi}) \frac{z}{1 + \text{Bi} H}. \quad (3.3.11)$$

С другой стороны (при всех фиксированных Pr и Re^*), из (3.3.3а) с условиями

при $z = 0$

$$w = 0,$$

при $z = H$

$$w = \frac{\partial H}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}H$$

мы получаем следующее усредненное (эволюционное) уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + \mathbf{D} \cdot \int_0^H \mathbf{V} dz = 0. \quad (3.3.12)$$

В этом случае для функций $\mathbf{V}(\tau, x, y, z)$ и $H(\tau, x, y)$ мы получаем следующую систему двух нелинейных эволюционных уравнений: (3.3.12) и

$$\frac{D\mathbf{V}}{D\tau} - \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{D}H + \mathbf{W}^* \mathbf{D}[\mathbf{D}^2 H], \quad (3.3.13)$$

так как

$$w = - \int_0^z (\mathbf{D} \cdot \mathbf{V}) dz.$$

Для этих двух уравнений (3.3.12) и (3.3.13) мы имеем в качестве граничных условий (на z):

при $z = 0$

$$\mathbf{V} = 0,$$

при $z = H$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \text{MaRe}^*(1 + \text{Bi}) \frac{\mathbf{D}H}{(1 + \text{Bi}H)^2}. \quad (3.3.14)$$

Если теперь положить $\text{Re}^* \ll 1$, в пределе $\text{Re}^* \rightarrow 0$ из (3.3.13) мы получаем с учетом (3.3.14) следующее предельное решение для горизонтальной скорости $\mathbf{V} = \mathbf{V}(H)$:

$$\mathbf{V}(H) = \frac{1}{3} \frac{d}{dH} \left\{ H^3 [a^\circ \mathbf{D}(\mathbf{D}^2 H) - \mathbf{D}H] + b^\circ (1 + \text{Bi}) H^2 \frac{\mathbf{D}H}{(1 + \text{Bi}H)^2} \right\} \quad (3.3.15)$$

и как следствие вместо (3.3.12) мы имеем одно эволюционное уравнение для толщины пленки $H(\tau, x, y)$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{3} \mathbf{D} \cdot \left\{ H^3 [a^\circ \mathbf{D}(\mathbf{D}^2 H) - \mathbf{D}H] + b^\circ (1 + \text{Bi}) H^2 \frac{\mathbf{D}H}{(1 + \text{Bi}H)^2} \right\} = 0. \quad (3.3.16)$$

В (3.3.15) и (3.3.16)

$$a^\circ = \frac{\sigma_0}{\rho_0 g \lambda^{\circ 2}}, \quad b^\circ = \frac{1}{2} \frac{\gamma \Delta T^\circ}{\rho_0 g h^{\circ 2}} \quad (3.3.17)$$

при следующем выборе характеристической скорости: $U^\circ = g h^{\circ 3} / \lambda^{\circ} \nu_0$.

В уравнении (3.3.16) (весьма напоминающем уравнение, полученное Ороном и Розенау в [21]) член, пропорциональный a° , оказывает стабилизирующее действие, в то время как член, пропорциональный b° , имеет, наоборот, дестабилизирующее влияние.

Отметим, что гравитация (член $-(1/3) \mathbf{D} \cdot [H^3 \mathbf{D}H]$ в (3.3.16)) стабилизирует эволюцию поверхности раздела, когда пленка находится на твердой поверхности.

3.4. Проблема БМ для свободно падающей вертикальной пленки

Ниже мы рассмотрим термокапиллярную неустойчивость свободно падающей вертикальной (двумерной) пленки, так как и эксперименты, и теории посвящены в основном именно этой задаче, а волновая динамика на наклонной поверхности рассматривает, по существу, аналогичную задачу.

В безразмерных переменных (см. (3.4.3)) определяющие уравнения и граничные условия для движения (несжимаемой, но теплопроводящей) жидкости вниз вдоль вертикальной плоскости имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.4.1a)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\text{Fr}^2} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (3.4.1b)$$

$$\varepsilon^2 \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.4.1b)$$

$$\text{Pr} \frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right), \quad (3.4.1r)$$

где $\mathbf{D}/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + w\partial/\partial z$.

При $z = 0$

$$u = w = 0, \quad \theta = 1, \quad (3.4.2a)$$

при $z = h(t, x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = & -\varepsilon \text{Ma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \\ & - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + 4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{3}{2} \varepsilon^3 \text{Ma} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.4.2b)$$

$$\begin{aligned} p = p_a + & 2 \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \varepsilon^2 \text{We} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\text{Ma}}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \theta + \\ & + 2 \frac{\varepsilon^3}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.4.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial z} = & -(1 - \text{Bi} \theta) + \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 (1 + \text{Bi} \theta) \right], \end{aligned} \quad (3.4.2r)$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.4.2d)$$

Граничные условия на свободной поверхности (3.4.2б–г) записаны с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^4)$. В (3.4.1) и (3.4.2) все функции и переменные — безразмерные, а именно (символом "*" отмечены размерные величины):

$$\begin{aligned} x = \frac{x^*}{\lambda^\circ}, \quad z = \frac{z^*}{h^\circ}, \quad t = \frac{t^*}{t^\circ}, \quad u = \frac{u^*}{U^\circ}, \quad w = \frac{w^*}{\varepsilon U^\circ}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 U^{\circ 2}}, \\ \theta = \frac{T^* - T^\circ}{\Delta T^\circ}, \quad t^\circ = \frac{\lambda^\circ}{U^\circ}, \quad p_a = \frac{p_a^*}{\rho_0 U^{\circ 2}}, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

а $h^\circ, \lambda^\circ, U^\circ, \rho_0, T^\circ, \Delta T^\circ > 0$ — характеристические значения толщины пленки, длины волны, скорости, плотности, температуры и скорости роста температуры на нижней горизонтальной границе $z^* = 0$. В уравнениях (3.4.1) и граничных условиях (3.4.2) присутствуют следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \varepsilon = h^\circ / \lambda^\circ & \text{ — длинноволновый параметр,} \\ \text{Re} = U h^\circ / \nu_0 & \text{ — число Рейнольдса,} \\ \text{Fr} = U^\circ / \sqrt{g h^\circ} & \text{ — число Фруда,} \\ \text{Pr} = \nu_0 / \kappa_0 & \text{ — число Прандтля,} \\ \text{Ma} = \gamma \Delta T^\circ / U^\circ \rho_0 \nu_0 & \text{ — число Марангони,} \\ \text{We} = \sigma_0 / h^\circ \rho_0 U^{\circ 2} & \text{ — число Вебера,} \\ \text{Bi} = q^\circ h^\circ / k_0 & \text{ — число Биота.} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Отметим, что x^* (вдоль вертикальной пластины) и z^* (перпендикулярно вертикальной пластине) представляют собой, соответственно, горизонтальную и верти-

кальную координаты; следовательно, u^* и w^* — соответствующие горизонтальные и вертикальные компоненты скорости. Для поверхностного натяжения $\sigma(T)$ мы получаем снова соотношение (2.1.2).

В качестве характеристической скорости U° мы выбираем скорость поверхности раздела

$$U^\circ = g \frac{h^2}{v_0}, \quad (3.4.5)$$

и в этом случае $\text{Re}/\text{Fr}^2 = 1$. Произведение

$$\text{Re We} = \frac{\sigma_0}{\rho_0 g h^2} = \frac{1}{K}, \quad (3.4.6)$$

где K — так называемое число капиллярности.

4. Режим пограничного слоя при больших числах Рейнольдса: $\text{Re} \gg 1$

4.1. Обобщенные интегральные модельные уравнения пограничного слоя

Из уравнения неразрывности (3.4.1а), кинематического условия (3.4.2д) и условия $w = 0$ при $z = 0$ мы легко получаем следующее усредненное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (4.1.1)$$

где

$$q(t, x) = \int_0^{h(t, x)} u(t, x, z) dz. \quad (4.1.2)$$

Функция $q(t, x)$ представляет собой усредненную по толщине пленки компоненту скорости (параллельную твердой вертикальной поверхности $z = 0$). Вследствие того, что $q(t, x)$ не может быть, как правило, выражена через $h(t, x)$ или ее частные производные, уравнение (4.1.1) не является замкнутым эволюционным уравнением для толщины $h(t, x)$. В этом разделе нашей основной целью является рассмотрение частной ситуации, возникающей в результате процесса осреднения, для которой замкнутая система уравнения может быть получена. А именно, мы рассматриваем следующую ситуацию (длинные волны и большие числа Рейнольдса):

$$\varepsilon \ll 1, \quad \text{Re} \gg 1, \quad \varepsilon \text{Re} = \text{Re}^* = O(1). \quad (4.1.3)$$

Используя (4.1.3) вместо (3.4.2в), мы получаем предельное уравнение $\partial p / \partial z = 0$ и в этом случае согласно (3.4.2в) приходим к следующему соотношению между p и h :

$$p = p(h) \equiv p_a - W^* \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (4.1.4)$$

при (больших числах Вебера)

$$\varepsilon \text{We} = W^* = O(1). \quad (4.1.5)$$

В результате мы получаем следующую предельную систему для u , w , θ с учетом членов старших порядков:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4.1.6a)$$

$$\text{Re}^* \frac{Du}{Dt} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1 + \frac{1}{K^*} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad (4.1.6b)$$

$$\text{Re}^* \text{Pr} \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (4.1.6в)$$

где $1/K^* = \text{Re}^* W^* = O(1)$ в предположении, что $\text{Re}/\text{Fr}^2 = 1$.

Для уравнений (4.1.6) мы имеем следующие упрощенные граничные условия:

при $z = 0$

$$u = w = 0, \quad \theta = 1, \quad (4.1.7a)$$

при $z = h(t, x)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -M^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (4.1.7б)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -(1 + \text{Bi} \theta), \quad (4.1.7в)$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.1.7г)$$

в предположении (больших чисел Марангони)

$$\varepsilon \text{Ma} = M^* = O(1). \quad (4.1.8)$$

Однако даже упрощенная задача (4.1.6), (4.1.7) остается сложной граничной задачей. При $M^* = 0$ (в этом случае тепловое поле не зависит от динамического) Шкадов [51] с помощью интегрального метода свел задачу к системе двух усредненных уравнений для $h(t, x)$ и $q(t, x)$ в предположении автомодельности горизонтальной компоненты скорости u (см. ниже раздел 4.1.1). Например, применяя интегральный метод, вместо (4.1.6б) получаем следующее усредненное уравнение:

$$\begin{aligned} \text{Re}^* \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{h(t, x)} u^2 dz \right] \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \\ = M^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{K^*} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

где мы использовали граничное условие (4.1.7б).

4.1.1. Классическая усредненная модель Шкадова ($\text{Ma} = 0$). При $\text{Ma} = 0$ член в (4.1.9), пропорциональный Ma^* , исчезает, и тепловое поле не зависит от динамического. Так как (при $\text{Ma} = 0$)

при $z = 0$

$$u = 0,$$

при $z = h(t, x)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

мы можем использовать предположение об автомодельности скорости $u(t, x, z)$:

$$u(t, x, z) = \frac{U(t, x)}{h(t, x)} \left[z - \frac{1}{2h(t, x)} z^2 \right]. \quad (4.1.10)$$

С помощью (4.1.10) вместо (4.1.9) мы без труда получаем следующее соотношение между $h(t, x)$ и $q(t, x)$:

$$\text{Re}^* \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) \right] + \frac{3}{h^2} q = \frac{1}{K^*} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h \quad (4.1.11)$$

при условии, что число капиллярности $K^* = O(1)$. Отметим, что из (4.1.2) и (4.1.10) мы получаем следующее

соотношение для $q(t, x)$ и $U(t, x)$:

$$U(t, x) = \frac{3}{h} q. \quad (4.1.12)$$

Система двух эволюционных уравнений (4.1.11) и (4.1.12) для $h(t, x)$ и $q(t, x)$ описывает усредненную модель Шкадова.

4.1.2. Обобщенная модель Шкадова с учетом эффекта Марангони ($\text{Pr} = 0$). При $\text{Pr} = 0$ горизонтальная скорость u удовлетворяет следующим двум граничным условиям: при $z = 0$

$$u = 0,$$

при $z = h(t, x)$

$$u = M^*(1 + \text{Bi}) \frac{\partial h / \partial x}{(1 + \text{Bi} h)^2},$$

так что при $\text{Pr} = 0$ вместо (4.1.6в) мы имеем предельное уравнение $\partial^2 \theta / \partial z^2 = 0$ с граничными условиями $\theta = 1$ при $z = 0$ и $\partial \theta / \partial z = -(1 + \text{Bi} \theta)$ при $z = h(t, x)$, а решение для θ имеет вид

$$\theta = 1 - (1 + \text{Bi}) \frac{z}{1 + \text{Bi} h}. \quad (4.1.13)$$

Как следствие, вместо (4.1.10) мы записываем

$$u(t, x, z) = \frac{U(t, x)}{h(t, x)} \left[z - \frac{1}{2h(t, x)} z^2 \right] + M^*(1 + \text{Bi}) \frac{\partial h / \partial x}{(1 + \text{Bi} h)^2} z. \quad (4.1.14)$$

В этом случае благодаря (4.1.14) мы получаем (вместо (4.1.12)):

$$U(t, x) = \frac{3}{h} q - \frac{3}{2} M^* \frac{1 + \text{Bi}}{(1 + \text{Bi} h)^2} h \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.1.15)$$

и из (4.1.9) выводим второе усредненное уравнение для $h(t, x)$ и $q(t, x)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}^* \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{1}{20} M^*(1 + \text{Bi}) \frac{\partial}{\partial x} \times \right. \\ \left. \times \left[h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{q}{(1 + \text{Bi} h)^2} \right] \right\} + \frac{3}{h^2} q = \\ = \frac{1}{K^*} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h + \frac{3}{2} M^*(1 + \text{Bi}) \frac{\partial h / \partial x}{(1 + \text{Bi} h)^2} - \\ - \frac{1}{120} \text{Re}^* M^{*2} (1 + \text{Bi})^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{h^3}{(1 + \text{Bi} h)^4} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Система двух уравнений (4.1.1) и (4.1.16) для двух функций $h(t, x)$ и $q(t, x)$ обобщает классическую систему Шкадова на случай, когда эффектами Марангони и Биота нельзя пренебрегать, а $\text{Pr} = 0$.

4.1.3. Обобщенная модель Шкадова с учетом эффектов Марангони и Прандтля ($\text{Bi} = 0$). Этот случай более сложен, так как при $\text{Pr} \neq 0$ необходимо получить третье усредненное уравнение из уравнения (4.1.6в) для θ . Здесь

мы получим такое усредненное уравнение только для случая $\text{Bi} = 0$ (остается неясным, возможно ли получить такое усредненное уравнение для случая $\text{Bi} \neq 0$). Для этого вместо θ мы вводим новую функцию Θ :

$$\Theta = \theta - (1 - z).$$

Функция $\Theta(t, x, z)$ представляет собой решение следующей задачи (как следует из (4.1.6в), (4.1.7а) и (4.1.7в) при $\text{Bi} = 0$):

$$\text{Re}^* \text{Pr} \left(\frac{D\Theta}{Dt} - w \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0,$$

при $z = 0$

$$\Theta = 0,$$

при $z = h(t, x)$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \quad (4.1.17)$$

Согласно последнему условию (4.1.17) вместо (4.1.7б) мы можем записать следующее условие:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = M^* \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right), \quad z = h(t, x). \quad (4.1.18)$$

Из (4.1.17) получаем следующее усредненное уравнение:

$$\begin{aligned} \text{Pr Re}^* \left[\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(t, x)} u \Theta dz - \int_0^{h(t, x)} w dz \right) \right] + \\ + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

где

$$\chi(t, x) = \int_0^{h(t, x)} \Theta(t, x, z) dz. \quad (4.1.20)$$

Однако, как следует из условий задачи (4.1.17), решение $\Theta(t, x, z)$ является автомодельным:

$$\Theta(t, x, z) = 2 \left[1 - \frac{\Sigma(t, x)}{h(t, x)} \right] \left[z - \frac{1}{2h(t, x)} z^2 \right]. \quad (4.1.21)$$

Теперь нам осталось только получить два усредненных уравнения для трех неизвестных функций $h(t, x)$, $q(t, x)$ и $\Sigma(t, x)$. Во-первых, из (4.1.21) мы легко получаем

при $z = h(t, x)$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = M^* \frac{\partial \Sigma}{\partial x}. \quad (4.1.22)$$

В соответствии с (4.1.22) $u(t, x, z)$ может быть представлена в виде (по аналогии с (4.1.14), но при $\text{Bi} = 0$)

$$u(t, x, z) = \frac{U(t, x)}{h(t, x)} \left[z - \frac{1}{2h(t, x)} z^2 \right] + M^* \frac{\partial \Sigma}{\partial x} z. \quad (4.1.23)$$

С учетом (4.1.23) получаем

$$q(t, x) = \frac{1}{3} U h + \frac{1}{2} M^* h^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial x}, \quad (4.1.24a)$$

и (вместо (4.1.15), так как $\text{Bi} = 0$)

$$U(t, x) = \frac{3}{h} q - \frac{3}{2} M^* h \frac{\partial \Sigma}{\partial x}. \quad (4.1.24б)$$

По аналогии с (4.1.16) мы имеем следующее усредненное уравнение (в членах, пропорциональных M^* , заменяем $\partial h/\partial x$ на $\partial \Sigma/\partial x$ и предполагаем, что $Bi=0$):

$$\begin{aligned} \text{Re}^* \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{1}{20} M^* \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \Sigma}{\partial x} q \right) \right] + \frac{3}{h^2} q = \\ = \frac{1}{K^*} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h + \frac{3}{2} M^* \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \\ - \frac{1}{120} \text{Re}^* M^{*2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right)^2 h^3 \right]. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Теперь из (4.1.20) и (4.1.21) получаем соотношение

$$\chi = \frac{2}{3} h(h - \Sigma), \quad (4.1.26)$$

и, как следует из (4.1.19), член $\partial \chi/\partial t$ равен $-(2/3)h\{\partial \Sigma/\partial t + [2 - (\Sigma/h)]\partial q/\partial x\}$.

С другой стороны, член

$$\int_0^{h(t,x)} w \, dz = -\frac{1}{48} M^* \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right) + q \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{3}{8} \frac{\partial(hq)}{\partial x}, \quad (4.1.27a)$$

а член

$$\int_0^{h(t,x)} u \Theta \, dz = \frac{12}{15} q(h - \Sigma) + \frac{1}{60} M^* (h - \Sigma) h^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial x}. \quad (4.1.27b)$$

Так как $(\partial \Theta/\partial z)_{z=0} = 2[1 - (\Sigma/h)]$, для $\Sigma(t, x)$ мы получаем следующее усредненное уравнение вместо (4.1.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \left(2 - \frac{\Sigma}{h} \right) \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{6}{5h} \frac{\partial}{\partial x} [q(\Sigma - h)] - \\ - \frac{9}{16h} \frac{\partial}{\partial x} (qh) + \frac{3q}{2h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{M^*}{40h} \frac{\partial}{\partial x} \times \\ \times \left[h^2 (\Sigma - h) \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right] + \frac{M^*}{32h} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \Sigma}{\partial x} \right) + \\ + \frac{3}{\text{Re}^* \text{Pr}} \frac{\Sigma - h}{h^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Наконец, для наших трех неизвестных функций $h(t, x)$, $q(t, x)$ и $\Sigma(t, x)$ мы получаем усредненную систему трех уравнений (4.1.1), (4.1.25) и (4.1.28).

4.2. Анализ линейной задачи

Фундаментальное (постоянное) решение усредненных уравнений (4.1.1), (4.1.25) и (4.1.28) для $h(t, x)$, $q(t, x)$ и $\Sigma(t, x)$ имеет вид

$$h = 1, \quad q = \frac{1}{3}, \quad \Sigma = 1. \quad (4.2.1)$$

Так как $h(t, x) = 1 + \delta \eta(t, x)$, мы можем записать, что

$$q = \frac{1}{3} + \delta \varphi(t, x), \quad \Sigma = 1 + \delta \zeta(t, x). \quad (4.2.2)$$

При $\delta \ll 1$ мы получаем из (4.1.1), (4.1.25) и (4.1.28) следующую систему двух линейных эволюционных уравнений для $\eta(t, x)$ и $\zeta(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{4}{5} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{2}{15} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \\ - \frac{M^*}{60} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + W^* \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{3}{\text{Re}^*} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{7}{16} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{7}{80} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{2}{5} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{M^*}{32} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \\ + \frac{3}{\text{Pr Re}^*} (\zeta - \eta) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.3b)$$

так как $\partial \varphi/\partial x = -\partial \eta/\partial t$.

Эту замкнутую линейную систему (4.2.3a, б) можно исследовать численными методами (при задании соответствующих начальных условий и периодичности по x) на устойчивость (постоянного) гладкого фундаментального решения типа решения Нуссельта (4.2.1). Здесь мы рассматриваем только бесконечно малые возмущения вида

$$\begin{aligned} \eta(t, x) = A^\circ \exp [ik(x - ct)], \\ \zeta(t, x) = B^\circ \exp [ik(x - ct)] \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

и в этом случае получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{3}{\text{Re}^*} (c - 1) - ik \left(c^2 - \frac{4}{5} c + \frac{2}{15} \right) + ik^3 W^* = \\ = \frac{B^\circ}{A^\circ} M^* \left(\frac{k^2}{60} + \frac{3}{2} ik \frac{1}{\text{Re}^*} \right), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

причем

$$\begin{aligned} B^\circ \left[\frac{3}{\text{Pr Re}^*} - \frac{1}{32} M^* k^2 - ik \left(c - \frac{2}{5} \right) \right] - \\ - A^\circ \left[\frac{3}{\text{Pr Re}^*} + \frac{7}{16} ik \left(c - \frac{1}{5} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Из (4.2.6) видно, что отношение B°/A° представляет собой комплексную функцию k и c , и, как следствие, при $\text{Pr} \neq 0$ дисперсионное соотношение (4.2.5) имеет весьма сложный вид! Поэтому ниже мы рассматриваем только случай $\text{Pr} = 0$, когда $M^* \neq 0$. При этом $A^\circ = B^\circ$ и вместо характеристического уравнения (4.2.5) мы получаем следующее упрощенное дисперсионное соотношение (с учетом эффекта Марангони):

$$\begin{aligned} \frac{3}{\text{Re}^*} (c - 1) - ik \left(c^2 - \frac{4}{5} c + \frac{2}{15} \right) + ik^3 W^* = \\ = \frac{1}{2} M^* \left(\frac{k^2}{30} + 3i \frac{k}{\text{Re}^*} \right). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Так как в первую очередь интерес для нас представляет устойчивость к ограниченным в любой момент времени пространственным возмущениям, мы полагаем, что волновые числа k в (4.2.7) — действительные. Тогда значения комплексной фазовой скорости $c = c_r + ic_i$ могут быть найдены соответственно из действительной и мнимой частей (4.2.7):

$$\frac{3}{\text{Re}^*} (1 - c_r) + kc_i \left(\frac{4}{5} - 2c_r \right) + \frac{1}{60} M^* k^2 = 0, \quad (4.2.8a)$$

$$\frac{3}{\text{Re}^*} c_i - k \left(c_r^2 - c_i^2 - \frac{4}{5} c_r + \frac{2}{15} + \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} \right) + k^3 W^* = 0. \quad (4.2.86)$$

Если $c_i > 0$, то возмущения нарастают, а если $c_i < 0$, то они затухают. Из (4.2.8а) при $c_i = 0$ мы получаем для фазовой скорости нейтрального возмущения следующее соотношение:

$$c_r^* = c^* = 1 + \frac{M^* \text{Re}^*}{180} k^2, \quad (4.2.9)$$

и, таким образом, бесконечно малые возмущения оказываются дисперсионными; коэффициент

$$\beta = \frac{M^* \text{Re}^*}{180} \quad (4.2.10)$$

представляет собой скорость дисперсии, причем он явным образом зависит от M^* . Мнимая часть (4.2.8б) при $c_i = 0$ с учетом (4.2.9) дает следующее биквадратное алгебраическое уравнение для нейтрального волнового числа k^* :

$$\beta(k^{*2})^2 + \left(\frac{6}{5} \beta - W^* \right) k^{*2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} = 0. \quad (4.2.11)$$

Очевидно, что для (при $M^* \neq 0$ или $\beta \neq 0$)

$$W^* \geq \frac{6}{5} \beta + 2\beta \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} \right)^{1/2} \quad (4.2.12)$$

мы получаем одно или два значения k^{*2} , причем эти значения всегда положительны.

Особый случай представляет ситуация, когда выполняется соотношение (в пространстве (W^*, M^*, Re^*))

$$\frac{30W^*}{M^* \text{Re}^*} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} \right)^{1/2} \quad (4.2.13)$$

между безразмерными параметрами W^* , M^* и Re^* . При этом существует единственное нейтральное волновое число k^* (соответствующее нейтральной кривой устойчивости для $c_i = 0$), такое, что

$$k^{*2} = \frac{180}{M^* \text{Re}^*} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} \right)^{1/2}. \quad (4.2.14)$$

Все возмущения при $k < k^*$ неустойчивы, а все возмущения при $k > k^*$ затухают.

При $M^* = 0$ ($\beta = 0$) мы получаем из (4.2.9) и (4.2.11) классический результат [13, 57]:

$$c_r^* = c^* = 1, \quad k^* = \left(\frac{1}{3W^*} \right)^{1/2} \quad (4.2.15a)$$

или

$$W_c^* = \frac{1}{3k^{*2}}, \quad (4.2.15b)$$

где W_c^* — "критическое" значение W^* , соответствующее предельному волновому числу k^* .

Как следует из приведенного выше анализа, при $M^* \neq 0$ существует предельное волновое число, являющееся функцией трех безразмерных параметров W^* , M^* и Re^* . По сути, каждый из этих параметров может высту-

пать в качестве бифуркационного параметра (в отличие от (4.2.15а, б), где бифуркационный параметр один — W^*). В настоящее время численное исследование полной линейной задачи устойчивости (4.2.3а,б) проводится С. Годтсом и М. Згалом в Лилльском университете, но здесь мы не будем касаться их результатов.

4.3. Уравнение Стюарта – Ландау

Линеаризованная теория устойчивости опирается на допущение о малости (бесконечной малости) возмущений амплитуды, т.е. она пренебрегает всеми членами с квадратичными или более высокими степенями возмущений. Таким образом, решение определяющих уравнений в частных производных для возмущений значительно упрощается в результате линеаризации (см. линейные уравнения (4.2.3 а,б)), причем решение может быть получено с помощью фурье-анализа. По сути, линеаризованная теория определяет условия в заданном стационарном потоке (в нашем случае для гладкого режима Нуссельта), при которых возможен рост малых возмущений. В соответствии с этой теорией амплитуда этих возмущений возрастает экспоненциально со временем, когда значения некоторых параметров потоков превышают критические (см., например, (4.2.15)). На самом деле такие возмущения не растут экспоненциально до бесконечности!

Поэтому ценность линеаризации для задачи неустойчивости — хотя она часто используется для решения различных физических задач — подвергается сомнению. Ландау [58] первым описал нелинейные явления неустойчивости для некоторых классов потоков в случае нелинейного уравнения для амплитуды

$$\frac{d}{dt} (|A|^2) = \nu |A|^2 - \lambda |A|^4, \quad (4.3.1)$$

где $A = A(t)$ — амплитуда старшей гармоники Фурье, ν и λ — константы, причем последняя носит название константы Ландау. Вообще говоря, ν , λ и A — комплексные числа. Параметр ν — собственное число линейной задачи устойчивости. И если W^* — параметр бифуркации, то

$$\text{Real}(\nu) \sim W^* - W_c^*, \quad W^* \rightarrow W_c^*.$$

Случай $\lambda = 0$ соответствует линейному уравнению в линеаризованной теории. Второй член в правой части (4.3.1) имеет нелинейную природу, причем он может замедлять и ускорять рост возмущений в зависимости от знаков ν и λ . Исходное уравнение Стюарта [59] имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = \nu A + \mu A |A|^2, \quad (4.3.2)$$

а эквивалентный вид (4.3.2)

$$-c \frac{dA}{d\xi} = \nu A + \mu A |A|^2, \quad (4.3.3)$$

где $\xi = x - ct$ и $A = A(\xi)$.

Ниже мы выводим уравнение типа (4.3.3) для усредненной нелинейной системы Шкадова (4.1.1), (4.1.11) для $h(t, x)$ и $q(t, x)$. Вывод уравнения для амплитуды типа Стюарта – Ландау вблизи критического режима с помощью метода нескольких масштабов хорошо известен, а его подробное описание можно найти у Ньюела [60] или

Стюартсона и Стюарта [61]. Основным малым параметром является $\delta \ll 1$.

Прежде всего мы записываем

$$W^* = W_c^* + \sigma \delta^2 \quad (4.3.4)$$

и берем случай $\sigma > 0$ ($k < k^*$). Так как $\delta \ll 1$, на самом деле мы рассматриваем слабо-нелинейную теорию. Для фазовой скорости мы записываем в соответствии с (4.2.15) и (4.3.4)

$$c_r = c_r^* + \delta^2 c_2, \quad c_r^* = 1. \quad (4.3.5)$$

Далее, мы вводим медленные переменные

$$\xi_k = \delta^k \xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.3.6)$$

где $\xi = x - c_r t$. В слабо-нелинейном случае для вывода соответствующего эволюционного уравнения Ландау–Стюарта для огибающей достаточно предположить, что амплитуда огибающей волнового пакета является функцией только $\xi_2 \equiv \eta$. Как следствие, мы можем предположить, что $h(t, x)$ и $q(t, x)$ имеют следующий вид:

$$h = h^*(\xi, \eta, \delta) = 1 + \delta h_1 + \delta^2 h_2 + \delta^3 h_3 + \dots, \quad (4.3.7a)$$

$$q = q^*(\xi, \eta, \delta) = \frac{1}{3} + \delta q_1 + \delta^2 q_2 + \delta^3 q_3 + \dots \quad (4.3.7b)$$

Но согласно линейной теории

$$h_1(\xi, \eta) = A(\eta)E(\xi) + A^*(\eta)E(-\xi), \quad (4.3.8)$$

где $E(\pm\xi) = \exp(\pm ik^*\xi)$ и A^* — комплексно-сопряженная величина для A ($AA^* = |A|^2$).

Для вывода уравнения ЛС для амплитуды $A(\eta)$ огибающей волнового пакета необходимо исключить вековые члены из уравнения для h_3 и q_3 ! Другими словами, мы предполагаем, что асимптотические разложения (4.3.7a, б) справедливы для всех значений переменной ξ . Теперь, учитывая отношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c_r \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (4.3.9)$$

мы подставляем разложения (4.3.7) и (4.3.4), (4.3.5) для W^* и c в нелинейную систему двух уравнений (4.1.1), (4.1.11) и приравниваем коэффициенты при членах соответствующего порядка для вывода цепочки дифференциальных уравнений. Чтобы получить уравнение ЛС низшего порядка для амплитуды, необходимо рассмотреть только первую, вторую и третью степени малого параметра δ .

4.3.1. Для $h_1(\xi, \eta)$ и $q_1(\xi, \eta)$ мы получаем классическую однородную систему уравнений

$$\frac{\partial h_1}{\partial \xi} = \frac{\partial q_1}{\partial \xi}, \quad A(h_1, q_1) = 0, \quad (4.3.10)$$

где

$$A(h, q) \equiv -\frac{1}{5} \frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{2}{15} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{3}{\text{Re}^*} (q - h) - \frac{1}{3k^{*2}} \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3}. \quad (4.3.11)$$

Так как $A(E(\pm\xi), E(\pm\xi)) \equiv 0$, решение (4.3.10) имеет вид

$$q_1(\xi, \eta) = h_1(\xi, \eta) = A(\eta)E(\xi) + A^*(\eta)E(-\xi). \quad (4.3.12)$$

4.3.2. Для $h_2(\xi, \eta)$ и $q_2(\xi, \eta)$ мы имеем неоднородную систему

$$\frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{\partial q_2}{\partial \xi}, \quad (4.3.13a)$$

$$A(h_2, q_2) = -\frac{8}{15} \frac{\partial(q_1)^2}{\partial \xi} + \frac{3}{\text{Re}^*} q_1^2 + \frac{1}{3k^{*2}} q_1 \frac{\partial^3 q_1}{\partial \xi^3}. \quad (4.3.13b)$$

С учетом решения (4.3.12) для $q_1(\xi, \eta)$ и $h_1(\xi, \eta)$ вместо (4.3.13b) получаем

$$A(h_2, q_2) = \frac{6}{\text{Re}^*} |A|^2 + \left(\frac{3}{\text{Re}^*} - \frac{7}{5} ik^* \right) A^2 E(2\xi) + \left(\frac{3}{\text{Re}^*} + \frac{7}{5} ik^* \right) A^{*2} E(-2\xi). \quad (4.3.14)$$

Уравнения (4.3.13a) и (4.3.14) для $q_2(\xi, \eta)$ и $h_2(\xi, \eta)$ имеют решения следующего вида:

$$h_2(\xi, \eta) = q_2(\xi, \eta) - \alpha |A|^2, \quad q_2(\xi, \eta) = B(\eta)E(2\xi) + B^*(\eta)E(-2\xi), \quad (4.3.15)$$

где $E(\pm 2\xi) = \exp(\pm 2ik^*\xi)$.

Так как (согласно (4.3.15))

$$A(h_2, q_2) \equiv \frac{3}{\text{Re}^*} \alpha |A|^2 + 2ik^* B(\eta)E(2\xi) - 2ik^* B^*(\eta)E(-2\xi),$$

очевидно, что

$$\alpha = 2, \quad B(\eta) = \beta [A(\eta)]^2, \quad \beta = -\left(\frac{7}{10} + i \frac{3}{2k^* \text{Re}^*} \right). \quad (4.3.16)$$

Наконец, для $h_2(\xi, \eta)$ и $q_2(\xi, \eta)$ мы получаем в качестве решения функции

$$h_2(\xi, \eta) = q_2(\xi, \eta) - 2|A|^2, \quad q_2(\xi, \eta) = \beta [A(\eta)]^2 E(2\xi) + \beta^* [A^*(\eta)]^2 E(-2\xi), \quad (4.3.17)$$

где β^* — комплексно-сопряженная величина для β .

4.3.3. Для $h_3(\xi, \eta)$ и $q_3(\xi, \eta)$ мы получаем вначале следующее уравнение:

$$\frac{\partial h_3}{\partial \xi} - \frac{\partial q_3}{\partial \xi} = c_2 \frac{\partial h_1}{\partial \xi},$$

ввиду того что $h_1 = q_1$, а также следующее соотношение между h_3 и q_3 :

$$h_3 = q_3 - c_2 h_1 + H(\eta). \quad (4.3.18a)$$

Второе уравнение для $h_3(\xi, \eta)$ и $q_3(\xi, \eta)$ имеет вид

$$A(h_3, q_3) = \gamma A^3 [A(\eta)]^3 E(3\xi) + S(A)E(\xi) + \text{с.с.} \quad (4.3.18b)$$

с учетом решений (4.3.12) и (4.3.17). В (4.3.18б)

$$S(A) = -\frac{2}{3} \frac{\partial A}{\partial \eta} + \lambda A - \mu A |A|^2. \quad (4.3.19)$$

Для комплексных коэффициентов γ , λ и μ мы имеем следующие выражения:

$$\gamma = -\frac{55}{2\text{Re}^*} + i \left[\frac{507}{50} k^* - \frac{9}{k^*} \left(\frac{1}{\text{Re}^*} \right)^2 \right], \quad (4.3.20a)$$

$$\lambda = -ik^*(c_2 - \sigma k^{*2}), \quad (4.3.20б)$$

$$\mu = \frac{93}{10\text{Re}^*} + i \left[\frac{31}{50} k^* + \frac{9}{k^*} \left(\frac{1}{\text{Re}^*} \right)^2 \right]. \quad (4.3.20в)$$

Из (4.3.18б) заключаем, что $H(\eta) = 0$, и, используя (4.3.18а) (с учетом $H(\eta) = 0$) и выражение (4.3.11) для оператора $A(h_3, q_3)$, мы получаем для q_3 следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{k^{*2}} \frac{\partial^2 q_3}{\partial \xi^2} + q_3 \right) = 3[\kappa c_2 A - S(A)]E(\xi) - 3\gamma[A(\eta)]^3 E(3\xi) + \text{с.с.}, \quad (4.3.21)$$

где

$$\kappa = \frac{3}{\text{Re}^*} - \frac{1}{5} ik^*. \quad (4.3.22)$$

Решение (4.3.21) имеет следующий вид:

$$q_3 = D(A)E(3\xi) - \frac{3}{2}[\kappa c_2 A - S(A)]E(\xi)\xi + \text{с.с.} \quad (4.3.23)$$

и, как следствие, член, пропорциональный $-(3/2)[\kappa c_2 A - S(A)]E(\xi)$, является вековым членом (он очень большой при очень больших значениях ξ , и поэтому член $\delta^3 q_3$ в (4.3.7б) может быть не мал по сравнению с членом $\delta^2 q_2$!).

Наконец, для амплитуды $A(\eta)$ мы получаем следующее эволюционное уравнение ЛС:

$$\frac{2}{3} \frac{\partial A}{\partial \eta} + vA + \mu A |A|^2 = 0, \quad (4.3.24)$$

где

$$v = \kappa c_2 - \lambda = \frac{3}{\text{Re}^*} c_2 + i \left(-\frac{6}{5} k^* c_2 + \delta k^{*3} \right), \quad (4.3.25)$$

и для комплексного коэффициента Ландау μ мы имеем формулы (4.3.20в).

Вывод аналогичного уравнения ЛС для системы (4.1.1), (4.1.16) с учетом эффекта Марангони несложен, но более трудоемок, так как коэффициенты v и μ в данном случае имеют весьма громоздкий вид!

Так, в (4.3.25) комплексную часть имеет смысл положить равной нулю:

$$\left(-\frac{6}{5} k^* c_2 + \sigma k^{*3} \right) = 0 \rightarrow c_2 = \frac{5}{6} \sigma k^{*2}, \quad (4.3.26)$$

и в этом случае эволюционное уравнение ЛС принимает вид

$$-\frac{\partial A}{\partial \eta} = \alpha \sigma A + \frac{3}{2} \mu A |A|^2, \quad (4.3.27)$$

где

$$\alpha = \frac{15}{4} \frac{k^{*2}}{\text{Re}^*} > 0, \quad \mu = \frac{93}{10\text{Re}^*} + i \left[\frac{31}{50} k^* + \frac{9}{k^*} \left(\frac{1}{\text{Re}^*} \right)^2 \right]. \quad (4.3.28)$$

Уравнение Ландау–Стюарта означает, что решение $|A| = 0$ является равновесным решением, устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, больше или меньше W^* критического значения W_c^* ; а $|A| \rightarrow |A|_c$ представляет собой новое равновесное значение при $\eta \rightarrow -\infty$. Ветвь кривой равновесного решения $|A| = 0$ при $W^* = W_c^*$ называется бифуркацией Ландау.

Так как $\text{Real}(\mu)$ при $W^* > W_c^*$, то $\sigma > 0$ и оба члена в правой части (4.3.27) положительны, и, следовательно, $|A|$ растет экспоненциальным образом при $\eta \rightarrow -\infty$. Этот случай соответствует быстрому переходу к турбулентному режиму (хаосу!).

4.4. Представление в виде динамической системы конечной размерности

Во многих случаях неразрывное течение жидкости можно моделировать с помощью динамической системы (ДС) конечной размерности. В частности, это возможно на стадии зарождения турбулентности при конечном числе возбужденных степеней свободы движения. На практике так называемый "хаос" изучается с помощью динамической системы малой размерности, в то время как "турбулентность" рассматривается как движение жидкости с бесконечным числом степеней свободы. Рассмотрение течения жидкости в виде модельной системы конечной размерности дает нам весьма мощный инструмент анализа, и именно с его помощью последние достижения в теории хаоса позволили выявить фундаментальный механизм турбулентности. С другой стороны, общепризнано, что турбулентность в полностью развитом режиме имеет сингулярную пространственно-временную структуру.

Такое сингулярное поведение жидкости нельзя описать корректно с помощью модельной системы конечной размерности. Таким образом, в определенном смысле хаос в жидкости покрывает только часть явления турбулентности. Хаос как научное понятие ассоциируется прежде всего с "сильной зависимостью от начальных условий". Математически ученые называют "хаотическим" любое неслучайное сложное движение с очень быстрым нарастанием ошибки, из-за которой, несмотря на абсолютный детерминизм, предсказать поведение решения на больших временах практически невозможно. На деле временной хаос появляется в некоторых системах с весьма небольшим числом степеней свободы. Возьмем, например, модель Лоренца [62] с тремя степенями свободы — именно в этой динамической системе в 1963 г. Лоренцом был численными методами открыт первый странный аттрактор — в задаче из области гидродинамики.

Здесь мы рассматриваем усредненную систему уравнений (4.1.1) и (4.1.16) для двух функций $h(t, x)$ и $q(t, x)$ (случай $\text{Pr} = 0$: $\Sigma = h$ в (4.1.28)).

Прежде чем приступить к анализу слабо-нелинейной динамической системы конечной размерности, мы вначале разложим эти уравнения относительно гладкого режима Нуссельта (см. (4.2.1) и (4.2.2)).

Можно показать, что с точностью до членов третьего порядка (по $\delta \ll 1$ с ошибкой $O(\delta^2)$) искомые исходные эволюционные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{4}{5} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{15} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{3}{2} \frac{M^*}{\text{Re}^*} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{M^*}{60} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - W^* \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \\ + \frac{3}{\text{Re}^*} (\varphi - \eta) + \delta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \varphi^2 - \frac{4}{5} \varphi \eta + \frac{2}{15} \eta^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{\text{Re}^*} (\eta^2 - 2\varphi \eta) - W^* \eta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{M^*}{20} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{M^{*2}}{120} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (4.4.2) \end{aligned}$$

Для периодического решения по x записываем

$$\eta(t, x) = \sum A_p(t) \cos(pkx) + B_p(t) \sin(pkx), \quad p \geq 1, \quad (4.4.3a)$$

$$\varphi(t, x) = \sum C_p(t) \cos(pkx) + D_p(t) \sin(pkx), \quad p \geq 1. \quad (4.4.3б)$$

Затем, подставляя (4.4.3a,б) в (4.4.1) и (4.4.2), мы получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Вводя вектор неизвестных амплитуд

$$\mathbf{X}_p(t) = [A_p(t), B_p(t), C_p(t), D_p(t)]^T, \quad (4.4.4)$$

динамическую систему можно записать как (для $p \geq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_p(t)}{dt} = L_0 \mathbf{X}_p(t) + \frac{\delta}{2} \sum [L_1 \mathbf{X}_m(t)] \mathbf{X}_{m+p}(t) + \\ + [L_2 \mathbf{X}_m(t)] \mathbf{X}_{m-p}(t), \quad m \geq 1, \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

где L_0 , L_1 и L_2 — матрицы с постоянными коэффициентами, образованными из целых чисел p , m и k и параметров Re^* , W^* и M^* . Явные выражения для этих коэффициентов (как функций p , m , k , Re^* , W^* , M^*) можно найти в диссертации Згала [63]. Напоминаем, что

$$A_{-p} = A_p, \quad B_{-p} = -B_p, \quad C_{-p} = C_p, \quad D_{-p} = -D_p.$$

При численном решении динамической системы (4.4.5), проведенном Годтсом и Згалом (см. [63]), ряд оказался конечным с числом членов N . При численном интегрировании волновое число k играет роль бифуркационного параметра, и при уменьшении k число активных мод в динамической системе (4.4.5) возрастает.

Бифуркации аттрактора динамической системы (4.4.5) происходят при уменьшении k . Для очень малого значения параметра δ ($= 0,025$) мы имеем, по сути, квазипериодический переход к хаосу. Отметим, что, как правило, после разрушения инвариантных торов стохастического (хаотического) поведения не наблюдалось. Более точно, хаос является следствием сильной неустойчивости трехчастотного периодического режима.

Интересной особенностью динамической системы (4.4.5) с увеличением числа активных мод (амплитуд) N является быстрая сходимость стохастических характеристик к предельному случаю. По сути, различие в этих

стохастических характеристиках для $N = 8$ и $N = 10$ практически незаметно!

В диссертации Згала [63] читатели могут найти различные результаты численных исследований динамической системы (4.4.5) для $N = 10$ (в этом случае мы имеем 40 уравнений для амплитуды) и различных значений δ . Для описания хаотического поведения динамической системы (4.4.5) Згал вычислил корреляцию, показатели Ляпунова, сечение Пуанкаре и спектральные функции. Он обнаружил также странные аттракторы другого типа и изучил влияние дестабилизирующего эффекта Марангони. Очевидно, что динамическая система (4.4.5) весьма чувствительна к значениям параметра δ , и, что удивительно, когда этот параметр возрастает, порядок возникновения хаоса изменяется! Необходимо также отметить, что эффект Марангони (влияние членов, пропорциональных M^*) ускоряет появление странных аттракторов.

Предварительные числовые результаты (для $M^* = 0$) показывают, что кривая, характеризующая изменение корреляции с ростом N , стремится при $\delta = 0,025$, $k = 0,25$, $\text{Re}^* = 7,5$, $W^* = 1$ и $M^* = 0$ асимптотически к константе, имеющей значение где-то между 3 и 4. Что касается сечения Пуанкаре, для этих значений δ , k , Re^* , W^* и $M^* = 0$ мы получим в этом разделе ограниченную "облачную зону" точек пересечения. Эта особенность является весьма характерным свойством временного хаоса. Для тех же самых значений спектральные функции амплитуды непрерывны. Наконец, любопытно отметить, что вариации амплитуды (со временем t) и проекции двух странных аттракторов на фазовую плоскость (A_1, B_1) при $k = 0,24$, но при двух различных начальных данных (при разности всего в 2 %) весьма сильно отличаются друг от друга: при $t > 200$ мы сталкиваемся с проявлением сильной зависимости от начальных условий, и практически идентичные потоки (при $t < 200$) в дальнейшем сильно различаются в результате экспоненциальной расходимости.

4.4.1. Конкуренция между субгармоническими и комбинационными вторичными неустойчивостями. Вторичные неустойчивости падающей пленки, в результате которых монохроматические волны превращаются в уединенные волны, были исследованы Ченгом и Чангом [64] в приближении слабо-нелинейной теории на основе системы уравнений, подобной (4.4.1), (4.4.2), но с $M^* = 0$. Согласно [64], единственное соотношение для дисперсии фазовой скорости, обусловленной инерцией и капиллярностью, описывает нелинейный субгармонический резонанс двух волн, в результате которого соседние гребни сливаются. Это происходит, когда фундаментальная частота волны меньше критического значения ω_c , приближенно равного частоте нелинейного резонанса. Такой статический субгармонический механизм возбуждает целый пакет вторичных волн, при этом слияние происходит неравномерно. Низкая часть этого пакета вторичных волн распространяется быстрее, чем первичные волны, в результате слившиеся волны распространяются быстрее, чем более медленные первичные волны. В случае монохроматических волн с частотой выше ω_c имеет место колебательная комбинационная неустойчивость трех волн, в результате которой появляются две вторичные волны, более медленные, чем первичные. Эта комбинационная неустойчивость

приводит к модуляции длинных волн, в результате несколько гребней сливается одновременно. Оба вторичных перехода являются важными промежуточными этапами процесса образования пространственно-временного хаоса с уединенными волнами. В обзорной статье Чанга и Демехина [16] читатель может найти подробное рассмотрение слияния, переходного состояния и динамики уединенных волн (насыщение, субгармоничная вторичная неустойчивость и синхронизация), а также слияния, переходного состояния и динамики падающих пленок.

М. Ченг и Х.Ч. Чанг объяснили и описали относительное преобладание субгармонических и комбинационных неустойчивостей, обнаруженных Лиу и Голубом. Оба вида неустойчивости соответствуют характерным бифуркациям периодических бегущих волн на поверхности падающих пленок. В [64] авторы охарактеризовали эту бифуркацию как периодическую по времени эволюцию в пространстве, имеющую прямое отношение к эксперименту с периодическим воздействием Лиу и Голуба. Субгармоническая неустойчивость соответствует множителю Флуке, равному 1, а комбинационная неустойчивость — -1 . Следовательно, они аналогичны удвоению периода и квазипериодическим переходам в динамических системах. Они соответствуют также полуострову Арнольда вдали от линейных резонансных частот, когда нелинейный осциллятор испытывает периодическое воздействие извне. Однако, по мнению авторов [64], эту аналогию нельзя применить к следующей бифуркации, так как она ничем не напоминает каскад Файгенбаума, квазипериодический переход к хаосу или синхронизацию типа лесенки Девила. На рисунке 1 показана ветвь решения усредненного уравнения Шкадова (4.1.1), (4.1.11) с одnogорбой уединенной волной. На рисунке 1 параметр δ — это приведенное число Рейнольдса (см. [15, с. 109]).

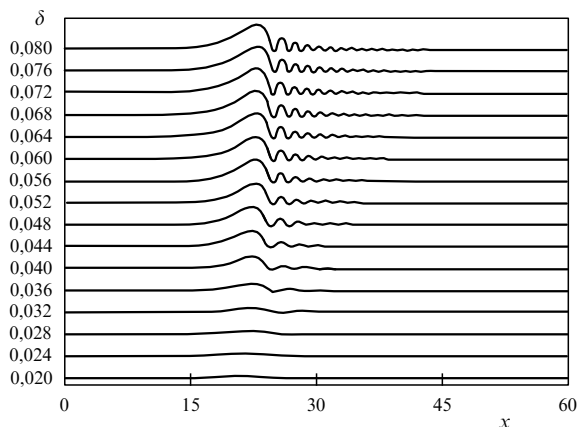


Рис. 1. Ветвь решения усредненного уравнения Шкадова с одnogорбой уединенной волной.

5. Умеренные числа Рейнольдса, режим Пуазейля: $Re = O(1)$

5.1. Уравнения КС

Как и ранее, мы будем исходить из уравнений (3.4.1) и граничных условий (3.4.2). При $Re = O(1)$ мы получаем, что ε — основной малый параметр для уравнений (3.4.1) и

условий (3.4.2) в полной исходной задаче. В качестве характеристической скорости U° мы выбираем скорость поверхности раздела

$$U^\circ = g \frac{h^2}{\nu_0},$$

и в этом случае

$$\frac{Re}{Fr^2} = 1.$$

Предполагая, что число Вебера We велико, мы вводим параметр подобия Вебера

$$W^* = \varepsilon^2 We = O(1).$$

В отношении чисел Прандтля, Марангони и Биота мы предполагаем, что

$$Pr = O(1), \quad Ma = O(1), \quad Bi = O(1).$$

Будем искать решение (3.4.1) с учетом (3.4.2) и соотношений для Re , Fr^2 , We , Pr , Ma и Bi в виде разложения, предложенного Бенни [66], а именно:

$$U = (u, w, \pi, \theta)^T = U_0 + \varepsilon U_1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.1.1)$$

но пока мы не раскладываем в ряд толщину пленки $h(t, x)$. Решение U_0 находим из

$$u_0 = -z \left(\frac{1}{2} z - h \right), \quad w_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} z^2, \quad p_0 = p_a - W^* \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (5.1.2a)$$

$$\theta_0 = 1 - (1 + Bi) \frac{z}{1 + Bi h}. \quad (5.1.2b)$$

Из (4.1.1) мы получаем также

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = O(\varepsilon). \quad (5.1.3)$$

Теперь, выписывая систему уравнений и граничных условий для U_1 и опять не разлагая $h(t, x)$ в ряд, мы легко получаем аналитическое выражение для u_1 как функции z . Используя u_0 и u_1 , мы можем вычислить q_0 и q_1 в разложении

$$q(t, x) = \int_0^{h(t, x)} u(t, x, z) dz = q_0 + \varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2). \quad (5.1.4)$$

Что касается $q_0 = (1/3)h^3$, это равенство мы учли в разложении (5.1.3), а выражение для q_1 имеет следующий вид:

$$q_1(t, x) = \frac{1}{3} Re W^* h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{2} Ma(1 + Bi) h^2 \frac{\partial h / \partial x}{1 / (1 + Bi h)^2} + \frac{2}{15} Re h^6 \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (5.1.5)$$

Из уравнения (4.1.1) мы можем получить уравнение для толщины пленки $h(t, x)$, в том числе для члена $O(\varepsilon)$ в (5.1.3):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{3} Re W^* h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{15} Re h^6 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} Ma(1 + Bi) h^2 \frac{\partial h / \partial x}{1 / (1 + Bi h)^2} \right] = 0. \quad (5.1.6)$$

Данное эволюционное уравнение типа Бенни (5.1.6) содержит малый параметр ε . Это связано с тем, что функция $h(t, x)$ не была разложена в ряд, как это следовало бы сделать в случае полностью согласованного асимптотического разложения по ε . Очевидно, что мы можем разложить $h(t, x)$ в ряд несколькими способами. Здесь же мы будем исследовать только явление, для которого справедливы уравнения Курамото–Сивашинского (КС). Для этого мы полагаем в (5.1.6), что

$$\tau = \varepsilon t, \quad \xi = x - t, \quad h(t, x) = 1 + \varepsilon \eta(\tau, \xi) + \dots, \quad \varepsilon = \delta. \quad (5.1.7)$$

Так как $\partial h / \partial t = -\varepsilon \partial h / \partial \xi + \varepsilon^2 \partial \eta / \partial \tau$ и $\partial h / \partial x = \varepsilon \partial \eta / \partial \xi$, то устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в трансформированном уравнении (5.1.6), мы получаем следующее уравнение КС:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = 0, \quad (5.1.8)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{15} \text{Re} + \frac{1}{2} \frac{\text{Ma}}{1 + \text{Bi}}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \text{Re} W^*. \quad (5.1.9)$$

Уравнение КС (5.1.8) асимптотически согласовано при $\varepsilon = \delta \rightarrow 0$, причем это приближенное уравнение справедливо с точностью до $O(\varepsilon)$. Любопытно отметить, что уравнение типа Бенни (5.1.6) также выводится из усредненных уравнений "типа Шкадова" (4.1.1), (4.1.16) при $\text{Re}^* \rightarrow 0$ в предположении, что K^* и M^* остаются порядка $O(1)$ в этом пределе. В этом последнем случае мы приходим вновь к уравнению КС, аналогичному (5.1.8), но (см. (5.1.9)) первый член в представлении коэффициента α отсутствует и вместо Ma мы имеем M^* . Соответственно в коэффициенте γ вместо $\text{Re} W^*$ имеем $1/K^*$.

5.1.1. Анализ уравнения КС. Непосредственный анализ устойчивости показывает, что уравнение КС (5.1.8) имеет предельное волновое число. В самом деле, если $\eta(\tau, \xi) \sim \exp(\omega \tau + ik\xi)$, то для ω мы получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega - \alpha k^2 + \gamma k^4 = 0. \quad (5.1.10)$$

Кривая $\omega = 0$ определяет нейтральную кривую (линейной) стационарной устойчивости (при этом фазовая скорость $\omega/k = c = 0$, где волновое число k полагается действительным), и как следствие мы получаем предельное волновое число k^* такое, что

$$k^{*2} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{W^*} \left[\frac{2}{5} + \frac{3}{2} \frac{\text{Ma}}{\text{Re}(1 + \text{Bi})} \right]. \quad (5.1.11)$$

Теперь, вводя амплитуду $2\eta(\tau, \xi) = A(\tau, \xi)$, получаем вместо (5.1.8) следующее каноническое уравнение КС:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + A \frac{\partial A}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^4 A}{\partial \xi^4} = 0. \quad (5.1.12)$$

При $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$ мы имеем хорошо известное уравнение (см. Витам [67])

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + A \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0,$$

и вдоль характеристик, определяемых уравнением $\partial \xi / \partial \tau = A(\tau, \xi)$, решение $A(\tau, \xi(\tau))$ постоянно.

При $\gamma = 0$ ($W^* = 0$) член поверхностного натяжения исчезает и (5.1.12) сводится к уравнению Бюргера. В этом случае преобразование Коула–Хопфа (см., например, статью Хопфа [68]) позволяет свести его затем к тепловому уравнению. Ввиду того что $\alpha > 0$, преобразование Коула–Хопфа дает обратное по времени тепловое уравнение, и начальные возмущения возрастают неограниченно. Поэтому мы включаем члены, отвечающие за поверхностное натяжение, и рассматриваем уравнение (5.1.12) при $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$.

Полное уравнение КС (5.1.12) может иметь решение в виде нерегулярных флуктуирующих квазипериодических волн. Модельное уравнение КС обеспечивает механизм насыщения неустойчивости, при котором энергия неустойчивости длинных волн передается коротковолновым модам, причем последние затухают в результате поверхностного натяжения.

В полном уравнении КС (5.1.12) члены $\partial A / \partial \tau + A \partial A / \partial \xi$ обуславливают нарастание крутизны фронта, а затем и опрокидывание волны при отсутствии стабилизирующих членов. Член $\alpha \partial^2 A / \partial \xi^2$ дестабилизирует в первую очередь моды с более короткими длинами волн и поэтому усугубляет крутизну волны (так как числа M^* и Bi оба положительны, при малых Bi эффект Марангони усугубляет эту дестабилизацию). Наконец, член $\gamma \partial^4 A / \partial \xi^4$ необходим для насыщения [53, с. 333]. Аналитических решений КС в явном виде не получено, а приближенные аналитические решения и численные решения обсуждаются Хупером и Гримшоу [69].

Линейное дисперсионное соотношение (5.1.10) показывает, что короткие волны устойчивы, а длинные волны неустойчивы. Критическое волновое число $k^* = \sqrt{\alpha/\gamma}$ должно быть мало, чтобы анализ длинных волн имел смысл. Максимальная скорость роста ($\alpha^2/4\gamma$) наблюдается при $k^*/\sqrt{2}$. Как можно предвидеть, наличие нелинейного члена в (5.1.12) будет способствовать обмену энергией между волной с волновым числом k и ее гармониками с нелинейным насыщением в виде конечного результата. Конечным состоянием может быть либо хаотическое колебательное движение (см. раздел 5.2), либо состояние всего с несколькими гармониками.

Энергетическое уравнение [53, с. 334], соответствующее (5.1.12), получается после умножения (5.1.12) на A и интегрирования по частям в предположении, что A — периодическая функция с периодом $2L$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2L} A^2 d\xi = \int_0^{2L} \left[\alpha \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 - \gamma \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] d\xi. \quad (5.1.13)$$

Правая часть (5.1.13) достигает минимума при $\pi/L > k^*$, причем этот минимум отрицателен, и, следовательно, нелинейное уравнение (5.1.12) глобально устойчиво, когда начальное условие таково, что волновое число удовлетворяет критерию линейной устойчивости. Другими словами, при внесении начального возмущения (например, $\sin(k\xi)$) с волновым числом больше, чем k^* , нелинейный член в (5.1.12) приводит к появлению старших гармоник, но не волн с волновым числом менее k , так что решение будет устойчиво. Если вы хотите, чтобы появилась компонента с волновым числом из неустойчивой области, то вы должны задать начальное условие с волновым числом, меньшим k^* .

Следовательно, мы должны рассмотреть только случай $k < k^*$. Периодическое граничное условие позволяет записать A в виде ряда Фурье:

$$A = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(\tau) \exp(ink\xi), \quad A_{-n} = A_n^*, \quad (5.1.14)$$

где A_n^* — комплексно-сопряженная величина для A_n . Так как $A_0 = \text{const}$, мы можем положить $A_0 = 0$, а подстановка (5.1.14) в (5.1.12) дает

$$\frac{\partial A_n}{\partial \tau} - \sigma_n A_n + ink B_n = 0, \quad (5.1.15)$$

где

$$B_n = \sum_{r=1}^{\infty} A_r^* A_{r+n} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} A_r A_{n-r}, \quad \sigma_n = \alpha(nk)^2 - \gamma(nk)^4. \quad (5.1.16)$$

Важной особенностью системы уравнений (5.1.15) является то, что для заданного k только конечное число мод Фурье, скажем $A_1, A_2, \dots, A_n$, является неустойчивым ($\sigma_n > 0$), причем все старшие моды устойчивы. Отметим, что n -я мода имеет критическое волновое число, а максимальная скорость роста k^*/n , не зависящая от $(\alpha^2/4\gamma)$, достигается при $k^*/(n\sqrt{2})$. Это означает, что неустойчивые моды будут стабилизироваться за счет передачи энергии старшим гармоникам. Простейший случай, поддающийся анализу, — это когда $k^*/2 < k < k^*$. Только мода $n = 1$ неустойчива, и ниже мы предполагаем, что достаточно рассмотреть взаимодействие между $n = 1$ и $n = 2$. Приближенная версия (5.1.15) имеет вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} - \sigma_1 A_1 + ik A_2 A_1^* = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \tau} - \sigma_2 A_2 + i\alpha(A_1)^2 = 0. \quad (5.1.17)$$

Отметим, что A_1 неустойчива ($\sigma_1 > 0$), а A_2 ($\sigma_2 < 0$) устойчива; $\sigma_1|A_1|^2 + \sigma_2|A_2|^2 = 0$ выражает требуемый баланс энергии, являясь приближенной версией:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sum |A_n|^2 \right) = 2 \sum \sigma_n |A_n|^2, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots,$$

как следствие (5.1.13) и (5.1.14). Уравнение (5.1.17) имеет стационарное решение

$$|A_1| = \left(-\frac{1}{k^2} \sigma_1 \sigma_2 \right)^{1/2}, \quad A_2 = \frac{ik}{\sigma_2} A_1^2. \quad (5.1.18)$$

Здесь A_1 растет, а A_2 стабилизирует. Однако с уменьшением k гипотеза о том, что эти две моды достаточны для рассмотрения, выглядит весьма подозрительной! В самом деле, при уменьшении k стационарное решение (5.1.15) в приближенном виде (5.1.18) изменяется вначале вследствие наличия малой поправки со стороны A_3 , и затем, когда $k^*/3 < k < k^*/2$ (т.е. $\sigma_2 > 0$, но $\sigma_3 < 0$), оно заменяется другим "двухмодовым равновесием", при котором доминирующими компонентами являются A_2 и A_4 . Дальнейшее уменьшение k ведет к последовательной смене "двухмодовых равновесий" и "отраженных состояний". Если стационарное решение для A_2 в (5.1.18) подставить в первое уравнение в (5.1.17), то мы получим уравнение ЛС для A_1 :

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} = \sigma_1 A_1 + \frac{k^2}{\sigma_2} |A_1|^2 A_1, \quad (5.1.19)$$

но оно справедливо только при k , близких к k^* . Если в (5.1.19) предположить, что $A_1 = |A_1| \exp(i\phi)$, то при $\phi = \text{const}$ и для $|A_1|$ мы приходим к уравнению Ландау

$$\frac{\partial |A_1|}{\partial \tau} = \sigma_1 |A_1| + \lambda |A_1|^3, \quad (5.1.20)$$

где $\lambda = (k^2/\sigma_2) < 0$, так как $\sigma_2 < 0$. Решение (5.1.20) дает

$$|A_1| \sim A_1^0 \exp(\sigma_1 \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

где A_1^0 — начальное значение при $\tau = 0$ и $\sigma_1 > 0$, причем оно затухает, как в линейной теории. Однако $|A_1|^2 \rightarrow |A_1|^2 e = -(2\sigma_1/\lambda)$ при $\tau \rightarrow +\infty$ для всех значений A_1^0 . Данный случай носит название суперкритической устойчивости. Если теперь ввести малый параметр возмущения $\varkappa$, определяемый как

$$\varkappa^2 \mu = k^2 \left(\frac{a}{b} - k^2 \right) > 0, \quad (5.1.21)$$

и медленный масштаб времени $T = \varkappa^2 t$, тогда для медленно меняющейся амплитуды фундаментальной волны $H(T)$, такой, что $|A_1| = \varkappa H$, мы получаем из (5.1.20) следующее уравнение Ландау для $H(T)$:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = b\mu H - \lambda H^3, \quad (5.1.22)$$

где (положительная) константа Ландау имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{16b} \left(k^2 - \frac{a}{4b} \right) > 0.$$

5.2. Иерархия бифуркаций и аттракторов уравнения КС

5.2.1. Решение в виде стационарной волны. Вводя новую функцию $H(x, t)$ и новые переменные t и x с помощью соотношений

$$\eta = 2\alpha \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{1/2} H, \quad \tau = \frac{\gamma}{\alpha^2} t, \quad \xi = \frac{\gamma}{\alpha} x,$$

уравнение КС (5.1.8) можно представить в более компактном виде. Для амплитуды $H(x, t)$ мы получаем следующее приведенное уравнение КС:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0. \quad (5.2.1)$$

Записывая (5.2.1) в движущейся системе координат со скоростью v (скорость отклонения) и интегрируя его один раз, для $H^*(\xi)$ мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^3 H}{\partial \xi^3} + \frac{\partial H^*}{\partial \xi} - v H^* + 2H^2 = Q, \quad (5.2.2)$$

где $Q = \langle 2H^{*2} \rangle$ — поток отклонения в движущейся системе, полученный с привлечением условия постоянной толщины

$$\langle H^* \rangle = 0, \quad (5.2.3)$$

символ $\langle \rangle$ означает усреднение по длине волны по растянутой координате ξ .

Если, однако, мы налагаем условие постоянства потока ($Q = 0$), то (5.2.2) сводится к следующему:

$$\frac{\partial^3 H'}{\partial \xi^3} + \frac{\partial H'}{\partial \xi} - \nu H' + 2H'^2 = 0, \quad (5.2.4)$$

В этом случае условие (5.2.3) не является необходимым и не выполняется, т.е. $\langle H' \rangle \neq 0$.

Уравнение в случае постоянного потока всего одно, причем оно имеет на один параметр меньше. В случае же условия постоянной толщины необходимо решить два уравнения (5.2.2) и (5.2.3) с двумя параметрами Q и ν (подробное обсуждение свойств этих уравнений см. в [70]). На рисунке 2, взятом из [70, с. 446], мы приводим достаточно подробное изображение ветвей решения со стационарной волной, описанной в [52] (что касается этой последней статьи, см. раздел 5.2.2). Семейств бесконечных волн имеется целое множество. Вследствие симметрии (5.2.2) зеркальное отображение рис. 2 дает решения при отрицательном ν . Однако только несколько семейств волн соответствуют усредненным уравнениям пограничного слоя (типа Шкадова).

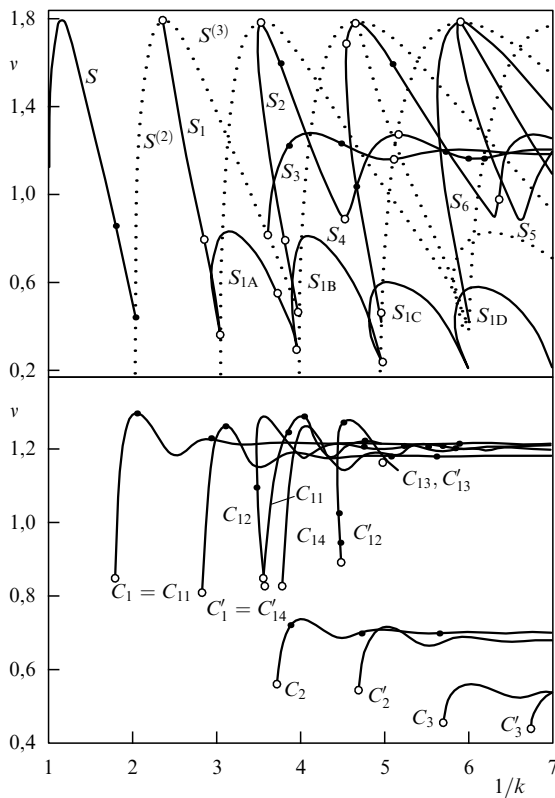


Рис. 2. Ветви стационарного решения уравнения КС (5.2.2).

Основная ветвь S представляет собой решение (5.2.2) в виде стоячей волны с $\nu = 0$. Напомним, что k — это волновое число в исходной системе координат x , а не в нормализованной системе σ . При $k = 0,49775$ ветвь S решения (5.2.2) сливается со второй ветвью $S^{(2)}$, отвечающей от $k = 1/2$. Аналогично ветви $S^{(n)}$ отвечают от $k = 1/n$ и они идентичны S за тем лишь исключением, что их число равно n для одной длины волны. Для $k < 0,50$ одно семейство волн состоит из ветвей S_n (см. рис. 3), отходящих от ветвей $S^{(n)}$. Как видно из рис. 3, в точке бифуркации на $S^{(n)}$ волны на S_n имеют по-прежнему синусоидальную форму, но последующие имеют весьма богатую структуру с многочис-

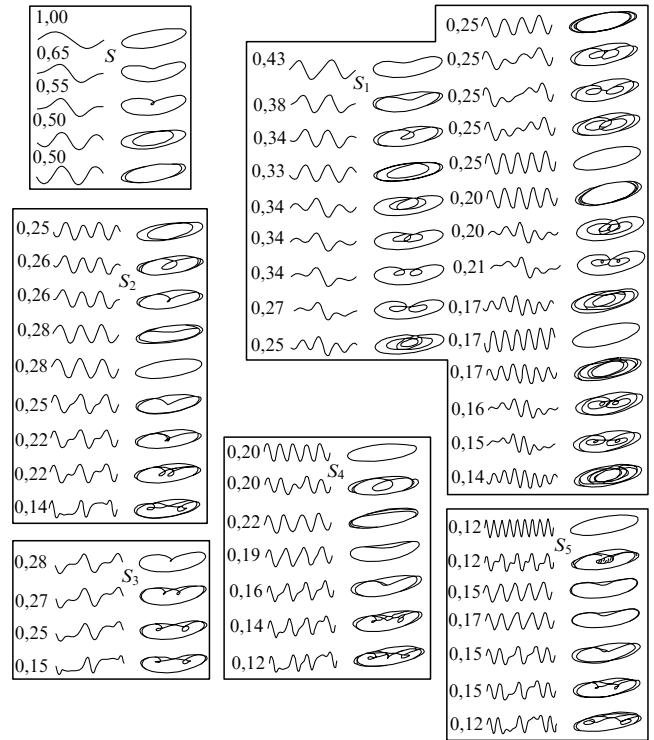


Рис. 3. Волновые профили $H^*(\xi)$ уравнения КС (5.2.2) и замкнутые траектории в фазовом пространстве $(H^*, dH^*/d\xi, d^2H^*/d\xi^2)$.

ленными гармониками Фурье. Некоторые из них (S_2, S_3, S_4 и т.д.) простираются до $k = 0$ и оканчиваются в виде уединенных волн. В отличие от ветвей $S^{(n)}$ они не похожи друг на друга. Второе семейство волн состоит из ветвей C_n и C'_n на рис. 2, и в отличие от семейств $S^{(n)}$ и S_n это решение (5.2.2) в виде бегущей волны с фазовой скоростью, большей 3. Эти бегущие волны имеют уникальную форму уединенных волн (см., например, [71]).

Важно отметить, что после режима уединенной волны волна распадается на неустойчивые трехмерные возмущения. Это означает, что устойчивых трехмерных волн либо не существует, либо они имеют слишком короткий срок жизни. Этот окончательный переход к "турбулентности" на поверхности раздела необходимо анализировать на основе совершенно иного подхода.

5.2.2. Решения с нестационарными волнами. В этом разделе мы рассмотрим поведение нестационарного решения и аттракторы уравнения КС в виде (5.2.1) в предположении, что $(x, t) \in R^1 \times R^+$ с начальным условием

$$H(x, 0) = H^0(x), \quad x \in R^1, \quad (5.2.5)$$

и периодическими граничными условиями

$$H(x, t) = H\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right), \quad (5.2.6)$$

где k — волновое число. Ниже мы представляем числовые результаты Демехина, Токарева и Шкадова [52]. Подробный обзор исследований уравнения КС (до 1986 г.) можно найти в статье [72]. Во-первых, очевидно, что для любых (x, t) решения $H(x, t)$ уравнения (5.2.1) инвариантны относительно преобразований

$$H(x, t) \rightarrow H(x + x^\circ, t + t^\circ), \quad H(x, t) \rightarrow -H(-x, t), \quad (5.2.7a)$$

$$H(x, t) \rightarrow H(x - ct) + \frac{1}{4} c. \quad (5.2.7b)$$

Так как $H = \text{const}$ является тривиальным решением задачи (5.2.1), (5.2.5), (5.2.6), учитывая (5.2.7b), мы полагаем, что $H = 0$ есть тривиальное решение этой задачи. Линейное характеристическое уравнение имеет вид $c = ik(1 - k^2) = c_i$, $c_r = 0$, где $c = c_r + ic_i$ – фазовая скорость. При $k > 1$ решение $H = 0$ устойчиво, а при $k < 1$ – неустойчиво. При $k = 1$ мы имеем нейтральную устойчивость. При $k = k_{\max} = (1/2)\sqrt{2}$ инкремент нарастания (kc_i) достигает максимума $(kc_i)_{\max} = 1/4$.

Для решения в виде периодической волны

$$H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(t) \cos(knx) + B_n(t) \sin(knx)]. \quad (5.2.8)$$

С помощью простой линейной трансформации $kx \rightarrow x$ и $kt \rightarrow t$ и подстановки (5.2.8) в (5.2.1) мы получаем бесконечную систему линейных уравнений для амплитуд $A_n(t)$ и $B_n(t)$:

$$\frac{dA_n(t)}{dt} = k \left\{ \gamma_n A_n(t) - \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) [B_{m+n}(t) - B_{m-n}(t)] - B_m(t) [A_{m+n}(t) - A_{m-n}(t)] \right\}, \quad (5.2.9a)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = k \left\{ \gamma_n B_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) [A_{m+n}(t) + A_{m-n}(t)] - B_m(t) [B_{m+n}(t) + B_{m-n}(t)] \right\}, \quad (5.2.9b)$$

где

$$\gamma_n = nk[1 - (nk)^2], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ A_{-n} = A_n, \quad B_{-n} = -B_n, \quad A_0 = B_0 = 0.$$

Но из (5.2.7a) следует существование класса антисимметричных решений уравнения КС (5.2.1). Для таких решений $A_n = 0$ для всех n и $B_n(t)$ описывается бесконечной цепочкой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = k \left\{ \gamma_n B_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(t) [B_{m+n}(t) + B_{m-n}(t)] \right\}, \\ n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.10)$$

В процессе численного решения динамической системы ряд (5.2.8) оказался конечным с числом членов N . При значении волнового числа в диапазоне $0,15 < k < 1$ число гармоник удовлетворяло соотношению $N = 2$ (т.е. половина мод была в линейной неустойчивой зоне $nk < 1$, а другая половина — в линейной устойчивой зоне $nk > 1$, $n = 1, 2, \dots, N$). В статье [52] многие вычисления проводились для заданного $N = 4$. Так, для чисел $0,15 < k < 1$ значение N менялось в диапазоне от 3 до 20, в то время как размерность динамической системы (5.2.9a,б) менялась соответственно от 6 до 40. Бифуркации аттрактора динамической системы (5.2.9a,б), появляющиеся при уменьшении k от 1 до 0,15–0,2, показаны схематически на рис. 4 (детали см. [52, с. 342, 343]). На рисунке 4 характер аттрактора соответствует семейству решений стационарной задачи.

При $k > 1$ начало координат 0 является единственным глобальным аттрактором в фазовом пространстве динамической системы (5.2.9a,б). При $0,5547 < k < 1$ притягивающее многообразие составляют решения из S . При $k = 0,5547$ основное семейство теряет устойчивость, которую наследует семейство C_1 , ответвляющееся от S . При $0,49775 < k < 0,5547$ такой поверхностью является S -семейство или, более точно, его устойчивое многообразие коразмерности 1. Для любого значения k , такого, что $0,4212 < k < 0,49775$, существует новое инвариантное притягивающее многообразие — приближенный гетероклинический контур $L_1^{(2)}$. При $0,4212 < k < 0,49775$ каждая из стационарных точек семейства $S^{(2)}$ имеет одномерное неустойчивое многообразие. Контур $L_1^{(2)}$ неустойчив при $0,4859 < k < 0,49775$. При $k \approx 0,4795$ семейство C_{11} теряет свою устойчивость вследствие бифуркации Хопфа (рис. 5).

Авторы статьи [52, с. 350, 351] для объяснения причины отсутствия тора во всей сверхкритической области $0,3925 < k < 0,4795$ выдвигают гипотезу о существовании неустойчивого семейства торов, окружающего семейство решений C_{11} при $k > 0,4795$. Согласно этой гипотезе при $k \rightarrow 0,4795$ неустойчивый тор "опускается" на устойчивый цикл из C_{11} , наследующий неустойчивость тора, т.е. происходит жесткая потеря устойчивости цикла типа C_{11} . По всей вероятности, бифуркации, вызванные отсутствием торов, связаны с аттракторами $L_1^{(2)}$ и $S^{(2)}$, которые являются следом стационарного семейства решений $S^{(2)}$ при $0,3925 < k < 0,4795$. При $k \approx 0,4212$ семейство ответвляется от неустойчивого семейства решений $S^{(2)}$, насле-

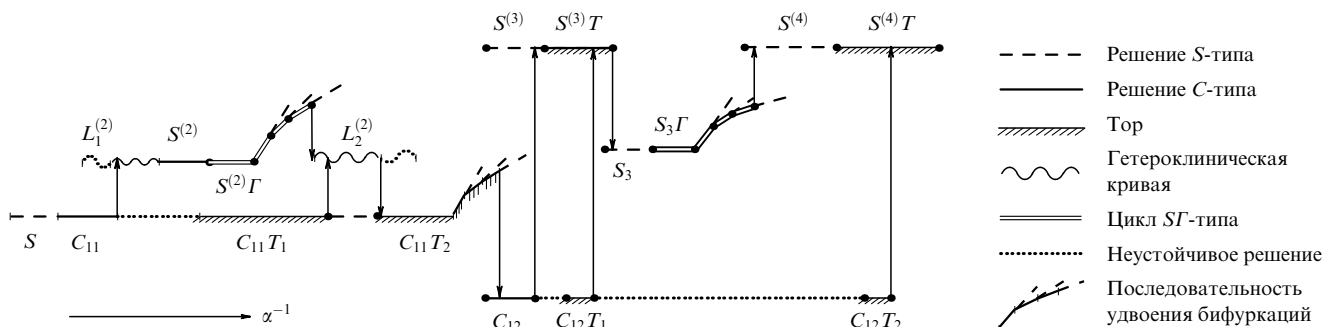


Рис. 4. Бифуркации аттрактора динамической системы (5.2.9a,б).

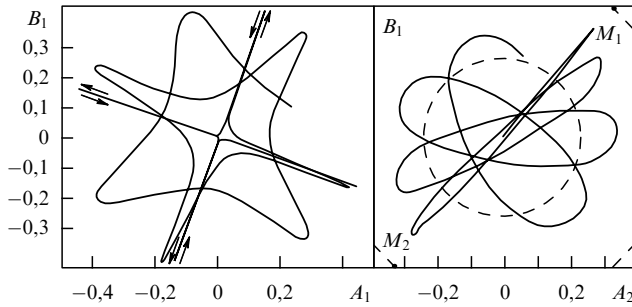


Рис. 5. Начало перехода фазовой траектории от устойчивого цикла C_{11} к контуру $L_1^{(2)}$. Представлены две проекции: на плоскость A_1B_1 и на плоскость A_2B_2 при $k = 0,47$.

дую его неустойчивость. В результате этой бифуркации стационарные решения из $S^{(2)}$ становятся устойчивыми, аттракторы $L_1^{(2)}$ исчезают, $S^{(2)}$ больше не является единственным аттрактором при $k \approx 0,3925$. При $0,338 < k < 0,3925$ фазовая траектория наматывается на устойчивый инвариантный тор, если начальные условия задаются близкими к неустойчивым решениям семейства C_{11} . На рисунке 4 соответствующий аттрактор обозначен $C_{11}T$. Проекция $A_1 - B_1$ и $A_2 - B_2$ фазовой траектории, проходящей вдоль тора $C_{11}T_1$ при $k = 0,35$ и $0,345$, показаны на рис. 6 и 7.

Стационарные решения $S^{(2)}$ теряют свою устойчивость при $k \approx 0,3635$ вследствие бифуркации Хопфа, и в окрестности каждой неустойчивой стационарной точки $S^{(2)}$ появляется предельный цикл. Семейство этих циклов будем обозначать условно $S^{(2)}\Gamma$. На рисунке 8 показана эволюция циклов $S^{(2)}\Gamma$ с уменьшением k . При $k \approx 0,3482$ цикл претерпевает первое удвоение периодических

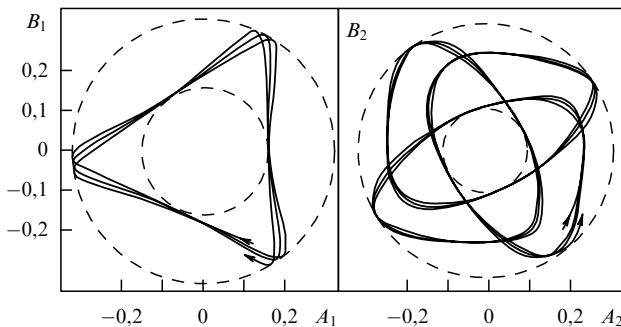


Рис. 6. То же, что на рис. 5, при $k = 0,35$.

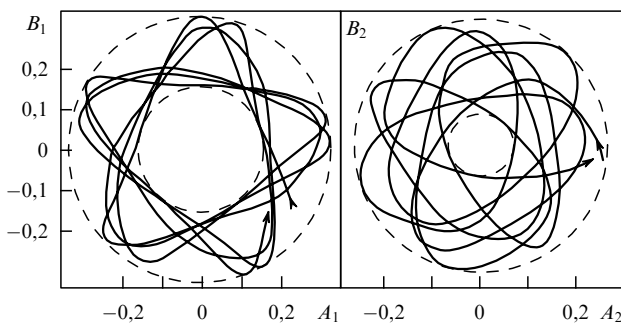


Рис. 7. То же, что на рис. 5, при $k = 0,345$.

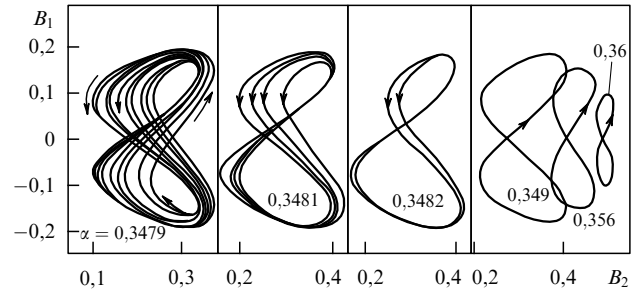


Рис. 8. Эволюция циклов $S^{(2)}\Gamma$ с уменьшением k .

бифуркаций, а при $k \approx 0,3481$ — второе. По всей видимости, этот каскад бифуркаций не является бесконечным и он прерывается во время третьего удвоения вследствие того, что цикл быстро "разбухает" с уменьшением k и при $k \approx 0,34799$ фазовая траектория выходит на поверхность сепаратрисы, разделяющей две центрально-симметричные точки из $S^{(2)}$, находящиеся на концах диаметра круга $a_l^2 + b_l^2 = \text{const}$, $a_l, b_l \in S^{(2)}$, $l = 1, 2, \dots$. При этом траектория проходит вдоль охватывающей начало координат петли сепаратрисы, и цикл распадается. Это приводит к ситуации, во многом напоминающей систему Лоренца!

Поведение фазовой траектории в проекции на плоскость $B_2 - B_4$ при $k \approx 0,3$ показано на рис. 9. Заметим, что значение $k = 0,3$ близко к критическому; $k^* = 0,2967$.

При $k \approx 0,2988$ второе семейство торов напоминает семейство торов $C_{11}T_1$: появление второго семейства связано с семейством стационарных бегущих волн C_{11} , мы будем обозначать его $C_{11}T_2$. В диапазоне $0,283 < k < 0,295$ торы $C_{11}T_2$ подвергаются влиянию каскада периодических удваивающихся бифуркаций типа Файгенбаума (что касается путей образования хаоса, читатель может обратиться к обзору [73]). Семейство стационарных бегущих волн C_{12} становится устойчивым при $k \approx 0,2831$ и теряет свою устойчивость вследствие бифуркации Хопфа при $k \approx 0,2751$. Как результат неустойчивого режима типа метастойчивого хаоса (рис. 10), фазовая траектория притягивается к некоторой точке из $S^{(3)}$. Траектория приближается скачкообразно к стационарной точке из $S^{(3)}$ достаточно близко, затем медленно покидает ее окрестность и снова приближается к распавшемуся тору.

Время, в течение которого траектория остается в окрестности $S^{(3)}$, возрастает в каждом цикле, а сама

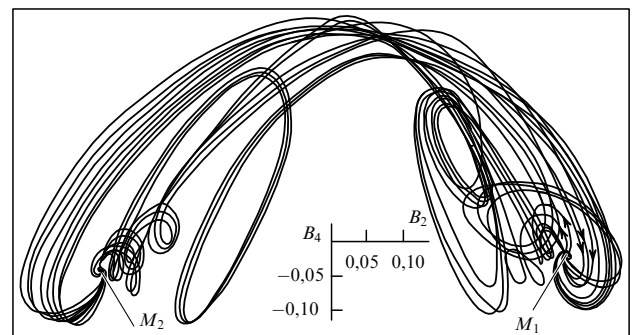


Рис. 9. Вблизи $S^{(2)}\Gamma$ наблюдается сложное движение.

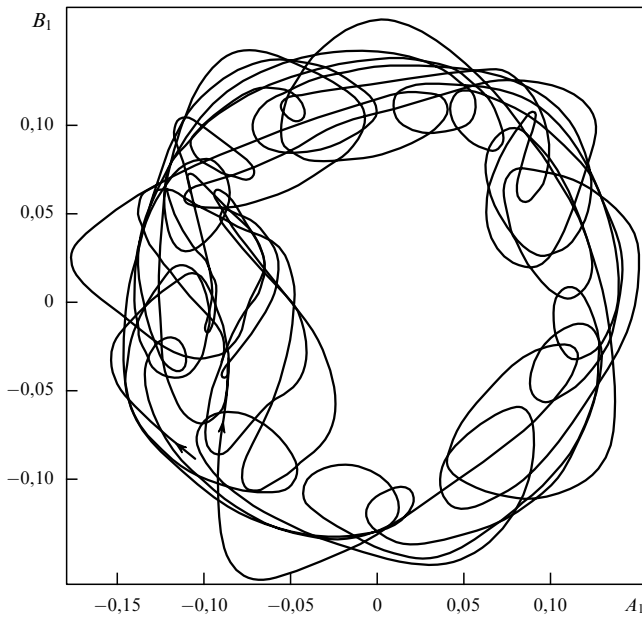


Рис. 10. Режим метастойчивого хаоса при $k = 0,273$.

окрестность сужается. При $0,2449 < k < 0,2803$ стационарные точки $S^{(3)}$ устойчивы, семейство приобретает устойчивость в результате контакта ветвей семейства $S^{(3)}$ и S_2 при $k \approx 0,2449$. В очень узком диапазоне волновых чисел $0,2392 < k < 0,2394$ поведение траекторий имеет вполне стохастический характер. При $0,2195 < k < 0,2392$ стационарные точки семейства S_3 представляют собой аттракторы, и при $k \approx 0,2195$ решения S_3 -типа теряют устойчивость в результате бифуркации Хопфа, и формируется семейство циклов $S_3\Gamma$. При $k \approx 0,2169$ в $S_3\Gamma$ возникает каскад периодических удваивающихся бифуркаций типа Файгенбаума и, как следствие, формируется хаотический аттрактор при $k \approx 0,2150$. Потеря устойчивости семействами $S^{(4)}$ и $S^{(5)}$ происходит аналогично тому, как это имело место в случае семейства $S^{(3)}$. Наконец, отметим, что торы $S^{(4)}T$ существуют в интервале $0,1820 < k < 0,1865$ и $S^{(5)}T$ — в интервале $0,1500 < k < 0,1506$.

Любопытно отметить, что при $k > 0,35$ достаточно рассмотреть усеченную приближенную динамическую систему малой размерности. Эта система имеет только три моды (как и система Лоренца) B_1 , B_2 и B_3 :

$$\begin{aligned} \frac{dB_1}{dt} &= \gamma_1 B_1 + 2(B_1 B_2 + B_2 B_3), \\ \frac{dB_2}{dt} &= \gamma_2 B_2 + 2(2B_1 B_3 - B_1^2), \\ \frac{dB_3}{dt} &= \gamma_3 B_3 - 6B_1 B_2, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

где $\gamma_j = j\sigma_j = j^2 k(1 - j^2 k^2)$, $j = 1, 2, 3$.

Фазовый поток динамической системы (5.2.11) является диссипативным при

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 < -B_2. \quad (5.2.12)$$

В этом случае вследствие диссипации аттракторы имеют нулевой фазовый объем и их размерность меньше 3.

6. Малые числа Рейнольдса, второй режим Пуазейля: $Re \ll 1$

6.1. Уравнения КС – КдВ

6.1.1 Уравнение КС – КдВ при малых числах Марангони.

Задачу, рассматриваемую в этом разделе, интересно сравнить с уравнением (5.1.6). По сути, уравнение (5.1.6) представляет собой сингулярное возмущение гиперболического уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Любопытно, что мы получаем сингулярное возмущение того же самого уравнения, но другого типа, в предположении (для малого числа Рейнольдса, см. [56]):

$$Re \ll 1, \quad Ma \ll 1,$$

такое, что

$$\frac{Re}{\varepsilon} = R^\circ, \quad \frac{Ma}{\varepsilon} = M^\circ, \quad (6.1.1)$$

и, как и ранее, полагая $\varepsilon^2 We = W^*$ и $Re/Gr^2 = 1$ в полной исходной задаче (3.4.1), (3.4.2). В этом случае вместо исходной задачи мы получаем следующую:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6.1.2a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 1 = \varepsilon^2 R^\circ \left(\frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R^\circ} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (6.1.2b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{R^\circ} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{R^\circ} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{Dw}{Dt} \right), \quad (6.1.2b)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \varepsilon \left(R^\circ \frac{D\theta}{Dt} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right). \quad (6.1.2r)$$

При $z = 0$

$$u = w = 0, \quad \theta = 1, \quad (6.1.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\varepsilon M^\circ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \\ &- \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + 4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + O(\varepsilon^4); \end{aligned} \quad (6.1.3b)$$

при $z = h(t, x)$

$$p = p_a - W^* \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{R^\circ} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (6.1.3b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -(1 + Bi \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (6.1.3r)$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6.1.3d)$$

Очевидно, в этом случае формальное разложение по ε (Бенни [66]) становится иным. А именно

$$U = (u, w, p, \theta)^T = U_0 + \varepsilon^2 U_2 + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.1.4)$$

Решение U_0 получается непосредственно. В этом случае при $\varepsilon \rightarrow 0$ из (6.1.2) и (6.1.3) мы получаем следующие выражения для членов старшего порядка:

$$u_0 = -\frac{1}{2}z^2 + hz, \quad w_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x}z^2, \quad (6.1.5a)$$

$$p_0 = p_a - W^* \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{R^\circ} \frac{\partial h}{\partial x}(h+x), \quad (6.1.5b)$$

$$\theta_0 = 1 - (1 + \text{Bi}) \frac{z}{1 + \text{Bi}h}. \quad (6.1.5b)$$

Из (4.1.1) и (4.1.2) с учетом (6.1.5a) мы получаем на этот раз

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = O(\varepsilon^2), \quad (6.1.5r)$$

так как $q_0 = (1/3)h^3$.

Выписывая систему уравнений и граничных условий порядка ε^2 (из (6.1.2) и (6.1.3)) для U_2 и предполагая, что $h(t, x)$ не разложена в ряд, мы можем получить громоздкое выражение для u_2 , интегрирование которого по z дает явное выражение для q_2 (как следствие (4.1.1) и (6.1.4)):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial q_2}{\partial x} = O(\varepsilon^4).$$

Окончательный результат аналогичен (5.1.6), но при этом появляются некоторые дополнительные члены

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{3} h^3 \left[R^\circ W^* \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + 7 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + h^4 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{15} h^6 \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} M^\circ (1 + \text{Bi}) \left[h^2 \frac{\partial h / \partial x}{(1 + \text{Bi}h)^2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Эволюционное уравнение (6.1.6) для $h(t, x)$ справедливо с точностью порядка $O(\varepsilon^4)$. Прделаем с эволюционным уравнением (6.1.6) то же самое, что и при сведении (5.1.6) к уравнению КС (5.1.8). Для этого мы используем

$$\tau = \delta t, \quad \xi = x - t, \quad h = 1 + \frac{1}{\phi} \varepsilon^2 \eta(\tau, \xi) + \dots, \quad \delta = \frac{1}{\phi} \varepsilon^2, \quad (6.1.7)$$

где ϕ — дисперсионный параметр подобия. Переходя вновь к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, вместо (6.1.6) мы находим уравнение, имеющее черты уравнения КдВ, с одной стороны, и КС, с другой:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \phi \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \gamma \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = 0, \quad (6.1.8)$$

где

$$\alpha = \phi \left[\frac{2}{15} R^\circ + \frac{1}{2} \frac{M^\circ}{1 + \text{Bi}} \right], \quad \gamma = \frac{1}{3} \phi R^\circ W^*. \quad (6.1.9)$$

Эволюционное уравнение КС–КдВ (6.1.8) также является важным модельным уравнением, справедливym на больших временах с точностью до членов порядка $O(\delta)$. Коэффициенты α , γ и ϕ — положительные константы, характеризующие неустойчивость, диссипацию и дисперсию. Как следует из вывода, уравнение КС–КдВ (6.1.8) справедливо при малых числах Рейнольдса, и свойства тонкой пленки в случае сильновязкой жидкости совершенно иные. Дисперсионный член $\phi(\partial^3 \eta / \partial \xi^3)$ изме-

няет поведение толщины $\eta(\tau, \xi)$ как в пространстве, так и во времени.

6.1.2. Уравнение КС–КдВ для больших чисел Прандтля. Изложенная выше теория, приведшая к уравнению КС–КдВ, справедлива только при малых числах Марангони, причем таких, что $\text{Ma}/\varepsilon = M^\circ = O(1)$. В этом разделе мы попробуем вывести уравнение КС–КдВ другим способом, когда число Прандтля велико:

$$\varepsilon^2 \text{Pr} = \text{Pr}^* = O(1). \quad (6.1.10)$$

Для этого вначале мы рассмотрим полную задачу (3.4.1), (3.4.2) для $\varepsilon \ll 1$ и предположим, что

$$U(u, w, p, \theta)^T = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.1.11)$$

В этом случае, если $\varepsilon^2 \text{We} = W^* = O(1)$ и $\text{Re}/\text{Fr}^2 = 1$, мы получаем последовательно следующие решения для q_0 , q_1 и q_2 при условии, что Re , Ma , Pr , W^* фиксированы при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\text{Bi} = 0$:

$$q_0 = \frac{1}{3} h^3, \quad (6.1.12a)$$

$$q_1 = \frac{1}{3} \text{Re} W^* + \frac{1}{2} \text{Ma} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \dots, \quad (6.1.12b)$$

$$q_2 = \frac{1}{16} \text{Ma} \text{Re} \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^4 \frac{\partial h}{\partial x} \right) h^2 + \dots, \quad (6.1.12b)$$

где

$$q_i(t, x) = \int_0^{h(t, x)} u_i(t, x, z) dz, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1.13)$$

В (6.1.12) мы выписали только те члены, которые появляются явным образом в полученном ниже уравнении КС–КдВ (6.1.17). На самом деле для согласованности этого уравнения КС–КдВ необходимо теперь предположить, что $\text{Re} \ll 1$, $\text{Pr} \gg 1$ и $W^* \gg 1$. Из усредненного уравнения (4.1.1) благодаря (6.1.12) мы получаем следующее уравнение "а ля Бенни":

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^3 \text{Re} W^* \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \text{Ma} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \dots \right) + \\ + \frac{1}{16} \varepsilon^2 \text{Ma} \text{Re} \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(h^4 \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \dots \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Наконец, используя преобразование

$$\tau = \delta t, \quad \xi = x - t, \quad h = 1 + \delta \eta(\tau, \xi) + \dots, \quad \delta = \varepsilon, \quad (6.1.15)$$

и предполагая, что

$$\text{Re} = \varepsilon, \quad \varepsilon W^* = W^{**} = O(1), \quad \varepsilon^2 \text{Pr} = \text{Pr}^* = O(1), \quad (6.1.16)$$

мы получаем из (6.1.14) следующее уравнение КС–КдВ для $\eta(\tau, \xi)$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \text{Ma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{16} \text{Ma} \text{Pr}^* \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \frac{1}{3} W^{**} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = 0. \quad (6.1.17)$$

Уравнение (6.1.17) справедливо при малых числах Рейнольдса, очень больших числах Вебера и больших числах Прандтля. Влияние дестабилизирующего члена определяется величиной числа Марангони ($Ma = O(1)$), а дисперсия возникает вследствие того, что число Прандтля велико ($Pr^* = O(1)$). Диссипация имеет место, только когда число Вебера очень велико (порядка $O(1/\varepsilon^3)$).

6.2. Некоторые особенности решения уравнения КС – КдВ

Линейное дисперсионное соотношение из уравнения (6.1.8) для волны $\eta(\tau, \xi) \approx \exp(ik\xi + \sigma\tau)$ имеет вид

$$\sigma = \alpha k^2 - \gamma k^4 + i\phi k^3. \quad (6.2.1)$$

Для $\text{Real}(\sigma) > 0$ мы имеем неустойчивость, а для $\text{Real}(\sigma) < 0$ — устойчивость. $\text{Real}(\sigma) = 0$, если

$$k = k_c \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (6.2.2)$$

Следовательно, предельное волновое число для уравнения (6.1.8) удовлетворяет соотношению

$$k_c^2 = \frac{2}{5W^*} + \frac{3}{2} \frac{M^0}{R^0 W^*} (1 + Bi). \quad (6.2.3)$$

Таким образом, волны, волновое число которых мало, усиливаются, а волны, волновое число которых велико, затухают, а максимальная скорость роста имеет место при $k_m = (\gamma/2\alpha)^{1/2}$. При $\phi = 0$ уравнение (6.1.8) сводится к самовозбуждающейся диссипативной системе КС, проявляющей турбулентное (хаотическое) поведение (см., например, [52]). С другой стороны, при $\alpha = \gamma = 0$ (предельный случай при $R^0 = 0$ и $M^0 = 0$ невязкой жидкой пленки в отсутствие эффекта Марангони) уравнение (6.1.8) сводится к уравнению КдВ, которое, как известно, допускает решения типа солитонов вместо хаоса!

Таким образом, вместо общего случая ненулевых α , γ и ϕ рост значения ϕ должен изменить характер решения уравнения (6.1.8) с нерегулярной серии волн на регулярный ряд солитонов (ряд импульсов одинаковой амплитуды, см. рис. 11). Эта тенденция еще более усиливается при больших значениях ϕ , и асимптотическое состояние решения при больших ϕ принимает вид ряда солитонов уравнения КдВ [74, с. 3]. Безразмерный параметр $\mu = \phi/(\gamma\alpha)^{1/2}$, характеризующий относительное значение дисперсии при переходе от нерегулярной серии волн к регулярному ряду солитонов, имеет, по всей видимости, критическое значение, близкое к единице. Напомним, что сложная эволюция решений (6.1.8) описывается слабым взаимодействием импульсов, каждый из которых представляет собой стационарное решение (6.1.8). Когда дисперсия велика, взаимодействие импульсов соответствует отталкиванию и солитоны образуют устойчивые решетки импульсов [75].

Ламинирующее влияние дисперсии в уравнении (6.1.8) подробно обсуждается Х. Ч. Чангом и др. в [71]. Авторы показывают, что линейный дисперсионный член $\phi(\partial^3 \eta / \partial \xi^3)$ подавляет нерегулярное поведение (в уравнении КС, описывающем пространственно-временной хаос) с образованием периодических по пространству ячеистых структур, что согласуется с предшествующими числовыми и экспериментальными данными.

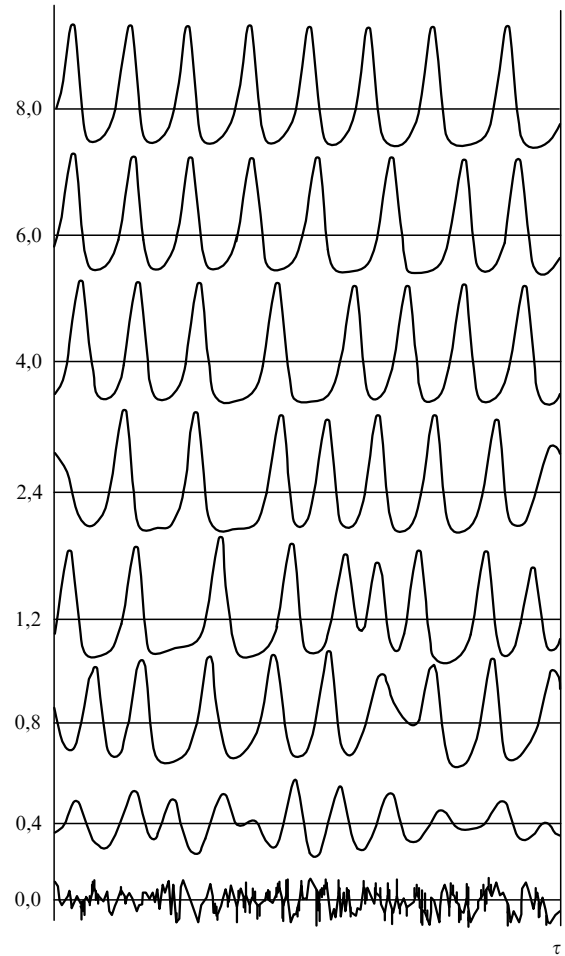


Рис. 11. Эволюция $\eta(\tau, \xi)$ во времени.

В [71, с. 301–312] авторы провели также анализ нормальной формы стационарных волн в фазовом пространстве. В этом случае, выполняя преобразование к движущейся системе координат и полагая волны стационарными в ней: $x = \xi - c^0\tau$, мы получаем из (6.1.8) определяющее уравнение для стационарных волн посредством однократного интегрирования

$$\gamma \frac{d^3 H}{dx^3} + \phi \frac{d^2 H}{dx^2} + \alpha \frac{dH}{dx} - c^0 H + 2H^2 = Q \quad (6.2.4)$$

и

$$\int_0^{2\pi/k} H(x) dx = 0, \quad (6.2.5)$$

где $H(x) = (1/2)\eta(\xi - c^0\tau)$. Соотношение (6.2.5) представляет собой условие равенства нулю среднего значения, $2\pi/k$ — длина стационарной волны, а Q — константа интегрирования. Мы можем записать

$$\gamma \frac{d^3 f}{dx^3} + \phi \frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha \frac{df}{dx} - \lambda f + 2f^2 = 0, \quad (6.2.6)$$

где $\lambda = (8Q - c^{02})^{1/2}$ — новая скорость, а

$$f(x) = H - \frac{1}{4} c^0 + \left(\frac{1}{16} c^{02} + \frac{1}{2} Q \right)^{1/2} \quad (6.2.7)$$

— новый профиль волны. Важно отметить, что среднее значение $f(x)$ не равно нулю. Однако необходимо понимать, что уравнение (6.2.6) с параметрами α, γ, λ и ϕ эквивалентно (6.2.4) с параметрами $\alpha, \gamma, \lambda, \phi$ и Q при дополнительном ограничении ($x \rightarrow \pm\infty$). На самом деле в случае стационарной волны с бесконечной длиной волны и обращающейся в нуль производной на обоих концах Q обращается в нуль и (6.2.4) эквивалентно (6.2.6). Уравнение (6.2.6) инвариантно при преобразовании $x \rightarrow -x, f \rightarrow -f, \lambda \rightarrow -\lambda$. В [71] авторы исследуют случай либо $\lambda > 0$, либо $\phi > 0$, и записывают (6.2.6) как динамическую систему (при $\alpha = \gamma = 1$)

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} = L_1\mathbf{F} + L_2\mathbf{F} - 2Cf^2, \quad \mathbf{F} = \left(f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}\right)^T, \quad (6.2.8)$$

где

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\phi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2.9)$$

Динамическая система (6.2.8) имеет две фиксированные точки — $A = (0, 0, 0)$ и $B = (\lambda/2, 0, 0)$, а предельные циклы (6.2.8) представляют собой периодические по пространству стационарные волны, и некоторые из них разветвляются в точках A и B вследствие бифуркации Хопфа (B и A испытывают бифуркации Хопфа при $\lambda = \pm\delta$ соответственно с частотой $\sigma_i = 1$). Следовательно, появление периодических по пространству стационарных волн с единичной длиной волны ожидается именно вблизи этих точек. Стационарные уединенные волны соответствуют гомоклинической траектории G точки A , но уединенные волны могут существовать только в секторах

$$\psi \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{7\pi}{4}\right)$$

в параметрическом λ – ϕ -пространстве. Уединенные волны бывают двух типов, и при больших ϕ мы имеем асимптотическую оценку Кавахары:

$$f(x) \sim \frac{21\phi}{20ch^2} \left[\left(\frac{7x}{20} \right)^{1/2} \right], \quad \lambda = \frac{7}{5} \phi. \quad (6.2.10)$$

В [71] авторы на основе (6.2.8) смоделировали численно стационарные уединенные и периодические волны. Любопытным результатом этого численного исследования является то, что стационарные волны неустойчивы в обширной области и, следовательно, не могут быть аттрактором уравнения КС–КдВ (6.1.8)! Оно также показало, что при $\phi > 1,1$ бесконечные семейства стационарных периодических волн уравнения КС, каждое из которых заканчивается уединенной волной, благополучно исчезают, так что только одно семейство периодических волн, состоящее из одnogорбых импульсов КдВ при $\phi > 3,7$, остается единственным аттрактором в виде периодических стационарных волн (6.1.8). Эти периодические волны имеют гораздо большую область притяжения, чем странные аттракторы, и следовательно, они оказывают доминирующее влияние на пространственно-временной хаос в обширной области

со значительной дисперсией. Волновые профили доминирующего семейства периодических волн на рис. 12 взяты из [71, с. 315]. При заданном ϕ амплитуда периодического решения возрастает при уменьшении волнового числа k . Это согласуется с аналитическими результатами Кавахары и То [75].

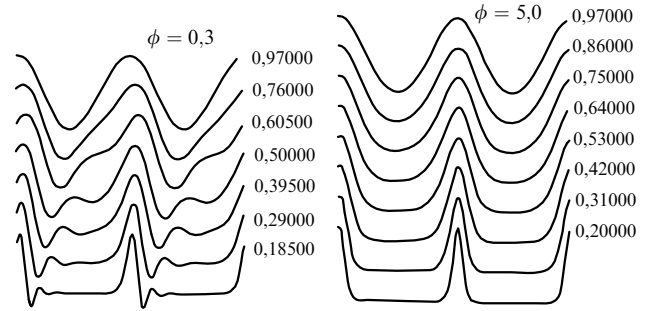


Рис. 12. Профили волн из доминирующего семейства периодических волн при $\phi = 0,3$ и $\phi = 5,0$. Обратите внимание на профили при малом ϕ .

В [76] авторы исследуют две ситуации. Во-первых, продуктивно-диссипативная часть ($\alpha\partial^2\eta/\partial\xi^2 + \gamma\partial^4\eta/\partial\xi^4$) уравнения (6.1.8) рассматривается как малое возмущение уравнения КдВ ($\partial\eta/\partial\tau + 2\eta\partial\eta/\partial\xi + \phi\partial^3\eta/\partial\xi^3 = 0$), пропорциональное малому параметру μ :

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + 2\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + \phi\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3} + \mu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^4}\right) = 0, \quad (6.2.11)$$

причем $\alpha = \gamma = \mu$. Показано, что на временах порядка $1/\mu$ КдВ взаимодействуют в соответствии с открытиями Забуски и Крускала, сохраняя "старение", которое они испытывают (что касается работ Забуски и Крускала, см., например, нашу обзорную статью [77] о нелинейных длинных волнах на воде и солитонах). На больших временах локализованные решения приобретают окончательный вид и фазовую скорость, причем различные горбы образуют связанные состояния. Рост продуктивно-диссипативного параметра развивает эти эффекты за счет приближения "практической бесконечности" на шкале времени. При $\mu > 2$, когда все остальные параметры равны единице, решение становится хаотическим. Эти результаты Христова и Веларде [76] очерчивают область, где достаточно длинные переходы могут приближенно рассматриваться как солитоны, хотя и несовершенные. Вторая ситуация возникает, когда часть КС уравнения (6.2.11) является доминирующей. Это происходит либо когда μ недостаточно мал, либо на очень больших временах ($t \rightarrow \infty$ или $t \gg 1/\mu$), т.е. когда волны имеют строго постоянную форму, причем они являются, по сути, короткими волнами, и когда диссипация носит доминирующий характер. Таким образом, в [76] концепция солитона ("диссипативного солитона") расширена в двух направлениях: на длинные переходные, практически "постоянные" волны, имеющие характер солитонов на временах порядка $1/\mu$, определяемых процессом производства-диссипации энергии, и на настоящие постоянные волновые частицы, тем не менее с неэластичным поведением при столкновениях.

В [78] авторы получили точные решения в виде солитонов и кноидальных волн для уравнения (6.1.8), а в [79] решения (6.1.8) в виде кноидальных и уединенных волн получены с помощью асимптотического анализа и численного решения. В статье [80] Лиу и Голуб представили результаты экспериментального исследования динамики двумерных уединенных волн и их взаимодействия, которое они провели с целью объяснения более сложных и беспорядочных течений в пленках. Изучение взаимодействия уединенных волн необходимо для понимания динамики течений в пленках. Взаимодействия являются сильно неэластичными в том смысле, что два взаимодействующих импульса сливаются: большая уединенная волна нагоняет и поглощает медленную волну, оставляя ровную поверхность за собой. Каскад взаимодействий может иметь место на достаточно протяженном участке поверхности пленки. Хаотическая серия импульсов в уравнении (6.2.4) при $Q = 0$ и $\alpha = \gamma = 1$ изучалась также в [81, 82]. Авторы достаточно подробно описывают гомоклинические орбиты и решения в виде серии импульсов для (6.2.4), развивают асимптотический метод первого порядка точности и определяют время разделения импульсов. В [82] Балмфорт рассматривает теорию равновесия и динамики решения в виде уединенных волн для уравнения

$$\left(\frac{d^3}{d\xi^3} + \mu \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi} \right) \Theta - c \Theta + \frac{1}{2} \Theta^2 = 0, \quad (6.2.12)$$

аналогичного (6.2.4), но с $Q = 0$, с использованием асимптотического анализа и теории динамических систем. На рисунке 13 представлена иллюстрация серии импульсов

$$\Theta = \sum_k H_k + \varepsilon R + O(\varepsilon^2), \quad H_k = H(\xi - \xi_k), \quad (6.2.13)$$

где ξ_k означает положение импульса, а εR — поправочный член.

Наконец, на рис. 14 показана простая последовательность бифуркаций, демонстрирующая (согласно [82]) последовательность состояний, соответствующих различным значениям c при $\mu = 0,7$ в уравнении (6.2.12).

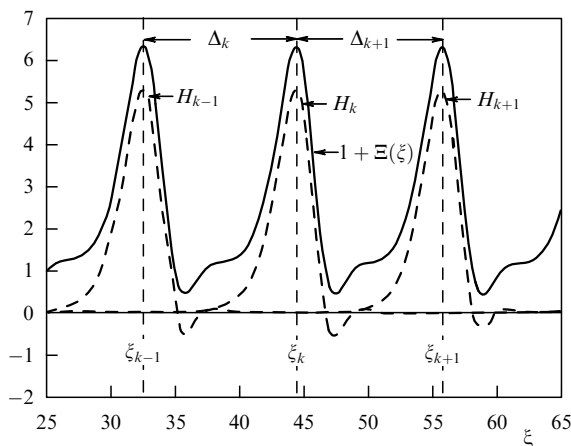


Рис. 13. Иллюстрация серии импульсов для уравнения (6.2.12).

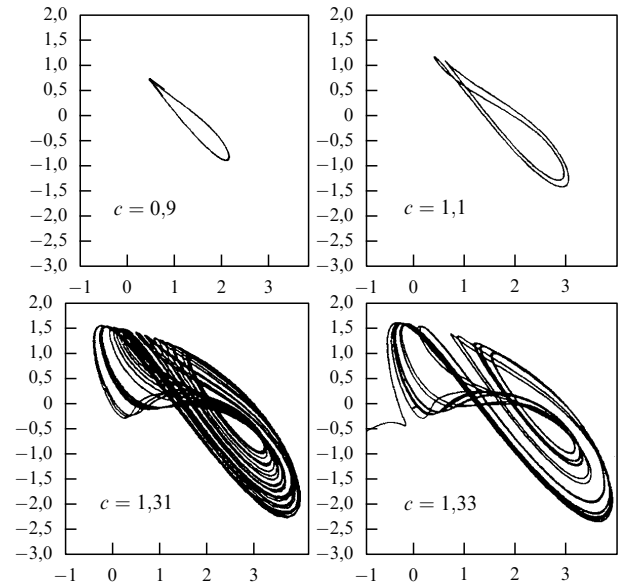


Рис. 14. Последовательность бифуркаций для уравнения (6.2.12) при $\mu = 0,7$ и четырех значениях c .

6.3. Уравнения для амплитуды

6.3.1. Для демонстрации конкуренции между стационарными волнами и нестационарными (возможно хаотическими) аттракторами уравнения КС–КдВ (6.1.8) мы преобразуем (6.1.8) с $\alpha = \gamma = 1$ в динамическую систему посредством проекции Галеркина на периодическую среду с длиной волны $2\pi/k$:

$$\eta(\tau, \xi) = \frac{1}{2} \sum A_p(\tau) \cos(pk\xi) + B_p(\tau) \sin(pk\xi), \quad p \geq 1. \quad (6.3.1)$$

Для качественного анализа проекций фазовой траектории на плоскость достаточно рассмотреть усеченную динамическую систему с тремя гармониками.

Эту систему не составляет труда записать в явном виде. А именно, вначале мы делаем простое линейное преобразование к системе координат $k\xi \rightarrow x$, $k\tau \rightarrow t$, причем пространственный период уравнения (6.1.8) с начальным условием $\eta(0, \xi) = \eta^\circ(\xi)$ и периодическими граничными условиями $\eta(\tau, \xi) = \eta(\tau, \xi + 2\pi/k)$ перейдет в интервал $\xi \in [0, 2\pi/k]$. Далее, подставляя (6.3.1) в уравнение КС–КдВ (6.1.8), мы получаем для амплитуд $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $B_2(t)$ следующую усеченную динамическую систему:

$$\frac{dA_1}{dt} = \sigma_1 A_1 + k^2 \phi B_1 - 2A_1 B_2, \quad (6.3.2a)$$

$$\frac{dB_1}{dt} = \sigma_1 B_1 - k^2 \phi A_1 + 2B_1 B_2, \quad (6.3.2б)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = 2\sigma_2 B_2 + 2(A_1^2 - B_1^2), \quad (6.3.2в)$$

где $\sigma_1 = k(1 - k^2)$, $\sigma_2 = 2k(1 - 4k^2)$.

Фазовый поток динамической системы (6.3.2) является диссипативным в случае, если выполняется соотношение $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$. Вследствие этого диссипативного эффекта аттракторы имеют нулевой фазовый объем и размерность меньше 3 (при t , стремящемся к бес-

конечности), когда волновое число k таково, что

$$0,58 < k < 1. \quad (6.3.3)$$

Эта трехамплитудная динамическая система для (6.3.2) поддается качественному и численному анализу.

6.3.2. Трехамплитудная динамическая система для уравнения КС – КдВ может быть получена другим способом с помощью разложения в ряд Фурье. В этом случае мы предполагаем, что (см., например, [83])

$$\eta(\tau, \xi) = \frac{1}{2} \sum A_n(\tau) \exp [in(\omega_1^0 \tau - k_1 \xi)], \quad (6.3.4)$$

где $A_n(\tau)$ — комплексная амплитуда n -й пространственной гармоники, а ω_1^0 — линейная угловая частота (по сути, угловая частота фундаментальной гармоники с волновым числом k_1 на первом этапе ее нарастания). Следует подчеркнуть, что если волновое число $k_n = nk_1$ действительно является волновым числом n -й гармоники, то частоту ω_1^0 нельзя рассматривать как ее реальную частоту ω_n (последняя несколько меняется вследствие наличия небольшого дисперсионного эффекта). Малое изменение фазы $\varphi_n(\tau)$, соответствующее малому сдвигу гармоники по частоте, учитывается в комплексной амплитуде:

$$A_n(\tau) = |A_n(\tau)| \exp [i\varphi_n(\tau)]. \quad (6.3.5)$$

Подставляя (6.3.4) в (6.1.8), для первых трех гармоник мы получаем следующую трехамплитудную динамическую систему (как и прежде, $\alpha = \gamma = 1$):

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \gamma_1 A_1 + ik_1 A_1^* A_2, \quad (6.3.6a)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = (\gamma_2 - 6ik_1^3 \phi) A_2 + ik_1 A_1^2, \quad (6.3.6b)$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} = (\gamma_3 - 24ik_1^3 \phi) A_3 + 3ik_1 A_1 A_2, \quad (6.3.6v)$$

где $\gamma_n(nk_1)^2[1 - (nk_1)^2]$, $n = 1, 2, 3$.

Вблизи критического режима, при котором мода A_1 является единственной неустойчивой модой, в то время как остальные быстро затухают линейным образом, динамика системы обуславливается крайне неустойчивой модой A_1 , по отношению к которой другие две моды имеют подчиненный характер. Как следствие, из (6.3.6b) получается, что динамика гармоники A_2 носит подчиненный характер к динамике фундаментальной гармоники A_1 и описывается соотношением

$$A_2 = -\frac{ik_1}{\gamma_2 - 6ik_1^3 \phi} A_1^2. \quad (6.3.7)$$

Согласно (6.3.6a) с учетом (6.3.7) фундаментальная гармоника A_1 удовлетворяет следующему уравнению Стюарта – Ландау:

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \gamma_1 A_1 + \lambda A_1^* A_1^2, \quad (6.3.8)$$

где

$$\lambda = \gamma_2 \frac{k_1^2}{a^2} \left(1 + i \frac{6k_1^3 \phi}{\gamma_2} \right), \quad a^2 = \gamma_2^2 + 36k_1^6 \phi^2, \quad \gamma_2 < 0,$$

— комплексная постоянная Ландау. Действительная (положительная) часть соответствует нелинейной диссипации, а мнимая часть — нелинейной частотной поправке (вследствие дисперсионного эффекта).

Как упоминалось в [83], дисперсионный характер волн играет важнейшую роль (через параметр ϕ (6.1.8)) в коллапсе амплитуды и запираании частот. Эти процессы можно понять в рамках теории динамических систем (6.3.6) после разделения модулей и фаз комплексных амплитуд (в соответствии с (6.3.5)).

Для простого случая двух амплитуд $|A_1(\tau)|$ и $|A_2(\tau)|$ и разности фаз $\Phi(\tau) = \varphi_2 - 2\varphi_1$ мы получаем вместо (6.3.6) следующую динамическую систему из трех уравнений:

$$\frac{d|A_1|}{d\tau} = \gamma_1 |A_1| - k_1 |A_1| |A_2| \sin \Phi, \quad (6.3.9a)$$

$$\frac{d|A_2|}{d\tau} = \gamma_2 |A_2| + k_1 |A_1|^2 \sin \Phi, \quad (6.3.9b)$$

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -6k_1^3 \phi + k_1 \frac{|A_1|^2 - 2|A_2|^2}{|A_2|} \cos \Phi. \quad (6.3.9v)$$

Динамическая система (6.3.9) является частным случаем рассмотренной в [83, с. 48] задачи и заслуживает дальнейшего тщательного численного исследования!

7. Выводы и комментарии

Для больших чисел Рейнольдса и длинных волн, когда числа Вебера и Марангони велики, вызванная инерцией неустойчивость, дисперсия, диссипация и эффекты Марангони и Биота учитываются в весьма важной модельной краевой задаче (4.1.6), (4.1.7) при определении толщины $h(t, x)$ вертикальной падающей пленки. С точки зрения автора, именно эту модельную краевую задачу необходимо тщательно исследовать численными методами! С другой стороны, обобщенные модельные (усредненные) начально-краевые уравнения (4.1.1), (4.1.25), (4.1.28) являются специальными, но в то же время удобными упрощениями полной модельной краевой задачи (4.1.6), (4.1.7), когда произвольно профили горизонтальной скорости и возмущения температуры под пленкой полагаются автомодельными. Несмотря на то что три модельных усредненных начально-краевых уравнения (4.1.1), (4.1.25) и (4.1.28) получены специальным образом, как видно из предварительных численных результатов Згала [63], эти усредненные уравнения корректно описывают линейное и нелинейное поведение $h(t, x)$ на больших временах. Следовательно, они вполне могут заменить уравнения типа Бенни (5.1.6) и уравнения КС (5.1.8) для умеренных чисел Рейнольдса. Линейные уравнения (4.2.3 а,б) интересны для исследования с точки зрения (линейной) устойчивости пленки. Наконец, подход с конечными динамическими системами также весьма любопытен, а преимуществом соответствующей динамической системы (4.4.5) для заданного числа активных мод (амплитуд) N является быстрая сходимость стохастических свойств к предельному состоянию.

Что касается малых чисел Рейнольдса, в случае длинных волн, когда число Вебера велико, а число Марангони мало, эволюционное уравнение (6.1.6) для $h(t, x)$, справедливое с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^4)$, является весьма важным и дает в пределе эволюционное уравнение КС – КдВ (6.1.8) для малых амплитуд

толщины $h(t, x)$. Как следствие, свойства тонкой пленки для сильновязкой жидкой пленки, когда эффект Марангони мал, а число Вебера велико, весьма отличаются из-за формы дисперсионного члена. Заметим, что наш вывод уравнения КС–КдВ (6.1.8) из полной задачи (6.1.2), (6.1.3) с допущением (6.1.1) является только асимптотически корректным!

Конечно, толщину пленки $h(t, x) = 1 + \delta\eta$ можно разложить в ряд множеством способов, при этом мы получим различные эволюционные уравнения для η ! Например, для комплексной амплитуды A монохроматической волны с волновым числом k_c

$$\eta = A(T, X) \exp(ik_c x) + \text{с.с.}$$

и амплитуды B функции тока (для t -мерного потока)

$$\psi = B(T, X) F(z) \exp(ik_c x) + \text{с.с.}$$

мы можем получить с помощью слабо-нелинейного анализа масштабов величин следующую систему двух эволюционных уравнений $A(T, X)$ и $B(T, X)$ с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\alpha \frac{\partial B}{\partial T} - \mu B + \delta \frac{\partial^2 B}{\partial X^2} + \lambda |B|^2 B = \gamma AB,$$

$$\frac{\partial A}{\partial T} + a \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + b \frac{\partial^4 A}{\partial X^4} = c \frac{\partial^2 (|B|^2)}{\partial X^2},$$

где $X = \varepsilon x$ и $T = \varepsilon^2 t$ в предположении, что $\text{Ma} - \text{Ma}_s \sim \varepsilon^2 \mu$ и Ma_s связано с $k_c \neq 0$ и определяет порог для короткой моды, обусловленной исключительно градиентом поверхностного натяжения, без участия поверхностной деформации. Но кроме того, мы имеем длинную моду, обусловленную гравитационными и капиллярными силами, причем поверхностная деформация играет определяющую роль в ее развитии. Эти два типа мод, имеющих разный масштаб, могут взаимодействовать друг с другом в процессе нелинейной эволюции (см., например, [32]). Коэффициент λ — это константа Стюарта–Ландау. О том, как строго получить эту константу в рамках вывода (с помощью теории центрального многообразия) уравнения Гинзбурга–Ландау (ГЛ) (при $\gamma = 0$ и $\alpha = 1$ в уравнении для $B(T, X)$), см. статью [84]. Отметим, что линейная часть уравнения для $B(T, X)$ должна быть согласована с первоначальным (линейным) соотношением для дисперсии в исходной задаче. Константы γ и c — это коэффициенты взаимодействия. Если положить оба этих коэффициента равными нулю, то мы вновь получаем уравнение ГЛ для B и линейное уравнение КС для A . Учет неустойчивости боковой полосы почти нейтральных волн возможен и с помощью уравнения ГЛ при включении эффектов боковой полосы в комплексный коэффициент δ .

В [32], выводя уравнение для амплитуд фундаментальной и боковых частот, авторы показали, что простой обобщающий критерий охватывает все классические результаты. Однако он применим и к условиям вблизи нейтральной кривой, но вдали от критичности, причем он охватывает нелинейные взаимодействия (для мод с малым волновым числом), не учитываемые в классической теории. Наконец, в [85] два приведенных выше эволюционных уравнения для A и B исследованы численными методами. Показано, что ввиду нелинейной связи с деформацией поверхности раздела между жидкостью и

газом первичная картина конвекции может смениться колебательной неустойчивостью с образованием длинных поверхностных волн различных видов, модулирующих мелкомасштабную конвекцию.

В заключение автор хотел бы отметить, что, конечно, было бы весьма желательно представить конкретные случаи и результаты, важные для практики, которые можно было сравнить с экспериментальными данными или другими теориями. Однако, с его точки зрения, не менее важно получить сначала концептуально непротиворечивую приближенную модель для течения в падающей пленке! В самом деле, при отсутствии такой модели "дорогостоящие" численные решения "неэффективны" — в наши дни наука о течениях в пленках просто страдает от "избытка численных результатов"!

(Перевод с англ. Д. Ганьжи)

Список литературы

1. Levich V G, Krylov V S *Ann. Rev. Fluid Mech.* **1** 293 (1969)
2. Sarpkaya T *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28** 83 (1996)
3. Benard H *Rev. Gen. Sci. Pures Appl.* **11** 1261 (1900)
4. Davis S H *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19** 403 (1987)
5. Sterning C V, Scriven L E *AIChE J* **5** 514 (1959)
6. Levich V G *Physicochemical Hydrodynamics* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1962)
7. Kenning D B R *Appl. Mech. Rev.* **21** 1101 (1968)
8. Norman C, Pomeau V, Velarde M G *Rev. Mod. Phys.* **49** 581 (1977)
9. Velarde M G, Chu X-L, in *Flow, Diffusion and Rate Processes* (Eds S Sieniutysz, P Salamon) (New York: Taylor and Francis, 1992) p. 110–145
10. Probstein R F *Physicochemical Hydrodynamics: An Introduction* (Second Edition) (New York: Wiley Interscience Publ., 1994)
11. Meyer R E *Waves on Fluid Interface* (New York: Academic Press, 1983)
12. Lin S P, Wanh C Y *Modelling Wavy Film Flows*, in *Encyclopedia of Fluid Mechanics* Vol. 1 (Houston: Gulf, 1985) p. 931–951
13. Trifonov Yu Ya, Tselodub O Yu *J. Fluid Mech.* **229** 531 (1991)
14. Prokopiou Th, Cheng M, Chang H-Ch *J. Fluid Mech.* **222** 665 (1991)
15. Chang H-Ch *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **26** 103 (1994)
16. Chang H-Ch, Demekhin E A *Advances in Applied Mechanics* **32** 1 (1996)
17. Tam M J, Bankoff S G, Davis S H *Phys. Fluids A* **2** 313 (1990)
18. Shtilman L, Sivashinsky G *Physica D* **52** 477 (1991)
19. Garazo A N, Velarde M G *Phys. Fluids A* **3** (10) 2295 (1991); *A* **4** (5) 1089 (1992)
20. Joo S W, Davis S H, Bankoff S G *J. Fluid Mech.* **230** 117 (1991)
21. Oron A, Rosenau Ph J. *Phys. II France* **2** 131 (1991)
22. Рябитский Е А *Изв. РАН Сер. МЖГ* **27** (3) 19 (1992)
23. Villers D, Platten J K *J. Fluid Mech.* **234** 487 (1992)
24. O'Brien S B G *J. Fluid Mech.* **254** 649 (1993)
25. Prakash A, Fujita D, Koster J N *Eur. J. Mech. B/Fluids* **12** (1) 15 (1993)
26. Ezersky A B et al. *Phys. Rev. A* **42** 1126 (1993)
27. Ezersky A B et al. *Phys. Rev. E* **47** 1126 (1993)
28. Ezersky A B et al. *Phys. Rev. E* **48** 4414 (1993)
29. Parmentier P M, Regnier V C, Lebon G *Int. J. Heat Mass Transfer* **36** 2417 (1993)
30. Mundrane M, Zebib A *Phys. Fluids* **5** (4) 810 (1993)
31. Oron A, Rosenau Ph J. *Fluid Mech.* **273** 361 (1994)
32. Golovin A A, Nepomnyashchy A A, Pismen L M *Phys. Fluids* **6** (1) 34 (1994)
33. Nepomnyashchy A A, Velarde M G *Phys. Fluids* **6** (1) 187 (1994)
34. Wilson S K J. *of Engineering Math.* **28** 427 (1994)
35. Thess. A, Orszag S A *J. Fluid Mech.* **283** 201 (1995)
36. Stebe K J, Barthes-Biesel D *J. Fluid Mech.* **286** 25 (1995)
37. Oron A, Deissler R J, Duh J C *Eur. J. Mech. B/Fluids* **14** (6) 737 (1995)

38. Joo S W *J. Fluid Mech.* **293** 127 (1995)
39. Tanny J, Chen C C, Chen C F *J. Fluid Mech.* **303** 1 (1995)
40. Батичев В А *ПММ* **59** (6)1003 (1995)
41. Zeytounian R Kh, in *Asymptotic Modelling in Fluid Mechanics* **442** 153 (Heidelberg: Springer-Verlag, 1995)
42. Рябитский Е А *Изв. РАН Сер. МЖГ* **31** (1) 1 (1996)
43. Mercier J P, Normand C *Phys. Fluids* **8** (6) 1433 (1996)
44. Savino R, Monti R *Phys. Fluids* **8** (11) 2906 (1996)
45. Or A C, Kelly R E *Bull. Am. Phys. Soc.* **40** (12) 1949 (1996)
46. Oron A, Bankoff S G, Davis S H *Phys. Fluids* **8** (12) 3433 (1996)
47. Zeytounian R Kh *Int. J. of Engineering Sci.* **27** (11) 1361 (1989)
48. Zeytounian R Kh *Int. J. of Engineering Sci.* (in press) (1997)
49. Dauby P C, Lebon G *J. Fluid. Mech.* **329** 25 (1996)
50. Vince J-M *On des propogatives dans des systemes convectives soumis a des effets de tension superficielle These de Doctorat de l'Universite de Paris* (1994)
51. Шкадов В Я *Изв. АН СССР Сер. МЖГ* **2** 20 (1968)
52. Demekhin Ye A, Tokarev G Yu, Shkadov V Ya *Physica D* **52** 338 (1991)
53. Joseph D D, Renardy Y Y *Fundamental of Two Fluids Dynamics. Part I. Mathematical Theory and Applications* (New York: Springer-Verlag, 1993)
54. Pavithran S, Redekopp L G *Studies in Appl. Math.* **93** 209 (1994)
55. Drazin P G, Reid W H *Hydrodynamics Stability* (Cambridge: Cambridge University Press, 1981)
56. Zeytounian R Kh *The Benard-Marangoni Thermocapillary Instability Problem: Vertical Falling Film for High and Low Reynolds Numbers* (неопубликованная рукопись)
57. Alekseenko S K et al. *AICHE J.* **31** 1446 (1985)
58. Ландау Л Д *ДАН СССР* **44** 311 (1944)
59. Stuart J T J. *Fluid Mech.* **9** 353 (1960)
60. Newell A C *Lectures in Appl. Math.* **15** 157 (1974)
61. Stewartson K, Stuart J T J. *Fluid Mech.* **48** 529 (1971)
62. Lorentz E N *Atmospheric Sci.* **20** 130 (1963)
63. Zghal M *Waves on the Surface of a Falling Liquid Film: Marangoni Effect Doctoral Thesis, L.M.L. University of Lille I* (неопубликованная рукопись)
64. Cheng M, Chang H-Ch *Phys. Fluids* **7** (1) 34 (1995)
65. Liu J, Gollub J P *Phys. Rev. Lett.* **70** 2289 (1993)
66. Benney D J J. *Math. Phys.* **45** 150 (1996)
67. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974)
68. Hopf E *Comm. Pure and Appl. Math.* **3** 201 (1950)
69. Hooper A P, Grimshaw R *Phys. Fluids* **28** 3 (1985)
70. Chang H-Ch, Demekhin E A, Kopelevich D I *J. Fluid Mech.* **250** 433 (1993)
71. Chang H-Ch, Demekhin E A, Kopelevich D I *Physica D* **63** 299 (1993)
72. Human J M, Nicolaenko B, Zaleski S *Physica D* **23** 265 (1986)
73. Zeytounian R Kh *Arch. Mech.* **41** (2/3) 383 (Warszawa, 1989)
74. Tatsumi T, in *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids* (Ed. T Tatsumi) (Amsterdam: North Holland, 1984)
75. Kawahara Y, Toh S *Phys. Fluids* **31** 2103 (1988)
76. Christov C I, Velarde M G *Physica D* **86** 323 (1995)
77. Zeytounian R Kh *Phys. Usp.* **38** 1333 (1995)
78. Кудрявцев Н А *ПММ* **54** (3) 450 (1990)
79. Rednikov A Ye et al. *Acta Applicandae Mathematicae* **39** 457 (1995)
80. Liu J, Gollub J P *Phys. Fluids* **6** (5) 1702 (1994)
81. Balmforth N J, Ierley G R, Spiegel E A *SIAM J. Appl. Math.* **54** (5) 1291 (1994)
82. Balmforth N J *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **27** 335 (1995)
83. Barthelet P, Charru F, Fabre J J. *Fluid Mech.* **303** 23 (1995)
84. Cheng M, Chang H-Ch *Phys. Fluids A* **2** (8) 1364 (1990)
85. Kazhdan E et al. *Phys. Fluids* **7** (11) 2679 (1995)

The Bénard – Marangoni thermocapillary instability problem

R.Kh. Zeytounian

University of Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Address for the correspondence:

12 rue Saint-Fiacre, 75002 Paris, France

E-mail: vipavlov@omega.univ-lille1.fr (for Prof. R. Kh. Zeytounian)
belous@francemultimedia.fr

Physically, there are two main mechanism responsible for driving the instability in coupled buoyancy (Bénard) and thermocapillary (Marangoni) convection problem of a weakly expansible viscous liquid layer, bounded on the bottom by a heated solid surface and on the top by a free-surface subject to a temperature-dependent surface tension. The first one is the density variation generated by the thermal expansion of the liquid, the second cause of instability results from the surface-tension gradients due to temperature fluctuations along the upper free-surface. In the present paper we consider only the second effect as in Bénard experiments (the so-called Bénard – Marangoni (BM) problem). Indeed, for a thin layer we show that, it is not consistent to consider simultaneously both effects, and in Section 3 we formulate an alternative concerning the rôle of the buoyancy. In fact, it is necessary to consider two fundamentally distinct problems: the first problem is the classical shallow convection problem for a non-deformable upper surface with a partial account of the Marangoni effect (RBM problem), the second one is the full BM problem for a deformable free-surface without the buoyancy effect. We shall be mostly concerned with thermocapillary BM instabilities problem on a free-falling vertical film, since most experiments and theories have focused on the latter (in fact, wave dynamics on an inclined plane is quite analogous). For a thin film we consider three main situations in the relation with the magnitude of the characteristic Reynolds number (Re) and we derive various model equations. These model equations are analyzed from various point of view but the central intent of this paper is to elucidate the role of the Marangoni number on the evolution of the free-surface in space-time. Finally, some recent numerical results are also presented.

PACS numbers: **44.25.+f**, **44.30.+v**, **47.10.+g**, **47.27.+i**

Bibliography — 85 references

Received 29 May 1997