

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Топологические явления в нормальных металлах

С.П. Новиков, А.Я. Мальцев

*В работе рассматриваются гальваномагнитные явления в сильных магнитных полях, обусловленные геометрией поверхности Ферми металла. На основании теорем трехмерной топологии приводится полная классификация всевозможных случаев. Для случаев незамкнутых электронных траекторий общего положения вводятся специальные топологические характеристики, соответствующие тензору проводимости при  $B \rightarrow \infty$ .*

PACS numbers: 02.40.Vh, 72.15.Gd

## Содержание

1. Введение. Исторические замечания (249).
  2. Наблюдаемые величины. Случай общего положения (250).
  3. Топологическое рассмотрение случаев общего положения (253).
  4. Заключение (258).
- Список литературы (258).

## 1. Введение. Исторические замечания

Как известно, измерение электропроводности металлов в сильных магнитных полях позволяет наблюдать массу самых разнообразных эффектов. Данная работа посвящена гальваномагнитным явлениям, связанным с поведением квазиклассических электронных траекторий в монокристалле в присутствии однородного магнитного поля  $B$ . Как было показано И.М. Лифшицем, М.Я. Азбелем, М.И. Кагановым (1956 г.), геометрия таких траекторий, основанная на одночастичном блоховском дисперсионном соотношении  $\epsilon_n(\mathbf{p})$ , целиком и полностью определяет асимптотическое поведение тензора электропроводности металлического монокристалла в сильных магнитных полях [1].

И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским был рассмотрен важный случай, отвечающий вкладу в тензор проводимости незамкнутых траекторий, лежащих в полосе конечной ширины и проходящих их насквозь [2, 3] (детали см. ниже). В работах [4–7] проводилось экспериментальное исследование различных ситуаций (мы здесь приводим лишь основные работы, на которые будем ссылаться в дальнейшем). Подробное рассмотрение теоретических и экспериментальных исследований в этой области хорошо изложено в обзорах [8, 9] и книге [10]. С

тех пор было выполнено большое количество работ, касающихся конкретных материалов и базирующихся на построенной общей теории таких явлений [8–11].

Около 1982 г. первым автором данной работы было замечено, что построенная физическая картина приводит к некоторым красивым задачам топологии многообразий малых размерностей ([12], см. также [13–15]). После этого его ученики А.В. Зорич, И.А. Дынников и С.П. Царев выполнили топологические исследования, посвященные данной тематике. В результате были доказаны глубокие теоремы, описывающие топологию открытых траекторий общего положения, а также найдены геометрические конструкции для некоторых нетривиальных ("эргодических") траекторий, находящихся в необщем положении и требующих специальных условий для своего наблюдения [16–23].

Заметим, что траектории последнего типа никогда не рассматривались ранее в теории гальваномагнитных явлений, поскольку о существовании таких траекторий не было известно. Что касается траекторий общего положения, то, используя эти топологические результаты, авторы данной работы нашли универсальные топологические характеристики металлов со сложной поверхностью Ферми, наблюдаемые при исследовании проводимости монокристаллических образцов в сильных магнитных полях [24] (см. ниже).

Здесь мы укажем, что сложные поверхности Ферми имеются, например, у таких металлов, как Au, Pb, Pt, Ag и многих других. Первым примером такого типа была поверхность Ферми меди, определенная Пиппардом в [25].

Целью настоящего обзора является описание общей картины асимптотического поведения тензора проводимости в сильных магнитных полях в металлах на основании топологических теорем. При этом будут подробно рассмотрены случаи "общего положения", наблюдающиеся с вероятностью 1 для произвольного направления магнитного поля в металле со сколь угодно сложной поверхностью Ферми. Кроме того указаны некоторые специальные случаи, могущие иметь место при специально подобранных направлениях  $B$  (в частно-

С.П. Новиков, А.Я. Мальцев. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 117940 Москва, ул. Косыгина 2, Россия  
Тел. (095) 137-32-44, 702-93-17  
Факс (095) 938-20-77  
E-mail: novikov@itp.ac.ru, maltsev@itp.ac.ru

Статья поступила 9 октября 1997 г.

сти "эргодический случай", впервые открытый в [23], а также в [20], где были построены более общие примеры, исследованию проводимости для которого была посвящена работа [27]). Будет показано, в частности, что все возможные типы тензора проводимости при  $B \rightarrow \infty$ , обусловленные существованием незамкнутых открытых траекторий общего положения, могут быть подразделены на классы, соответствующие некоторым областям на единичной сфере (параметризующей направления  $\mathbf{B}$ ), каждый из которых может быть задан некоторой экспериментально наблюдаемой целочисленной плоскостью  $\Gamma$ , являющейся общей топологической характеристикой данной устойчивой группы открытых траекторий. Указанные зоны устойчивости, характеризующиеся целочисленными плоскостями, вместе с теми областями на единичной сфере, где открытые траектории отсутствуют вообще, заполняют множество полной меры на единичной сфере и описывают, таким образом, все случаи общего положения. В целом, в настоящей работе содержится отсутствовавшая ранее и полученная в работах по трехмерной топологии полная классификация всевозможных типов открытых траекторий, возникающих при направлениях  $\mathbf{B}$  иррациональности 3, а также указываются все специфические типы траекторий, могущих возникнуть, когда направление магнитного поля таково, что ортогональная ему плоскость  $\Pi(\mathbf{B})$  содержит векторы обратной решетки. В работе содержится также анализ старых теоретических и экспериментальных исследований этих вопросов и приводятся новые теоретические результаты, связанные с неизвестными ранее нетривиальными топологическими возможностями. Настоящая работа, таким образом, дает описание полной картины гальваномагнитных явлений в сильных магнитных полях, обусловленной сложной топологией поверхности Ферми металла.

Мы сосредоточимся здесь, в основном, на результатах [24] в теории нормальных металлов. На основании новых топологических результатов, представленных в [20–22], было показано, что эти идеи могут быть применены также в теории полупроводников [26].

## 2. Наблюдаемые величины.

### Случай общего положения

Мы прежде всего остановимся на наиболее важном, с нашей точки зрения, случае "общего положения", наблюдаемом с вероятностью 1 при произвольном случайно выбранном направлении магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Как уже упоминалось ранее, рассмотрение открытых траекторий в этом случае позволяет ввести нетривиальные топологические характеристики поверхности Ферми, а именно, целочисленные (порожденные двумя векторами обратной решетки) плоскости и соответствующие им зоны на единичной сфере, определяющие свойства всех открытых траекторий общего положения, возникающих при различных направлениях  $\mathbf{B}$ .

Рассмотрим монокристаллический нормальный металл с решеткой  $L$ , порожденной векторами  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ . Как хорошо известно, в отсутствии магнитного поля  $\mathbf{B} = 0$  одночастичные электронные состояния могут быть описаны в терминах энергетических зон и квазиимпульсов  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , определенных с точностью до векторов обратной решетки, т.е.

$\mathbf{p}$  физически эквивалентен  $\mathbf{p} + \mathbf{l}^*$

для любого вектора  $\mathbf{l}^*$  такого, что  $(\mathbf{l}^*, \mathbf{l}_j) = 2\pi\hbar n_j$ , где  $n_j$  — целые числа. Обратная решетка  $L^*$  порождена векторами  $(\mathbf{l}_1^*, \mathbf{l}_2^*, \mathbf{l}_3^*)$  такими, что  $(\mathbf{l}_i^*, \mathbf{l}_j) = 2\pi\hbar\delta_{ij}$ .

В таком приближении мы имеем набор "дисперсионных соотношений"

$$\epsilon_n(\mathbf{p}) = \epsilon_n(\mathbf{p} + \mathbf{l}^*), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

описывающих зависимость энергии электрона от квазиимпульса.

Электроны в основном состоянии занимают все уровни ниже энергии Ферми  $\epsilon_F$ :  $\epsilon_j(\mathbf{p}) \leq \epsilon_F$ , оставляя незаполненными все высшие уровни. Теория электропроводности в нормальных металлах имеет дело с малыми возмущениями этой картины, и поэтому все существенные эффекты зависят от поведения электронной функции распределения в небольшой окрестности поверхности Ферми в пространстве квазиимпульсов  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ .

При этом большинство нормальных металлов удовлетворяет следующим общим условиям:

а. На уровне Ферми нет критических точек дисперсионного соотношения:

$$\nabla \epsilon_j(\mathbf{p}) \neq 0 \quad \text{при} \quad \epsilon = \epsilon_F.$$

б. Две различные поверхности Ферми, относящиеся к разным разрешенным энергетическим зонам  $\epsilon_j(\mathbf{p})$  и  $\epsilon_i(\mathbf{p})$ , не пересекают друг друга<sup>1</sup>, т.е. на уровне Ферми  $\epsilon = \epsilon_F$

$$\epsilon_j(\mathbf{p}) \neq \epsilon_i(\mathbf{p}), \quad i \neq j.$$

Для удобства дальнейшего изложения мы опишем сразу экспериментальную картину, соответствующую случаям общего положения, наблюдаемым с вероятностью 1, а также введем в рассмотрение целочисленные наблюдаемые топологические величины для проводимости в сильных магнитных полях, существование которых было установлено в работе [24]. Приложим сильное магнитное поле  $\mathbf{B}$  (величины  $B \simeq 10$  Тл)<sup>2</sup> и слабое электрическое поле  $\mathbf{E}$ , ортогональное  $\mathbf{B}$ . Согласно результатам [24], основанным на топологических теоремах, в случае общего положения для асимптотического поведения тензора проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , имеются всего две возможности:

**Случай 1.** Компактные орбиты.

2-мерная часть тензора проводимости  $\sigma_{\mathbf{B}}^{\alpha\beta}$  стремится к нулю при  $B \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{B}/B$  — фиксировано (для  $B \simeq 10$  Тл она уже исчезающе мала):  $\sigma_{\mathbf{B}}^{\alpha\beta} \rightarrow 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ . Асимптотическая форма тензора проводимости при этом имеет вид (см. [1]):

$$\sigma_{\mathbf{B}}^{ij} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Это свойство может быть разрушено в результате магнитного пробоя.

<sup>2</sup> Как может быть показано на основании общепринятого рассмотрения таких явлений (см., например, [8–11]), на величину магнитного поля имеется единственное условие:  $\omega_B\tau \gg 1$ , где  $\omega_B$  — циклотронная частота,  $\tau$  — время свободного пробега электронов, при выполнении которого мы можем наблюдать наш "геометрический предел". Это условие приводит к величинам порядка 1 Тл для чистых золотых образцов при температурах  $\simeq 4$  К, используемых в работе [7]. Второе ограничение, обеспечивающее квазиклассичность движения электрона,  $\hbar\omega_B \ll \epsilon_F$  выполняется для всех реально достижимых величин  $B$  (верхняя граница  $10^3 \div 10^4$  Тл).

где  $\omega_B$  — циклотронная частота,  $\tau$  — время свободного пробега электронов. Ось  $z$  здесь совпадает по направлению с  $\mathbf{B}$ .

**Случай 2.** Открытые орбиты общего положения.

Для некоторого направления  $\mathbf{B}/B = \mathbf{n}$  2-мерная часть тензора электрической проводимости  $\sigma_{\mathbf{B}}^{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ , стремится к ненулевому постоянному тензору  $\sigma_{\infty}^{\alpha\beta}$  при  $B \rightarrow \infty$ , зависящему от направления единичного вектора  $\mathbf{n}$ . В этом случае  $(2 \times 2)$ -тензор  $\sigma_{\infty}^{\alpha\beta}$  всегда имеет ранг, равный единице: одно из его собственных чисел равно нулю. Для описания полного  $(3 \times 3)$ -тензора проводимости  $\sigma_{\mathbf{B}}^{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , введем ортонормированный базис с вектором  $\mathbf{e}_1$ , направленным вдоль вектора, лежащего в ядре  $(2 \times 2)$ -тензора  $\sigma_{\mathbf{B}}^{\alpha\beta}$  в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ ; вектором  $\mathbf{e}_2$  в той же самой плоскости  $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_1$ , и вектором  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{B}/B$  (рис. 1).

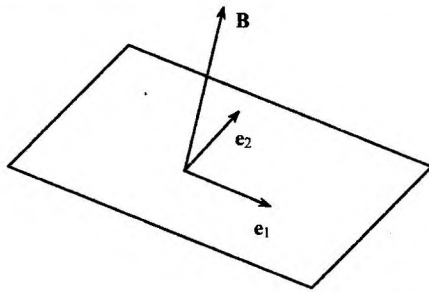


Рис. 1. Специальный базис, соответствующий случаю 2.

В этой системе координат мы получим для трехмерного тензора электропроводности

$$\sigma_{\mathbf{B}}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} + O(B^{-1}), \quad (3)$$

где  $(*)$  обозначает некоторые ненулевые постоянные. Отметим, что  $\sigma_{\mathbf{B}}^{ij} = \sigma_{-\mathbf{B}}^{ij}$  и  $\sigma(\mathbf{e}_1) = O(B^{-1})$ .

При этом описанная картина является локально устойчивой: для магнитных полей с направлением  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{B}'/B'$ , близким к исходному  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{B}/B$ , мы будем иметь ту же форму тензора проводимости, что и в (3) в новом ортонормированном базисе  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ , где  $\sigma_{\mathbf{B}'}(\mathbf{e}'_1) = 0$ ,  $\sigma_{\infty} \neq 0$  в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}'$ .

Наше наиболее важное утверждение состоит в том, что плоскость, порожденная 0-векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}'_1$ , является целочисленной и одной и той же для всех малых вращений  $\mathbf{B}'$  направления магнитного поля  $\mathbf{B}$  (рис. 2).

Целочисленность означает здесь, что описываемая плоскость порождена некоторыми двумя векторами обратной решетки  $(\bar{\mathbf{l}}^*, \bar{\mathbf{l}}'^*)$ :

$$\bar{\mathbf{l}}^* = n_1 \mathbf{l}_1^* + n_2 \mathbf{l}_2^* + n_3 \mathbf{l}_3^*,$$

$$\bar{\mathbf{l}}'^* = m_1 \mathbf{l}_1^* + m_2 \mathbf{l}_2^* + m_3 \mathbf{l}_3^*$$

и

$$\mathbf{e}_1 = \alpha \bar{\mathbf{l}}^* + \beta \bar{\mathbf{l}}'^*, \quad \mathbf{e}'_1 = \alpha' \bar{\mathbf{l}}^* + \beta' \bar{\mathbf{l}}'^*.$$

Здесь  $n_j, m_j$  — целые числа. Компоненты вектора  $\bar{\mathbf{l}}^* \times \bar{\mathbf{l}}'^*$ , таким образом, однозначно задают эту плоскость, и мы приходим к набору трех целых чисел  $n_1 m_2 - m_1 n_2 = M_3$ ,  $n_2 m_3 - m_2 n_3 = M_1$ ,  $n_3 m_1 - m_3 n_1 = M_2$ , определенных с

1\*

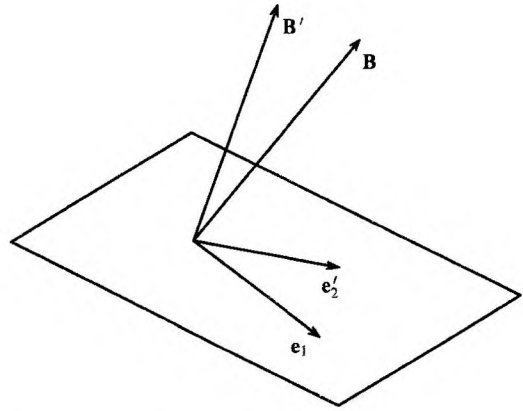


Рис. 2. Целочисленная плоскость, порождаемая векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}'_1$ , при малых вращениях направления магнитного поля.

точностью до общего множителя (так что в действительности имеют смысл только их отношения).

Мы будем называть набор чисел  $(M_1, M_2, M_3)$ , определенных с точностью до общего множителя, "топологическим типом" тензора проводимости в сильном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , соответствующим данной локальной "зоне устойчивости", отвечающей "Случаю 2". Топологический тип, таким образом, определяется по двум (или более) близким направлениям магнитного поля  $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ , так что они лежат внутри одной зоны устойчивости на единичной сфере (задающей направления магнитного поля), и является локально устойчивой топологической характеристикой поверхности Ферми. При малых вариациях направления магнитного поля топологический тип  $(M_1, M_2, M_3)$  остается неизменным, т.е. он постоянен на некоторой открытой области на единичной сфере, которую мы и называем "зоной устойчивости" топологического типа  $(M_1, M_2, M_3)$ .

Мы будем обозначать площадь (или меру) "зоны устойчивости" типа  $(M_1, M_2, M_3)$  на единичной сфере через  $\mu(M_1, M_2, M_3)$ , а меру множества на единичной сфере, отвечающего "Случаю 1", обозначим через  $\mu_0$ . Наше утверждение состоит в том, что

$$\mu_0 + \sum_{(M_1, M_2, M_3)} \mu(M_1, M_2, M_3) = 4\pi \quad (4)$$

(сумма по всем топологическим типам). Для многих топологических типов мы будем в действительности иметь:  $\mu(M_1, M_2, M_3) = 0$ . В любом случае топологические типы с достаточно большими числами  $|M_j|$  соответствуют очень малым значениям  $\mu$ .

Из сказанного вытекает, что, вообще говоря, в реальном эксперименте мы сможем наблюдать конечное (не очень большое) число топологических типов и их "зон устойчивости".

Математическое равенство (4) означает в точности, что все другие возможности необщего положения (т.е. отличающиеся от Случая 1 и Случая 2) соответствуют направлениям  $\mathbf{B}$ , покрывающим множество меры нуль на единичной сфере. Некоторые наиболее интересные примеры необщего положения мы рассмотрим ниже.

Для сравнения со старыми экспериментальными данными мы здесь приведем также асимптотическую форму тензора сопротивления, обратного к  $\sigma$ :  $R = \sigma^{-1}$ , в том же базисе, что и  $\sigma$  в (3) (см. [10, 11]).



**Случай 1.** Компоненты  $\hat{R}$  имеют порядок

$$\hat{R} \simeq \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau & 1 \\ \omega_B\tau & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(пропорциональная  $B$  часть матрицы является кососимметричной).

**Случай 2.** Порядок величины компонент  $\hat{R}$ :

$$\hat{R} \simeq \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^2 & \omega_B\tau & \omega_B\tau \\ \omega_B\tau & 1 & 1 \\ \omega_B\tau & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

здесь  $\omega_B = eB/m^*c$  — циклотронная частота,  $\tau$  — время свободного пробега электронов.

Мы теперь приведем здесь некоторые экспериментальные данные, полученные Ю.П. Гайдуковым [7] для Au. Как мы можем видеть из (6), мы должны наблюдать квадратичную зависимость от  $B$  сопротивления  $\rho \sim (B^2 \cos^2 \alpha) \rho_0$  в плоскости, ортогональной  $B$  в Случае 2, где  $\rho_0 = m^*/ne^2\tau$ . Множитель  $(\cos^2 \alpha)$  равен 1 для направления электрического поля вдоль вектора  $e_1$  (см. выше) — собственного вектора тензора проводимости (3) с собственным значением 0 в плоскости, перпендикулярной  $B$ .

На рисунке 3 (см. рис. 11 в [7]) можно видеть набор заштрихованных областей, где наблюдалась квадратичная зависимость от  $B$  (числа типа 1,0,0 обозначают здесь направления  $B$ ). Интересно отметить, что, согласно результатам [7], в центрах заштрихованных областей сопротивление имеет "очень глубокие минимумы", и его поведение соответствует Случаю 1. Зависимость сопротивления внутри заштрихованных зон вне указанных центральных точек должна быть типа  $B^2$ , как в Случае 2. Тем не менее эта зависимость была экспериментально определена как  $B^\alpha$  при  $\alpha \leq 2$  ("немного меньше", как написано в [7]). Возможно, магнитные поля  $B \approx 2$  Тл не были достаточны для наблюдения нашего асимптотического поведения. Эксперименты, может быть, стоит повторить при значениях магнитного поля:  $B \geq 10$  Тл. В незаштрихованных областях мы имеем Случай 1. Нечто интересное наблюдается вдоль черных линий (случай

необщего положения?). Мы обсудим это несколько позже.

Возвращаясь к внутренностям заштрихованных областей (с удаленными центральными точками), мы ожидаем здесь экспериментального подтверждения зависимости типа  $B^2$ . Кроме того, в этом случае мы утверждаем, что заштрихованные области и есть в действительности "зоны устойчивости", топологические типы которых соответствуют целочисленным плоскостям, ортогональным единичным векторам, направленным в удаленные центральные точки, так что на рис. 11 из [7] (соответствует нашему рис. 3) мы можем наблюдать следующие топологические типы:

$$(M_1, M_2, M_3) = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1). \quad (7)$$

Тем не менее это утверждение следует проверить экспериментально.

Здесь везде мы рассматривали результаты работы [7] как явное экспериментальное подтверждение того, что заштрихованные области и некоторые точки на черных линиях не относятся к Случаю 1. Введенные нами "целочисленные плоскости" в это время не были известны и никто не задавался вопросом о них.

В любом случае исчезновение проводимости (ему соответствует в данном случае также и минимум сопротивления) в центрах заштрихованных областей находится в хорошем согласии с нашим пониманием ситуации в Au. Причина состоит в том, что если описанная нами целочисленная плоскость оказывается ортогональной магнитному полю при некотором значении  $B$  и открытые траектории общего положения существуют при всех направлениях магнитного поля, близких к данному, они, тем не менее, могут исчезать для этого специального направления поля  $B$  (см. ниже).

Остановимся теперь на довольно интересном случае эргодических открытых орбит, могущих иметь место при специальных направлениях магнитного поля  $B$  иррациональности 3 ( $\Pi(B)$  не содержит векторов обратной решетки) и открытых в работах [20–22]. Множество упомянутых направлений магнитного поля имеет меру 0 на единичной сфере для заданной ферми-поверхности общего вида, однако, специально подбирая направление  $B$ , такие случаи, тем не менее, можно наблюдать в металлах с достаточно сложной поверхностью Ферми.

**Случай 3.** Ситуация необщего положения (эргодические орбиты).

Экспериментальные данные, приведенные в работе [7], указывают на необычное поведение тензора сопротивления вдоль черных линий, показанных на рис. 4 (см. рис. 5 в [7]): во множестве точек этих линий сопротивление имеет очень глубокие минимумы, где его асимптотическое поведение описывается законами типа  $B^\alpha$  с различными значениями  $\alpha$  для  $1 < \alpha < 1,8$ . Мы считаем, что эти экспериментальные данные следовало бы уточнить для магнитных полей порядка, например,  $B \geq 10$  Тл вместо  $B \approx 2$  Тл, использованных в работе [7]. Здесь можно ожидать существование значительно более мелких зон устойчивости, соответствующих Случаю 2 общего положения с более сложными топологическими типами  $(M_1, M_2, M_3)$ , чем (7), но существует также и другая возможность: мы можем ожидать здесь существование более сложных "эргодических" траекторий

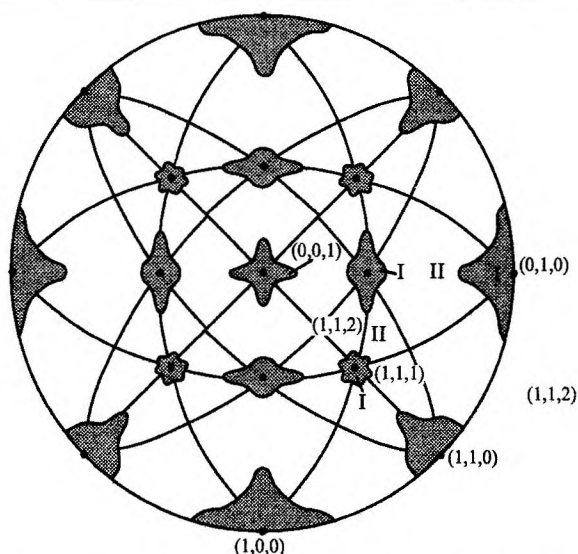


Рис. 3. Экспериментальные данные, полученные Ю.П. Гайдуковым для Au. Темные области соответствуют случаю 2.

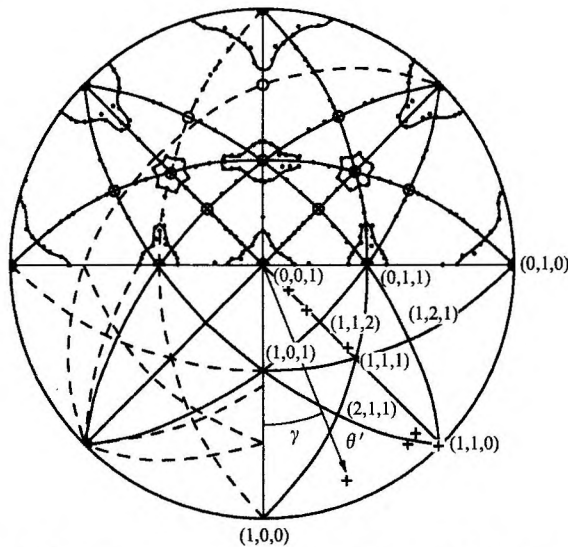


Рис. 4. Экспериментальные данные, полученные Ю.П. Гайдуковым для Au.

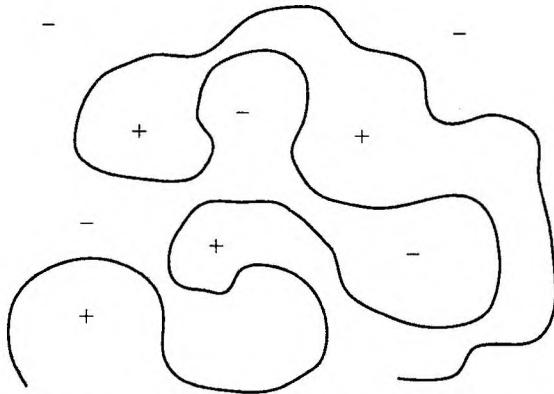


Рис. 5. Примерный вид эргодических открытых траекторий, построенных И.А. Дынниковым. Знаками "+" и "-" обозначены области больших и меньших значений энергии соответственно.

необщего положения типа открытых в работах [20–22]. Траектория такого типа изображена на рис. 5. Согласно предположению второго автора данной работы эта ситуация в "типичных случаях" должна приводить к "скейлинговому" поведению сопротивления  $R \sim B^\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$  (см. [27]).

Кроме того, среднее значение групповой скорости  $v_z$  на каждой из таких траекторий равно нулю, и, соответственно, вклад таких эргодических траекторий в трехмерный тензор проводимости таков, что

$$\sigma_{\mathbf{B}}^{ij}(\gamma) \rightarrow 0 \quad (8)$$

при  $B \rightarrow \infty$  для всех  $i, j = 1, 2, 3$ .

Общий вид вклада этих траекторий в трехмерный тензор проводимости (при подходящем выборе осей в плоскости  $\Pi(\mathbf{B})$ , перпендикулярной магнитному полю) в работе [27] записан в форме:

$$\sigma_{\mathbf{B}}^{ij} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{2\beta-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{\beta+\gamma-2} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{2\alpha-2} & (\omega_B\tau)^{\alpha+\gamma-2} \\ (\omega_B\tau)^{\beta+\gamma-2} & (\omega_B\tau)^{\alpha+\gamma-2} & \frac{T^2}{\epsilon_F^2} + (\omega_B\tau)^{2\gamma-2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ ,  $\alpha + \beta = 1$ .

К этому вкладу необходимо, однако, добавить вклад всех замкнутых (компактных) траекторий. По общим соображениям, они всегда должны существовать в случае с Au (для любого направления магнитного поля). По этой причине мы, вообще говоря, будем всегда иметь в пределе ненулевое значение продольной проводимости  $\sigma_{\mathbf{B}}^{zz}$  вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$  в сильных магнитных полях

$$\sigma_{\mathbf{B}}^{zz} \rightarrow \sigma_{\infty}^{zz} \neq 0.$$

Однако мы ожидаем уменьшения значения  $\sigma_{\infty}^{zz}$  для таких специальных направлений  $\mathbf{B}$  на единичной сфере, где появляются эргодические траектории (по сравнению с соседними направлениями общего положения), т.е. мы должны наблюдать локальные минимумы в таких точках на единичной сфере. Указанное свойство может быть, видимо, использовано для экспериментального различения эргодических случаев от очень малых зон устойчивости, где для наблюдения зависимости типа  $B^2$  сопротивления в плоскости  $\Pi(\mathbf{B})$  требуются все большие (с уменьшением размера зоны и ростом сложности ее топологического типа) граничные значения  $\mathbf{B}$ . Асимптотическая (при  $B \rightarrow \infty$ ) форма поведения двумерного тензора сопротивления в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , в случае эргодических орбит выписана в [27] в виде

$$\rho_{\eta\zeta}(B) = \frac{m^*}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{2\alpha} & \omega_B\tau \\ \omega_B\tau & (\omega_B\tau)^{2\beta} \end{pmatrix} \quad (10)$$

(в той же системе координат, что и (9)).

Более подробное рассмотрение эргодических траекторий содержится в работе [27]. Мы перейдем теперь к топологическому объяснению сформулированных результатов.

### 3. Топологическое рассмотрение случаев общего положения

Как хорошо известно и уже было упомянуто, квазимульсы представляются векторами  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , определенными с точностью до векторов обратной решетки. С топологической точки зрения эти классы эквивалентности могут рассматриваться как точки трехмерного тора  $T^3$ , который мы будем называть "зоной Бриллюэна", а все  $\mathbf{p}$ -пространство  $R^3$  мы будем называть "расширенной зоной Бриллюэна". С топологической точки зрения мы имеем здесь "универсальное накрытие" над трехмерным тором.

В присутствии магнитного поля  $\mathbf{B}$  мы пользуемся стандартным квазиклассическим описанием гальваномагнитных явлений. "Электронные орбиты" для адиабатической эволюции блоховских волн могут быть получены из динамической системы в  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ -пространстве:

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, \epsilon(\mathbf{p})\}, \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, \epsilon(\mathbf{p})\}. \quad (12)$$

Здесь  $\epsilon(\mathbf{p})$  — дисперсионное соотношение в отсутствие  $\mathbf{B}$ . Скобки Пуассона имеют следующую форму:

$$\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = 0,$$

$$\{p_i, p_j\} = \frac{e}{c} \epsilon_{ijk} B_k. \quad (13)$$

В случае однородного магнитного поля  $\mathbf{B}$  наши уравнения (12) являются замкнутыми на переменные  $(p_1, p_2, p_3)$ , поскольку  $B_k = \text{const}$ . Мы приходим, таким образом, к гамильтоновой системе в трехмерном торе (зоне Бриллюэна) со скобками Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = \frac{e}{c} \epsilon_{ijk} B_k$$

и гамильтонианом  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Система имеет два интеграла движения:  $\epsilon(\mathbf{p})$  и  $\sum B_k p_k$ . Вторым интеграл является "Казимиром" для этой скобки в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Поскольку  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jki}$ :

$$\left\{ p_j, \sum B_q p_q \right\} = \frac{e}{c} \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} B_q B_k = 0.$$

Таким образом, электронные орбиты задаются в  $R^3$  двумя уравнениями:

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F, \quad \sum B_k p_k = \text{const}. \quad (14)$$

Геометрически они являются сечениями поверхности Ферми плоскостями, ортогональными магнитному полю (каждое плоское сечение есть объединение орбит).

Мы будем называть электронную траекторию компактной, если она замкнута в пространстве  $R^3$  (в расширенной зоне Бриллюэна). Кривую в  $R^3$  мы будем называть периодической с периодом  $T$  (некомпактной), если  $\mathbf{p}(t+T) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{l}^*$ , где  $\mathbf{l}^*$  — некоторый вектор обратной решетки. Строго говоря, такая кривая замкнута в трехмерном торе  $T^3$  (зоне Бриллюэна); тополог скажет, что она негомотопна нулю в  $T^3$ . Компактные орбиты таковы, что  $\mathbf{l}^* = 0$  и с топологической точки зрения гомотопны нулю в трехмерном торе  $T^3$ .

Легко видеть, что периодические некомпактные траектории могут возникать лишь в том случае, если направление магнитного поля  $\mathbf{B}$  таково, что ортогональная ему плоскость  $\Pi(\mathbf{B})$  содержит, по крайней мере, один вектор  $\mathbf{l}^* \neq 0$ , принадлежащий обратной решетке.

Мы рассмотрим теперь магнитные поля  $\mathbf{B}$ , имеющие "иррациональные" направления общего положения, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Плоскость  $\Pi(\mathbf{B})$  не содержит векторов обратной решетки.

2. Все точки касания плоскостей, ортогональных  $\mathbf{B}$ , и поверхности Ферми являются невырожденными (замечим, что эти точки являются критическими точками динамической системы (12) на поверхности Ферми).

3. Сепаратрисная траектория, выходящая из одного седла, не входит ни в какое другое седло, т.е. она либо не имеет второго конца, либо возвращается в то же седло. (В случае общего положения на любой из плоскостей, параллельных  $\Pi(\mathbf{B})$ , т.е. ортогональных  $\mathbf{B}$ , содержится не более одного седла.)

Определим "топологический ранг" поверхности Ферми. Уравнение

$$\epsilon_n(\mathbf{p}) = \epsilon_F$$

в пространстве квазиимпульсов  $R^3$  (расширенная зона Бриллюэна) задается с помощью периодической функции  $\epsilon_n(\mathbf{p})$ . Задаваемая им поверхность в  $R^3$  есть объединение "компонент связности", на каждой из которых две различные точки могут быть соединены путем, лежащим

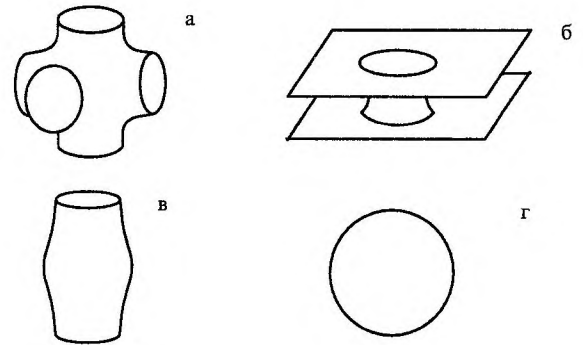


Рис. 6. Примеры поверхностей Ферми ранга 3, 2, 1 и 0 соответственно.

на ферми-поверхности. Мы будем называть поверхность Ферми "топологически сложной", если существует по крайней мере одна компонента связности, которая не лежит между двумя параллельными плоскостями в  $R^3$ . В этом случае мы будем говорить, что эта компонента поверхности Ферми (и сама поверхность Ферми) имеет топологический ранг 3 (рис. 6а).

Поверхность Ферми имеет топологический ранг 2, если любая из ее компонент связности может быть заключена между некоторыми двумя параллельными плоскостями, но существует по крайней мере одна компонента, которую нельзя заключить в цилиндр. (Это компоненты типа "гофрированной плоскости", рис. 6б.) При этом возможна ситуация, когда существуют две (или более) компоненты связности ранга 2, такие, что они заключены между парами параллельных плоскостей, имеющими различные общие направления (рис. 7).

Поверхность Ферми имеет топологический ранг 1, если любая из ее компонент связности может быть заключена в некоторый цилиндр и существует по крайней мере одна компонента, которая не может быть заключена в сферу конечного радиуса (компоненты типа "гофрированного цилиндра", рис. 6в).

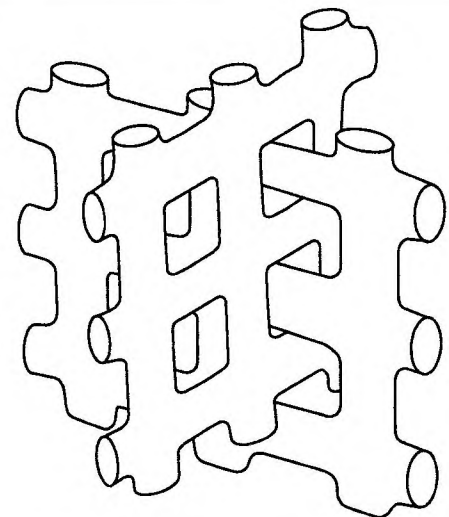


Рис. 7. Пример поверхности Ферми топологического ранга 2, содержащей две компоненты с различными целочисленными направлениями.



Поверхность Ферми имеет топологический ранг 0, если любая из ее компонент связности может быть заключена в сферу конечного радиуса (рис. 6г).

Прикладывая однородное магнитное поле, мы получим электронные траектории, задаваемые пересечением плоскостей  $\Pi(\mathbf{B})$  с поверхностью Ферми. Возможны следующие случаи:

1. Поверхность Ферми имеет топологический ранг 0. Все электронные траектории являются замкнутыми.

2. Поверхность Ферми имеет топологический ранг 1. Электронные траектории могут быть как замкнутыми, так и открытыми. При этом открытые орбиты могут возникать, только если магнитное поле ортогонально оси цилиндра, соответствующего какой-либо из компонент. Однако даже в этом случае все орбиты могут быть компактными, как, например, в случае "спирали" (рис. 8).

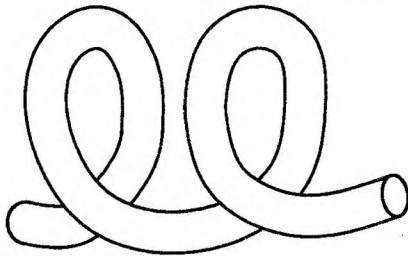


Рис. 8. Связная компонента типа "спирали". Открытые орбиты отсутствуют при любом направлении  $\mathbf{B}$ .

Открытые орбиты (если они существуют) являются при этом периодическими с вектором периода, направленным вдоль оси соответствующего цилиндра. Эта картина, очевидно, соответствует необщему положению, поскольку открытые орбиты соответствуют лишь однопараметрическому семейству направлений  $\mathbf{B}$  на единичной сфере.

3. Поверхность Ферми имеет топологический ранг 2. Мы можем иметь замкнутые и открытые траектории при любом направлении магнитного поля  $\mathbf{B}$ . При этом, как уже указывалось ранее, вообще говоря, могут существовать компоненты связности ранга 2, отвечающие различным общим направлениям соответствующих пар параллельных плоскостей. Легко видеть, что любая из открытых траекторий лежит в прямой полосе конечной ширины, получаемой пересечением с плоскостью  $\Pi(\mathbf{B})$  пары целочисленных плоскостей, ограничивающих соответствующую компоненту связности. (Мы предполагаем, что  $\Pi(\mathbf{B})$  не совпадает по направлению ни с одной из таких плоскостей  $\Pi^{(j)}(\epsilon_F)$ , соответствующих связным компонентам поверхности Ферми.) Мы утверждаем при этом, что при направлениях магнитного поля общего положения (иррациональности 3) открытые траектории могут существовать лишь на компонентах связности, отвечающих одному и тому же направлению плоскостей  $\Pi^{(j)}(\epsilon_F)$ . Все открытые траектории имеют, таким образом, одно и то же среднее направление, задаваемое пересечением  $\Pi(\mathbf{B})$  с соответствующими  $\Pi^{(j)}(\epsilon_F)$ , имеющими одно и то же направление. Эта картина, кроме того, локально устойчива при малых вращениях магнитного поля  $\mathbf{B}$ , и топологический тип тензора проводимости определяется целочисленной плоскостью, параллельной всем соответствующим  $\Pi^{(j)}(\epsilon_F)$ . При больших отклонениях направления магнитного поля открытые

траектории на рассматриваемых компонентах связности могут исчезнуть и появиться на компонентах связности с другим направлением целочисленных плоскостей  $\Pi^{(j)}(\epsilon_F)$  (если такие имеются), что будет соответствовать переходу в другую зону устойчивости или переходу к Случаю 1, если новых открытых траекторий не появляется вообще. Заметим, что если  $\Pi(\mathbf{B})$  совпадает с одной из  $\Pi^{(j)}(\epsilon_F)$ , то все открытые траектории периодичны в силу целочисленности направления  $\mathbf{B}$ . Описанная картина демонстрирует уже все основные черты общего поведения тензора проводимости, имеющего место согласно нашему рассмотрению, опирающемуся на строгие топологические теоремы [16–23].

4. Рассмотрим теперь наиболее интересный случай поверхности Ферми, имеющей топологический ранг 3. Вообще говоря, рассматривая электронные орбиты, мы каждый раз имеем дело лишь с одной из компонент связности поверхности Ферми. Отождествляя эквивалентные точки в пространстве квазиимпульсов

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p} + \mathbf{l}^*,$$

мы получаем замкнутую двумерную поверхность в трехмерном торе  $T^3$  (зоне Бриллюэна). Рассмотрим магнитное поле  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  полностью иррационального направления, так что  $\Pi(\mathbf{B})$  не содержит векторов обратной решетки  $\mathbf{l}^*$  и соответствующее семейство электронных орбит удовлетворяет условиям невырожденности 1, 2, 3 (см. выше).

Удалим из поверхности Ферми все несингулярные замкнутые траектории (все они являются замкнутыми кривыми в пространстве квазиимпульсов  $R^3$ ). Оставшаяся часть является, очевидно, объединением поверхностей, границами которых являются замкнутые сингулярные (т.е. заканчивающиеся в особой точке) траектории. Таким образом, поверхность Ферми после удаления компактных несингулярных траекторий является объединением компонент  $S_i$  (если открытые орбиты вообще существуют). Границы  $S_i$  есть наборы замкнутых сингулярных (сепаратрисных) траекторий  $\gamma_{ia}$  (рис. 9).

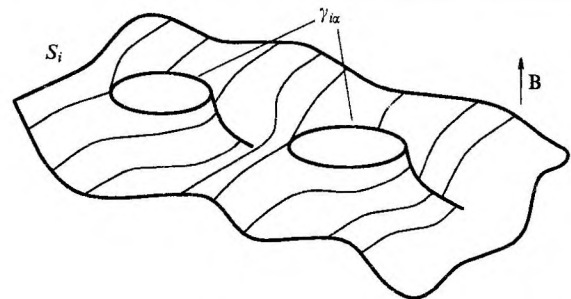


Рис. 9. Участки  $S_i$ , состоящие из открытых траекторий. Замкнутые сингулярные траектории  $\gamma_{ia}$  с критическими точками образуют границу участков  $S_i$ .

Каждая из сепаратрисных траекторий является плоской кривой в  $\Pi(\mathbf{B})$ . Ее внутренность есть с топологической точки зрения двумерный диск  $D_{ia}$ , лежащий в плоскости  $\Pi(\mathbf{B})$ . Заполним теперь все границы  $\gamma_{ia}$  плоскими двумерными дисками  $D_{ia}$ , добавляя их к поверхностям  $S_i$  (так называемые частичные поверхности Ферми). В итоге мы получим двумерные кусочно-гладкие поверхности в  $R^3$  и, соответственно, их образы  $\tilde{S}_i$  в трехмерном

торе  $T^3$  после отождествления квазиимпульсов. По определению, все открытые орбиты лежат на построенных таким образом поверхностях.

Мы будем называть род поверхности  $\bar{S}_i$  в трехмерном торе "родом соответствующих открытых траекторий", лежащих на ней (для направлений магнитного поля иррациональности 3).

Наиболее важным топологическим результатом, извлеченным авторами из работ А.В. Зорича [16] и И.А. Дынникова [17–22], является то, что в случае общего положения все построенные таким образом поверхности  $\bar{S}_i$  имеют род 1. Это означает, что поверхности  $\bar{S}_i$  топологически эквивалентны двумерным торами, помещенным в зону Бриллюэна — трехмерный тор  $T^3$ . Общее доказательство этой теоремы весьма нетривиально (см. [19]), и мы не будем пытаться привести его здесь.

Слова "в случае общего положения" означают здесь, что если для какого-то уровня энергии  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0$  это утверждение неверно, то такая ситуация разрушается сколь угодно малым изменением энергетического уровня при заданном направлении  $\mathbf{B}$  (см. [20]), причем множество направлений магнитного поля  $\mathbf{B}$ , при которых может не выполняться указанное утверждение, имеет меру нуль, что вытекает из результатов [20–22]. Нетрудно показать, что поверхности  $\bar{S}_i$  на самом деле погружены в трехмерный тор  $T^3$  без самопересечений. Они также не пересекают друг друга. Сформулированные свойства приводят к следующему результату: каждая из поверхностей  $\bar{S}_i$  в полном пространстве квазиимпульсов  $R^3$  выглядит в случае общего положения как "гофрированная плоскость" после описанного нами заполнения двумерных дисков  $D_{ix}$ . Таким образом, ее пересечения плоскостями, параллельными  $\Pi(\mathbf{B})$ , лежат в полосах конечной ширины в этих плоскостях.

Локальная устойчивость описанной топологической картины вытекает из локальной устойчивости компактных несингулярных траекторий, используемых при построении описанной "редуцированной поверхности Ферми", относительно малых вращений магнитного поля. Сформулированные нами условия "невыврожденности" для поверхности Ферми и условия "общего положения" (см. выше) для направления магнитного поля  $\mathbf{B}$  существенны при выводе сформулированных утверждений. Из перечисленных аргументов, как легко проводить, вытекает обоснование Случая 2 для тензора проводимости общего положения.

Отметим, что первый пример таких топологически устойчивых открытых орбит был построен И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским в работе [2] для поверхности Ферми меди (или так называемой "тонкой" пространственной сетки после исследования Пиппардом поверхности Ферми для Cu). Для этой "тонкой пространственной сетки" (рис. 10, соответствующий рис. 2, 3 в [2]) в заштрихованных зонах устойчивости мы будем иметь открытые орбиты общего положения, соответствующие Случаю 2. Как было отмечено И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским, средние направления открытых траекторий задаются здесь пересечением плоскостей, ортогональных магнитному полю, с координатными плоскостями  $(xy)$ ,  $(yz)$  и  $(xz)$  (для соответствующих зон устойчивости). Таким образом, мы в этом случае будем иметь топологические типы, задаваемые числами

$$(M_1, M_2, M_3) = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1).$$

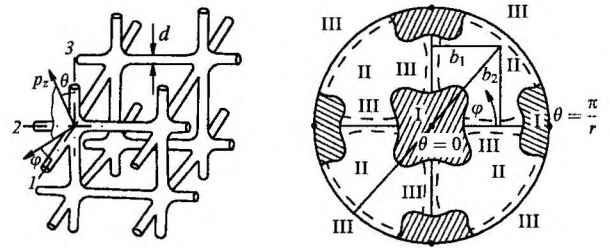


Рис. 10. Так называемая "тонкая пространственная сеть" и соответствующие ей зоны устойчивости. Как было показано И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским, средние направления открытых орбит в этих зонах задаются пересечениями  $\Pi(\mathbf{B})$  с координатными плоскостями  $(xy)$ ,  $(yz)$ ,  $(xz)$ .

Зоны устойчивости образуют здесь маленькие области вблизи соответствующих направлений магнитного поля на единичной сфере. Оставшаяся часть единичной сферы относится (для достаточно "тонкой" сетки) к Случаю 1.

Во второй работе [3] указанных авторов были представлены области на единичной сфере, для которых существуют открытые орбиты, в случае более сложных поверхностей Ферми, задаваемых соотношением

$$\begin{aligned} & \alpha \left( \cos \frac{ap_x}{\hbar} + \cos \frac{ap_y}{\hbar} + \cos \frac{ap_z}{\hbar} \right) + \\ & + \beta \left( \cos \frac{ap_x}{\hbar} \cos \frac{ap_y}{\hbar} + \cos \frac{ap_y}{\hbar} \cos \frac{ap_z}{\hbar} + \cos \frac{ap_z}{\hbar} \cos \frac{ap_x}{\hbar} \right) + \\ & + \delta \cos \frac{ap_x}{\hbar} \cos \frac{ap_y}{\hbar} \cos \frac{ap_z}{\hbar} = \zeta_0, \end{aligned} \quad (15)$$

при различных значениях параметров (в этой работе не указывалось существование соответствующих целочисленных плоскостей)<sup>3</sup>. Авторы [3], однако, неверно утверждают, что они нашли области на единичной сфере, где сосуществуют открытые траектории с различными средними направлениями (см. рис. 4 в [3]). Этот результат [3] противоречит нашим общим утверждениям и не может быть верным. Описываемая авторами [3] ситуация не может наблюдаться для целых областей на единичной сфере. Последняя картина на рис. 11 (см. рис. 4 в [3]), таким образом, неправильна. Наше утверждение является строгим математическим следствием топологических теорем, доказанных в работе [19].

Отметим еще одну существенную особенность. Как было указано авторами [3], существует конечное число топологически различных типов поверхностей Ферми, задаваемых уравнением (15), при различных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  и  $\zeta_0$ . Все эти типы были описаны авторами [3], и для каждого из них была приведена соответствующая диаграмма областей существования открытых траекторий (см. рис. 11). При этом области существования (на единичной сфере) открытых траекторий подразумеваются относящимися к типу поверхности Ферми в целом. Такой подход, однако, является, с нашей точки зрения, возможно, не вполне оправданным. Причина состоит в том, что при вариации параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  и

<sup>3</sup> Наши обозначения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\zeta_0$  не совпадают здесь с принятыми в [3], нам, однако, будет удобнее пользоваться этими обозначениями.



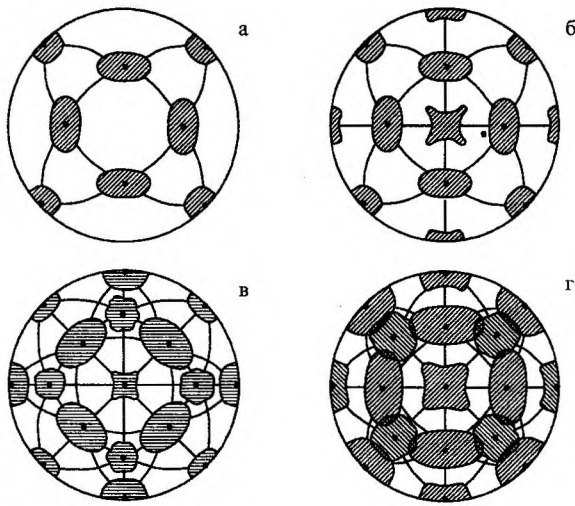


Рис. 11. Зоны устойчивости, представленные И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским для различных аналитических примеров ферми-поверхностей, соответствующих кубической решетке. Целочисленные плоскости, соответствующие этим зонам, в литературе не обсуждались. Согласно нашим результатам, последняя диаграмма ошибочна, поскольку зоны устойчивости не могут пересекать друг друга по целой области на единичной сфере и открытые траектории общего положения с различными средними направлениями не могут сосуществовать на целой области.

$\zeta_0$  области существования открытых траекторий и соответствующие им целочисленные плоскости претерпевают изменения, даже если при этом не происходит перестройки поверхности и изменения ее топологии.

Далее мы, опираясь на работы [20–22], а также [16], формулируем другой результат. Именно:

1. Объединение зон устойчивости (т.е. зон существования открытых траекторий общего положения) для всех поверхностей, задаваемых уравнением (15) при фиксированных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  и всевозможных  $\zeta_0$ , представляет собой всюду плотное множество на единичной сфере. При этом зоны устойчивости, соответствующие разным целочисленным плоскостям, не пересекают друг друга, хотя могут иметь общую точку на границе. Здесь будут существовать зоны, соответствующие топологическим типам со сколь угодно большими номерами  $M_j$ , являющиеся топологическими характеристиками дисперсионного закона в целом при фиксированных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$ . При фиксированном  $\zeta_0$  мы будем наблюдать лишь часть этих зон, в то время как внутренности оставшихся будут соответствовать Случаю 1. При изменении  $\zeta_0$  наблюдаемые топологические типы и форма соответствующих им зон будут меняться, даже если не происходит изменения топологии поверхности.

2. Изменение в описанной картине параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  меняет границы крупных зон и приводит к полной перестройке зонной картины для мелких зон, соответствующих целочисленным плоскостям с большими  $(M_1, M_2, M_3)$  (мы, как и в п. 1, рассматриваем здесь набор зон при всевозможных  $\zeta_0$ ). Соответствующая граничная величина  $|M_j|$  тем больше, чем меньше вариация параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$ .

Таким образом, из сказанного можно заключить, что общая картина областей устойчивости для поверхностей, задаваемых (15), должна быть более сложной. Тем не менее области (а также черные линии) существования

открытых траекторий, приведенные И.М. Лифшицем и В.Г. Песчанским на первых трех картинках рис. 11 (см. рис. 1–3 в [3]), правильно передают положение самых крупных зон устойчивости, которые всегда имеются для поверхностей, задаваемых соотношением (15), при неизменном топологическом типе и в этом смысле соответствуют данным топологическим типам поверхностей, задаваемых (15). Мы предсказываем здесь существование также более мелких зон со сложными топологическими типами тензора проводимости.

В работе [2] тех же авторов был вычислен вклад (3) открытых траекторий описанного вида (т.е. лежащих в полосе конечной ширины и проходящих ее насквозь) в тензор электропроводности в пределе сильных магнитных полей. Этот результат верен для открытых траекторий общего положения, обсуждаемых в нашей работе [24] и здесь. Наши результаты, однако, используют, кроме этого, свойство, вытекающее из топологии, а именно, все устойчивые открытые траектории общего положения имеют одно и то же среднее направление.

Последнее свойство, как было указано, справедливо только для устойчивых открытых орбит общего положения. Так, например, если направление магнитного поля  $\mathbf{B}$  таково, что плоскость  $\Pi(\mathbf{B})$  является целочисленной (содержит два неколлинеарных вектора обратной решетки), мы можем иметь открытые орбиты с различными целочисленными средними направлениями  $\Gamma^*$ . Классификация открытых орбит при этом очень проста, а именно, каждая из открытых орбит является периодической, и каждая из них дает свой вклад, описанный в [2], в тензор проводимости. Сумма таких "частичных тензоров проводимости"  $\sigma_{\text{loc}}^{\alpha\beta}$  будет иметь, однако, уже более сложную структуру, чем в Случае 2; в частности, будет отсутствовать собственный вектор с нулевым собственным значением в плоскости  $\Pi(\mathbf{B})$  при  $B \rightarrow \infty$ . Такая картина разрушается при любых малых вращениях поля  $\mathbf{B}$ . Если направление магнитного поля  $\mathbf{B}$  таково, что плоскость  $\Pi(\mathbf{B})$  содержит лишь один целочисленный вектор  $\Gamma^*$  (с точностью до пропорциональности), описываемая ситуация уже невозможна.

Что касается открытых траекторий, могущих возникнуть в случае, если  $\Pi(\mathbf{B})$  содержит один целочисленный вектор (направление  $\mathbf{B}$  иррациональности 2), то, как было показано И.А. Дынниковым [20], все открытые траектории имеют здесь асимптотическое направление. Это, однако, не означает, что открытая траектория в этом случае обязательно лежит в прямой полосе конечной ширины и проходит ее насквозь, и, кроме траекторий общего положения, обладающих указанным свойством, при таких направлениях  $\mathbf{B}$  могут существовать (соответствующий пример построен С.П. Царевым) открытые траектории, удовлетворяющие следующему более слабому ограничению: существует ортонормированный базис  $(e_1, e_2)$  в  $\Pi(\mathbf{B})$ , такой, что:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_1(t) - p_1(0)}{t} = \text{const} \neq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_2(t) - p_2(0)}{t} = 0.$$

Траектории такого типа, так же как и эргодические траектории, наблюдаемые при направлениях  $\mathbf{B}$  иррациональности 3, неустойчивы по отношению к любым сколь угодно малым вращениям направления  $\mathbf{B}$ .

#### 4. Заключение

Мы хотели бы здесь отметить важную особенность рассматриваемой картины. Везде ранее мы предполагали, что различные участки ферми-поверхности (или поверхности Ферми, относящиеся к разным энергетическим зонам, имеющиеся у многих металлов) не пересекают друг друга. Указанное свойство может, вообще говоря, и не иметь места для некоторых веществ. В частности, для некоторых металлических решеток в силу свойств симметрии различные поверхности Ферми (в нашей терминологии — различные компоненты) могут очень близко подходить друг к другу, и в результате межзонного магнитного пробоя [28] при сильных магнитных полях происходит их эффективная перестройка, так что электрон движется по одной из компонент, не замечая второй в местах их пересечения (физические условия на величину  $B$  могут быть найдены в [10]). В этом случае мы можем применять наши рассуждения только для открытых траекторий, лежащих на каждой из несамопересекающихся компонент в отдельности, и выделять отдельно зоны устойчивости, соответствующие каждой из компонент. При этом зоны устойчивости, соответствующие различным пересекающимся компонентам, вообще говоря, независимы друг от друга. Здесь мы можем иметь пересекающиеся зоны устойчивости и, соответственно, области на единичной сфере, где существуют открытые траектории общего положения с различным средним направлением. Такая ситуация наблюдается при сильных магнитных полях в области так называемого "сильного магнитного пробоя". (На проблеме магнитного пробоя в данном рассмотрении авторам было указано М.И. Кагановым.)

В заключение авторы благодарят М.И. Каганова, В.Г. Песчанского, Л.А. Фальковского и М.Е. Фишера за плодотворные обсуждения.

#### Список литературы

1. Лифшиц И М, Азбель М Я, Каганов М И *ЖЭТФ* **31** 63 (1956)
2. Лифшиц И М, Песчанский В Г *ЖЭТФ* **35** 1251 (1958)
3. Лифшиц И М, Песчанский В Г *ЖЭТФ* **38** 188 (1960)
4. Алексеевский Н Е, Гайдуков Ю П *ЖЭТФ* **35** 554 (1958)
5. Алексеевский Н Е, Гайдуков Ю П *ЖЭТФ* **36** 447 (1959)
6. Алексеевский Н Е, Гайдуков Ю П *ЖЭТФ* **37** 672 (1959)
7. Гайдуков Ю П *ЖЭТФ* **37** 1281 (1959)
8. Лифшиц И М, Каганов М И *УФН* **69** 419 (1959)
9. Лифшиц И М, Каганов М И *УФН* **78** 411 (1959)
10. Лифшиц И М, Азбель М Я, Каганов М И *Электронная теория металлов* (М.: Наука, 1971)
11. Абрикосов А А *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987)
12. Новиков С П *УМН* **37** 3 (1982)
13. Новиков С П *Труды МИАН* **166** 201 (1984)
14. Novikov S P *Topological Methods in Mathematics* (Proc. Conference dedicated to the 60th birthday of J. Milnor, June 15–22, 1991) (S.U.N.Y.: Stony Brook, 1993)
15. Novikov S P *Proc. Conf. of Geometry* (December 15–26, 1993) (Tel Aviv: Tel Aviv University, 1995)
16. Зорич А В *УМН* **39** 235 (1984)
17. Дынников И А *УМН* **47** 161 (1992)
18. Дынников И А *УМН* **48** 179 (1993)
19. Дынников И А *Мат. заметки* **53** 57 (1993)
20. Dynnikov I A "Semiclassical motion of the electron. A proof of the Novikov conjecture in general position and counterexamples", in *Advances in the Mathematical Sciences. Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad* (Eds V.M. Buchstaber, S.P. Novikov) (American Mathematical Society Translations, Series 2, Advances in Soviet Math., Vol. 179) (New York: American Mathematical Society, 1997)
21. Dynnikov I A *Surfaces in 3-Torus: Geometry of plane sections* (Proc. of ECM2, BuDA, 1996)
22. Дынников И А *Дисс... канд. физ.-мат. наук* (М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1996)
23. Царев С П, частное сообщение (1992–1993)
24. Новиков С П, Мальцев А Я *Письма в ЖЭТФ* **63** 809 (1996)
25. Pippard A B *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **250** 325 (1957)
26. Дынников И А, Мальцев А Я *ЖЭТФ* **112** 371 (1997)
27. Мальцев А Я *ЖЭТФ* **112** 1710 (1997)
28. Cohen M H, Falicov L M *Phys. Rev. Lett.* **7** 231 (1961)

#### Topological phenomena in normal metals

S.P. Novikov

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,

ul. Kosygina 2, 117940 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 137-32 44; (7-095) 702-93 17

Fax (7-095) 938-20 77

E-mail: novikov@itp.ac.ru

Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, Maryland 20742-2431,

Tel. 301-779-74-72

Fax 301-314-93-63

E-mail: novikov@ipst.umd.edu

A.Ya. Mal'tsev

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,

ul. Kosygina 2, 117940 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 137-32 44; (7-095) 702-93 17

Fax (7-095) 938-20 77

E-mail: maltsev@itp.ac.ru

Galvanomagnetic phenomena in metals in strong magnetic fields are considered that are associated with the Fermi surface geometry. Using three-dimensional topology theorems, all possible cases are classified. For non-closed general-position electron orbits, topological characteristics are introduced for the conductivity tensor at  $B \rightarrow \infty$ .

PACS numbers: 02.40.Vh, 72.15.Gd

Bibliography — 28 references

Received 9 October 1997