

Эффективное действие и функция Грина для сжимаемого холловского краевого состояния

Л.С. Левитов, А.В. Шитов, Б.И. Гальперин

Край системы с квантовым эффектом Холла (КЭХ) играет центральную роль в переносе заряда, так как краевые состояния переносят холловский ток [1]. Для дробных факторов заполнения ν уровня Ландау с нечетным знаменателем, соответствующих несжимаемым состояниям КЭХ, возбуждения края состояния КЭХ образуют сильно взаимодействующую одномерную систему, которая вызвала большой интерес [2, 3]. Теоретическая картина края КЭХ основывается на моделях киральной жидкости Латтинжера (χ LL-модель), включающей одну или несколько киральных мод, которые могут распространяться в одном и том же или в противоположных направлениях.

Другая важная часть теории КЭХ — это фермионный подход Черна–Саймонса, который описывает как сжимаемые состояния КЭХ при дробных факторах заполнения с четным знаменателем, таких как $\nu = 1/2$, так и несжимаемые состояния [4, 5]. В этом подходе дробный КЭХ сводится к задаче о целочисленном КЭХ для новых квазичастиц — композитных фермионов [6], которые взаимодействуют со статистическим калибровочным полем Черна–Саймонса, так что каждый фермион несет четное число p квантов магнитного потока Черна–Саймонса. Тогда структура края состояний КЭХ может быть определена из уровней Ландау для композитных фермионов в усредненном остаточном магнитном поле [7].

Ниже мы приводим теорию [12] туннелирования в край КЭХ, основанную на представлении о композитных фермионах. Мы получим, что при определенных условиях вольт-амперная характеристика описывается степенной зависимостью $I \propto V^\alpha$. Показатель туннелирования α зависит только от проводимости и взаимодействия в объеме и нечувствителен к деталям структуры края. В этом случае основной эффект является результатом релаксации электромагнитного возмущения, вызванного туннелирующим электроном, которое включает как плотности заряда и тока, так и поле Черна–Саймонса. Характерные времена и масштабы этого динамического процесса очень велики, что позволяет описать его основное поведение через функции измеряемого электромагнитного отклика, продольную и холловскую проводимости. При этом показатель туннелирования может быть найден как функция фактора заполнения.

Эффективное действие. Влияние взаимодействия на скорость туннелирования возникает, в основном, из-за релаксации коллективных электродинамических мод. Для того чтобы описать его, мы используем теорию квазиклассического эффективного действия, развитую в [15].

Ниже мы представим различные части этого действия для нашей системы. Во мнимом времени, действие для плотности заряда $n(r, t)$ и тока $j_\alpha(r, t)$ композитных фермионов записывается как

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_\omega \int d^2r \left[\frac{\rho_{\alpha\beta}^{(0)}}{|\omega|} j_{\alpha, -\omega}(r) j_{\beta, \omega}(r) + g n_{-\omega}(r) n_\omega(r) \right], \quad (1)$$

где ω — мацубаровская частота. Здесь $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}$ — тензор удельного электрического сопротивления, $g = U + \kappa_0^{-1}$ — сумма короткодействующего взаимодействия U и обратной сжимаемости (плотности состояний) не взаимодействующей системы.

Взаимодействие со статистическим калибровочным полем описывается с помощью действия Черна–Саймонса:

$$S_{CS} = i \int dt \int d^2r \left(n a_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{4\pi p} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \right). \quad (2)$$

Отметим, что плотности тока и заряда не являются независимыми из-за сохранения заряда. Решая уравнение неразрывности $\dot{\rho} + \nabla j = 0$, можно представить n и j через поле смещения:

$$n = -\nabla w, \quad \mathbf{j} = \dot{w}. \quad (3)$$

Заряд, инжектированный в край состояния КЭХ, может быть описан как источник, локализованный на границе: $\dot{w}_y(y=0) = J(x, t)$, где $J = e\delta(x)[\delta(t+\tau) - \delta(t-\tau)]$ описывает добавление композитного фермиона в момент $-\tau$ и его удаление в момент τ . Соответствующая часть действия строится с помощью множителя Лагранжа:

$$S_\phi = i \int dx \int dt \phi(x, t)(\dot{w}_y - J). \quad (4)$$

Можно просто взять $S = S_n + S_{CS} + S_\phi$. Однако в этой форме действие не является калибровочно-инвариантным из-за несохранения заряда в члене S_ϕ . Для того чтобы восстановить калибровочную инвариантность, мы добавим следующий член:

$$S_{flux} = i \int dx \int dt a_0 \tilde{J}(x, t), \quad (5)$$

где

$$\tilde{J}(x, t) = \int_{-\infty}^t J(x, t) = e\delta(x)[\theta(t+\tau) - \theta(t-\tau)].$$

Наконец, полное действие есть $S_{total} = S_n + S_{CS} + S_\phi + S_{flux}$.

Физическое значение S_{flux} следующее. Можно заметить, что добавление одного электрона в систему эквивалентно добавлению одного композитного фермиона и p отрицательных квантов магнитного потока. Таким образом, член (4), описывающий добавление одного составного фермиона, должен быть дополнен соответствующим потоком в (4). При этом предполагается, что время, за которое инжектированный электрон связывается с p квантами статистического калибровочного поля, очень мало по сравнению с характерным временем полной релаксации, и, таким образом, этот процесс описывается $-p$ квантами, добавленными в точке входа, которые должны быть устранены после того, как электрон будет удален. В действии этот процесс описывается членом

$$i \int_{-\tau}^{\tau} a_0(0, t) dt,$$

что совпадает с (5).

Динамические уравнения получаются путем вариации этого действия по отношению ко всем переменным и устранения множителя Лагранжа ϕ . Получающиеся в результате уравнения имеют стандартную форму:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(0)}\mathbf{j} &= \mathbf{E}_{\text{CS}} - \nabla(gn), \\ \frac{1}{2\pi p} E_{\text{CS}}^z &= \varepsilon^{\alpha\beta} j^\beta, \\ \frac{1}{2\pi p} B_{\text{CS}} &= n + \tilde{J},\end{aligned}\quad (6)$$

где $\mathbf{E}_{\text{CS}} = \nabla a_0 + \dot{\mathbf{a}}$ и $B_{\text{CS}} = \nabla \times \mathbf{a}$. Легко проверить, что исключение поля Черна–Саймонса приводит к закону Ома с модифицированным тензором удельного сопротивления:

$$\hat{\rho}\mathbf{j} = -\nabla(gn), \quad (7)$$

где

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(0)} + \frac{ph}{e^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

— тензор измеряемого удельного сопротивления.

Интегрирование по переменным в объеме. Для того чтобы понять теорию, описывающую действие S_{total} , выведем эффективную одномерную задачу, проинтегрировав по динамическим переменным в объеме и сохранив только переменные краевого состояния. Динамические уравнения (7) в полуплоскости $y > 0$ записываются как

$$i\omega\rho_{\mu\nu}w_\nu = g\partial_\mu(\partial_\lambda w_\lambda). \quad (9)$$

Для того чтобы выразить $\mathbf{w}(t, x, y)$ через объемные величины $\mathbf{w}(t, x, 0)$, проведем фурье-преобразование по x ,

$$\mathbf{w}_\omega(x, y) = \int \mathbf{w}_{\omega, k}(y) \exp(ikx) \frac{dk}{2\pi}, \quad (10)$$

и решим (9) относительно w_x :

$$w_x = i \frac{\rho_{xy}\omega - gk\partial_y}{\rho_{xx}|\omega| + gk^2} w_y. \quad (11)$$

$w_y(y)$ удовлетворяет уравнению $[q^2 - \partial_y^2]w_y = 0$, где $q^2 = k^2 + |\omega|/(g\sigma_{xx})$. В терминах значений на границе $w_y(y) = w_y(0) \exp(-qy)$.

После подстановки этих результатов в действие получаем

$$S = \int \frac{d\omega dk}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\omega|u_{-\omega}u_\omega}{(\sigma_{xx}q + i\sigma_{xy}k \operatorname{sign} \omega)} - \phi_{-\omega}[i\omega u + J(\omega)] \right\}, \quad (12)$$

где $u = w_y$ и $J(\omega) = 2ie \sin(\omega\tau)$.

Наконец, проинтегрировав по u , получим

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \int \frac{d\omega dk}{(2\pi)^2} (\sigma_{xx}q|\omega| + i\sigma_{xy}k\omega) \phi_{-\omega, -k} \phi_{\omega, k} + \\ &+ i \int J(x, t) \phi(x, t) dx dt.\end{aligned}\quad (13)$$

Это эффективное действие представляет собой обобщение стандартной теории жидкости Латтинжера для краевой моды на случай сжимаемой двумерной системы с конечным σ_{xx} . Из-за зависимости q от ω диссипативный член в действии (13) является нелокальным во временном представлении. В случае несжимаемой системы $\sigma_{xx} = 0$, и мы приходим к стандартному действию для χLL -модели:

$$S = \frac{iv}{4\pi} \int \partial_x \phi \partial_t \phi dx dt + i \int J(x, t) \phi dx dt. \quad (14)$$

В этом выводе мы пренебрегли эффектами сжимаемости границы. Учет этих эффектов приводит к дополнительному члену

$$\int (\partial_t \phi)^2 dx dt,$$

который не влияет на динамику при больших временах и на окончательный ответ.

Отметим, что мы вывели действие (13) с источником. Таким образом, оператор рождения электрона может быть записан как $\psi^+(x, t) = \exp[i\phi(x, t)]$, что совпадает с обычным одномерным выражением.

Инстантонное действие. Для того чтобы найти показатель туннелирования, необходимо вычислить функцию Грина $\langle \psi(0, t) \psi^+(0, 0) \rangle$ для электрона. Из вышеуказанного соотношения между $\psi(x, t)$ и бозонной переменной $\phi(x, t)$ следует, что эта функция Грина может быть записана как

$$\left\langle \exp \left[i \int J(x, t) \phi(x, t) dx dt \right] \right\rangle.$$

Теперь усреднить с действием (13) достаточно просто: $G(t) = \exp(-S)$, где

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k, \omega} \frac{|J(\omega)|^2}{|\omega|(\sigma_{xx}q + i\sigma_{xy}k \operatorname{sign} \omega)}. \quad (15)$$

Интегрирование по k приводит к логарифмически расходящемуся выражению, которое мы обрежем при k_{max} :

$$S = \int \frac{d\omega}{|\omega|} |J(\omega)|^2 \left[\frac{\rho_{xx}}{8\pi^2} \ln \frac{gk_{\text{max}}^2}{|\omega|} + \frac{1}{4\pi^2} \rho_{xy} \theta_H \right]. \quad (16)$$

Отметим, что это выражение не исчезает даже в отсутствие поля Черна–Саймонса и взаимодействия ($p = 0$, $U = 0$). Это показывает, что часть полученного выражения представляет собой вклад от невзаимодействующих композитных фермионов и должна быть исключена. Физической причиной ультрафиолетовой расходимости при k_{max} является то, что для свободных фермионов релаксация происходит быстро при больших значениях импульсов $k \sim k_F$. С другой стороны, вклад, обусловленный взаимодействием, не расходится на больших импульсах. Для того чтобы выделить этот вклад, мы вычтем из (16) то же самое выражение с $p = 0$ и $U = 0$. Интегрируя эту разницу по ω , получим $S - S_0 = \alpha \ln(t/t_0)$, где α — показатель туннелирования, который будет обсужден ниже (см. (5)), и t_0 — минимальное время релаксации, имеющее порядок времени рассеяния.

Показатель туннелирования. Для оценки α предположим, что число квантов потока, связанных с композитными фермионами, есть $p = 2$ для $1/3 < \nu < 1$ и $p = 4$ для

$1/5 < \nu < 1/3$. Также для простоты предположим, что композитные фермионы имеют "затравочные" проводимости $\rho_{xx}^{(0)}$ и $\rho_{xy}^{(0)}$, которые являются константами, зависящими, например, от плотности, но не зависящими от температуры. Тогда измеряемые удельные сопротивления есть $\rho_{xy} = \rho_{xy}^{(0)} + ph/e^2$ и $\rho_{xx} = \rho_{xx}^{(0)}$. Теория предсказывает степенную зависимость $I \propto V^\alpha$ с показателем

$$\alpha = 1 + \frac{2e^2}{\pi h} \left[\theta_H \rho_{xy} - \theta_H^{(0)} \rho_{xy}^{(0)} \right] + \frac{e^2 \rho_{xx}}{\pi h} \ln \frac{g \kappa_0 \sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^{(0)}}, \quad (17)$$

где $\theta_H = \tan^{-1}(\rho_{xx}/\rho_{xy})$ — угол Холла, а $\theta_H^{(0)}$ — соответствующий затравочный угол Холла. Другие обозначения в (17) такие же, как и выше: $g = U + \kappa_0^{-1}$, где U — константа короткодействующего взаимодействия, $\kappa_0 = m^*/2\pi\hbar^2$ — затравочная сжимаемость композитных фермионов, определенная через эффективную массу m^* , которую мы полагаем константой.

На рисунке 1 показатель α представлен как функция ρ_{xy} , которая пропорциональна электронной плотности. Показатель туннелирования (17) является непрерывной и монотонно возрастающей функцией ρ_{xy} . Интересно, что в пределе $\rho_{xx} = 0$ показатель α имеет клявообразные сингулярности при $\nu = 1/2$ и $\nu = 1/4$, что соответствует $\rho_{xy} = 2,4$ на рис. 1. Чтобы понять это, рассмотрим окрестность точки $\nu = 1/2$, где состояние КЭХ можно описать как ферми-жидкость композитных фермионов, несущих по два кванта потока каждый и подверженных остаточному магнитному полю $\delta B = 2 - \nu^{-1}$. При $\nu < 1/2$ направление этого остаточного поля совпадает с направлением полного поля, и все краевые моды распространяются в одном и том же направлении [7]. С другой стороны, при $\nu > 1/2$ структура края качественно иная, так как она состоит из мод, распространяющихся в противоположных направлениях. Этот эффект создает при $\nu = 1/2$ сингулярную плотность.

Конечно, рассеяние из-за беспорядка будет сглаживать эту сингулярность. Однако интересно, что измене-

ние в показателе туннелирования (17), связанное с конечностью ρ_{xx} , может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от значения $U\kappa_0$ (см. рис. 1).

Основное отличие наших результатов от результатов теории киральной жидкости Латтинжера [2, 3] состоит в том, что мы получили *непрерывный* показатель туннелирования, в то время как χ LL-теория приводит к дискретному набору несжимаемых плотностей. Более того, эта теория строится разными способами для каждого несжимаемого заполнения и приводит к картине, которая предположительно верна для плотностей вблизи указанных значений фактора заполнения. Для каждой такой рациональной плотности эта теория предсказывает плато как в зависимости сопротивления, так и в зависимости показателя туннелирования. В то же самое время для плотностей, существенно отличающихся от этих "хороших плотностей", χ LL-теория не дает каких-либо предсказаний для плотности туннельных состояний или для $I(V)$ -кривых.

Однако в области перекрытия χ LL-теорией наши результаты согласуются с ее предсказаниями. Ниже мы обсудим результаты χ LL-теории. В этой теории край несжимаемого состояния КЭХ описывается как одноили многоканальная киральная жидкость Латтинжера. Для дробных чисел заполнения Джейна $\nu = n/(np + 1)$ с положительным целым n и четным p существует n краевых мод, которые все распространяются в одном направлении. В этом случае Вен [2] нашел, что всегда $\alpha = p + 1$. В противоположность этому для состояний, таких как дроби Джейна с отрицательным n , когда на краю существуют моды, распространяющиеся в противоположных направлениях, α может зависеть от формы взаимодействия. Тем не менее Кейн, Фишер и Полчински [3] нашли, что этом случае система стремится к универсальному пределу $\alpha = p + 1 - 2/|n|$ при достаточно большом рассеянии между каналами.

Наш результат (17) при большом угле Холла ($\theta_H = \theta_H^{(0)} = \pi/2$), согласуется с результатами χ LL-модели. При больших углах Холла для дробей Джейна $\nu = n/(pn \pm 1)$, мы использовали следующие значения для холловского и омического сопротивлений:

$$\rho_{xy} = \left(p + \frac{1}{n}\right) \frac{h}{e^2}, \quad \rho_{xy}^{(0)} = \frac{h}{ne^2}, \quad \rho_{xx} = \rho_{xx}^{(0)} = 0. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим $\alpha = 1 + |p + 1/n| - 1/|n|$, что согласуется с универсальным показателем туннелирования, найденным Венем, Кейном и др.

Сравнение с экспериментом. Недавно физика края состояния КЭХ была изучена экспериментально путем измерений туннельной проводимости, проведенных на системах, выращенных на сколе гетероструктуры [8–11]. В этом случае система из 2D-электронов имеет резкий край и очень гладкий ограничивающий потенциал с остаточными неоднородностями атомного масштаба. Благодаря своему высокому качеству эта система может быть использована для изучения туннелирования как в несжимаемые, так и в сжимаемые состояния КЭХ [9]. Получено, что туннельная проводимость не является омической для всех плотностей $\nu < 1$. При $V > 2\pi k_B T/e$ вольт-амперная характеристика описывается степенным законом $I \propto V^\alpha$, где показатель степени α является непрерывно возрастающей функцией $1/\nu$ [10, 11].

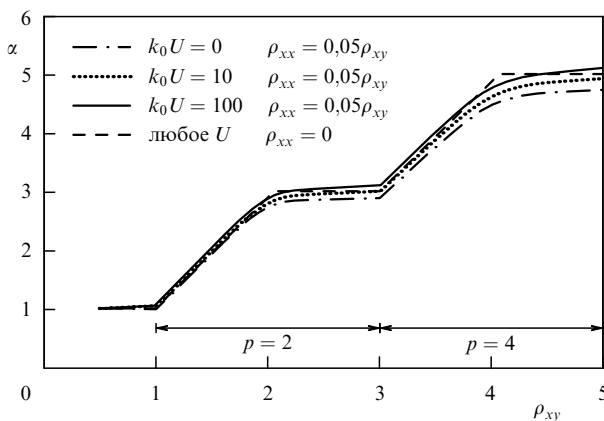


Рис. 1. Показатель туннелирования (17) как функция ρ_{xy} для композитного фермиона с $p = 2$ квантами магнитного потока при $1 \leq \rho_{xy} \leq 3$ и с $p = 4$ квантами при $3 \leq \rho_{xy} \leq 5$. Предполагается, что угол Холла постоянен. Для $\rho_{xx} = 0,05\rho_{xy}$ показатель дан для трех значений модельного короткодействующего взаимодействия U . При $\rho_{xx} = 0$ показатель имеет универсальное поведение (не зависящее от U), но при конечных ρ_{xx} он может быть как больше, так и меньше, чем этот универсальный результат, в зависимости от силы взаимодействия $\kappa_0 U$.

Экспериментальные результаты измерений показателя α (любезно предоставленные Грейсоном и Чангом) показаны на рис. 2. В большом диапазоне плотностей этот показатель линейно зависит от $1/v$.

Так как профиль плотности вблизи края резкий, наши результаты должны быть применимы к этой системе. Экспериментально измеренный угол Холла является большим: $\rho_{xy}/\rho_{xx} \approx 30$. Таким образом, при сравнении с теорией можно пренебречь эффектом конечности ρ_{xx} . Этот теоретический результат для больших углов Холла показан на рис. 2 прерывистой линией. Получается, что как теоретический, так и экспериментальный показатели как функции плотности $1/v$ являются гладкими и монотонно возрастающими функциями. Кроме этой общей черты, детали экспериментальной и теоретической зависимостей сильно различаются. Существуют два основных различия: а) разница в среднем наклоне кривых $\alpha(1/v)$ и б) плато с $\alpha = 3$ на теоретической кривой, которое отсутствует на экспериментальной зависимости.

Первое различие, вероятно, объясняется (по меньшей мере, частично) электростатическим влиянием увеличения плотности вблизи края [10, 11]. Численные эксперименты [10, 11] показывают, что плотность вблизи края выше, чем плотность внутри системы приблизительно на 12–16%. Если значения v соответственно перемасштабировать, средний наклон экспериментальной кривой, так же как и изгиб при $v = 1$, сдвинется ближе к теоретическим значениям.

Второе различие, очевидно, более существенно для физической картины того, что происходит на краю состояния КЭХ. В настоящее время непонятно, почему на экспериментальной кривой отсутствует плато. Очевидно, для того чтобы прояснить этот вопрос, чрезвычайно полезно было бы иметь больше данных о показателях туннелирования в других системах с КЭХ.

Отметим одну теоретическую возможность, которая может изменить теоретический показатель туннелирования, она связана с эффектами катастрофы ортогональности в ферми-жидкости композитных фермионов. Пред-

ставленная выше теория учитывает только эффекты встряхивания от электромагнитных мод, возникающие при малых k и малых ω . Однако могут существовать некоторые поправки к спектральной плотности композитных фермионов, возникающие при больших k , т.е. на малых расстояниях. Некоторое подтверждение такой возможности дают расхождимости, возникающие в теории возмущений для взаимодействующих композитных фермионов [13, 14].

Принимая во внимание расхождение с экспериментом, интересно понять, как изменится наш расчет при другом понятии квазичастицы. В последние годы было предложено большое число различных квазичастиц для проблемы КЭХ, таких как дробные заряды различного типа, композитные фермионы. Было бы интересно попытаться предсказать, что произойдет, если окажется, что эти квазичастицы вблизи края будут отличаться от квазичастиц в объеме.

С этой точки зрения ясно, что часть расчетов, которая имеет дело с эффективным действием для туннелирования, является неизменной. Что может измениться — так это выражение для оператора рождения электрона, представленное через оператор рождения квазичастицы, который используется для оценки туннельной плотности состояний. При таком изменении спектральная плотность будет всегда сохранять степенную зависимость, но показатель степени может измениться.

Мы благодарны А. Чангу и М. Грейсону за полезные обсуждения, и за предоставление их экспериментальных данных до публикации. Мы благодарим лабораторию Белла и национальный научный фонд за финансовую поддержку (грант DMR94-16190 и программа MRSEC DMR94-00334).

Список литературы

1. Halperin B I *Phys. Rev. B* **25** 2185 (1982); MacDonald A H, Streda P *Phys. Rev.* **29** 1616 (1987); Jain J K, Kivelson S A *Phys. Rev.* **37** 4276 (1988); Beenakker C W J *Phys. Rev. Lett.* **64** 216 (1990)
2. Wen X-G *Int. J. Mod. Phys. B* **6** 1711 (1992); *Phys. Rev. Lett.* **64** 2206 (1990); *Phys. Rev. B* **43** 11025 (1991)
3. Kane C L, Fisher M P A, Polchinski J *Phys. Rev. Lett.* **72** 4129 (1994); Kane C L, Fisher M P A *Phys. Rev. B* **51** 13449 (1995)
4. Halperin B I, Lee P A, Read N *Phys. Rev. B* **47** 7312 (1993)
5. Lopez A, Fradkin E *Phys. Rev. B* **44** 5246 (1991)
6. Jain J K *Phys. Rev. Lett.* **63** 199 (1989)
7. Chklovskii D B *Phys. Rev. B* **51** 9895 (1995); Brey L *Phys. Rev. B* **50** 11861 (1994)
8. Pfeiffer L N et al. *Appl. Phys. Lett.* **56** 1697 (1990)
9. Chang A M, Pfeiffer L N, West K W *Phys. Rev. Lett.* **77** 2538 (1996) и неопубликованные результаты.
10. Chang A M, частное сообщение
11. Grayson M et al. *Phys. Rev. Lett.* (in press)
12. Shytov A V, Levitov L S, Halperin B I *Phys. Rev. Lett.* (1997) (in press); cond-mat/9703246
13. Kim Y B, Wen X G *Phys. Rev. B* **50** 8078 (1994)
14. Altshuler B L, Ioffe L B, Millis A J *Phys. Rev. B* **50** 14049 (1994); Kim Y B et al. *Phys. Rev. B* **50** 17917 (1994)
15. Левитов Л С, Шитов А В *Письма в ЖЭТФ* (1997) (в печати); *Correlated Fermions and Transport in Mesoscopic Systems* (Editions Frontieres, 1996) p. 513

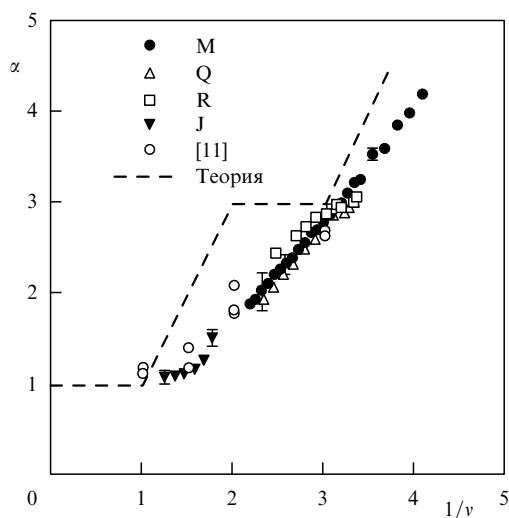


Рис. 2. Экспериментально измеренные значения показателя туннелирования α (любезно предоставленные Грейсоном и Чангом [11]). Различные символы представляют разные группы образцов. Для сравнения показана теоретическая кривая для большого угла Холла (прерывистая линия).