

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Подобие в задачах гидромеханики невесомости

П.К. Волков

Введение ускорения свободного падения в расчет характерных масштабов длины и скорости позволило получить в математической модели набор безразмерных параметров, с помощью которых стало возможным прогнозировать характер конвекции и переноса тепла и массы с изменением условий гравитации. Прямой расчет уравнений движения и переноса тепла показана эффективность предлагаемой записи законов сохранения для определения подобных явлений в жидкостях как в изотермическом, так и в неизотермическом случаях в земных и космических условиях.

PACS numbers: 03.40.Gc, 47.27.-i

Содержание

1. Введение (1323).
 2. Анализ размерностей и математическая модель (1324).
 3. Численные расчеты (1325).
 4. Классы инвариантных физических явлений (1325).
4.1. Подобие изотермических процессов. 4.2. Подобие течений в замкнутой области при нагретой боковой стенке. 4.3. Подобие течений при нагретой нижней стенке. 4.4. Подобие течений при естественной и термокапиллярной конвекциях. 4.5. Подобие по числу Прандтля.
 5. Практические рекомендации по использованию модельных сред (1328).
 6. Заключение (1329).
- Список литературы (1329).

1. Введение

Формальная констатация факта уменьшения коэффициента массовой силы в уравнениях движения в условиях невесомости не приводит к неизбежному выводу об уменьшении конвекции в жидкости. В присутствии внешних микроускорений, кориолисовой силы, вариаций ускорения свободного падения и других негравитационных источников движения, направление действия которых непрерывно изменяется, движение в жидкости определяется нелинейным взаимодействием рассматриваемых малых сил. Это, видимо, является основной причиной неповторяемости экспериментов, например, в области космического материаловедения [1]. Таким

образом, точный прогноз поведения жидких сред в космических условиях возможен только при решении полной нестационарной трехмерной задачи, что представляет в настоящее время сложную, не решенную до конца вычислительную проблему. В связи с этим на первый план выходит задача выяснения фундаментальных механизмов влияния условий свободного падения и микроускорений на гидродинамику жидких сред и устойчивость возникающих течений. Вторая задача состоит в определении реальных сред и геометрических размеров на Земле, которые позволяли бы в земных условиях моделировать процессы в жидкостях, происходящие в космических условиях. Только после этого возможно решение задач в космосе по созданию материалов с совершенными и заданными свойствами.

Система уравнений Обербека – Буссинеска является наиболее распространенной моделью, описывающей движение расплавов и других неизотермических жидкостей. Специфика рассматриваемых задач состоит в том, что при заданных температурных условиях на границах области жидкости интенсивность движения в объеме предсказать заранее невозможно. Уровень конвекции и структура течения определяются при решении нелинейных уравнений движения и переноса тепла и массы. (Так же, как, например, скорость всплытия пузырей или капель и характер обтекания.) Это обстоятельство осложняет анализ размерностей. Привлечение в качестве характерной величины скорости значения, определяемого извне, может привести к появлению в математической модели параметра в дополнение к большому числу уже имеющихся. Использование числа Грасгофа для подбора модельной среды на Земле, подобной заданной в космических условиях, затруднительно вследствие сложного нелинейного вида числа Грасгофа, содержащего физические константы среды, геометрический параметр области, перепад температур.

В данной работе на основе теории размерностей уравнения движения приводятся к такому виду, когда они содержат минимальный набор безразмерных параметров простого типа. При этом появляется возмож-

П.К. Волков. Научно-исследовательский центр
"Космическое материаловедение" Института кристаллографии
им. А.В. Шубникова РАН,
248640 Калуга, ул. Академическая 2, Россия
Тел. (0842) 12-82-73
E-mail: volkov@academ.kaluga.su

Статья поступила 5 июня 1998 г.

ность установить характер изменения конвекции и процессов переноса тепла и массы в данной среде в связи с изменением условий гравитации, определить правила подбора подобных сред в земных и космических условиях. Прямые расчеты уравнений движения и переноса тепла и массы подтверждают правильность теоретических выводов.

2. Анализ размерностей и математическая модель

Пусть имеем жидкую среду со следующими параметрами: плотностью ρ_0 , коэффициентом динамической вязкости μ , коэффициентом поверхностного натяжения σ_0 , g — ускорение силы тяготения. Согласно теории размерностей [2] среда с четырьмя параметрами характеризуется одним безразмерным комплексом. В качестве такового в данном случае выступает число

$$M = \frac{\mu^4 g}{\rho_0 \sigma_0^3}.$$

При исследовании стекающих пленок жидкости используется число $Fi = M^{-1}$, введенное Капицей [3], позднее названное пленочным числом. При переходе к экспериментально измеряемым функциям в конкретных средах используется степень числа Fi ($Fi^{1/11}$ [4]). Для описания процессов всплытия пузырей в различных жидкостях применяется число M [5], которое называют числом Мортон [6]. Обобщение данных для разных сред стало возможным благодаря введению специальных координат, в которых данные для каждой конкретной среды отображаются на прямой, наклон которой определяется M [7].

Наличие безразмерного параметра M , содержащего основные физические константы среды (включая g), позволяет упорядочить все среды по его значению. Например, известные жидкости в земных условиях (см. табл.): минеральное масло, глицерин, вода, ртуть, расплавы полупроводников соответственно имеют значения M , убывающие от 178 до значений порядка 10^{-15} . Модели идеальной жидкости, в которой отсутствует вязкость (внутреннее трение), отвечает $M=0$. Таким образом, уже простейший сравнительный анализ по значению величины M позволяет сделать прогноз по гидродинамике течений в средах. Так, расплавы полупроводников в этом ряду расположены внизу, непосредственно перед моделью идеальной жидкости. Поэтому естественно

ожидать, что течения в расплавах будут по свойствам ближе к идеальной жидкости, чем, например, течения воды или минерального масла. (Данная гипотеза нашла подтверждение при обобщении результатов по всплытию пузырей и капель в различных жидкостях [7].) Это, в свою очередь, с учетом формального предельного перехода к модели идеальной жидкости по вязкости или по числу Рейнольдса свидетельствует об увеличении роли внешних возмущений в расплавах полупроводников в связи с возможной неустойчивостью течений в пограничном слое у твердой стенки [8]. Последнее становится еще более актуальным при прогнозе поведения жидких сред в космических условиях, моделируемых малой величиной g . С уменьшением g величина M для данной жидкости становится меньше, а значит, ее гидродинамические свойства приближаются к свойствам идеальной жидкости.

Обратимся теперь к уравнениям движения. Система уравнений Обербека – Буссинеска [9] хорошо зарекомендовала себя при описании термогравитационных течений [10]. При традиционном способе обезразмеривания по некоторой скорости U и диаметре области $2L$ имеем уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\mathbf{V} = -\nabla \left(P + \frac{z}{Fr} \right) + \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \Theta \mathbf{n}_z + Re^{-1} \Delta \mathbf{V},$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{V}\mathbf{V}\Theta = \frac{1}{Re Pr} \Delta \Theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V}\mathbf{V}C = \frac{1}{Re Sc} \Delta C \quad (3)$$

и динамические краевые условия на свободной поверхности

$$P - \frac{2}{Re} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{n} = \frac{1}{We} H + P_a, \quad (4)$$

$$2\tau \mathbf{D} \mathbf{n} = \frac{Mn}{Re} \nabla_T \Theta. \quad (5)$$

Здесь t — время, $\mathbf{V}$ — вектор скорости, P — давление, Θ — температура, C — концентрация;

$$Gr = \frac{g \beta L^3}{\nu^2} \Delta T, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad Fr = \frac{U^2}{gL},$$

$$We = \frac{\rho_0 U^2 L}{\sigma_0}, \quad Mn = \frac{\sigma_0 \kappa_\sigma L}{\rho_0 \nu^2} \Delta T$$

Таблица

Номер позиции	Жидкость	$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{г см}^{-3}$	$\nu, \text{см}^2 \text{с}^{-1}$	$\sigma, \text{дин см}^{-1}$	Pr	M
1	Глицерин	20	1,259	11,75	59,4	10^4	178
2	Минеральное масло	27,5	0,866	0,67	20,7	~ 50	$1,45 \times 10^{-2}$
3	Глицерин	100	1,21	0,107	54,2	10^2	$1,40 \times 10^{-6}$
4	NaNO_3	307	1,89	0,0146	116,6	9,24	$1,90 \times 10^{-10}$
5	Глицерин	150	1,147	0,01	48,8	10,0	$1,20 \times 10^{-10}$
6	Вода	20	1,0	0,01	72,8	7,1	$2,54 \times 10^{-11}$
7	GaSb	712	6,03	0,0038	454	0,05	$4,80 \times 10^{-13}$
8	Вода	80	0,97	0,0033	62,6	2,2	$4,32 \times 10^{-13}$
9	GaAs	1238	5,3	0,0032	530	0,07	$1,03 \times 10^{-13}$
10	Ртуть	15	13,61	0,00116	487	0,028	$3,86 \times 10^{-14}$
11	Германий	937	5,51	0,00135	600	0,017	$2,52 \times 10^{-15}$
12	Идеальная жидкость	—	—	0,0	—	—	0,0

— числа Грасгофа, Рейнольдса, Фруда, Вебера и Марангони соответственно; $Pr = \nu/\kappa_T$, $Sc = \nu/\kappa_C$ — числа Прандтля и Шмидта; ν , β , κ_T , κ_C , ΔT — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температурного расширения, температуропроводности, диффузии и характерный перепад температур; $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор, направленный против силы тяжести, z — координата вдоль направления действия силы тяжести; $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ — касательный и нормальный векторы на свободной поверхности; $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформаций; H — кривизна поверхности; $P_a = \text{const}$ — давление на свободной поверхности; ∇_Γ — градиент вдоль свободной поверхности (принято $\sigma = \sigma_0[1 + \kappa_\sigma(\Theta - \Theta_0)]$, Θ_0 — постоянная). Остальные краевые условия предполагаются заданными.

Большое количество безразмерных параметров в (1)–(5), их положение в нелинейных уравнениях, сложный вид чисел Gg и Mn не позволяют подтвердить сделанный предварительный прогноз, не решая задачи. Однако, если в качестве L и U выбрать

$$L = \left(\frac{\sigma_0}{g\rho_0}\right)^{1/2} = \delta_\sigma \quad \text{и} \quad U = \left(\frac{\sigma_0 g}{\rho_0}\right)^{1/4},$$

$$t = \frac{L}{U} t' = \left(\frac{\delta_\sigma}{g}\right)^{1/2} t', \quad (6)$$

то безразмерные параметры — аналоги чисел Рейнольдса, Грасгофа и Марангони — примут вид

$$Re = \left(\frac{\sigma_0^3 \rho_0}{g \mu^4}\right)^{1/4} = M^{-1/4} = Re_g,$$

$$Gr = \beta \Delta T Re_g^2, \quad Mn = \kappa_\sigma \Delta T Re_g^2. \quad (7)$$

Числа Прандтля и Шмидта не изменятся, $We = 1$, $Fr = 1$. Таким образом, коэффициент при массовой силе в (1) существенно упростится, вид других коэффициентов позволяет делать прогноз о свойствах решений при изменении условий гравитации.

Введение g в определение характерных размера и скорости (6) — с точки зрения теории размерностей [2] допустимая операция. Более того, именно это позволяет теперь получить ценные качественные выводы о влиянии тех или иных параметров в связи с изменением величины g . При этом следует подчеркнуть, что сохраняется инвариантность физических закономерностей. Главное преимущество использования параметров (7) связано с характером вхождения g в безразмерные параметры и далее в коэффициенты уравнений движения и переноса тепла и массы. Теперь g входит только в комплексе с физическими константами среды в Re_g , а сам параметр Re_g находится на месте числа Рейнольдса, т.е. при старших производных в (1)–(3).

Связь параметра Re_g с числом M с учетом вхождения Re_g в уравнения подтверждает предварительные качественные выводы о гидродинамических свойствах разных жидкостей и сравнительной близости их к модели идеальной жидкости. Другое важное следствие состоит в том, что теперь можно достаточно просто выделить подклассы подобных физических явлений. Для подобия двух физических явлений необходимо и достаточно, чтобы численные значения всех безразмерных комбинаций в этих двух явлениях были одинаковы [2]. Из (7) с учетом чисел Прандтля и Шмидта следует, что для

подобия двух явлений необходимо и достаточно равенство чисел M , $\beta \Delta T$, $\kappa_\sigma \Delta T$, Pr , Sc (при заданной геометрии).

3. Численные расчеты

Все модельные расчеты проводятся на пакете программ COMGA [11]. Вычислительные возможности этого пакета достаточно высоки и позволяют рассчитывать практически все двумерные как стационарные, так и нестационарные изотермические и неизотермические течения в заданном объеме. Может быть решен и ряд задач, в которых свободную поверхность можно считать плоской. Таким образом, для иллюстрации основных выводов данной работы ресурсы, предоставляемые этим пакетом, более чем достаточны.

В пакете COMGA уравнения движения решаются относительно функции тока и вихря. Чтобы исключить необходимость выделения решений, отвечающих заданной среде, уравнения решаются в размерном виде. Пересчет характеристик течения к безразмерному виду, расчет безразмерных параметров и сопоставление решений для разных сред проводятся непосредственно после получения численного решения. Точность расчетов проверялась на модельных задачах расчетом на последовательности измельчающихся сеток. По данным экспериментов была выбрана сетка, содержащая порядка 8000 узлов с равномерным их распределением по координатам. Этого оказалось достаточно для расчета течений с числом Рейнольдса больше 1000. При этом в области пограничного слоя у твердой стенки располагалось более трех точек.

Сопоставление численных решений проводилось путем совмещения картин течений (изолиний функций тока и температуры) и контролировалось по наибольшему и наименьшему значениям функции тока.

4. Классы инвариантных физических явлений

Равенство значений M для двух подобных физических явлений говорит о том, что если под одним явлением понимать состояние жидкости в земных условиях, а под вторым — ее же состояние, но в условиях космических, то подобия в поведении получить не удастся. Это означает, что жидкие среды в условиях свободного падения ведут себя иначе, т.е. являются некоторой новой средой. Этот факт может показаться удивительным, однако он следует из законов сохранения (1)–(3). (При выборе характерных размера и скорости (6) число Фруда тождественно равно единице, а потому давление инвариантно относительно условий гравитации. В случаях, когда это не так, необходимо дополнительно требовать равенства чисел Фруда, что приведет к тому же выводу.) Равенство чисел Прандтля и Шмидта также является принципиальным условием для подобия двух сред. В дальнейшем при рассмотрении конкретных ситуаций эти условия предполагаются выполненными.

4.1. Подобие изотермических процессов

При рассмотрении изотермических течений в разных жидкостях система (1), (2) сводится к уравнениям Навье–Стокса. В этом случае в уравнениях движения (с учетом (6)) остается всего один параметр — M . Равенство чисел M для двух сред — необходимое и достаточное

условие подобия (при равенстве имеющих других геометрических и кинематических параметров).

Для примера рассмотрим плоский случай и течение в каверне с движущейся верхней крышкой. Пусть исходная среда — расплав германия в земных условиях (позиция 11 в табл.). Каверна имеет высоту 1 см, ширину 1,1 см, крышка движется со скоростью $0,55 \text{ см с}^{-1}$. В этом случае течение имеет вид, представленный на рис. 1. Минимальное значение функции тока $-0,065 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ (максимальное значение в углу $0,00027 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$). Из (6) следует, что $U = 18,07 \text{ см с}^{-1}$, $L = 0,333 \text{ см}$, тогда безразмерная скорость крышки составит $0,03$, а безразмерное значение функции тока в вихре $-0,0108$.

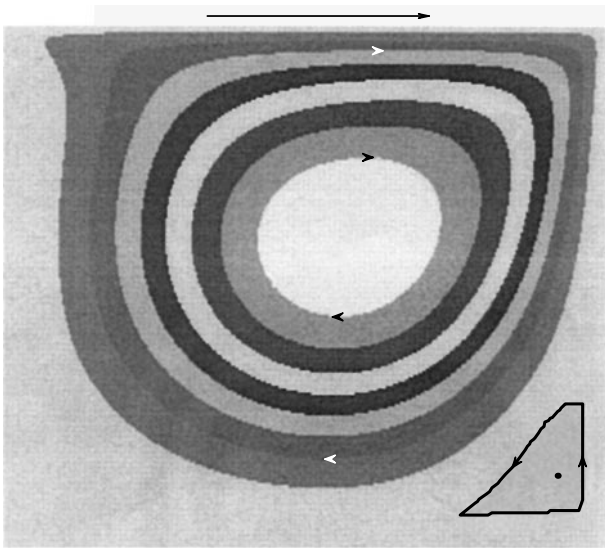


Рис. 1. Структура течения в каверне с движущейся верхней крышкой.

В качестве второй среды рассмотрим воду (позиция 6 в табл.). Числа M будут равными при $g = 0,097 \text{ см с}^{-2}$. При этом значении g из (6) вычислим для воды $U = 1,63 \text{ см с}^{-1}$ и, умножив на $0,03$, получим скорость движения крышки $0,05 \text{ см с}^{-1}$. С учетом L для воды ($27,39 \text{ см}$ при данном g) высота и ширина каверны составят 82 и 90 см . Течение при этих параметрах имеет тот же вид, что и на рис. 1. Наименьшее значение функции тока в вихре $-0,485 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ (в углу $0,0019 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$), а безразмерное значение функции тока в вихре будет тем же, что и для расплава германия.

Расчет чисел Рейнольдса и Фруда для этих двух случаев дает соответственно одинаковые значения 448 и $0,00028$ (с точностью до округлений при расчете ширины каверны для воды). Таким образом, рассмотренные физические течения являются подобными.

Кстати, течение в расплаве германия в каверне тех же размеров, но при $g = 0,097 \text{ см с}^{-2}$ имеет те же вид, интенсивность и число Рейнольдса (расчет относительно функции тока и вихря). Однако эти два течения расплава германия не будут подобными, так как числа Фруда оказываются разными.

4.2. Подобие течений в замкнутой области при нагретой боковой стенке

При рассмотрении неизотермических сред необходимо решать уравнения (1) и (2). Они содержат (с учетом (6)) уже три безразмерных параметра. Определение подоб-

ных сред требует равенства чисел Прандтля. Поэтому здесь при проведении расчетов задаем соответствующий коэффициент теплопроводности для одной из сред. Теперь для подобия двух сред необходимо и достаточно равенство чисел M и $\beta \Delta T$.

Пусть данные для первой среды отвечают расплаву германия (позиция 11 в табл.), а второй — воде (позиция 6 в табл.) с измененным значением коэффициента теплопроводности. Рассмотрим течение в замкнутой области прямоугольного сечения с неподвижными твердыми стенками тех же размеров, что и в предыдущем разделе. При этом выбором g выполняется равенство чисел M . Пусть температура на изотермичных боковых стенках отличается на 20°C , больше на правой. На верхней и нижней границах задается линейное распределение температур. При данных параметрах в расплаве развивается естественная конвекция и жидкость начинает вращаться, поднимаясь у правой стенки и опускаясь у левой (рис. 2). Максимальное значение функции тока в вихре $0,455 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ (минимальное в углах $-0,00027 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$), а ее безразмерное значение составит $0,076$. Максимальное значение скорости $1,43 \text{ см с}^{-1}$ достигается на оси симметрии на расстоянии $\sim 0,14 \text{ см}$ от горизонтальных стенок.

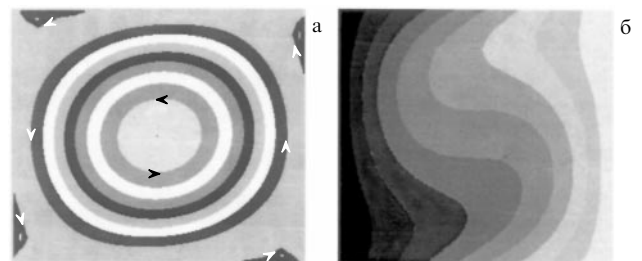


Рис. 2. Структура течения (а) и изолинии поля температур (б) в замкнутой области с изотермичными вертикальными стенками разной температуры (маленькое число Прандтля). В углах на рис. 2а наблюдается отрыв потока от стенок.

Из требования подобия следует, что для воды перепад температур должен быть 10°C (для воды $\beta = 0,0002$, для германия $\beta = 0,0001$). Расчет полей течения и температур при данных перепадах температур и геометрии дает аналогичные рис. 2 типы течений с максимальным значением функции тока $3,38 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ (минимальное в углах $-0,00189 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$). Таким образом, безразмерное значение функции тока оказалось равным $0,076$, т.е. таким же, что и для расплава германия. Максимальное значение скорости равно $0,129 \text{ см с}^{-1}$.

Расчет чисел Рейнольдса и Фруда по максимальной скорости, Грасгофа для рассматриваемых течений дает практически одинаковые значения, соответственно равные 1162 , $0,0019$, $1,43 \times 10^6$. Таким образом, совпадение безразмерных параметров для двух физических явлений подтверждает их подобие.

Подобие течений наблюдается не только для изотермичных боковых стенок. В случае задания линейного закона распределения температур на боковых стенках (наличие вертикального перепада температур) течения остаются подобными при указанном выборе линейных размеров и перепада температур на одной из горизонтальных границ.

4.3. Подобие течений при нагретой нижней стенке

Рассмотрим прямоугольную область, заполненную жидкостью. Верхняя и нижняя стенки изотермичны, температура на нижней больше, чем на верхней. На боковых стенках задается линейный перепад температур. В жидкости имеется состояние неустойчивого равновесия, которое при любых малых возмущениях приводит к развитию движения. Тип и характер течения зависят от перепада температур, геометрии области и самой среды. Для областей с близкими размерами высоты и ширины при умеренных перепадах температур реализуется одновихревое течение с застойными зонами в углах. При этом из соображений симметрии возможно вращение как в одну, так и в другую сторону при одинаковых интенсивности и структуре течения.

Пусть, как и ранее, сечение области — прямоугольник высотой 1 см и шириной 1,1 см, а жидкость — расплав германия. Температура нижней стенки на 20°C больше, чем верхней. Структура установившегося течения и распределение температуры в области представлены на рис. 3. Имеем движение жидкости против часовой стрелки и застойные области в углах. Расчет числа Рейнольдса по максимальной скорости ($\sim 1,07 \text{ см с}^{-1}$ на расстоянии 0,25 см от нижней стенки) и ширине дает величину порядка 870. Время выхода на стационарный режим порядка 60 с.

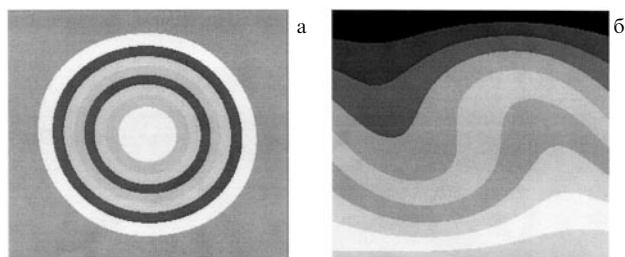


Рис. 3. Структура течения (а) и изолинии поля температур (б) в замкнутой области с изотермичными горизонтальными стенками разной температуры. В углах на рис. 3а имеются застойные зоны (не нарисованы).

В качестве второй среды рассмотрим, как и прежде, воду (с измененным коэффициентом теплопроводности) с геометрией области 82 и 90 см и условиями гравитации, при которых получаем для воды число M , как для германия в земных условиях.

Для подобия рассматриваемых течений необходимо, чтобы перепад температур между верхней и нижней стенками был 10°C . Согласно расчетам структура течения аналогична показанной на рис. 3а, но с противоположным направлением вращения. При этом поле температур изменяется в соответствии с течением и является зеркальным отображением поля на рис. 3б. Число Рейнольдса равно 870 (максимальное значение скорости — $0,097 \text{ см с}^{-1}$ на расстоянии $\sim 19,5 \text{ см}$ от нижней стенки). Время установления стационарного режима оказалось очень большим, $\sim 2,1 \times 10^5 \text{ с}$.

Пересчет максимального и минимального значений функции тока к безразмерному виду по формулам (6) дает одинаковые (по модулю) значения: 0,059. Отношения максимального значения функции тока к минимальному значению для каждого течения оказались также

одинаковыми и равными 70. Таким образом, эти два течения подобны.

Наличие дополнительного горизонтального перепада температур на одной из стенок оставляет течения подобными, если этот горизонтальный перепад связан условием, как в разделе 4.2. При этом течения становятся подобными и по направлению вращения. Следует отметить существенное уменьшение времени установления при наличии горизонтального перепада температур для обоих условий гравитации. Для среды в земных условиях время установления уменьшается в 2 раза (при горизонтальном перепаде в 2°C), в космических — примерно на порядок. Наличие горизонтального перепада приводит к увеличению интенсивности течения. Для рассматриваемых случаев число Рейнольдса было 950.

4.4. Подобие течений при естественной и термокапиллярной конвекциях

Присутствие свободной поверхности создает еще один источник движения в жидкости, интенсивность которого определяется градиентом температуры на свободной поверхности. Для подобия двух течений в этом случае требуется дополнительно равенство чисел $\kappa_\sigma \Delta T$. Однако это возможно только для определенных значений κ_σ при выбранном перепаде температур по числу $\beta \Delta T$. Для этого случая и для сред и геометрий области, описанной в разделе 4.2, при плоской свободной верхней поверхности картина течения и распределение температуры показаны на рис. 4 ($\kappa_\sigma = 0,000166$ для германия, в расчете для воды положено $\kappa_\sigma = 0,000333$). Имеем двухвихревую структуру течения: вверху — от конвекции Марангони, внизу — вследствие естественной конвекции от нагретых боковых стенок. Интенсивность движения в нижнем вихре ($\psi_{\max} = 0,069$) несколько меньше по сравнению с данными рис. 2, когда нет свободной поверхности, а имеется твердая стенка. Это следствие противодействия термокапиллярной конвекции, которая развивается независимо на свободной поверхности, приводя жидкость в движение слева направо. Вихревое движение от конвекции Марангони создает в приповерхностном слое интенсивное движение с максимальным значением скорости на поверхности $u = 0,354$, которая в 4,5 раза превосходит максимальное значение скорости в нижней части области течения. Распределение температуры при этом носит слоистый характер.

Расчет течений в расплаве германия в заданной геометрии со свободной верхней поверхностью, но при разных значениях g дает принципиально отличные кар-

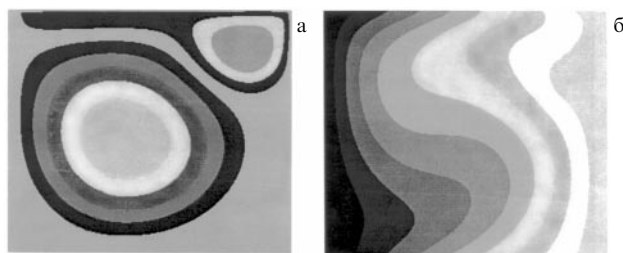


Рис. 4. Структура течения (а) и изолинии поля температур (б) в области с открытой верхней границей и изотермичными вертикальными стенками разной температуры. Маленькое число Прандтля.

тины. В земных условиях конвекция Марангони и естественная конвекция формируют систему вихрей от свободной поверхности вниз с убывающей интенсивностью (при разных высотах расплава). В космических условиях имеется только одно- или двухвихревое течение. Одинаковые одновихревые типы течений с близкими минимальными значениями функции тока получаются лишь при малых толщинах расплава [12]. При этом время установления стационарного течения в космических условиях увеличивается в 20–70 раз по сравнению с земным.

4.5. Подобие по числу Прандтля

Число Прандтля оказывает существенное влияние как на структуру течения, так и на его характер. Выше всюду в расчетах коэффициент теплопроводности для воды был изменен таким образом, что число Прандтля было таким же, как у германия. При этом были получены течения, подобные развивающимся в расплаве германия. Расчеты для воды с ее собственным значением числа Прандтля и для расплава германия с измененным коэффициентом теплопроводности (с числом Прандтля, как у воды) дают практически одинаковые поля температур и колебательные нестационарные режимы для поля скорости (для задачи из раздела 4.2 с боковым подогревом) (рис. 5). Безразмерное максимальное значение функции тока в обоих течениях порядка 0,0016. Нестационарные отклонения максимального значения функции тока достигают порядка 0,00015. Сравнение максимального значения функции тока с расчетом для малого числа Прандтля показывает существенное уменьшение интенсивности движения.

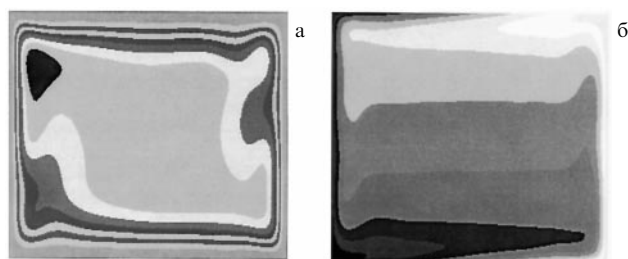


Рис. 5. Структура течения (а) и изолинии поля температур (б) в замкнутой области с изотермичными вертикальными стенками разной температуры (большое число Прандтля). В углах на рис. 5а застойных зон нет.

Течение сосредоточено у твердых границ области, в центре имеется очень слабое движение, скорость которого примерно в 50 раз меньше максимальной (где и имеются нестационарные флуктуации). Отсутствуют застойные зоны в углах. Максимальное значение скорости достигает 0,00373, а число Рейнольдса порядка 55. Поле температур несет в себе все особенности течения и принципиально отличается от полученного для случая малых чисел Прандтля. При малых числах Прандтля поле температур слоистое, с изгибом изолиний по направлению течения. При больших числах Прандтля в обширной центральной области формируется вертикальная стратификация поля температур относительно силы тяжести. Холодные слои расположены внизу,

теплые — выше. У стенок имеются тонкие области с большими градиентами температуры.

На рисунке 6 показаны структура течения и поле температур для данных, приведенных в разделе 4.4 (см. рис. 4), но при $Pr = 7,1$. Существенно увеличились размеры вихря от конвекции Марангони. Однако максимальное значение скорости на свободной поверхности несколько уменьшилось: $u = 0,344$. В нижней части естественная конвекция формирует существенно слабое (по сравнению с рис. 4) движение с максимальной скоростью, примерно в 20 раз меньшей. Имеются большие различия в полях температур. Интенсивное движение в области вихря Марангони создает там область с равномерно распределенной температурой. В сфере действия естественной конвекции при слабом движении поле температуры в нижней части стратифицируется и близко по полю на рис. 5. В верхней левой части, где движение более интенсивное, имеется область с равномерным распределением температуры.

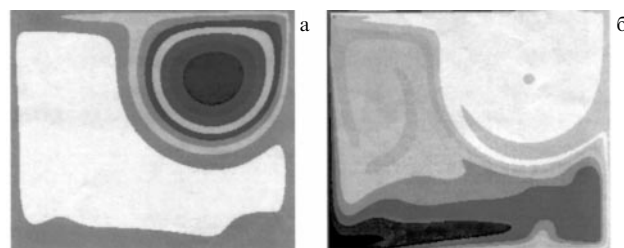


Рис. 6. Структура течения (а) и изолинии поля температур (б) в области с открытой верхней границей и изотермичными вертикальными стенками разной температуры (большое число Прандтля).

5. Практические рекомендации по использованию модельных сред

Рассмотренные в разделе 4.1 два течения — расплав германия на Земле и вода в условиях орбитальной станции "Мир" [12] — подобны при соблюдении соответствующих геометрических пропорций. Таким образом, возникающие в расплаве — непрозрачной среде — течения можно наблюдать, проведя соответствующий эксперимент в космосе на воде. Однако более интересен пример моделирования поведения расплава германия в космосе некоторой средой на Земле. Это становится возможным, если число M для этой среды в земных условиях на 3–5 порядков меньше, чем число M для германия.

Другая возможность использования подобных течений в практических целях заключается в выборе модельной среды на Земле с близкими числами M (как, например, позиции 7 и 8 в табл.). Далее устанавливаются геометрические размеры, которые в данном случае будут достаточно близкими. Теперь возможны исследование гидродинамических течений на модельной среде 8 (вода) и прогноз по характеру течения в расплаве полупроводника 7. Аналогичные исследования можно провести на борту космической станции и тем самым получить информацию о поведении расплавов в космических условиях. Сравнение наземных и космических экспериментов позволит определить влияние космических условий на развитие течений.

Данные рекомендации относятся и к неизотермическим типам течений, рассмотренным в разделах 4.2–4.5. Однако теперь модельная среда должна иметь еще и число Прандтля, близкое к Rg исследуемой жидкости, а при наличии свободной поверхности — соответствующее значение величины α_g .

6. Заключение

Предложенный способ записи уравнений движения и переноса тепла и массы позволяет сделать прогноз о характере конвекции и тепло- и массопереноса при изменении условий гравитации. С уменьшением коэффициента в массовой силе в уравнениях движения гидродинамические свойства жидкости изменяются в сторону модели идеальной жидкости.

Простой вид безразмерных параметров позволяет выделить классы подобных физических явлений разных сред. Подобные течения для различных сред и условий гравитации устанавливаются за разные времена. Как правило, время выхода на стационарный режим больше для течения при меньшем значении g .

Следует отметить, что у подобных явлений совпадают все безразмерные параметры. Расчеты подтвердили этот факт для явлений, выбор которых определяется через параметры M (или Re_g), $\beta\Delta T$, $\alpha_g\Delta T$, Rg . Рассчитанные значения чисел Рейнольдса, Грасгофа, Вебера, Фруда оказались равными для рассматриваемых сред.

Попытка определить подобные среды по числу Грасгофа не состоялась. Так, для заданной среды (германий в замкнутой области) при одном и том же числе Грасгофа (перепад температур увеличивается, пропорционально уменьшается g) получаются течения одного типа, имеющие одинаковую интенсивность (по максимальному значению функции тока), одинаковые числа Рейнольдса. Однако эти течения нельзя считать подобными, поскольку для них получаются разные числа Фруда. Если рассмотреть течения с тем же числом Грасгофа, но с разными размерами области и значениями g , то в результате получим течения одинакового типа с одинаковыми значениями чисел Рейнольдса и Фруда, но разными значениями чисел Вебера. Таким образом, равенство чисел Грасгофа не гарантирует подобия для рассматриваемых классов течений. Поскольку число Рэлея равно произведению чисел Грасгофа и Прандтля, то и равенство чисел Рэлея не приведет, вообще говоря, к подобным физическим явлениям. Чтобы сделать этот вывод, потребовалось просчитать ряд задач и, определив характерную скорость течения, рассчитать все указанные безразмерные параметры. Предлагаемый в работе подход позволяет получить ответ на вопрос о подобии двух сред, в том числе и при изменении условий гравитации, значительно проще, не решая задачи.

Несовпадение чисел Фруда для стационарных течений, имеющих одинаковую структуру и числа Рейнольдса, отразится на характере устойчивости течений по отношению к малым возмущениям и развитию нестационарных процессов в жидкости.

Сравнение течений заданной среды в области при одних и тех же перепадах температуры на противоположных стенках (течение между нагретыми вертикальными стенками и течение от нагретой нижней стенки) показывает их различие как по интенсивности установившегося течения, так и по времени установления. Более развитым и быстрее выходящим на стационарный режим оказывается течение между двумя нагретыми боковыми стенками. Наличие даже небольшого радиального перепада температур существенно ускоряет выход на стационарный режим течений при нагреве снизу.

Исследование течений, вызванных градиентами концентрации примеси в расплаве и на свободной границе, при изменении условий гравитации может быть проведено по аналогии с рассмотренными неизотермическими задачами. Характер течений, учитывая большие числа Шмидта (диффузионные числа Прандтля), можно оценить по данным расчетов для больших чисел Прандтля.

Проведенный анализ предполагает, что физические и теплофизические параметры жидких сред не зависят от условий гравитации. В общем случае необходимо провести исследования по определению степени влияния условий гравитации на коэффициенты переноса импульса, тепла и массы в жидких средах. Изменение числа M , характеризующего жидкую среду, для разных условий гравитации служит основанием к такому рассмотрению.

Список литературы

1. Мильвидский М Г и др. *Кристаллография* **42** 913 (1997)
2. Седов Л И *Механика сплошной среды* Т. 1 (М.: Наука, 1973)
3. Капица П Л *ЖЭТФ* **18** (1) 3 (1948)
4. Цвелодуб О Ю Автореф дис. ... докт. физ.-мат. наук (Новосибирск: ИТ СО РАН, 1989)
5. Haberman W I, Morton R K *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs.* **49** (387) 367 (1954)
6. Bhaga B D, Weber M E *J. Fluid Mech.* **105** 61 (1981)
7. Волков П К *ИФЖ* **66** (1) 93 (1994)
8. Шлихтинг Г *Теория пограничного слоя* (М.: Наука, 1969)
9. Джозеф Д *Устойчивость движений жидкости* (М.: Мир, 1981)
10. Полежаев В И и др. *Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса* (М.: Наука, 1987)
11. Ермаков Н К, Никитин С А, Полежаев В И *Изв. РАН МЖТ* (3) 21 (1997)
12. Zakharov B G et al., in *Proc. et Joint X-th European and Russian Symposium "Physical Sciences in Microgravity"*. St. Petersburg, Russia, 15–21 June, 1997 Vol. 2 (Moscow: Institute for Problems in Mechanics RAS, 1997) p. 114

Similarity in the hydrodynamics of weightlessness

P.K. Volkov

Scientific Research Center "Space Materials Science" at A.V. Shubnikov Institute of Crystallography, Russian Academy of Sciences,
ul. Akademicheskaya 2, 248640 Kaluga, Russia
Tel. (7-082) 12-82 73
E-mail: volkov@academ.kaluga.su

On introduction of gravitational acceleration into the calculation of length and velocity scales, a set of dimensionless parameters appears in the mathematical model which enable the behaviour of convection and heat and mass transfer under changing gravitational conditions to be predicted. By directly calculating the equations of motion and heat transfer, the effectiveness of the proposed formulation of conservation laws in treating such phenomena in liquids is demonstrated for both isothermal and non-isothermal cases and under both terrestrial and space conditions.

PACS numbers: 03.40.Gc, **47.27.-i**
Bibliography — 12 references

Received 5 June 1998