

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах (точно решаемые модели)

А.Б. Шварцбург

Развиваются точно решаемые модели импульсной оптики диспергирующих сред во временном представлении. Эти модели описывают взаимодействия ультракоротких видеоимпульсов, содержащих только одно или несколько колебаний поля, с некоторыми классами диэлектриков и проводников. Поля, возбуждаемые видеоимпульсами в этих средах, представляются аналитически благодаря новым точным непериодическим и нестационарным решениям уравнений Максвелла. Такие решения получены непосредственно во временной области, вне рамок фурье-разложений и без традиционного разделения полей на части, зависящие или от времени, или от координат (неразделяющиеся решения). Эти неразделяющиеся решения образуют математическую основу оптики несинусоидальных волн. Выполнено обобщение этого подхода на сферические и магнитогидродинамические (МГД) видеоимпульсы, ударное возбуждение линии передачи с распределенными параметрами, некоторые неоднородные и нелинейные среды. Гибкое моделирование формы видеоимпульсов с помощью функций Лагерра позволило представить в явном виде зависимости процессов отражения и преломления видеоимпульсов от их формы и длительности.

PACS numbers: 02.50.Ey, **05.40.+j**, 42.65.Ky

Содержание

1. Введение. Нестационарная электродинамика стационарных сред (85).
 2. Неразделяющиеся решения уравнения Клейна – Гордона в оптике диспергирующих сред (87).
 3. Точные решения телеграфного уравнения для непериодических полей (88).
 4. Лагерр-оптика видеоимпульсов (90).
 5. Сферические волновые импульсы (94).
 6. Электрическая индукция в нестационарных полях (94).
 7. Негармонические волны в линии передачи (95).
 8. Магнитогидродинамические импульсы в неоднородной плазме (96).
 9. Нелинейная динамика видеоимпульсов (98).
 10. Заключение. Неразделяющиеся представления полей в импульсной оптике (100).
- Примечания при корректуре (102).
Список литературы (103).

1. Введение. Нестационарная электродинамика стационарных сред

Нестационарные электромагнитные поля в диспергирующих и проводящих средах могут формироваться при воздействии на эти среды коротких волновых импульсов. Эффекты ударного возбуждения и распространения таких волн привлекают сейчас внимание в нескольких областях радиофизики и оптики. Такое внимание обусловлено рядом причин:

1. Успехи последних лет в генерации видеоимпульсов с помощью широкополосных радаров (характерная длительность импульса $1 - 10$ нс) [1] и систем пикосекундной оптики ($t_0 \sim 0,1 \div 1$ пс) [2, 3] стимулировали интерес к перспективам использования видеоимпульсов для передачи энергии и информации через сплошные среды. Структура таких импульсов существенно отличается от традиционно обсуждаемых моделей модулированных квазимонохроматических сигналов с прямоугольной или гауссовой огибающей:

а) огибающая видеоимпульса содержит всего одно или несколько колебаний поля, формы которых обычно далеки от синусоидальной;

б) передний и задний фронты несимметричны;

в) расстояния между точками пересечения нуля огибающей неравны.

Тенденция к формированию видеоимпульсов характерна в последнее время и для фемтосекундной оптики, где ультракороткие импульсы, выходящие из оптического компрессора, содержат 3–5 колебаний поля [4];

А.Б. Шварцбург. Центральное конструкторское бюро уникального приборостроения РАН,
117342 Москва, ул. Бутлерова 15, Россия
Факс (095) 334-75-00

Статья поступила 10 июня 1997 г.

более того, аналогичная тенденция отмечается и в зарождающейся оптике аттосекундных сигналов [5].

2. Рассеяние и дифракция видеоимпульсов конечной длительности на мишенях конечных размеров приводят к ряду новых эффектов. В отличие от привычных представлений о стационарных индикатрисах рассеяния и дифракционных картинах, характерных для длинных цугов синусоидальных волн, поле рассеянного видеоимпульса быстро меняется во времени. Классические формулы для рассеяния монохроматических волн на цилиндре или дифракции на щели и круглой апертуре оказываются лишь частными случаями выражений, описывающих нестационарное взаимодействие коротких видеоимпульсов с такими объектами [6–9].

3. Традиционные решения уравнений Максвелла в сплошных средах связаны с представлением решений в виде произведения функций, зависящих либо от координат, либо от времени (разделяющиеся решения); при этом временная зависимость обычно исследуется с помощью преобразования Фурье. Многие десятилетия такой подход формировал язык описания квазимонохроматических волн в оптике, акустике и радиофизике; однако попытки применить этот же подход в динамике взаимодействия коротких видеоимпульсов с диспергирующими средами и, в частности, с плазмой, волноводами, проводниками натолкнулись на неожиданные трудности как концептуальные, так и вычислительные:

а. При фурье-преобразовании огибающая сигнала конечной длительности усредняется по бесконечному интервалу времени (от $-\infty$ до ∞). Участки быстрого изменения огибающей оказываются при этом скрытыми; однако именно эти участки важны для регистрации сигнала в информационных системах. С другой стороны, для восстановления временной огибающей локализованного сигнала с помощью обратного фурье-преобразования нужно исключить поля гармоник вне области локализации; однако для уточнения области локализации требуется учитывать все возрастающее количество гармоник.

б. Деформация импульса в диспергирующей среде описывается, как известно, в частотной области методом разложения фазы в ряд по степеням отношения спектральной ширины импульса $\Delta\omega$ к несущей частоте ω [9]. Однако для коротких широкополосных импульсов, содержащих одно или несколько колебаний поля, отношение $\Delta\omega/\omega$ не является малым параметром; при этом количество спектральных компонент, требуемое для синтеза поля импульса в глубине среды, становится непомерно большим. Такая ситуация порождает ряд вычислительных трудностей [10].

в. В разложении фазы волны по степеням отношения $\Delta\omega/\omega$ все слагаемые содержат в знаменателе показатель преломления среды $n(\omega)$. Если в спектре импульса содержится частота отсечки диспергирующей прозрачной среды ω_0 , то $n(\omega_0) = 0$ и ряд, представляющий собой разложение фазы, расходится.

Следует подчеркнуть, что отмеченные трудности связаны не с уравнениями Максвелла, а с традиционным методом их решения с помощью разделения переменных и преобразований Фурье. Однако представление полей с помощью этого метода является не следствием уравнений Максвелла, а лишь одним из способов их решения; этот способ удобен для описания квазимонохроматических волн с медленно меняющейся амплитудой и фазой,

но малоэффективен для анализа нестационарных и негармонических полей.

Получить информацию о таких полях можно с помощью новых решений уравнений Максвелла, построенных непосредственно во временной области, без использования стандартного разделения переменных и вне рамок фурье-разложений. Такие неразделяющиеся точные аналитические решения, не связанные традиционными допущениями о малости или медленности изменения полей, образуют математическую основу описания быстропеременных непериодических полей и коротких импульсов в диспергирующих средах. Сама среда предполагается при этом покоящейся и стационарной, а нестационарность пространственно-временной структуры распространяющегося поля связана со значительным изменением его огибающей за характерное время, определяемое микроскопическими процессами установления поля в среде (например, время релаксации объемного заряда в проводнике). Такая нестационарная электродинамика стационарных сред и является предметом настоящей статьи.

Нестационарные электромагнитные поля описываются здесь во временной области с помощью новых точных решений уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (4)$$

Индукция $\mathbf{D}$ связана с электрическим полем $\mathbf{E}$ и током $\mathbf{j}$, наведенным этим полем, известной формулой

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\infty \mathbf{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j} dt. \quad (5)$$

Здесь ε_∞ — диэлектрическая проницаемость среды в пределе высоких частот; ниже предполагается, что среда немагнитна и изотропна.

Для дальнейшего анализа целесообразно выразить компоненты поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через вектор-потенциал $\mathbf{A}$ по известным формулам:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6)$$

Подстановка (6) в (1) сводит это уравнение к тождеству. Для поперечно-поляризованных полей, рассматриваемых ниже, пространственно-временная эволюция вектор-потенциала $\mathbf{A}$ описывается уравнением (2) и материальным уравнением $\mathbf{j} = j(\mathbf{E})$.

Эта система уравнений традиционно используется для построения оптики синусоидальных волн в частотной области. Однако такой подход не является универсальной схемой построения волновой оптики на основе уравнений Максвелла. Часть информации, заключенной в этих уравнениях, наглядно проявляется при использовании решений, полученных непосредственно во временной области. Именно такой альтернативный подход, целесообразный для анализа импульсных электромагнитных полей в ряде диспергирующих, проводящих и неоднородных сред, развивается в настоящей работе.

Такой подход основан на неразделяющихся решениях уравнения Клейна–Гордона и телеграфного уравнения. Отмечены возможности гибкого моделирования видеоимпульсов, возбуждающих такие поля, с помощью функций Лагерра и Эрмита. Сочетание неразделяющихся решений уравнений Максвелла для полей внутри диспергирующих сред и лаггеровых представлений импульсных полей вне этих сред образует рассматриваемую здесь точно решаемую модель оптики видеоимпульсов.

2. Неразделяющиеся решения уравнения Клейна–Гордона в оптике диспергирующих сред

Физические основы и математический аппарат теории нестационарных волновых процессов в среде с дисперсией наглядно иллюстрируются с помощью задачи о распространении электромагнитного поля в изотропной плазме. Рассмотрим для простоты одномерную задачу о распространении плоской линейно поляризованной волны в холодной, бесстолкновительной, однородной и полностью ионизованной газовой плазме. Плотность тока $\mathbf{j}$, индуцированного в такой плазме полем $\mathbf{E}$, определяется в линейном приближении уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\Omega^2}{4\pi} \mathbf{E}. \quad (7)$$

Здесь Ω — плазменная частота, связанная с плотностью N , зарядом e и массой m электронов: $\Omega^2 = 4\pi e^2 N m^{-1}$. Выражая компоненты волнового поля E_x и H_y через компоненту вектор-потенциала A_x (6) и комбинируя (2), (5) и (7), получим уравнение для функции A_x ($A_y = A_z = 0$) в виде

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} A_x. \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой уравнение Клейна–Гордона. Традиционные решения этого уравнения описывают, как известно, гармонические волны с частотой ω и волновым числом k :

$$A_x = A_0 \exp[i(kz - \omega t)], \quad kc = \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (9)$$

Наряду с (9) уравнение Клейна–Гордона имеет широкие классы точных аналитических негармонических решений во временной области. Для построения таких решений целесообразно ввести нормированный вектор-потенциал f и безразмерные переменные η и τ по формулам:

$$A_x = A_0 f(\eta, \tau), \quad \eta = z\Omega c^{-1}, \quad \tau = \Omega t. \quad (10)$$

Уравнение (8) переписывается при этом в безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = f. \quad (11)$$

Уравнение Клейна–Гордона в форме (11) играет ключевую роль в дальнейшем анализе. Точные неперриодические решения уравнения (11), описывающие нестационар-

ные поля, распространяющиеся в плазме от границы $\eta = 0$ в глубь плазмы ($\eta > 0$) могут быть представлены при $\tau^2 \geq \eta^2$ в виде [11]

$$f = \sum_q a_q f_q(\eta, \tau), \quad (12)$$

$$f_q(\eta, \tau) = \frac{1}{2} [\psi_{q-1}(\eta, \tau) - \psi_{q+1}(\eta, \tau)], \quad (13)$$

$$\psi_q(\eta, \tau) = \left(\frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{q/2} J_q(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}). \quad (14)$$

Здесь J_q — функция Бесселя порядка q ; постоянные коэффициенты a_q и значения q будут определены из граничных условий на поверхности плазмы $\eta = 0$ (см. раздел 4).

Временные и пространственные производные от функций вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial \psi_q}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (\psi_{q-1} - \psi_{q+1}), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi_q}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} (\psi_{q-1} + \psi_{q+1}). \quad (16)$$

Подставляя (12) в (6), можно найти электрическую и магнитную составляющую поля:

$$E_x = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_q a_q e_q, \quad H_y = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_q a_q h_q, \quad (17)$$

$$e_q = \frac{1}{4} (\psi_{q-2} - 2\psi_q + \psi_{q+2}), \quad (18)$$

$$h_q = \frac{1}{4} (\psi_{q-2} - \psi_{q+2}). \quad (19)$$

Плотность тока j также выражается через функции ψ_q :

$$j = \sum_q a_q j_q, \quad j_q = \frac{1}{2} (\psi_{q-1} - \psi_{q+1}). \quad (20)$$

Полученное решение уравнения Клейна–Гордона представляет поле и ток в плазме как сумму неперриодических гармоник, выраженных через неразделяющиеся функции ψ_q . В отличие от (9) эти гармоники не могут быть представлены в виде произведения функций времени и координат. Огибающие гармоник поля e_q, h_q (18), (19) быстро деформируются в процессе распространения в прозрачной среде без потерь (рис. 1) под действием дисперсии, а пространственно-временная структура этих полей существенно отличается от структуры поля монохроматических волн в той же среде:

а) промежутки времени между точками пересечения нуля огибающими гармоник как электрического, так и магнитного поля неравны, т.е. составляющие переменного поля E_x и H_y (17) неперриодичны;

б) экстремумы огибающих гармоник e_q и h_q меняются во времени, а отношение $|h_{\max}|/|e_{\max}|$ непостоянно;

в) темпы дисперсионной деформации гармоник e_q и h_q при распространении в глубь плазмы существенно различны.

Целесообразно отметить и некоторые математические особенности представлений поля (17):

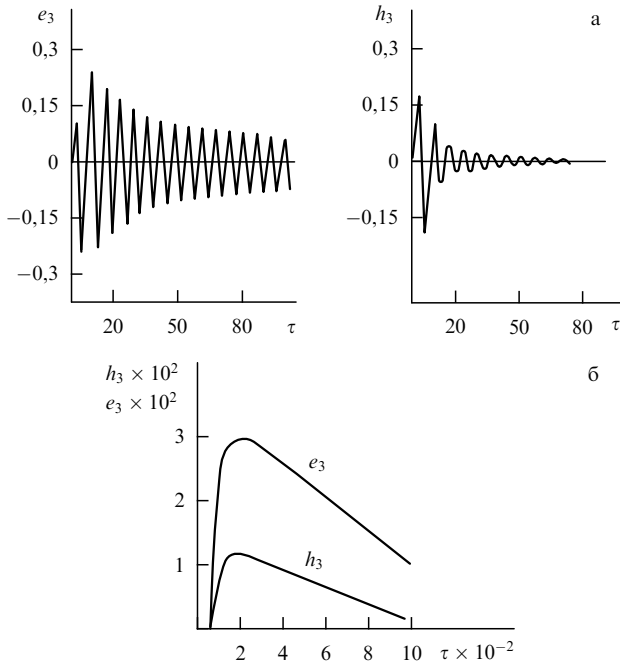


Рис. 1. Огибающие неразделяющихся гармоник электрической (e_3) и магнитной (h_3) составляющих поля в плазме в сечениях $\eta = 0$ (а) и $\eta = 3$ (б); $\tau = \Omega t$.

1. Во всех точках, где $\tau = \eta$ (при $z = ct$), значения функций ψ_q (14) составляют

$$\psi_q|_{\tau=\eta} = 0 \quad (q > 0), \quad \psi_0|_{\tau=\eta} = 1. \quad (21)$$

Пользуясь (21), можно найти огибающие гармоник e_q и h_q при $\tau = \eta$

$$e_q|_{\tau=\eta} = h_q|_{\tau=\eta} = 0 \quad (q > 2), \quad e_2|_{\tau=\eta} = h_2|_{\tau=\eta} = \frac{1}{4}. \quad (22)$$

Таким образом, фронты всех гармоник e_q и h_q при $q > 2$ движутся со скоростью света c .

2. Огибающие колебаний ψ_q (14) в любой точке η неограниченно уменьшаются при $\tau \rightarrow \infty$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi_q|_{\eta=\text{const}} = 0. \quad (23)$$

Значения функций ψ_q при $\tau = \eta$ (21) и $\tau \rightarrow \infty$ (23) позволяют установить важное интегральное свойство полей E_x , H_y и j , представленных нестационарными гармониками (17) и (20). Запишем выражения для гармоник поля и тока, пользуясь рекуррентными формулами (15), (16), в виде производных

$$j_q = \frac{\partial \psi_q}{\partial \tau}, \quad e_q = \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \tau^2}, \quad h_q = \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \tau \partial \eta}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в представления полей (17) и (20) и учитывая пределы (21) и (23), получим для произвольной точки η

$$\int_{\eta}^{\infty} E_x dt = \int_{\eta}^{\infty} H_y dt = \int_{\eta}^{\infty} j_x dt = 0. \quad (25)$$

3. Асимптотические выражения для гармоник поля e_q и h_q , соответствующие "периферийным" частям огибающих при $\tau \gg \eta$ ($\tau \gg 1$), получаются из (18), (19) с помощью известной асимптотики бесселевых функций:

$$J_q(\tau)|_{\tau \gg 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} \left[\cos \alpha_q - \frac{4q^2 - 1}{8\tau} \sin \alpha_q + O(\tau^{-2}) \right], \quad (26)$$

$$\alpha_q = \tau - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi q}{2}. \quad (27)$$

Пользуясь разложением (26), можно представить "хвосты" гармоник e_q и h_q в каждой точке η в виде

$$e_q|_{\tau \gg 1} = -\sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi q}{2} \right), \quad (28)$$

$$h_q|_{\tau \gg 1} = -\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} [\eta \cos \alpha_q + q \sin \alpha_q]. \quad (29)$$

Таким образом, эволюция гармоник поля приводит к формированию в глубине плазмы синусоидальных колебаний, амплитуда которых убывает со временем, а частота равна частоте отсечки для гармонических волн. Электрические гармоники в каждом сечении убывают со временем как $\tau^{-1/2}$; магнитные гармоники убывают быстрее — как $\tau^{-3/2}$. Следует отметить, что возбуждение колебаний (28), (29) с помощью синусоидальных волн с частотой $\omega = \Omega$, падающих на границу плазмы извне, затруднено из-за отражения этих волн на границе.

Интересным результатом формул (28), (29) является появление в них частоты отсечки как естественного масштаба времени диспергирующей среды (см. раздел 4).

Решения во временной области выявляют существенные различия в динамике электрических и магнитных составляющих непериодических волн (17) в модели прозрачной диспергирующей среды (см. рис. 1), соответствующей однородной плазме, ионным кристаллам и полупроводникам со свободными носителями. В отличие от медленного дисперсионного расплывания квази-монокроматического узкополосного импульса, описываемого, как известно [19], в рамках теории возмущений с помощью разложения по степеням малого параметра $\Delta\omega/\omega$, точные решения (18), (19) не связаны с понятиями частоты и фазы волны и не ограничены предположениями о медленности дисперсионных изменений огибающих. Эти решения, описывающие поля в плазме, являются:

- а) несинусоидальными;
- б) нестационарными;
- в) неразделяющимися.

Аналогичные поля в более сложных моделях сред (поглощающих, неоднородных и нелинейных) рассматриваются ниже.

3. Точные решения телеграфного уравнения для непериодических полей

Телеграфное уравнение описывает электромагнитные поля в изотропных проводящих средах, когда индуктивный ток, наводимый переменным полем, мал в сравнении с током проводимости. В этом случае материальное уравнение среды дается, в отличие от (7), законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (30)$$

где σ — проводимость материала. Рассматривая поперечное линейно-поляризованное поле с компонентами E_x и H_y и вводя вектор-потенциал $\mathbf{A}$ ($A_x \neq 0$, $A_y = A_z = 0$), можно получить с учетом (30)

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_\infty}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial A_x}{\partial t}. \quad (31)$$

Равенство (31) представляет собой простейший пример телеграфного уравнения, широко используемого для описания волновых процессов в диссипативных средах.

Вводя характерное время установления поля T ,

$$T = \frac{\varepsilon_\infty}{2\pi\sigma}, \quad (32)$$

можно представить традиционное решение (31), описывающее затухающие синусоидальные волны, характеризуемые комплексным волновым числом K

$$K = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + 2i(\omega T)^{-1}}; \quad v = c\varepsilon_\infty^{-1/2}. \quad (33)$$

Наряду с решением (33) и решением, представленном в виде интегралов по траекториям [12], уравнение (31) описывает и несинусоидальные поля во временной области. Пользуясь нормированными переменными

$$A = A_0 f, \quad \tau = tT^{-1}, \quad \eta = z(vT)^{-1}, \quad (34)$$

можно переписать (31) в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial \tau}. \quad (35)$$

Точные аналитические решения безразмерного телеграфного уравнения (35), описывающие вектор-потенциал переменного непериодического поля, представляются в форме, аналогичной (12)–(14)

$$f = \sum_q a_q \tilde{f}_q, \quad (36)$$

$$\tilde{f}_q = \frac{1}{2}(\Theta_{q-1} + \Theta_{q+1} - 2\Theta_q) = \frac{\partial \Theta_q}{\partial \tau}, \quad (37)$$

$$\Theta_q = \exp(-\tau) \left(\frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{q/2} I_q(\sqrt{\tau^2 - \eta^2}), \quad \tau \gg \eta. \quad (38)$$

Здесь I_q — модифицированная функция Бесселя; индекс q определяется, как и в случае решений (12)–(14), из граничных условий.

Электрическое и магнитное поле тока проводимости находится при подстановке (36)–(38) в (6):

$$E_x = -\frac{A_0}{vT} \sum_q a_q e_q, \quad H_y = -\frac{A_0}{vT} \sum_q a_q h_q. \quad (39)$$

Временные и пространственные производные от вектор-потенциала A_x вычисляются по формуле (37) и

$$\frac{\partial \Theta_q}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(\Theta_{q-1} - \Theta_{q+1}). \quad (40)$$

Гармоники e_q и h_q в (39) имеют вид

$$e_q = \frac{1}{4}(\Theta_{q-2} - 4\Theta_{q-1} + 6\Theta_q - 4\Theta_{q+1} + \Theta_{q+2}), \quad (41)$$

$$h_q = \frac{1}{4}(\Theta_{q-2} - 2\Theta_{q-1} + 2\Theta_{q+1} - \Theta_{q+2}). \quad (42)$$

Примеры пространственно-временной эволюции гармоник e_q и h_q показаны на рис. 2. Интересно отметить некоторые особенности полей, формируемых гармониками (41), (42):

а) в отличие от процесса затухания гармонических волн, характеризуемого единым значением декремента затухания электрической и магнитной компоненты поля, темпы убывания максимумов гармоник e_q и h_q различны. Как видно из рис. 2, отношение пиков огибающих гармоники e_2 при $\eta = 2$ и $\eta = 0$ составляет $\gamma_e = 0,2$; аналогичное отношение для гармоники h_2 составляет $\gamma_m = 0,3$. Отметим, что отношение пиков огибающих в точках $\eta = 2$ и $\eta = 0$ для синусоидальных волн с частотой ω составляет в случае $(\omega T)^2 \gg 4$ $\gamma_s = 0,136$ (33), так что $\gamma_m > \gamma_e > \gamma_s$; таким образом, непериодические гармоники могут затухать в проводнике медленнее, чем синусоидальные волны;

б) распространение гармоник поля сопровождается быстрым распылением огибающих;

в) темпы распыления электрической и магнитной составляющих негармонического поля в проводнике различны.

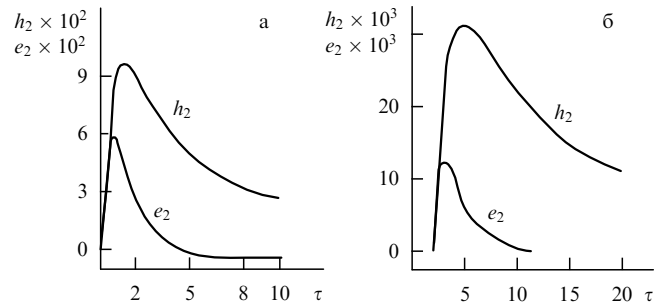


Рис. 2. Несинусоидальные гармоники электрической (e_2) и магнитной (h_2) составляющих нестационарного поля в точках $\eta = 0$ (а) и $\eta = 2$ (б); $\tau = tT^{-1}$.

Характерные свойства неразделяющихся функций (39), описывающих поле в проводнике, можно рассматривать как обобщение соответствующих представлений полей для прозрачной среды (см. раздел 2):

$$1. \quad \Theta_q(\tau, \eta) \Big|_{\tau=\eta} = 0 \quad (q > 0).$$

$$2. \quad \text{Пользуясь известной асимптотикой функций } I_q(u)$$

$$I_q(u) \Big|_{u \gg 1} = \frac{\exp(-u)}{\sqrt{2\pi u}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma(q + 1/2 + n)}{\Gamma(q + 1/2 - n)},$$

где Γ — гамма-функция, можно найти закон убывания поля f_q (37) в любом сечении при $\tau \gg \eta$:

$$f_q \Big|_{\tau \gg \eta} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \tau^{-3}.$$

3. Подставляя (41), (42) в (39), легко видеть, что интегральное свойство неразделяющихся представлений E_x и H_y (25), отмеченное ранее для непоглощающего диэлектрика, остается в силе и для любого сечения проводника.

Существенно, что нестационарные поля в проводнике характеризуются естественным масштабом времени T (32). Аналогичное характерное время $t_c \sim \Omega^{-1}$ (7) возникает и при описании нестационарных полей в плазме. Определяющая роль временных параметров в процессах импульсного возбуждения таких полей в сплошных средах показана ниже.

4. Лагерр-оптика видеоимпульсов

Прохождение коротких видеоимпульсов через границу плазмы или проводника сопровождается возбуждением нестационарных электромагнитных полей в этих средах. Представление таких полей с помощью неразделяющихся функций обеспечивает простую аналитическую модель таких импульсных процессов. Чтобы найти зависимость отражения и преломления импульсных сигналов от их длительности и огибающей, надо выбрать представление этих сигналов, позволяющее гибко учитывать их конечную длительность и сложную, в частности несимметричную и непериодическую форму. Традиционные модели δ -функции или ступенчатой функции Хэвисайда, соответствующие нулевой длительности сигнала и нулевому времени установления, не годятся для рассматриваемой задачи. Применение более реалистических моделей, например, модулированных гауссовых или прямоугольных импульсов

$$f_1 = \exp\left(-\frac{t^2}{2t_0^2}\right) \sin \omega t, \quad f_2 = \begin{cases} \sin \omega t, & |T| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |T| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (43)$$

ограничено предположением о равенстве интервалов между точками пересечения нуля. Сигналы с зависящей от времени частотой типа "wavelet" [13] мало похожи на реальные импульсы, излучаемые моноимпульсным радаром или пикосекундным моноимпульсным генератором и отличающиеся отсутствием несущей частоты и асимметрией фронтов.

В отличие от этого, здесь предлагается гибкое моделирование реальных видеоимпульсов, содержащих одно или несколько колебаний поля. Такие модели допускают:

- а) произвольную крутизну фронтов импульса,
- б) различные интервалы между точками пересечения нуля,
- в) произвольную асимметрию огибающих.

Рассмотрим отражение таких видеоимпульсов от прозрачных и поглощающих сред на примерах отражения от плазмы и проводника. При этом целесообразно исследовать сигналы двух типов:

1. Сигналы $E(t)$ с хорошо выраженным передним фронтом, т.е. с фиксированной точкой $t = 0$ ($E(0) = 0$), определенные в области $0 \leq t < \infty$.

Система функций, ортогональных в этой области, представляется, как известно, функциями Лагерра $L_m(x)$

$$L_m(x) = \frac{\exp(x/2)}{m!} \frac{d^m}{dx^m} [\exp(-x)x^m], \quad x = \frac{t - zc^{-1}}{t_0}, \quad (44)$$

где t_0 — временной масштаб сигнала. Свойства таких сигналов можно проанализировать на примере огибающей, описываемой линейной комбинацией функций L_m

$$E(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m L_m(x). \quad (45)$$

Здесь b_m — действительные постоянные коэффициенты. Функции L_m , ортонормированные согласно условию

$$\int_0^{\infty} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (46)$$

определяются при малых значениях порядка m формулами (44):

$$\begin{aligned} L_0 &= \exp\left(-\frac{x}{2}\right), & L_1 &= (1-x)L_0, \\ L_2 &= \left(1-2x+\frac{x^2}{2}\right)L_0, & L_3 &= \left(1-3x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)L_0. \end{aligned} \quad (47)$$

Поведение функций L_m вблизи начала импульса ($x = 0$)

$$L_m(0) = 1, \quad \left. \frac{\partial L_m}{\partial x} \right|_{x=0} = -\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (48)$$

показывает, что крутизна огибающих L_m в точке $x = 0$ конечна, но значения огибающих при $x = 0$ отличны от нуля. Поэтому ни одна из функций L_m не может представить сигнал с нулевой начальной точкой и конечной крутизной фронта в этой точке. Однако такой сигнал может быть представлен линейной комбинацией функций L_m , содержащих свободный параметр B

$$E(t) = E_{in} F_m(x), \quad F_m(x) = B[L_m(x) - L_{m+2}(x)], \quad (49)$$

E_{in} — амплитуда падающего импульса.

Огибающие F_m (49), показанные на рис. 3 на границе сплошной среды $z = 0$ ($x = tt_0^{-1}$), обладают рядом свойств, удобных для моделирования видеоимпульсов:

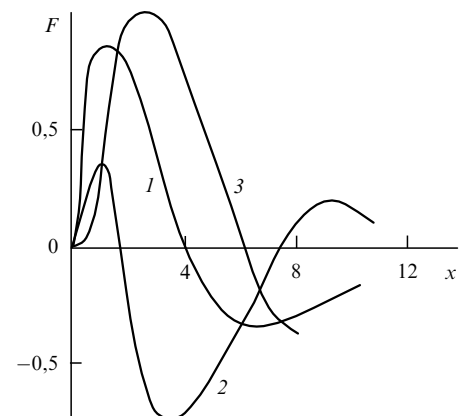


Рис. 3. Огибающие несимметричных видеоимпульсов F_0 и F_1 (49) и K_0 (54) показаны кривыми 1, 2, 3.

а) функция $F_m(x)$ (49) может быть представлена в виде ряда

$$F_m(x) = 2Bx \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k x_k \right), \quad (50)$$

$$F_m(0) = 0, \quad (51)$$

б) крутизна фронта огибающей при $x = 0$ задается свободным параметром

$$\left. \frac{\partial F_m(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 2B, \quad (52)$$

в) огибающая $F_m(x)$ имеет $m + 2$ точки пересечения нуля и экспоненциально убывающий "хвост",

г) интегральное свойство огибающей (49):

$$\int_0^{\infty} F_m(x) dx = 0, \quad (53)$$

д) огибающая сигнала, составленного из линейной комбинации функций F_m , может иметь в начальной точке $x = 0$ нулевую крутизну (см. рис. 3):

$$K_m(x) = F_m(x) - F_{m+1}(x) = Mx^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k x^k \right). \quad (54)$$

Как видно из рис. 3, комбинации лагеровых функций позволяют гибко моделировать широкие классы видеоимпульсов в интервале времени $0 \leq t < \infty$.

2. Нормированные огибающие сигналов второго симметричного типа, определенные на интервале $-\infty < t < \infty$ и соответствующие значениям

$$E(t) \Big|_{t=0} = E_{in}, \quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad E(t) \Big|_{t \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (55)$$

также могут быть представлены с помощью функций Лагерра $L_m(x)$. Пример такой огибающей показан на рис. 4

$$E(x) = E_{in} \begin{cases} L_0(x) + \frac{1}{2} L_1(x) - \frac{1}{2} L_2(x), & x \geq 0, \\ L_0(-x) + \frac{1}{2} L_1(-x) - \frac{1}{2} L_2(-x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (56)$$

Отметим сходство между импульсом (56) и традиционной моделью симметричного импульса в форме "Mexican hat" (см. рис. 4), введенного еще Д. Габором [15]; в частности, обе эти огибающие обладают интегральным свойством (53).

Рассмотрим теперь отражение видеоимпульсов, описываемых функциями Лагерра, от границ диспергирующих сред. Пользуясь представлениями переменных полей в виде неразделяющихся функций, можно получить простые аналитические выражения для коэффициентов отражения. Ограничиваясь случаем нормального падения сигналов, целесообразно обсудить отдельно задачи отражения от модели непоглощающей среды (плазма) и поглощающей (проводник).

1. Отражение видеоимпульсов от границы плазмы.

Коэффициенты отражения сигналов находятся, как обычно, из условий непрерывности электрических и

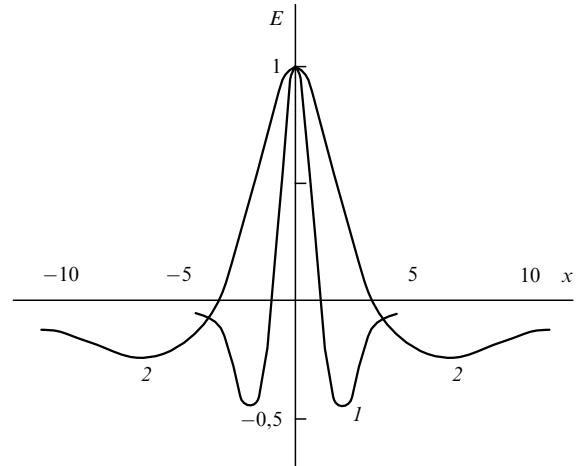


Рис. 4. Огибающая "Mexican hat" (кривая 1) и симметричная огибающая видеоимпульса (56) — линейная комбинация функций Лагерра (кривая 2).

магнитных составляющих полей на границе среды ($z = 0$). Гармоники e_q и h_q (18), (19) на поверхности $z = 0$ сводятся к комбинациям бесселевых функций:

$$\begin{aligned} e_q \Big|_{z=0} &= \frac{1}{4} [J_{q-2}(\tau) - 2J_q(\tau) + J_{q+2}(\tau)] h_q \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{4} [J_{q-2}(\tau) - J_{q+2}(\tau)]. \end{aligned} \quad (57)$$

Подставляя представление функций Бесселя в виде ряда [16]

$$\begin{aligned} J_q(\tau) &= \left(\frac{\tau}{2} \right)^q \left[\frac{1}{\Gamma(v+1)} - \left(\frac{\tau}{2} \right)^{q+2} \frac{1}{\Gamma(v+2)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tau}{2} \right)^{q+4} \frac{1}{2!\Gamma(v+3)} - \dots \right] \end{aligned} \quad (58)$$

в (57) и (17) и сравнивая с (50), легко найти из условий непрерывности, что наименьший номер гармоники в сумме (17) определяется из условия $q - 2 = 1$; таким образом, суммирование в (17) начинается с $q = 3$ и ведется по всем целым положительным числам $q \geq 3$. Аналогичное рассуждение показывает, что при падении видеоимпульса (54) возбужденное поле (17) содержит гармоники $q \geq 4$, а в случае импульса (56) — $q \geq 2$.

Найдем теперь коэффициент отражения импульса (49) от плазмы. В этом случае компоненты преломленной волны представляются на границе среды $z = 0$ в виде

$$E_x = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} a_q \frac{1}{4} [J_{q-2}(\tau) - 2J_q(\tau) + J_{q+2}(\tau)], \quad (59)$$

$$H_y = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} a_q \frac{1}{4} [J_{q-2}(\tau) - J_{q+2}(\tau)]. \quad (60)$$

В интервале $0 \leq \tau < \infty$ функции Бесселя не ортогональны. Поэтому удобно записать (59), (60) в виде разложения по функциям Лагерра $L_m(\tau t_0^{-1})$, ортогональ-

ных в интервале $0 \leq \tau < \infty$:

$$E_x = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{m=0}^{\infty} T_{1m} L_m(x), \quad x = t t_0^{-1}, \quad (61)$$

$$H_y = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{m=0}^{\infty} T_{2m} L_m(x), \quad (62)$$

$$T_{1m} = \sum_{q=3}^{\infty} a_q P_{mq}(\alpha), \quad T_{2m} = \sum_{q=3}^{\infty} a_q Q_{mq}(\alpha), \quad \alpha = t_0 \Omega. \quad (63)$$

Матричные элементы P_{mq} и Q_{mq} связаны с возбуждением m -м лагеровым импульсом q -й гармоники несинусоидального поля:

$$P_{mq}(\alpha) = \int_0^{\infty} L_m(x) e_q(x\alpha) dx, \quad (64)$$

$$Q_{mq}(\alpha) = \int_0^{\infty} L_m(x) h_q(x\alpha) dx. \quad (65)$$

Рассмотрим падающий видеоимпульс в виде

$$F_0(x) = B[L_0(x) - L_2(x)]. \quad (66)$$

Представим отраженный видеоимпульс также в виде суммы функций Лагерра L_m , умноженных на соответствующие коэффициенты отражения R_m . Используя граничные условия для падающих (66), преломленных (61) и отраженных полей и учитывая ортонормированность функций Лагерра (46), можно записать для каждой функции пару уравнений, представляющих граничные условия, в виде

$$E_{in} B(1 + R_m) = -\frac{A_0 \Omega}{c} T_{1m}, \quad (67)$$

$$E_{in} B(1 - R_m) = -\frac{A_0 \Omega}{c} T_{2m}. \quad (68)$$

Величины T_{1m} и T_{2m} определены в (63). Множество таких пар для всех значений m образует бесконечную систему уравнений, связывающих коэффициенты отражения R_m и неизвестные коэффициенты a_q , определяющие вклад q -й гармоники в электрическую и магнитную компоненты преломленного поля (59), (60). Разрешая систему (67), (68) относительно коэффициента R_m , получим

$$R_m(\alpha) = \frac{1 - T_{2m}/T_{1m}}{1 + T_{2m}/T_{1m}}. \quad (69)$$

Сравнивая (69) с известной формулой, описывающей коэффициент отражения в частотной области $R = (1 - n)(1 + n)^{-1}$, где n — показатель преломления среды, можно отметить аналогию между отношением T_{2m}/T_{1m} и величиной n . Если в представлении падающего видеоимпульса (49) отсутствует m -я гармоника L_m , то соответствующая пара уравнений (67), (68) сводится к виду

$$T_{1m} = 0, \quad T_{2m} = 0. \quad (70)$$

Найдем теперь коэффициент отражения видеоимпульса (66). Для этого вычислим сначала значение R_0 (69), соответствующее отражению сигнала L_0 , входящего

в (66). Отношение T_{20}/T_{10} в (69) вычисляется с помощью формулы из [17]

$$\int_0^{\infty} L_0(x) J_{q+2}(\alpha x) dx = [\alpha D(\alpha)]^2 \int_0^{\infty} L_0(x) J_q(\alpha x) dx, \quad (71)$$

$$D(\alpha) = 2(1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2})^{-1}.$$

Подставляя (71) в (64), (65), получим

$$P_{0q}(\alpha) = [1 - (\alpha D)^2]^2 N_q, \quad (72)$$

$$Q_{0q}(\alpha) = [1 - (\alpha D)^4] N_q, \quad (73)$$

$$N_q = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} L_0(x) J_q(\alpha x) dx. \quad (74)$$

Наконец, подставляя (72)–(74) в (63) и (69), определим отношение T_{20}/T_{10} и коэффициент отражения R_0

$$\frac{T_{20}}{T_{10}} = \frac{1 + (\alpha D)^2}{1 - (\alpha D)^2}, \quad R_0 = -(\alpha D)^2. \quad (75)$$

Существенное свойство представления (66) состоит в том, что коэффициенты отражения сигналов и должны быть равны, иначе, в силу равенства $L_0(0) = L_2(0) = 1$ (48) при отражении непрерывного сигнала, падающего из вакуума, на фронте отраженного сигнала возник бы разрыв огибающей. Обобщение этого свойства на случай огибающих (49) показывает, что отражение всех огибающих типа (49) характеризуется одним коэффициентом отражения (75), зависящим от отношения $\alpha = \Omega t_0$

$$R(\alpha) = -(\alpha D)^2 = -\frac{4\alpha^2}{(1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2})^2}. \quad (76)$$

Как видно из (76), $0 > R > -1$. Зависимость $R(\alpha)$ показана на рис. 5. В случае разреженной плазмы ($\alpha \rightarrow 0$, $R \approx -\alpha^2$) коэффициент отражения, как и следовало ожидать, оказывается пропорциональным электронной плотности. В противоположном предельном случае плотной плазмы ($\alpha \gg 1$) отражение усиливается ($R \rightarrow -1$).

Следует отметить особенность поля, возбуждаемого в среде при отражении импульсов с центральным макси-

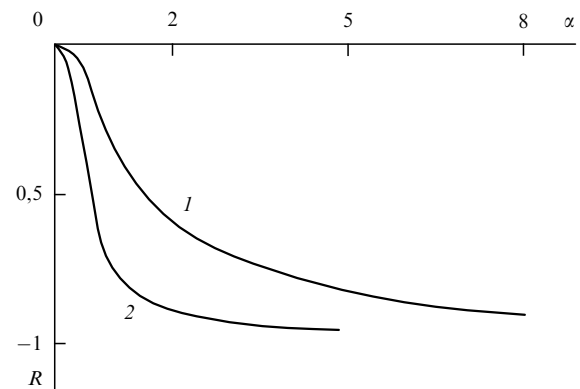


Рис. 5. Коэффициент отражения R видеоимпульса F_0 (66) от плазмы; кривые 1 и 2 соответствуют нормальному ($\gamma = 0$) и наклонному ($\gamma = 75^\circ$) падению S -поляризованного импульса; $\tau = \Omega t_0$.

мумом типа (56). В представлении электрических и магнитных составляющих таких полей (17) возникают гармоники e_2 и h_2

$$e_2 = \frac{1}{4} [J_0 - 2\psi_2 + \psi_4] h_2 = \frac{1}{4} [J_0 - \psi_4]. \quad (77)$$

При распространении в плазме центральные максимумы этих гармоник образуют узкие пики ширины $\Delta t \sim (1 \div 2)\Omega^{-1}$, сохраняющие в отсутствии поглощения свою пиковую амплитуду (см. рис. 4). Периферийные части огибающих этих гармоник расплываются в глубине среды, так что контраст между центральным пиком и периферией огибающих усиливается в процессе распространения. Такой эффект может представить интерес при передаче сигнала типа (56) через плазмоподобную среду.

2. Отражение видеоимпульсов от поверхности проводника. Анализ отражения видеоимпульса от проводника проводится по аналогии с предыдущей задачей. Гармоники e_q и h_q выражаются на границе $\eta = 0$ через модифицированные функции Бесселя $I_q(\tau)$

$$e_q = \frac{\exp(-\tau)}{4} [I_{q-2} - 4I_{q-1} + 6I_q - 4I_{q+1} + I_{q+2}], \quad (78)$$

$$h_q = \frac{\exp(-\tau)}{4} [I_{q-2} - 2I_{q-1} + 2I_{q+1} - I_{q+2}]. \quad (79)$$

Используя формулу из [17]

$$\int_0^\infty \exp(-px) I_{q+1}(\beta x) dx = \beta D \int_0^\infty \exp(-px) I_q(\beta x) dx, \quad (80)$$

$$D = \left(p + \sqrt{p^2 - \beta^2}\right)^{-1}, \quad p = \beta + \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{t_0}{T},$$

получим для сумм T_{10} и T_{20} (63)

$$T_{10} = (1 - \beta D)^4 \sum_{q=3}^\infty a_q M_q, \quad (81)$$

$$T_{20} = (1 - \beta D)^3 (1 + \beta D) \sum_{q=3}^\infty a_q M_q, \quad (82)$$

$$M_q = \frac{1}{4} \int_0^\infty \exp(-px) I_{q-2}(\beta x) dx. \quad (83)$$

Рассматривая опять коэффициент отражения видеоимпульса (66), найдем из (69)

$$R = -\frac{2\beta}{1 + 2\beta + \sqrt{1 + 4\beta}}. \quad (84)$$

Зависимость коэффициента отражения от отношения характерных времен показана на рис. 6. Как видно, отражение импульсов усиливается с ростом отношения $t_0 T^{-1}$, причем $-1 < R < 0$.

Представление полей в диспергирующих средах с помощью функций Бесселя целочисленного порядка q (59), (60) связано с оптикой гладких лаггерровых огибающих, имеющих нулевую начальную точку и конечную крутизну фронта. В рамках этого же подхода можно рассмотреть и отражение огибающих типа ударной волны, отличающихся бесконечной крутизной фронта вблизи нулевой начальной точки. Такие сигналы могут быть представлены с помощью обобщенных функций

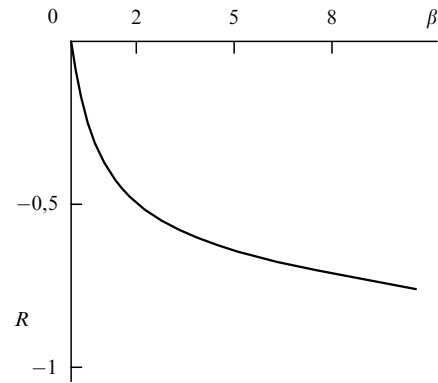


Рис. 6. Зависимость коэффициента отражения R видеоимпульса F_0 (66) от проводника при нормальном падении от отношения характерных времен импульса и среды $\beta = t_0 T^{-1}$.

Лагерра:

$$L_m^{(n)}(x) = \frac{\exp(x/2)}{m!} x^{-n/2} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[\exp(-x) x^{m+n} \right], \quad 0 \leq n < 2. \quad (85)$$

Ранее использованные функции Лагерра (44) являются частным случаем (85), соответствующим значению $n = 0$. Поведение функций $L_m^{(n)}$, нормированных в интервале $0 \leq x < \infty$, вблизи фронта $x = 0$ дается формулами:

$$L_m^{(n)}(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial L_m^{(n)}(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \sim x^{n/2-1} \rightarrow \infty. \quad (86)$$

Таким образом, крутизна фронта определяется параметром n . Линейные комбинации функций $L_m^{(n)}$, содержащие свободный параметр B ,

$$F_0^{(n)}(x) = B[L_0^{(n)}(x) + L_1^{(n)}(x)], \quad (87)$$

показанные на рис. 7, обладают, как и огибающие обычных функций Лагерра (49), интегральным свойством (53).

Отражение импульсов $L_m^{(n)}(x)$ можно исследовать по обычной схеме, пользуясь непрерывностью полей на

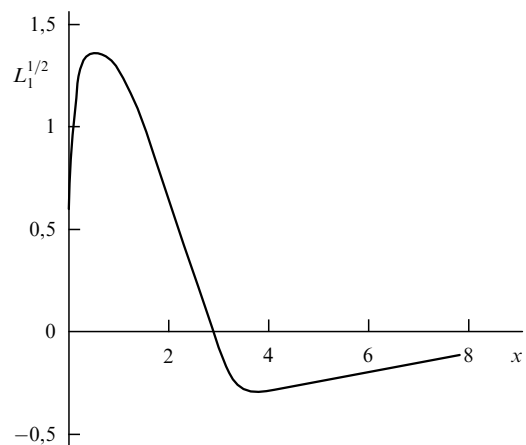


Рис. 7. Огибающая ударного импульса, описываемого обобщенной функцией Лагерра $L_m^{(n)}(x)$ ($m = 1, n = 0,5$).

границе среды: при этом поля преломленных волн описываются, в отличие от (59), (60), с помощью беселевых функций с дробными индексами, а суммирование в (17) ведется, начиная со значения $q = 2 + n/2$. Такие "ударные" огибающие, отличающиеся от физических моделей импульсов с конечным временем нарастания фронта (49), здесь не рассматриваются.

Отметим в заключение некоторые особенности отражения видеоимпульсов от диспергирующих и проводящих сред:

а) коэффициенты отражения лаггерровых видеоимпульсов всегда действительны;

б) равенство коэффициентов отражения различных огибающих (49) при заданных значениях параметров α (76) или β (84) является характерным свойством лаггерровых сигналов; сигналы других типов (например, эрмитовы огибающие) таким свойством не обладают [18];

в) анализ отражения импульсов длительностью t_0 от сред со временем установления поля T показывает, что один и тот же импульс ведет себя как "короткий" или "длинный" в зависимости от среды, с которой он взаимодействует, т.е. в зависимости от величины отношения $t_0 T^{-1}$.

5. Сферические волновые импульсы

Свойства несинусоидальных электромагнитных полей плоской геометрии, отмеченные в разделах 2–4, легко обобщаются на случай сферических волн. Так, вектор-потенциал такой волны с компонентами $A_\varphi = A_0 F$ ($A_\theta = A_R = 0$), распространяющейся в плазме вдоль радиуса R , определяется уравнением в сферических координатах (R, θ, φ):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial F}{\partial R} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} F. \quad (88)$$

Подстановка $F = fR^{-1}$ приводит (88) к одномерному уравнению Клейна–Гордона для функции f в форме (11). Компоненты поперечной сферической волны E_φ и H_θ находятся в этом случае по формулам

$$E_\varphi = -\frac{1}{cR} \frac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \quad H_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial A_\varphi}{\partial R}. \quad (89)$$

Рассмотрим теперь отражение видеоимпульса сферических волн F_0 (49), излученных дипольным источником, от поверхности плазмы. Геометрия задачи (рис. 8)

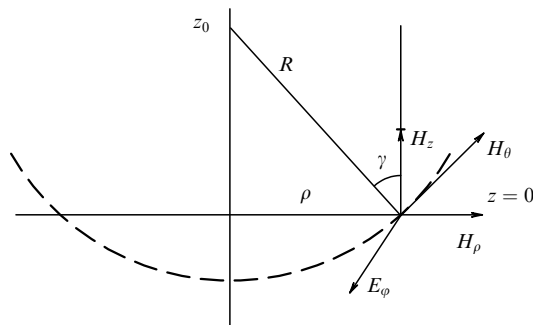


Рис. 8. Геометрия отражения S-поляризованного сферического волнового импульса от поверхности диэлектрика $z = 0$. Источник находится на высоте z_0 от поверхности, E_φ, H_θ и H_z — компоненты поля импульса.

отвечает случаю S-поляризации. Представляя функцию f в (88) в виде (12) и выражая компоненты поля в среде через комбинации неразделяющихся гармоник (17)–(19), можно записать условия непрерывности компонент E_φ, H_z, H_θ на поверхности плазмы $z = 0$ в виде

$$E_{in}(1 + R) = -\frac{A_0 \Omega}{c \sqrt{z_0^2 + \varrho^2}} T_{10}, \quad (90)$$

$$E_{in}(1 - R) \cos \gamma = -\frac{A_0 \Omega}{c \sqrt{z_0^2 + \varrho^2}} T_{20} \cos \delta, \quad (91)$$

$$E_{in}(1 + R) \sin \gamma = -\frac{A_0 \Omega}{c \sqrt{z_0^2 + \varrho^2}} T_{20} \sin \delta. \quad (92)$$

Здесь E_{in} — амплитуда падающего видеоимпульса (49), R — коэффициент отражения, γ и δ — углы падения и преломления, суммы T_{10} и T_{20} определены в (63)–(65). Разделив (92) на (90), получим для

$$\sin \gamma(\varrho) = \frac{T_{20}}{T_{10}} \sin \delta(\varrho). \quad (93)$$

Отношение $T_{20} T_{10}^{-1}$ определено в (75). Равенство (93) выражает закон преломления для видеоимпульсов, причем

$$\sin \gamma(\varrho) = \frac{\varrho}{\sqrt{z_0^2 + \varrho^2}}. \quad (94)$$

Комбинируя (91) и (90), найдем коэффициент отражения:

$$R = \frac{\cos \gamma - \sqrt{(T_{20}/T_{10})^2 - \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma + \sqrt{(T_{20}/T_{10})^2 - \sin^2 \gamma}}. \quad (95)$$

Таким образом, для всех точек поверхности, характеризуемых заданными значениями радиуса ϱ , коэффициент отражения зависит лишь от параметра $\alpha = \Omega t_0$ (см. рис. 5). В случае нормального падения ($\gamma = 0$) система (90)–(92) переходит в (67), (68), а формула для коэффициента отражения (95) — в (76).

Выражения (93) и (95) можно рассматривать как обобщения формул Снеллиуса и Френеля для лаггер-оптики. Отношение $T_{20} T_{10}^{-1}$ входит в эти формулы вместо показателя преломления среды. Следует отметить, что, согласно (75), это отношение всегда больше единицы, и поэтому полное внутреннее отражение (ПВО) таких видеоимпульсов, падающих из вакуума на границу плазмы, не возникает. Интересно, что эффект ПВО возможен для цуга гармонических волн с частотой $\omega > \Omega$, падающих на плазму под углом $\gamma > \gamma_0$

$$\gamma_0 = \arccos(\Omega \omega^{-1}). \quad (96)$$

Отмеченное различие указывает на возможность фильтрации в реальном времени гармонических волн и видеоимпульсов, падающих в одном направлении на границу плазменной среды.

6. Электрическая индукция в нестационарных полях

Электрическая индукция $\mathbf{D}$, определенная формулой (5), связана, как известно, с динамическими процессами установления поля в среде. Вклад таких процессов

описывается интегральным членом в (5), вычисление которого для ряда полей и, в частности, для синусоидальных волн выполняется обычно в рамках приближения медленных изменений параметров среды и поля. В отличие от этого представление переменных токов в среде с помощью неразделяющихся функций дает возможность вычислить интегральный член в (5) в явной форме без использования указанного приближения. Так, подставляя выражение для тока в плазме (20) в (5), можно записать электрическую индукцию в плазме в форме, аналогичной (17):

$$D = -\frac{A_0 \Omega}{c} \sum_{q=3}^{\infty} a_q d_q. \quad (97)$$

Формула (97) учитывает зависимость индукции от времени и координаты, следующую из (5), без дополнительных условий.

Сравнение гармоник d_q и e_q (рис. 1а, 9а) показывает значительные различия в огибающих этих гармоник. В отличие от фурье-компонент индукции D_ω и поля E_ω , связанных в частотной области через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ соотношением $D_\omega = \varepsilon(\omega)E_\omega$, гармоники d_q и e_q не пропорциональны друг другу. Таким образом, для описания нестационарной электрической индукции во временной области нет необходимости вводить концепцию диэлектрической проницаемости ε . Кроме того, представления о показателе преломления n , связанном с ε известным соотношением $n^2 = \varepsilon$ и фазовой скорости $v_\phi = cn^{-1}$, как видно из разделов 3–5, в оптике видеоимпульсов также не возникают. Таким образом, эти важнейшие понятия традиционной оптики синусоидальных волн не используются в обсуждаемой модели оптики негармонических полей в диспергирующих средах.

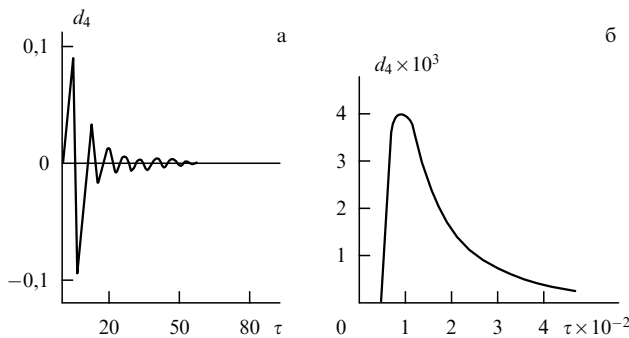


Рис. 9. Несинусоидальная гармоника электрической индукции d_4 в сечении $\eta = 0$ (а); огибающая колебаний гармоники d_4 в сечении $\eta = 50$ (б).

Пользуясь выражением для электрической индукции (97), можно найти скорость потока энергии в нестационарном поле (17) в прозрачной среде. Эту скорость $\mathbf{v}$ можно определить соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{W}, \quad (98)$$

где $\mathbf{P}$ — поток энергии (вектор Пойнтинга), W — плотность энергии в немагнитной среде без поглоще-

ния [9]

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (99)$$

$$W = \frac{1}{4\pi} \int E \frac{\partial D}{\partial t} dt + \frac{|H|^2}{8\pi}. \quad (100)$$

Записывая производную $\partial \mathbf{D} / \partial t$ в виде

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{A_0 \Omega^2}{c} \left(f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) \quad (101)$$

и пользуясь (6), можно представить скорость потока энергии (98) в нормализованной форме:

$$\frac{v}{c} = \frac{2(\partial f / \partial \tau)(\partial f / \partial \eta)}{|f|^2 + |\partial f / \partial \tau|^2 + |\partial f / \partial \eta|^2}. \quad (102)$$

Заметим, что подстановка в (102) вектор-потенциала бегущей стационарной гармонической волны в виде $f = \exp[i(kz - \omega t)]$, $k = \omega n c^{-1}$ приводит к известной формуле для групповой скорости синусоидальной волны v_g в плазме

$$v_g = cn, \quad n = \sqrt{1 - \Omega^2 \omega^{-2}}.$$

Подстановка в (102) выражения для вектор-потенциала нестационарного поля (12), представленного с помощью неразделяющихся функций ψ_q , приводит к сложной зависимости скорости потока энергии от координат и времени. Появление коэффициентов a_q (12) в выражении (102) указывает на зависимость потока энергии при импульсном возбуждении среды от формы и длительности возбуждающего видеоимпульса.

Таким образом, фазовая скорость v_ϕ , которая принимает сверхсветовые значения при стационарном распространении синусоидальных волн в плазме, не имеет смысла для обсуждаемых здесь нестационарных полей. В отличие от этого, скорость потока энергии, определенная общей формулой (98), сохраняет смысл как для гармонических, так и для негармонических полей и, как видно из (102), удовлетворяет релятивистскому ограничению $|v| \leq c$.

7. Негармонические волны в линии передачи

Линия передачи с распределенными параметрами многие годы была популярной моделью для изучения волновых процессов в ряде задач электротехники и радиофизики. Динамика тока J и напряжения U в таких линиях описывается системой уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial z} + C \frac{\partial U}{\partial t} + GU = 0, \quad (103)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L \frac{\partial J}{\partial t} + RJ = 0. \quad (104)$$

Здесь C , L , R и G — погонная емкость, индуктивность, сопротивление и параметр утечки. Вводя характерные масштабы времени

$$t_1 = \frac{L}{R}, \quad t_2 = \frac{C}{G}, \quad T_0 = \frac{2t_1 t_2}{|t_1 - t_2|}, \quad (105)$$

безразмерные переменные τ , η и нормализованные значения тока i и напряжения u

$$\tau = \frac{t}{T_0}, \quad \eta = z(vT_0)^{-1}, \quad v = (LC)^{-1/2}, \quad (106)$$

$$i = AI, \quad u = \frac{AU}{RT_0 v}, \quad (107)$$

запишем систему (103), (104) в форме, удобной для анализа:

$$\frac{t_1 t_2}{T_0^2} \frac{\partial i}{\partial \eta} + \frac{t_2}{T_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u = 0, \quad (108)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{t_2}{T_0} \frac{\partial i}{\partial \tau} + i = 0. \quad (109)$$

Традиционное решение системы (103), (104) записывается в виде затухающей гармонической волны $\exp[i(kz - \omega t) - \delta t]$, где частота ω и волновое число k связаны дисперсионным уравнением

$$\omega = \frac{i(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} \pm \sqrt{(kv)^2 - T_0^{-2}}. \quad (110)$$

В отличие от (110), найдем теперь несинусоидальные волны в линии связи. Введем новую неизвестную функцию ψ соотношениями:

$$i = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad u = -\frac{t_1}{T_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi. \quad (111)$$

Подстановка (111) в систему (108), (109) превращает уравнение (109) в тождество; функция ψ находится при этом из уравнения (108):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \frac{T_0^2}{t_1 t_2} \psi + \frac{T_0(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}. \quad (112)$$

Новые решения уравнения (102) могут быть записаны с помощью неразделяющихся функций $\tilde{\Theta}_q$

$$\psi = \sum_q a_q f_q, \quad f_q = \frac{\partial \tilde{\Theta}_q}{\partial \tau}, \quad \gamma = \frac{t_1 + t_2}{|t_1 - t_2|}, \quad (113)$$

$$\tilde{\Theta}_q = \exp(-\gamma \tau) \left(\frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{q/2} I_q \left(\sqrt{\tau^2 - \eta^2} \right), \quad \tau \geq \eta.$$

Подставляя (113) в (111), найдем выражения для несинусоидальных огибающих тока и напряжения в линии:

$$i = -\sum_q a_q i_q, \quad u = -\sum_q a_q u_q, \quad (114)$$

$$i_q = \frac{1}{4} [\tilde{\Theta}_{q-2} - \tilde{\Theta}_{q+2} - 2\gamma(\tilde{\Theta}_{q-1} - \tilde{\Theta}_{q+1})], \quad (115)$$

$$i_q = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t_2}{t_1} \right) [\tilde{\Theta}_{q-2} + \tilde{\Theta}_{q+2} - 2(1 + \gamma)(\tilde{\Theta}_{q-1} - \tilde{\Theta}_{q+1}) + 2(1 + 2\gamma)\tilde{\Theta}_q]. \quad (116)$$

Формулы (115), (116) описывают пространственно-временную эволюцию несинусоидальных гармоник тока и напряжения (рис. 10). Разнообразие темпов этой эволюции зависит от двух характерных времен системы t_1 и t_2 (105). В частном случае $t_1 \gg t_2$ ($\gamma \rightarrow 1$, $T_0 \rightarrow 2t_2$)

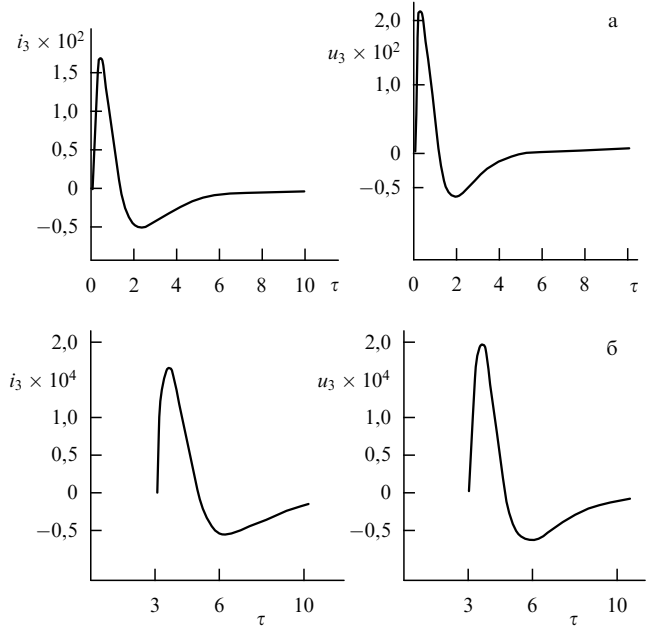


Рис. 10. Неразделяющиеся гармоники тока i_3 и напряжения u_3 в линии передачи ($t_2 = 4t_1$) на конце линии $\eta = 0$ (а) и в точке $\eta = 3$ (б).

уравнение для линии связи (112) переходит в телеграфное уравнение для поля в диссипативной среде с одним характерным временем $T = 2t_2$. При этом выражения для гармоник напряжения u_q и тока i_q переходят в выражения для гармоник электрического и магнитного поля (41), (42)

$$u_q|_{\gamma=1} = e_q, \quad i_q|_{\gamma=1} = h_q. \quad (117)$$

Продолжая эту аналогию, можно записать граничные условия непрерывности для тока и напряжения на конце линии $\eta = 0$ и найти коэффициент отражения лаггерова импульса тока от конца линии [14]. Таким образом, стандартные уравнения линии передачи (103), (104) описывают, наряду с затухающими синусоидальными волнами, широкие классы нестационарных режимов, возникающих при импульсных возбуждениях линии. Такие режимы указывают на возможность применения линий передачи для моделирования взаимодействия видеоимпульсов со сплошными средами.

8. Магнитогидродинамические импульсы в неоднородной плазме

Одним из традиционных объектов исследований в магнитной гидродинамике (МГД) являются альфвеновские волны в плазме, представляющие собой связанные колебания магнитного поля и плотности плазмы. Концепция таких волн широко используется при исследовании лабораторной и космической плазмы; при этом возмущения магнитного поля часто носят импульсный характер, а плотность плазмы по пути распространения этих возмущений существенно неоднородна. Модификация метода неразделяющихся решений уравнения Клейна–Гордона позволяет получить ряд точных аналитических решений таких нестационарных и неоднородных задач.

Этот подход удобно проиллюстрировать на простейшей задаче о распространении МГД импульса вдоль постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ в направлении z в плазме без диссипации с профилем плотности $\varrho(z)$:

$$\varrho(z) = \varrho_0 \begin{cases} 1 & \text{при } z < 0, \\ U^2(z) & \text{при } z \geq 0. \end{cases} \quad (118)$$

Здесь $U^2(z)$ — неизвестная безразмерная функция, принимающая в области $z \geq 0$ положительные значения. Поле распространяющегося импульса характеризуется возмущениями магнитного поля $\mathbf{H}_1$ и скоростью течения плазмы $\mathbf{v}$, причем векторы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{v}$ лежат при продольном распространении в плоскости (x, y) , ортогональной к направлению $\mathbf{H}_0$. Рассмотрим для простоты линейно поляризованную волну, компоненты H_{1x} и v_x которой и связаны уравнениями магнитной гидродинамики; для продольного распространения эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial H_{1x}}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (119)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{H_0}{4\pi\varrho_0 U^2(z)} \frac{\partial H_{1x}}{\partial z}. \quad (120)$$

Введем нормированные функции h и v и альфвеновскую скорость v_A

$$h = \frac{H_{1x}}{H_0}, \quad v = \frac{v_x}{v_A}, \quad v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\varrho_0}} \quad (121)$$

и новую неизвестную функцию ψ , определяемую соотношениями

$$h = A_0 v_A \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = A_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (122)$$

Систему (119), (120) можно преобразовать с помощью подстановок (121), (122) к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{U^2(z)}{v_A^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (123)$$

Неоднородное волновое уравнение (123) часто используется для описания стационарных монохроматических волн в неоднородных средах, когда предполагается, что $\psi = \psi_1(z) \exp(-i\omega t)$, а функция $\psi_1(z)$ находится из уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 U^2(z)}{v_A^2} \psi_1 = 0. \quad (124)$$

Точные решения уравнения (124) известны для некоторых профилей $U^2(z)$ [20].

В отличие от традиционного разделения переменных (124) ниже исследуются новые классы решений уравнения (123), не связанные с этим методом. Введем для этого новую переменную

$$y = \int_0^z U(z_1) dz_1 \quad (125)$$

и новую функцию

$$F = \psi \sqrt{U(z)}. \quad (126)$$

Уравнение (123) преобразуется при этом к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = F \left[\frac{1}{2U^3} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{3}{4U^4} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (127)$$

Неизвестная функция (7) в правой части (127) определяет многообразие решений этого уравнения. Рассмотрим, например, случай

$$\frac{1}{2U^3} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{3}{4U^4} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 = p^2, \quad (128)$$

p^2 — некоторая вещественная постоянная. Тогда решение нелинейного уравнения (128), удовлетворяющее условию $U|_{z=0} = 1$ (118), имеет вид

$$U(z) = \left(1 + s_1 \frac{z}{L_1} + s_2 \frac{z^2}{L_2^2} \right)^{-1}. \quad (129)$$

Здесь L_1 и L_2 — параметры среды, имеющие смысл характерных длин. Пространственная зависимость плотности среды в случае (129) описывается моделью с двумя свободными параметрами L_1 и L_2 (рис. 11а):

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + s_1 \frac{z}{L_1} + s_2 \frac{z^2}{L_2^2} \right)^{-2}, \quad s_1 = 0, \pm 1, \quad s_2 = 0, \pm 1. \quad (130)$$

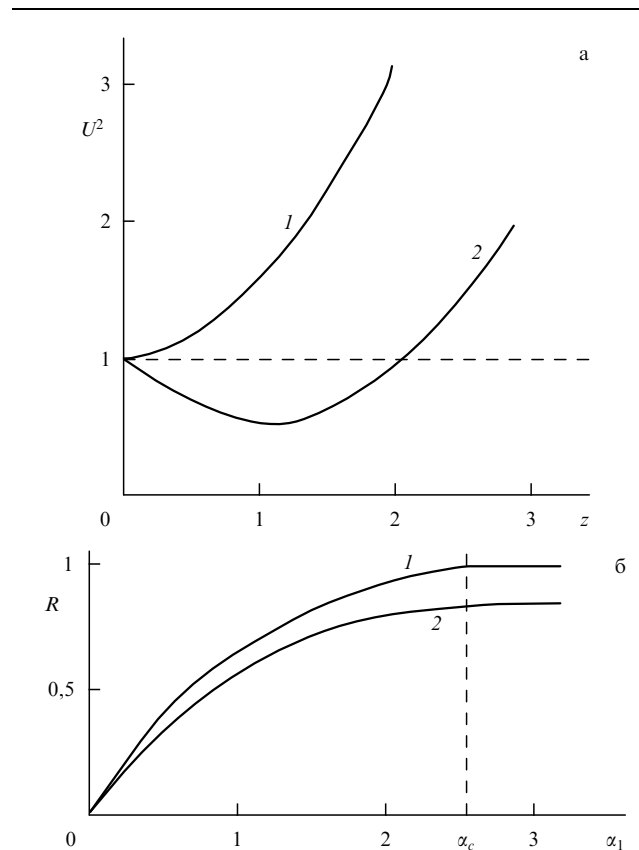


Рис. 11. Нормированные профили плотности (130), допускающие точное решение задачи о продольном распространении альфвеновской волны в неоднородной плазме; кривые 1 и 2 соответствуют случаям $s_1 = s_2 = -1$ и $s_1 = 1; s_2 = -1$; $p^2 < 0$ (а). Коэффициент отражения альфвеновского видеоимпульса F_0 (66) от неоднородной плазмы при $p^2 > 0$; кривые 1 и 2 соответствуют значениям параметра K (138) $K = 1,015$ и $K = 1$; $\alpha_1 = p v_A t_0$ (б).

Таким образом, волновое уравнение для неоднородной среды без дисперсии (123) сведено к уравнению Клейна–Гордона для однородной диспергирующей среды в пространстве (y, t)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = p^2 F. \quad (131)$$

Дисперсия этой среды определяется через параметр неоднородности p^2 ; подставляя (129) в (128), выразим p^2 через характерные длины

$$p^2 = \frac{1}{4L_1^2} - \frac{s_2}{L_2^2}. \quad (132)$$

В зависимости от знака параметра p^2 (132) функция F представляется через различные неразделяющиеся решения уравнения Клейна–Гордона. Так, в случае $p^2 > 0$ можно использовать решение (12), подставляя туда $\eta = py$; $\tau = pv_A t$. Выражая вектор-потенциал ψ из (126), найдем переменное магнитное поле h и скорость течения плазмы v (122). Электрическое поле волны выражается через скорость v_x

$$E_y = \frac{H_0 v_x}{c}. \quad (133)$$

Окончательно, электрическая и магнитная компоненты нестационарной альфвеновской волны в неоднородной плазме записываются в виде

$$E_x = -\frac{A_0 v_A}{c \sqrt{U(z)}} \sum_{q=3}^{\infty} a_q e_q, \quad H_y = -\frac{A_0 v_A}{c \sqrt{U(z)}} \sum_{q=3}^{\infty} a_q h_q, \quad (134)$$

$$e_q = \frac{p}{4} (\psi_{q-2} - 2\psi_q + \psi_{q+2}), \quad (135)$$

$$h_q = \frac{p}{4} \left[(\psi_{q-2} - \psi_{q+2}) - \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial z} (\psi_{q-1} - \psi_{q+1}) \right]. \quad (136)$$

Переменная η , входящая в функции ψ_q (135), (136), легко вычисляется при подстановке функции $U(z)$ (129) в (125).

Продолжая аналогию с уравнением Клейна–Гордона и пользуясь схемой расчета из раздела 4, можно найти коэффициент отражения МГД импульсов с лагеровой огибающей (49) от границы неоднородной плазмы (129); так, при $s_1 = s_2 = 1$ получим ($p^2 > 0$):

$$R = -\frac{(\alpha_1 D_1)[\alpha_1 D_1 - K]}{1 - K \alpha_1 D_1}, \quad (137)$$

$$\alpha_1 = p v_A t_0, \quad K = \frac{s_1}{2p L_1}. \quad (138)$$

Функция $D_1 = D(\alpha_1)$ определена в (71). График коэффициента отражения R показан на рис. 116, отражение становится полным при $t_0 \geq t_c$; значение t_c определяется из условия $R = 1$, т.е.

$$t_c = (p v_A)^{-1} (K - \sqrt{K^2 - 1}). \quad (139)$$

В заключение отметим, что профиль плотности плазмы (129) обеспечивает точное аналитическое решение задачи об отражении альфвеновского видеоимпульса от границы неоднородной плазмы без традиционных предположений о малости или медленности изменения неоднородности. Уравнения типа (123), описывающие

распространение волн со скоростью, зависящей от координаты, встречаются в ряде задач радиофизики, акустики и оптики, так что рассмотренная задача может представить интерес для динамики нестационарных и неоднородных полей различной физической природы.

9. Нелинейная динамика видеоимпульсов

Взаимодействие ультракоротких волновых импульсов с диспергирующими средами является актуальной проблемой нелинейной оптики и физики плазмы, поскольку значительные пиковые мощности излучения достигаются именно в таких импульсах. Традиционный анализ нелинейных импульсных процессов основан на модели медленной эволюции фазы колебаний и амплитудной огибающей импульса, содержащего много длин волн. Колебания при этом предполагаются гармоническими, а нелинейные возмущения показателя преломления Δn этих волн считаются малыми по сравнению с невозмущенными "линейными" значениями n_0 . Именно такая модель лежит в основе теории самовоздействия и взаимодействия волн и физики солитонов. Однако эта модель не подходит для анализа самовоздействия видеоимпульсов, когда число колебаний в импульсе невелико, форма колебаний — несинусоидальна, а разделение показателя преломления на "линейную" и "нелинейную" части неоправданно. Поэтому оптику таких существенно нелинейных импульсных полей надо строить "из первых принципов". Некоторые результаты такого подхода показаны ниже на примере задачи об экранировке импульсного поля нелинейной диэлектрической средой. Начнем с уравнений Максвелла для линейно-поляризованной волны в изотропной консервативной среде. Предполагая, что время установления поля короче длительности импульса, представим электрическую индукцию D как непрерывную функцию электрического поля E :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (140)$$

Подвергнем эти уравнения следующим преобразованиям:

1. Перепишем уравнения (140), рассматривая функции E_x и H_y как новые независимые переменные, а переменные z и t как новые искомые функции $z = z(E_x, H_y)$, $t = t(E_x, H_y)$ (преобразование годографа). Система (140) приводится при этом к виду

$$\frac{\partial t}{\partial H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial E}, \quad \frac{\partial t}{\partial E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial H} \frac{\partial z}{\partial H}, \quad (141)$$

$$E = E_x, \quad H = H_y.$$

Такой подход составляет математическую основу приближения нелинейной геометрической оптики квазигармонических волн в среде с кубичной нелинейностью [21]. В отличие от этого, преобразование годографа используется здесь для построения точных аналитических решений уравнений Максвелла (141) для негармонических полей и гораздо более общих моделей нелинейных сред.

2. Преобразование годографа переводит нелинейную систему (140), заданную в пространстве (z, t) , в линейную, но неоднородную систему (141), заданную в пространстве (E, H) . Система (141) формально аналогична системе

(123), описывающей распространение волн со скоростью, зависящей от координаты; при этом функция $\partial D/\partial E$ в (141) соответствует функции $U^2(z)$ в (123). Эта аналогия подсказывает путь решения системы уравнений (141).

Определим новую функцию ψ так, что

$$t = -\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial E}, \quad z = \frac{\partial \psi}{\partial H}. \quad (142)$$

Подставляя (142) в (141), получим для функции неоднородное волновое уравнение в пространстве (E, H)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial E^2} - \frac{\partial D}{\partial E} \frac{\partial^2 \psi}{\partial H} = 0. \quad (143)$$

Рассмотрим для определенности случай $\partial D/\partial E > 0$, так что

$$\frac{\partial D}{\partial E} = n_0^2 U^2(E), \quad U|_{E=0} = 1. \quad (144)$$

Здесь n_0 — значение показателя преломления среды в пределе слабого поля и коротких временных масштабов

$$n_0^2 = \varepsilon_\infty. \quad (145)$$

Вводя функцию

$$F = \psi \sqrt{U(E)}, \quad U \geq 0 \quad (146)$$

и новую переменную

$$\varphi = p \int_0^E U(y) dy, \quad (147)$$

получим из (143) уравнение Клейна – Гордона для функции F

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = F, \quad h = \frac{pH}{n_0}. \quad (148)$$

Постоянная p^2 зависит от нелинейных свойств среды

$$p^2 = \frac{1}{2U^3} \frac{\partial^2 U}{\partial E^2} - \frac{3}{4U^4} \left(\frac{\partial U}{\partial E} \right)^2. \quad (149)$$

Функция U , определяемая из уравнения (149), имеет вид

$$U = \left(1 + s_1 \frac{E}{E_1} + s_2 \frac{E^2}{E_2^2} \right)^{-1}, \quad s_1 = 0, \pm 1, \quad s_2 = 0, \pm 1, \quad (150)$$

$$p^2 = \frac{1}{4E_1^2} - \frac{s_2}{E_2^2}. \quad (151)$$

Здесь E_1 и E_2 — некоторые характерные значения полей в среде.

Пользуясь формулами (149), (150), можно найти нелинейную электрическую индукцию

$$D = n_0^2 \int_0^E U^2(y) dy \quad (152)$$

и переменную φ (147) для различных комбинаций характерных полей и знаков.

3. Рассмотрим для простоты функцию $U(E)$ с одним параметром

$$U = \left(1 - \frac{E^2}{E_2^2} \right)^{-1}, \quad p^2 = \frac{1}{E_2^2}. \quad (153)$$

Функции U (153) соответствуют электрическая индукция D и переменная φ

$$D = \frac{E_2 n_0^2}{2} \left(\operatorname{artanh} x + \frac{x}{1-x^2} \right), \quad x = \frac{E}{E_2}, \quad (154)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad (155)$$

Значения безразмерного параметра x заключены в интервале $0 \leq x < 1$. Для слабых полей $E \ll E_2$ зависимость (153) соответствует модели кубической фокусирующей нелинейности

$$D = n_0^2 E \left(1 + \frac{2\sqrt{n_0}}{3} \frac{E^2}{E_2^2} \right). \quad (156)$$

Найдем теперь электрическую и магнитную компоненты поля в среде с нелинейным откликом (153). Функция ψ (142) представляется в виде

$$\psi = A \sqrt{1-x^2} F, \quad (157)$$

где F удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона (148) и граничному условию (142)

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial h} \right|_{h=h_0, \varphi=\varphi_0} = 0. \quad (158)$$

Здесь $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ и $h_0 = h_0(t)$ — значения функций φ (147) и h (148) на границе среды $z = 0$ в любой момент времени t , A — нормировочная постоянная.

Выбирая решение уравнения (148) в виде

$$F = A \cosh \left(M \varphi_0 - \sqrt{M^2 - 1} h_0 \right), \quad (159)$$

где M — свободный параметр ($M > 1$), можно получить из (157) и (158) связь между функциями φ_0 и h_0

$$\varphi_0 = h_0 \sqrt{1 - M^{-2}}. \quad (160)$$

Подставляя в (159) значения безразмерных переменных φ_0 (155) и h_0 (148), запишем соотношение электрической и магнитной компонент поля на границе $z = 0$ в явном виде

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{E_2} &= \tanh \left(\frac{H_0}{n_0 E_2} \sqrt{1 - M^{-2}} \right), \\ E_0 &= E(t) \Big|_{z=0}, \quad H_0 = H(t) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (161)$$

Вводя коэффициент отражения падающего сигнала R из условий непрерывности на границе

$$\frac{1+R}{1-R} = \frac{E_0(t)}{H_0(t)}, \quad (162)$$

получим из (160)

$$R = \frac{n_0 \sqrt{1 - M^{-2}} - G(x_0)}{n_0 \sqrt{1 - M^{-2}} + G(x_0)}, \quad G(x_0) = \frac{\operatorname{artanh} x_0}{x_0}. \quad (163)$$

Огибающая падающего импульса E_{in} может быть найдена через коэффициент отражения R и поле преломленной волны E_0 на границе

$$\frac{E_{in}}{E_2} = \frac{n_0 \sqrt{1 - M^{-2}} + \operatorname{artanh} x_0}{2n_0 \sqrt{1 - M^{-2}}}. \quad (164)$$

Таким образом, огибающая падающего импульса выражена через нормированную огибающую преломленного электрического поля на границе среды $x_0 = x_0(t)$. Зависимость величины x_0 от времени определяется при подстановке решений (157) и (159) в (142) при $z = 0$

$$x_0 = \frac{ctL^{-1}}{\sqrt{1 + (ctL^{-1})^2}}, \quad L = -AE_2^{-1}. \quad (165)$$

Здесь L — пространственный масштаб огибающей.

В глубине среды $z \geq 0$ нормированные огибающие электрической и магнитной компоненты поля $x = x(z, t)$ и $h = h(z, t)$ описываются уравнениями, следующими из (142), (157) и (159):

$$\frac{(1 - M^{-2})x^2(1 - x^2)}{n_0^2} = \left[\frac{z - vt(1 - x^2)}{L} \right]^2 - \frac{z^2}{L^2} \frac{x^2}{M^2}, \quad (166)$$

$$h = \frac{\varphi}{\sqrt{1 - M^{-2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - M^{-2}}} \operatorname{arsinh} \left(\frac{z}{L} \frac{n_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right), \quad (167)$$

$$v = \frac{c}{n_0} \sqrt{1 - M^{-2}}. \quad (168)$$

Важная тенденция нелинейной эволюции поля, описываемой формулами (166)–(168), видна из выражения для коэффициента отражения R (163). Рассматривая предельные значения коэффициента отражения на фронте сигнала ($ct \ll L$) и вдали от фронта ($ct \gg L$)

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} R = \frac{n_0 \sqrt{1 - M^{-2}} - 1}{n_0 \sqrt{1 - M^{-2}} + 1}, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 1} R = 1, \quad (169)$$

легко видеть, что отражение импульса усиливается с ростом амплитуды; электрическое поле в глубине среды оказывается при этом значительно слабее, чем на поверхности (рис. 12). Отметим некоторые особенности такой самоэкранировки:

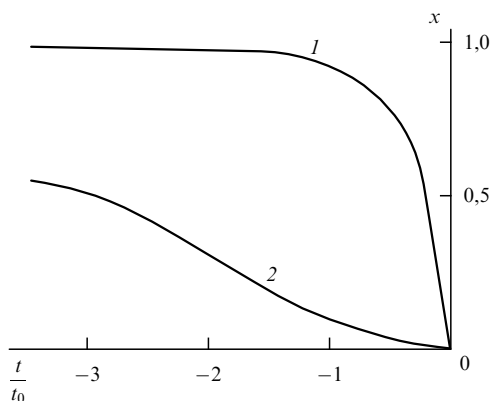


Рис. 12. Самоэкранировка импульса поля в сильно нелинейной среде (154). Кривые 1 и 2 — огибающие импульса (166) на границе среды и в сечении $z = L$; $t_0 = L/v$; $x = E/E_2$ (154); значения параметров, входящих в уравнение (166): $M = \sqrt{2}$; $n_0 = 3,5$.

1. Фронт электрического поля ($x = 0$) движется со скоростью v (168), зависящей от характеристики среды и параметра импульса M . Параметр $M > 1$ зависит от крутизны фронта начальной огибающей:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_{in}}{E_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{c}{2L} \left(1 + \frac{n_0}{\sqrt{1 - M^{-2}}} \right). \quad (170)$$

2. Электрическая и магнитная огибающие сигнала в нелинейной среде характеризуются различными темпами деформации.

3. Коэффициент отражения R (163) в случае $n_0 \sqrt{1 - M^{-2}} > 1$ меняет знак при значении x_0 , определяемом из уравнения

$$\operatorname{artanh} x_0 = x_0 n_0 \sqrt{1 - M^{-2}}. \quad (171)$$

В этом случае нелинейное отражение приводит к амплитудной модуляции отраженного сигнала и к изменению поляризации периферийной части его огибающей.

Нелинейная динамика импульса описана здесь с помощью решения (157), обобщающего тенденцию использования неразделяющихся решений уравнения Клейна–Гордона в случае $p^2 > 0$ (149), дальнейшие обобщения этого же подхода позволяют описать переходные режимы в средах с нелинейной намагниченностью, когда зависимость $B(H)$ описывается функцией U^2 (150), и в моделях среды со значением параметра $p^2 < 0$.

10. Заключение. Неразделяющиеся представления полей в импульсной оптике

Исследование быстропеременных непериодических полей для нескольких моделей диспергирующих сред, выполненное в разделах 2–9, показало возможность "альтернативного" описания таких полей вне рамок традиционной теории синусоидальных волн. Это описание выявило ряд характеристик среды и поля, которые свойственны теории синусоидальных волн, но не используются при рассматриваемом подходе:

- а) диэлектрическая проницаемость и показатель преломления;
- б) фаза колебаний и фазовая скорость;
- в) частота отсечки и декремент затухания.

Анализ процессов возбуждения и распространения непериодических полей в сплошных средах основан при таком подходе на непрерывности полей на границах сред и неразделяющихся решениях уравнений Клейна–Гордона и телеграфного уравнения во временной области. Поскольку временное описание в импульсной оптике начало развиваться недавно, целесообразно рассмотреть здесь несколько примеров, углубляющих представления о неразделяющихся решениях уравнений Максвелла.

1. Существование неразделяющихся решений не является исключительным свойством уравнения Клейна–Гордона. Аналогичные решения существуют и для широко используемого в теории волноводов уравнения Гельмгольца. Для простейшего полого волновода прямоугольного сечения это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_{\perp}^2 f. \quad (172)$$

Здесь x и y — координаты в плоскости сечения волновода, параметр $k_{\perp}^2$ связан с частотой распространяющейся волны и постоянной распространения β

$$k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2. \quad (173)$$

Стандартное решение уравнения (172) для одномодового режима, полученное при разделении переменных, можно записать, например, в форме

$$f_0 = \cos(k_1 x) \cos(k_2 y); \quad (174)$$

постоянные k_1 и k_2 для идеально проводящих стенок с размерами a и b определяются формулами

$$k_1 = \frac{\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{\pi}{b}, \quad k_1^2 + k_2^2 = k_{\perp}^2. \quad (175)$$

Наряду с "разделяющимся" решением f_0 (174) уравнению Гельмгольца удовлетворяет бесконечное множество неразделяющихся решений f_n ($n \geq 1$). Эти решения строятся с помощью рекуррентного соотношения [22]

$$f_{n+1} = \hat{L} f_n, \quad (176)$$

где оператор $\hat{L}$ имеет вид

$$\hat{L} = k_2 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_1 \frac{\partial}{\partial k_2}. \quad (177)$$

Так, например, простейшее неразделяющееся решение f_1 определяется формулой

$$f_1 = k_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) - k_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y). \quad (178)$$

Линейные комбинации функций f_n представляют интерес для нахождения собственных функций волноводов сложного криволинейного сечения [23].

2. Общее решение уравнения Клейна–Гордона (11) может быть записано в интегральной форме [24]

$$f(\tau, \eta) = \frac{1}{2} [\varphi(\tau - \eta) + \varphi(\tau + \eta)] + \frac{1}{2} \int_{\tau - \eta}^{\tau + \eta} d\theta \Phi(\theta, \tau, \eta), \quad (179)$$

$$\Phi(\theta, \tau, \eta) = \psi(\theta) I_0 \left(\sqrt{(\tau - \theta)^2 - \eta^2} \right) + \varphi(\theta) \eta \frac{I_1 \left(\sqrt{(\tau - \theta)^2 - \eta^2} \right)}{\sqrt{(\tau - \theta)^2 - \eta^2}}. \quad (180)$$

Здесь I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя, функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ связаны с граничными условиями

$$F|_{\eta=0} = \varphi(\tau), \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \psi(\tau). \quad (181)$$

Хотя решение (179)–(181) и является общим, однако представить в явном виде информацию о полях, возбуждаемых внутри среды внешним импульсным источником, с помощью этих формул обычно не удается. Такое представление затрудняется двумя причинами:

а. Функции φ и ψ (181), определяющие поле на границе среды, находятся с помощью коэффициентов отражения, а для вычисления этих коэффициентов нужно, в свою очередь, знать поле внутри среды.

б. Даже в случае, когда функции φ и ψ (181) известны, аналитическое вычисление интегральной свертки (179) оказывается, как правило, невозможным.

Так, в частности, попытка применить этот подход к задаче об отражении лаггерровых видеоимпульсов от плазмы, наталкивается на значительные трудности; в то же время, как показано в разделе 4, представление решений уравнения Клейна–Гордона с помощью неразделяющихся функций приводит к явным выражениям для структуры поля и коэффициента отражения.

3. Рассмотрим теперь решение этой же задачи об отражении лаггерровых видеоимпульсов F_0 (66) от плазмы в частотной области. Ограничиваясь случаем нормального падения, используем формулу для коэффициента отражения волны с частотой ω

$$R(\omega) = \frac{1 - \sqrt{1 - \Omega^2 \omega^{-2}}}{1 + \sqrt{1 - \Omega^2 \omega^{-2}}}. \quad (182)$$

Находя фурье-преобразование от огибающей F_0

$$(F_0)_{\omega} = \frac{16t_0(1 + i\omega t_0)}{(1 + 2i\omega t_0)^3}, \quad (183)$$

можно записать отраженный сигнал в виде интеграла по частотам

$$E_{\text{ref}} = 16E_{\text{in}} t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \Omega^2 \omega^{-2}}}{1 + \sqrt{1 - \Omega^2 \omega^{-2}}} \times \frac{1 + i\omega t_0}{(1 + 2i\omega t_0)^3} \exp(i\omega t_0) d\omega. \quad (184)$$

Вычислить этот интеграл аналитически не представляется возможным, и эта трудность еще раз показывает преимущества решения указанной задачи с помощью неразделяющихся функций, приводящих к простому алгебраическому выражению для коэффициента отражения видеоимпульса (76).

4. Продолжая анализ фурье-представлений в импульсной электродинамике, интересно отметить некоторые свойства спектральных амплитуд неразделяющихся представлений (17) электрической и магнитной компонент нестационарного поля в плазме. Ограничиваясь для простоты симметричными огибающими полей на границе плазмы $z = 0$ $E(t) = E(-t)$, $H(t) = H(-t)$, содержащими лишь гармоники с четными номерами $q = 2m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) (см., например, рис. 4), вычислим косинус и синус фурье-преобразования этих полей. Пользуясь в области прозрачности $\omega > \Omega$ формулой из [17]

$$\int_0^{\infty} \cos(\omega t) J_{2m}(\Omega t) dt = 0, \quad (185)$$

найдем из (57) косинус-компоненты гармоник e_{2m} и h_{2m}

$$\int_0^{\infty} \cos(\omega t) e_{2m} dt = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) h_{2m} dt = 0. \quad (186)$$

Синус-компоненты фурье-преобразования четных функций e_{2m} и h_{2m} равны нулю. Подставляя эти результаты в (17), получим для спектральных амплитуд неразделяющихся представлений полей в области прозрачности на границе плазмы

$$E_{\omega} \Big|_{z=0} = H_{\omega} \Big|_{z=0} = 0. \quad (187)$$

Нулевые спектральные амплитуды (187) показывают, что неразделяющиеся поля E и H (17) не могут быть возбуждены монохроматической волной типа $\cos(kz - \omega t)$, падающей в области прозрачности ($\omega > \Omega$) на границу плазмы.

5. Методы теории непериодических полей представляют интерес и для некоторых традиционных проблем радиофизики и оптики. Так, в рамках подхода, развитого в разделе 8, можно построить новые точные решения задач о распространении гармонических волн в неоднородных средах. Рассмотрим для этого, например, отражение альфвеновской волны с частотой ω , распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля $\mathbf{H}_0$, от неоднородности плотности плазмы $\varrho(z)$, заданной профилем (118). Определяя компоненты поля волны с помощью функции ψ (122), используем, в отличие от (134), гармонические решения уравнения (131)

$$F = \exp[i(k\eta - \omega t)], \quad k = \omega v_A^{-1} n(\omega), \quad (188)$$

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \Omega_p^2 \omega^{-2}}, \quad \Omega_p = p v_A. \quad (189)$$

Здесь v_A — альфвеновская скорость (121), параметр p ($p^2 > 0$) связан со структурой неоднородной среды (132).

Представляя функцию ψ (122) в виде

$$\psi = \frac{\exp[i(k\eta - \omega t)]}{\sqrt{U(z)}}, \quad (190)$$

вычислим компоненты волнового поля H_x и E_y (133) в неоднородной среде (129)

$$H_x = \frac{i A_0 k v_A H_0}{U \sqrt{U}} \left(U^2 + \frac{i}{2k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \exp[i(k\eta - \omega t)],$$

$$E_y = - \frac{i A_0 \omega v_A H_0}{c \sqrt{U}} \exp[i(k\eta - \omega t)]. \quad (191)$$

Комплексный коэффициент отражения волны можно найти с помощью стандартных граничных условий

$$R = \frac{1 - M}{1 + M}, \quad M = n(\omega) \left(1 + \frac{is_1}{2kL} \right). \quad (192)$$

Параметр $n(\omega)$ определен в (189). Заметим, что в области частот

$$\omega \leq \Omega_p = p v_A \quad (193)$$

наступает полное отражение альфвеновской волны.

Полученное точное решение волнового уравнения в неоднородной среде не связано с традиционными допущениями о медленности изменения параметров среды или поля. Формулы (189) выявляют полезную аналогию таких неоднородных альфвеновских волн с волнами в однородной плазме; при этом характерная частота Ω_p (193) играет роль частоты отсечки в плазме.

В заключение следует сказать, что в этих заметках очерчены лишь первые шаги "альтернативной" оптики нестационарных и непериодических полей построенной вне спектральных представлений. Такой подход приводит к точным аналитическим решениям, описывающим взаимодействие видеоимпульсов с рядом диспергирующих сред непосредственно во временной области. Математическая основа такого описания связана с использованием неразделяющихся решений уравнений Мак-

свелла. При этом возникают нестационарные обобщения концепций электрической индукции, скорости потока энергии и формул Снеллиуса и Френеля. Приведенное рассмотрение ограничено дебаевской моделью диэлектриков, поэтому важной задачей является обобщение временного подхода для анализа нестационарных полей в модели Лоренца, описывающей среду со свободными осцилляторами [25] и в смешанных моделях [26]. Кроме того, уравнение Клейна–Гордона и телеграфное уравнение широко применяются и вне оптики для описания волновых процессов в радиотехнике, акустике и геофизике, поэтому точные нестационарные решения этих уравнений могут быть полезны и для анализа импульсных процессов в полях иной физической природы и в иных диспергирующих средах.

Автор имел счастливую возможность обсуждать первые шаги этой работы с одним из патриархов теоретической радиофизики — С.М. Рытовым. Сегодня, когда Сергея Михайловича уже нет с нами, со все возрастающей признательностью вспоминаются его советы, оценки и уроки.

Автор благодарит Л.Д. Бахраха, Б.М. Болотовского, Ф.В. Бункина, Б.Б. Кадомцева, С.С. Моисеева и А.А. Рухадзе за интерес к работе, а также РФФИ за частичную поддержку (грант 96-02-19627).

Примечания при корректуре

Следует отметить, что схема преобразования неоднородных волновых уравнений к однородному уравнению Клейна–Гордона в новых переменных (см. раздел 8) легко обобщается на случай ряда часто используемых уравнений электродинамики с зависящими от времени параметрами. При этом возникают новые точные аналитические решения, описывающие волновые процессы в нестационарных системах. Рассмотрим для примера распространение электромагнитного поля в проводнике, проводимость которого изменяется со временем $\sigma = \sigma_0 U^2(t)$. Такой процесс описывается нестационарным телеграфным уравнением: пользуясь обозначениями раздела 3, такое уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{2}{T} U^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad U^2(t) \Big|_{t=0} = 1. \quad (194)$$

Трудности решения уравнения (194) обсуждаются в работе [27], где для таких уравнений строится теория возмущений.

В отличие от этого, ряд точных решений нестационарного телеграфного уравнения можно построить, представляя неизвестную функцию Ψ , по аналогии со (126), в виде

$$\Psi = F \exp \left(- \frac{1}{T} \int_0^t U^2(x) dx \right). \quad (195)$$

Подстановка (195) в (194) приводит к уравнению для F

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = -F \left(\frac{\partial U^2}{\partial \tau} + U^4 \right), \quad \tau = t T^{-1}. \quad (196)$$

Предполагая, например, что выражение в скобках в (196) равно некоторой постоянной p^2 , получим уравнение,

определяющее временную зависимость проводимости $U^2(t)$; так, при $p^2 > 0$ возникает модель, описывающая процесс "насыщения" проводимости до предельного значения $U^2 = p$ с характерным временем $t_0 = Tp^{-1}$

$$U^2(\tau) = \frac{p(1 + p \tanh p\tau)}{p + \tanh p\tau}. \quad (197)$$

Решение уравнения (194) для модели (197) записывается в виде

$$\Psi = \frac{F}{\sinh[p(1 + \tau)]}. \quad (198)$$

Функция F в (196) и (198) представляется решениями уравнения Клейна – Гордона (11) с постоянными коэффициентами. Решения уравнения (194) в случаях $p^2 \leq 0$ строятся аналогично.

Найденные строгие решения представляют интерес для ряда задач электродинамики диссипативных систем [9], теории марковских процессов [27] и импульсной металлооптики [28]. Так, например, коэффициент отражения электромагнитной волны с частотой ω от нестационарного проводника (197) можно найти при произвольных значениях параметра ωT . Записывая решение уравнения (196) для модели проводимости (197) в виде

$$F = \exp[i\omega T(\eta N - \tau)], \quad N = \sqrt{1 + p^2(\omega T)^{-2}} \quad (199)$$

и используя условия непрерывности на границе $z = 0$, найдем комплексный коэффициент отражения при нормальном падении

$$R(t) = \frac{M \exp(-i\theta) - 1}{M \exp(-i\theta) + 1}, \quad \theta = \varphi - \varphi_0, \quad (200)$$

$$M(\tau) = Q(\tau)N^{-1}, \quad \cos \varphi(\tau) = Q^{-1}, \quad \cos \varphi_0 = Q^{-1}(0),$$

$$Q(\tau) = \sqrt{1 + p^2(\omega T)^{-2} \tanh^{-2}[p(1 + \tau)]}.$$

Зависимость коэффициента отражения от времени приводит к нестационарной амплитудно-фазовой модуляции отраженной волны и к уширению ее спектра, зависящему от параметра ωT . При $\omega T \sim 1$ возникает значительное уширение спектра, локализованное в области лишь нескольких колебаний поля. В этом случае

всплеск отражения от нестационарного проводника приводит к генерации короткого широкополосного импульса на фоне отраженной волны. Такой видеоимпульс можно отделить от фона с помощью дисперсионной или дифракционной системы.

Следует подчеркнуть, что полученные нестационарные решения, построенные вне рамок ВКБ-приближения, не ограничены допущениями о малости или медленности изменений параметров поля или среды.

Список литературы

1. Бахрах Л Д, Блискавицкий А А *УФН* **162** (2) 160 (1993)
2. Pastol Y et al. *Appl. Phys. Lett.* **54** (4) 307 (1989)
3. Fattinger C, Grischkowsky D *Appl. Phys. Lett.* **54** (6) 490 (1989)
4. Stingl A et al. *Opt. Lett.* **19** (4) 204 (1994)
5. Akimoto K J. *Phys. Soc. Jpn.* **65** (7) 2020 (1996)
6. Ma J, Ciric I *Radio Science* **27** 561 (1992)
7. Bertolotti M, Ferrari A, Sereda L J. *Opt. Soc. Am. B* **12** (8) 1519 (1995)
8. Авакян Р А и др. *Оптика и спектр.* **77** (4) 668 (1994)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
10. Sun E, Rusch W *IEEE Trans. Ant. Propag.* **42** (1) 9 (1994)
11. Шварцбург А Б *ДАН* **333** (3) 324 (1993)
12. Mugnai D et al. *Phys. Rev. Lett.* **68** (3) 259 (1992)
13. Kaizer G A *Friendly Guide to Wavelets* (New York: Birkhauser, 1994)
14. Shvartsburg A *Time-Domain Optics of Ultrashort Waveforms* (Oxford: Oxford University Press, 1996)
15. Gabor D "Theory of communications" *J. Inst. Electr. Eng.* **93** 429 (1946)
16. Янке Е, Эмде Ф, Лёш Ф *Специальные функции* (М.: Наука, 1997)
17. Диткин В А, Прудников А П *Интегральные преобразования и операционное исчисление* (М.: Физматгиз, 1961)
18. Шварцбург А Б *УФН* **164** (3) 333 (1994)
19. Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Электромагнитные волны в плазме* (М.: Наука, 1974)
20. Jackson J *Classical Electrodynamics* 2nd edition (New York: Wiley, 1975)
21. Shvartsburg A B *Non-Linear Pulses in Integrated and Waveguide Optics* (Oxford: Oxford University Press, 1993)
22. Moseley D S *Quart. Appl. Math.* **22** (2) 354 (1965)
23. Schoonaert D H, Luypaert P J *Electron. Lett.* **9** (11) 617 (1973)
24. Соболев С Л *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1966)
25. Shvartsburg A B *Physica Scripta* **49** (4) 351 (1994)
26. Harmuth H F, Hussain G M *Propagation of Electromagnetic Signals* (Singapore: World Scientific, 1994)
27. Masoliver J, Weiss G H *Phys. Rev. E* **49** (5) 3852 (1994)
28. Kadin A M, Johnson M W *Appl. Phys. Lett.* **69** (25) 3938 (1996)

Transient waveforms and nonperiodic waves in dispersive media (exactly solvable models)

A.B. Shvartsburg

Central Design Bureau for Unique Instrumentation, Russian Academy of Sciences
ul. Butlerova 15, 117342 Moscow, Russia
Fax (7-095) 334-75 00

Exactly solvable models for the impulse-time domain electromagnetics of dispersive media are developed to describe the interaction of ultrashort (few-cycle) transients with certain classes of insulators and conductors. Transient-excited fields are described analytically based on new, exact, nonperiodic and nonstationary solutions to Maxwell's equations, obtained directly in time domain using a no Fourier-expansion, no time-space separation method. Such nonseparable solutions form the mathematical basis of the time-domain electromagnetics of nonperiodic waves and make the standard harmonic wave concepts of frequency, phase, refraction index, and phase velocity irrelevant to the time description of nonperiodic waves. Extensions to spherical and MHD single-cycle pulses, shock-excited distributed transmission lines, and some heterogeneous and nonlinear media are presented. The flexible technique of modeling real transients by Laguerre functions enables the shape and duration dependence of the refraction and reflection of single-cycle waveforms to be presented explicitly. It is shown that the frequency and time domain approaches are two independent branches of the electromagnetics of dispersive media, complementary to each other in the analysis of quasistationary and transient wave processes.

PACS numbers: 02.50.Ey, **05.40.+j**, 42.65.Ky
Bibliography — 28 references

Received 10 June 1997