

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**Введение в матричные модели суперструн**

К.Л. Зарембо, Ю.М. Макеенко

*Представлено введение в предложенные недавно матричные модели суперструн и М-теории. Рассматривается матричная теория Бэнкса, Фишлера, Шенкера и Саскинда, которая имеет вид суперсимметричной матричной квантовой механики. Обсуждаются две суперсимметричные матричные модели, являющиеся непертурбативной формулировкой суперструн типа IIB. Приводится обзор результатов, касающихся различных аспектов применения матричных моделей в непертурбативной теории струн.*

PACS numbers: 02.10.Sp, 11.15.-q, 11.25.-w

**Содержание**

1. Введение (3).
  - 1.1. Динамическая триангуляция.
  - 1.2. Матричные модели.
  - 1.3. Непрерывный предел.
  - 1.4.  $D = 1$ -барьер.
  - 1.5. Обобщение на суперструны.
2. Матричная теория Бэнкса, Фишлера, Шенкера, Саскинда (8).
  - 2.1. Система бесконечного импульса.
  - 2.2. 11D и 10D.
  - 2.3. Как появляются матрицы.
  - 2.4. Лагранжиан матричной теории.
  - 2.5. Матричная квантовая механика.
  - 2.6. Связь с мембранами.
3. Матричная модель Имибashi, Каваи, Китазавы, Чучия (13).
  - 3.1. Действие Шильда.
  - 3.2. Матричная формулировка суперструны IIB.
  - 3.3. D-струны как классические решения.
  - 3.4. D-бранны.
  - 3.5. Однопетлевое эффективное действие и взаимодействие р-брани.
4. Матричная модель с неабелевым действием Борна – Иифельда (20).
  - 4.1. Матричное описание струны Шильда.
  - 4.2. Эффективное действие и мера.
  - 4.3. Замечание о классических решениях.
5. Заключение (22).
6. Словарь терминов (23).
- Список литературы (26).

**1. Введение**

Теория струн или, точнее, суперструн [4], представляет собой единственную на сегодняшний день последовательную попытку объединения всех фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию<sup>1</sup>. Различные частицы в этой теории соответствуют квантам внутренних колебаний одномерного протяженного объекта —

<sup>1</sup> Краткий обзор физических аспектов современной теории суперструн дан в [5].

К.Л. Зарембо, Ю.М. Макеенко. Государственный научный центр "Институт теоретической и экспериментальной физики", 117218 Москва, Б. Черемушкинская 25, Россия  
E-mail: zarembo@vxitep.itep.ru, makeenko@vxitep.itep.ru

Статья поступила 23 сентября 1997 г.

струны. Оказывается, что спектр состояний струны почти неизбежно содержит гравитоны и безмассовые калибровочные поля. Кроме того, теория струн предсказывает суперсимметрию, что можно считать объяснением существования фермионов.

Взаимодействие струн отвечает процессу их разрыва (или слияния). Такое геометрическое по сути описание позволяет развить свободную от расходимостей теорию возмущений, нулевой порядок которой при низких энергиях воспроизводит уравнения Эйнштейна в случае замкнутых струн и Янга – Миллса в случае открытых. Решение проблемы ультрафиолетовых расходимостей и построение конечной и свободной от аномалий квантовой гравитации в рамках теории возмущений — существенное достижение теории суперструн. Однако на планковских масштабах взаимодействие струн перестает быть слабым и непертурбативными эффектами уже нельзя пренебречь. Развитие методов, не связанных с теорией возмущений, представляет собой одну из важнейших задач в современной теории суперструн.

Теорию суперструн можно последовательно сформулировать в десятимерном пространстве – времени, причем существует несколько самосогласованных струнных теорий, не говоря уже о различных вариантах компактификации в пространство меньшей размерности. В области слабой связи, когда применима теория возмущений, различные теории суперструн выглядят совершенно не связанными друг с другом. Если рассматривать теорию струн как единую теорию всего, то такое большое количество альтернативных вариантов выглядит не очень естественно, по крайней мере с эстетической точки зрения. Однако есть гипотеза, что вне рамок теории возмущений все суперструнные модели в каком-то смысле эквивалентны друг другу. К настоящему времени имеется ряд наблюдений, которые эту гипотезу вполне подтверждают, и получены достаточно убедительные доводы в пользу того, что существует одна универсальная теория, включающая в себя все суперструнные модели в качестве различных предельных случаев.

Основным аргументом, указывающим на то, что все суперструнные модели являются предельными случаями

некоторой единой теории, служат дискретные симметрии относительно преобразований дуальности, которые связывают, вообще говоря, разные теории суперструн<sup>2</sup>. Эти симметрии могут переводить область слабой связи одной теории в область сильной связи другой. При преобразованиях дуальности обычные струнные возбуждения, их калуца-клейновские моды и солитоноподобные состояния преобразуются друг в друга. Все это заставляет думать, что струнные возбуждения не являются более фундаментальными степенями свободы, чем непертурбативные состояния, и что существует формулировка теории, в которой все степени свободы (и различные типы суперструн) описываются равноправным образом. В результате интенсивного исследования суперструнных дуальностей сложилась в какой-то мере парадоксальная ситуация. С одной стороны, про поведение суперструн в области сильной связи довольно много известно, кроме того, достигнуто существенное продвижение в изучении непертурбативных степеней свободы. С другой стороны, последовательного подхода к суперструнам, не связанного с теорией возмущений, пока не существует.

Вполне возможно, что обычный взгляд на теорию струн, как на квантовую механику одномерных протяженных объектов, адекватен только в области слабой связи, а фундаментальные степени свободы выглядят совсем по-другому. Непертурбативная теория струн может даже не быть десятимерной. В частности, есть гипотеза, что все известные теории струн имеют единое динамическое описание в одиннадцати измерениях [8–10]. Различные типы суперструн реализуются в различных кинематических режимах. Такая гипотетическая конструкция получила название М-теории<sup>3</sup> (см. [6] и имеющиеся там ссылки). Низкоэнергетический предел М-теории отвечает одиннадцатимерной супергравитации. Соображения, лежащие в основе этой гипотезы, выходят за рамки настоящего обзора. Отметим лишь, что одиннадцатимерная супергравитация максимальна с точки зрения суперсимметрии — в пространстве–времени с большим числом измерений последовательных суперсимметричных теорий не существует [11]. Этот факт в какой-то мере объясняет выделенность одиннадцатимерного пространства.

Различные косвенные соображения позволяют отождествить некоторые варианты компактификации М-теории с (компактифицированными) теориями суперструн. Простейший пример такого рода — компактификация М-теории на окружность вдоль одного из пространственных направлений. Десятимерная теория, которая получается в результате, представляет собой суперструну типа ПА<sup>4</sup>. Причем пертурбативной струне отвечает малый радиус компактификации. Наоборот, в области сильной связи радиус стремится к бесконечности и теория становится некомпактной и одиннадцатимерной.

О спектре состояний в М-теории известно только, что он содержит гравитон и его супер搭档еры в качестве единственных безмассовых состояний, а также протяжен-

ные объекты — мембранны и дуальные к ним пятибранны, несущие электрические и магнитные заряды относительно тензорного поля третьего ранга, входящего в одиннадцатимерный гравитационный супермультиплет. Про фундаментальные степени свободы в М-теории из общих соображений ничего сказать нельзя. Вообще, динамика М-теории на планковских масштабах должна быть чрезвычайно сложной, поскольку в теории нет свободных параметров. Константа связи в М-теории — одиннадцатимерная гравитационная постоянная — размерна, и ее можно устраниТЬ подходящим выбором единиц измерения. Поэтому малый параметр в теории может возникнуть только кинематически. Вследствие этого даже квантовомеханическая формулировка М-теории оказывается непростой задачей, и она до сих пор до конца не решена. Одна из гипотез состоит в том, что роль фундаментальных степеней свободы в М-теории выполняют супермембранны [12, 13, 9] в том же смысле, в каком фундаментальными объектами в десятимерной квантовой супергравитации являются суперструны. Однако последовательная квантовая теория супермембран до сих пор не разработана.

Другой подход к динамической формулировке М-теории, получивший название матричной теории<sup>5</sup>, был предложен Бэнксом, Фишлером, Шенкером и Саскиндом (BFSS) [1]. Он основан на квантовании в калибровке светового конуса с одной из конусных координат компактифицированной на окружность радиуса  $R \rightarrow \infty$ . Импульс вдоль компактного направления  $p_-$  квантуется в единицах  $R^{-1}$ :  $p_- = N/R$ . Связь компактифицированной на окружность М-теории с суперструной типа ПА позволяет выделить степени свободы, которые существенны в данном кинематическом режиме [1], — ими оказываются струнные солитоны определенного вида. Динамика этих солитонов описывается с помощью некоммутативных координат  $X^i$ , которые имеют вид эрмитовых  $N \times N$  матриц, и их супер搭档еров (более подробно обсуждается в разделе 2). Считающееся менее фундаментальным, но более наглядное объяснение того, как появляются матрицы, следует из тесной связи матричной теории с супермембранными — матрицы  $X_{ij}^i$  возникают просто как фурье-моды поперечных координат мембранны  $X^i(\sigma_1, \sigma_2)$  в калибровке светового конуса.

Переход к некомпактному одиннадцатимерному пространству–времени —  $R \rightarrow \infty$  — должен сопровождаться пределом  $N \rightarrow \infty$ , что необходимо для правильной нормировки продольного импульса. Поэтому число степеней свободы в матричной теории в действительности бесконечно. Как было показано в [1], квантованные возбуждения матричных координат  $X^i$  описывают одиннадцатимерный гравитон и его супер搭档еров, а также их состояния рассеяния. Последнее обстоятельство наряду с существенной нелинейностью матричной теории позволяет учитывать взаимодействия без вторичного квантования.

Близкие идеи были развиты применительно к теории суперструн типа ПВ [2]. Здесь в качестве фундаментальных объектов было предложено рассматривать струнные инстантоны. Матрицы при этом можно трактовать как фурье-моды координат мировой поверхности струны.

<sup>2</sup> См., например, обзоры [6, 7].

<sup>3</sup> Название "М-теория" первоначально произошло от "теории мембранны", но имеются и другие варианты расшифровки этого термина.

<sup>4</sup> Классификацию типов суперструн см. в словаре терминов в конце обзора.

<sup>5</sup> В литературе встречается также термин М(атричная) теория (M(atrix) theory).

Предметом настоящей статьи является обзор применения матричных моделей в М-теории и в непертурбативной теории суперструн. Но, прежде чем переходить к суперсимметричному случаю, имеет смысл вкратце остановиться на бозонных струнах, где метод, связанный с матричными моделями, с успехом применялся, став стандартным подходом, позволяющим выйти за рамки теории возмущений. Этот метод основан на дискретизации функционального интеграла по мировым поверхностям струны.

### 1.1. Динамическая триангуляция

Хорошо известно, что в первично квантованной формулировке суммирование по траекториям струны сводится к двумерной квантовой гравитации на мировой поверхности [4]. Взаимодействие струн при этом соответствует флуктуациям топологии:

$$Z_s = \sum_{n=0}^{\infty} g_s^{2n-2} \int [dh_{ab}] [dX^\mu] \times \\ \times \exp \left[ - \int_{\mathcal{M}_n} d^2\sigma \sqrt{h} \left( \frac{1}{2} h^{ab} \partial_a X^\nu \partial_b X_\nu + \mu \right) \right], \quad (1.1)$$

где  $h_{ab}(\sigma_1, \sigma_2)$  — метрика на мировой поверхности струны, а координаты  $X^\nu(\sigma_1, \sigma_2)$  осуществляют вложение поверхности струны в  $D$ -мерное евклидово пространство. Параметр  $g_s$  — струнная константа связи — безразмерен, а  $\mu$  — космологическая постоянная двумерной гравитации имеет размерность квадрата массы. В  $n$ -м порядке струнной теории возмущений мировая поверхность  $\mathcal{M}_n$  топологически представляет собой сферу с  $n$  ручками. Напомним, что эйлерова характеристика  $\chi$  поверхности и ее род  $n$  связаны формулой:  $\chi = 2 - 2n$ .

Основное свойство действия струны — его репараметризационная инвариантность. Мера интегрирования в (1.1) должна быть выбрана соответствующим образом. Фиксация калибровки и применение метода Фаддеева — Попова позволяет свести описание флуктуаций струнных координат и метрики к теории Лиувилля [14, 15] и интегрированию по модулям римановых поверхностей [16–18]. Флуктуации топологии при этом учитываются по теории возмущений порядок за порядком. Другой подход, полностью эквивалентный предыдущему, более или менее аналогичен решеточной регуляризации в теории поля. Точно так же, как и в теории поля, он позволяет обойтись без фиксации калибровки. Дискретизация континуального интеграла (1.1) заключается в замене интегрирования по внутренним метрикам суммированием по триангуляциям мировой поверхности струны [19–21].

В качестве наиболее простого примера рассмотрим вначале случай двумерной квантовой гравитации, когда  $D = 0$  в (1.1)<sup>6</sup>:

$$Z_{2D} = \sum_{n=0}^{\infty} g_s^{2n-2} \int [dh_{ab}] \exp \left( - \int_{\mathcal{M}_n} d^2\sigma \sqrt{h} \mu \right). \quad (1.2)$$

<sup>6</sup> Используя теорему Гаусса — Бонне, эту формулу можно переписать в стандартном для гравитации виде

$$Z_{2D} = \int dh \exp \left\{ - \int d^2\sigma \sqrt{h} [\mu - (4\pi G)^{-1} R] \right\},$$

где  $R$  — скалярная кривизна, и  $G^{-1} = -\ln g_s$ .

Такая модель описывает флуктуации внутренней метрики и топологии на мировой поверхности "нульмерной струны".

Идея динамической триангуляции поверхностей состоит в аппроксимации поверхности рода  $n$  совокупностью равносторонних треугольников. При этом в каждой вершине встречаются не обязательно шесть треугольников, как на плоскости, поскольку поверхность может иметь внутреннюю кривизну. Статистическая сумма (1.2) аппроксимируется посредством

$$Z_{DT} = \sum_{n=0}^{\infty} g_s^{2n-2} \sum_{T_n} \exp \left( -\Lambda n_t \right), \quad (1.3)$$

где  $T_n$  обозначает некую триангуляцию, т.е. набор из  $n_t$  треугольников, образующих поверхность рода  $n$ . Очень важно, что число треугольников  $n_t$  не предопределено заранее, а является динамической переменной. Суммирование по триангуляциям  $T_n$  подразумевает, в частности, и суммирование по  $n_t$ .

Экспоненциальная зависимость от  $n_t$  обеспечивает сходимость суммы по триангуляциям, по крайней мере для достаточно больших значений параметра  $\Lambda$ . Однако при уменьшении  $\Lambda = \Lambda_c$  благодаря энтропийному фактору, т.е. числу различных графов с данным  $n_t$ . Центральную роль в подходе, основанном на динамических триангуляциях, играет тот факт, что полное число графов рода  $n$ , образованных из  $p$  треугольников, растет с увеличением  $p$  только, как [22]:

$$\sum_{T_n} \delta(n_t - p) = \exp(\Lambda_c p) p^{-b_n} [1 + O(p^{-1})], \quad (1.4)$$

где  $\Lambda_c$  от рода  $n$  не зависит. Зависимость от  $n$  присутствует только в индексе  $b_n$ . Следует отметить, что факториальная зависимость общего числа графов от  $p$  возникает за счет суммирования по родам.

Непрерывный предел суммы (1.3) по триангуляциям достигается, когда

$$\Lambda \rightarrow \Lambda_c + 0. \quad (1.5)$$

При этом вклады от всех родов, например в струнную восприимчивость

$$f = \frac{\partial^2}{\partial \Lambda^2} Z_{DT} \sim \sum_n g_s^{2n-2} (\Lambda - \Lambda_c)^{-\gamma_n}, \quad \gamma_n = -b_n + 3, \quad (1.6)$$

одновременно становятся сингулярными при  $\Lambda \rightarrow \Lambda_c + 0$ . В этой точке дискретизованная статистическая сумма  $Z_{DT}$  воспроизводит непрерывную  $Z_{2D}$ . Критический индекс  $\gamma_n$  в уравнении (1.6) называется индексом струнной восприимчивости и является важной характеристикой струны. Отметим, что сколь угодно сложные поверхности учитываются при таком способе перехода к непрерывному пределу, когда  $n_t$  является динамической переменной. В этом состоит отличие, скажем, от дискретизации с фиксированным  $n_t$ .

### 1.2. Матричные модели

У суммы (1.3) по случайным триангуляциям есть удобное аналитическое представление в виде матричной модели.

Рассмотрим однодетерминантную модель

$$Z = \int d\Phi \exp[-N \operatorname{tr} V(\Phi)], \quad (1.7)$$

где

$$d\Phi = \prod_{i>j}^N d\operatorname{Re} \Phi_{ij} d\operatorname{Im} \Phi_{ij} \prod_{i=1}^N d\Phi_{ii} \quad (1.8)$$

есть мера интегрирования по эрмитовым матрицам размера  $N \times N$ , и

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \Phi^2 - \frac{1}{3} \alpha \Phi^3 \quad (1.9)$$

— кубический потенциал. Пропагаторы и вершины в фейнмановских диаграммах для нульмерной теории поля (1.7) можно изображать двойными линиями — по одной для каждого матричного индекса, возникающего в простейшем гауссовом матричном интеграле

$$(2\pi)^{-N^2/2} \int d\Phi \exp\left(-\frac{N}{2} \operatorname{tr} \Phi^2\right) \Phi_{ij} \Phi_{kl} = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{kj}. \quad (1.10)$$

Фрагмент типичной диаграммы приведен на рис. 1. Каждую такую диаграмму можно считать построенной из двумерных объектов — многоугольников, границами которых являются индексные петли. В результате склеивания этих многоугольников получается двумерная ориентированная поверхность. В этом состоит отличие от обычных фейнмановских диаграмм. Если соединить центры многоугольников линиями, то получившийся граф, который называется дуальным к исходному, будет сформирован из треугольников, поскольку взаимодействие в потенциале (1.9) матричной модели кубично. Этот дуальный граф имеет в точности такой вид, как нужно для динамической триангуляции римановых поверхностей.

Между двумя подходами можно установить тесную связь, заметив, что в матричных теориях топологическая классификация диаграмм естественным образом связана с разложением по степеням  $1/N^2$ , как это было впервые

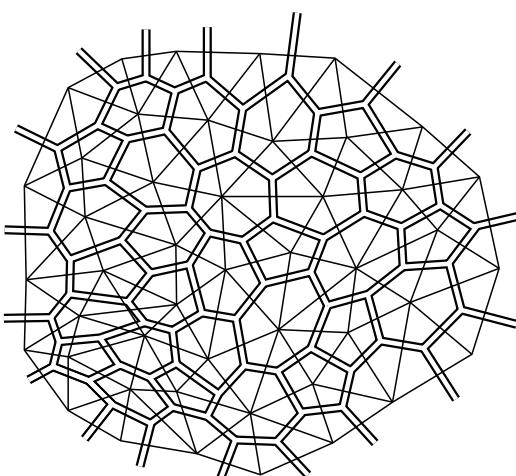


Рис. 1. Фрагмент планарной диаграммы в матричной модели (изображен двойными линиями) и отвечающий ей дуальный граф (изображен одинарными линиями), который является некоторой триангуляцией поверхности.

отмечено Тоофтом [23] для квантовой хромодинамики. Простой подсчет степеней  $N$  показывает, что диаграмма с топологией римановой поверхности рода  $n$  имеет порядок  $N^{2-2n}$ . Поэтому каждый член  $1/N$ -разложения свободной энергии

$$F \equiv \ln Z = \sum_{n=0}^{\infty} F_n N^{2-2n} \quad (1.11)$$

дается суммой связных диаграмм, каждая из которых топологически представляет собой сферу с  $n$  ручками:

$$F_n = \sum_G \frac{\alpha^{v(G)}}{\#\operatorname{Aut}(G)}, \quad (1.12)$$

где  $v(G)$  — число вершин диаграммы  $G$ , а  $\#\operatorname{Aut}(G)$  — порядок группы ее симметрий. При  $N \rightarrow \infty$  доминируют планарные диаграммы, имеющие топологию сферы.

Таким образом, переходом от фейнмановских диаграмм к дуальным графикам, устанавливается связь  $1/N$ -разложения в матричной модели (1.7) и разложения по родам (1.3) для динамической триангуляции случайных поверхностей, поскольку (1.12) можно рассматривать как сумму по всем триангуляциям поверхности рода  $n$ . Сравнивая (1.3) и (1.7), нетрудно убедиться в равенстве

$$F = Z_{DT} \quad (1.13)$$

при условии, что размер матриц  $N = 1/g_s$  и кубическая константа связи  $\alpha$  матричной модели связана с  $\Lambda$  соотношением  $\alpha = \exp(-\Lambda)$ . Равенство (1.13) имеет место, поскольку  $v(G) = n_t$  — число вершин графа  $G$  и число треугольников в дуальном графе совпадают. Упоминавшаяся выше расходимость суммы по родам в (1.3) проявляется в матричной модели как расходимость интеграла по  $d\Phi$  при конечном  $N$ .

Имеет смысл рассматривать также матричную модель (1.7) с потенциалом более общего вида

$$V(\Phi) = \sum_{j>1} \alpha_j \Phi^j, \quad (1.14)$$

являющемся полиномом произвольной степени. Анализируя отвечающие ему фейнмановские диаграммы и дуальные к ним графы, нетрудно понять, что такая матричная модель соответствует дискретизации случайных поверхностей правильными многоугольниками с  $j \geq 3$  вершинами, причем площадь  $j$ -угольника в  $(j-2)$  раза больше площади равностороннего треугольника при динамической триангуляции. Это наиболее общий случай дискретизации случайных поверхностей.

### 1.3. Непрерывный предел

Выше мы обсуждали, как сумма (1.3) по триангуляциям описывает в пределе (1.5) непрерывную струну. На языке матричной модели (1.7) это должно соответствовать, как обычно в решеточных теориях, фазовому переходу при некотором значении  $\alpha_c = \exp(-\Lambda_c)$ . Если  $N$  конечно, такой фазовый переход невозможен, поскольку система имеет конечное число степеней свободы. Однако, как было впервые отмечено в [24], фазовый переход<sup>7</sup> в

<sup>7</sup> Этот фазовый переход для однодетерминантной модели (1.7) отвечает  $\gamma_0 = -1/2$  и сопровождается сингулярностью не струнной восприимчивости (1.6), а ее производной. Он является фазовым переходом третьего рода.

матричной модели возможен при  $N \rightarrow \infty$ , когда число степеней свободы становится бесконечным. Таким образом, непрерывный предел достигается при  $N \rightarrow \infty$  и  $\alpha \rightarrow \alpha_c$ .

При переходе к непрерывному пределу следует положить

$$\Lambda = \mu a^2, \quad (1.15)$$

где  $a^2$  интерпретируется как площадь, приписанная образующим треугольникам. Когда площадь мала, суммирование по триангуляциям можно интерпретировать как дискретизованный вариант интегрирования по внутренним метрикам. Поскольку константа связи матричной модели связана с затравочной космологической постоянной  $\mu$  соотношением  $\alpha = \exp(-\mu a^2)$ , большинственный вес каждой триангуляции равен  $\alpha^v = \exp(-\mu \times \text{площадь})$ . Вблизи точки фазового перехода ряд теории возмущений начинает расходиться, и основной вклад дают диаграммы с  $v \sim (\alpha_c - \alpha)^{-1}$ . Если  $\alpha$  зависит от  $a$  таким образом, что  $a^2(\alpha_c - \alpha)^{-1}$  остается конечным при  $a \rightarrow 0$ , то в сумме по триангуляциям будут доминировать поверхности с конечной площадью  $S = va^2$ . Перенормировка космологической постоянной при переходе к непрерывному пределу состоит в вычитании квадратичной расходимости:  $\mu = \Lambda_c/a^2 + \mu_R$ .

Таким образом, матричная модель дает аналитическое описание решеточной регуляризации нульмерной теории струн. Матричный интеграл содержит информацию сразу о всех порядках струнной теории возмущений, поэтому на него можно смотреть как на непертурбативное определение двумерной квантовой гравитации.

Хорошо разработанные методы  $1/N$  разложения для матричных моделей позволяют дать непертурбативное описание флуктуаций топологии в двумерной квантовой гравитации. Оказывается, что топологическое разложение определяется только одним параметром — перенормированной струнной константой связи  $\lambda$ , которая выражается через затравочные параметры соотношением

$$\lambda \equiv [(\alpha_c - \alpha)^{5/4} N]^{-1}. \quad (1.16)$$

Переход от дискретизованных случайных поверхностей к непрерывным осуществляется в двойном скейлинговом пределе [25–27], когда  $\alpha \rightarrow \alpha_c$  и одновременно  $N \rightarrow \infty$ , так что при этом величина  $\lambda$ , даваемая формулой (1.16), остается конечной. Такой подход позволил построить разложение по родам в двумерной квантовой гравитации и показать, что непертурбативные эффекты играют существенную роль. В частности, перенормированная теория характеризуется, вообще говоря, двумя константами — в дополнение к  $\lambda$  возникает еще один параметр, который не заметен ни в каком конечном порядке теории возмущений. Применению матричных моделей в двумерной квантовой гравитации посвящен ряд обзоров [28–30].

#### 1.4. $D = 1$ -барьер

Одноматричная модель (1.7) допускает естественные обобщения на случай нескольких матриц и, соответственно, описываемые ими струны вложены в пространство большей размерности. Простейший случай — это

двуэтматрическая модель

$$Z = \int d\Phi_1 d\Phi_2 \exp[-N \text{tr } V(\Phi_1) + N \text{tr } \Phi_1 \Phi_2 - N \text{tr } V(\Phi_2)] \quad (1.17)$$

и ее обобщение на (открытую) цепочку из  $q$  матриц:

$$Z = \int \prod_{i=1}^q d\Phi_i \exp \left[ - \sum_{i=1}^q N \text{tr } V(\Phi_i) + N \sum_{i=1}^{q-1} \text{tr } \Phi_i \Phi_{i+1} \right]. \quad (1.18)$$

Такие матричные модели описывают дискретизацию бозонных струн с  $0 < D \leq 1$  или двумерную квантовую гравитацию с материей<sup>8</sup>. Например, многоматричная модель (1.18) при  $q \rightarrow \infty$  отвечает  $D = 1$ .

При  $q \rightarrow \infty$  индекс  $i$  можно заменить непрерывной переменной  $x$ , так что на матричную цепочку с  $q = \infty$  можно смотреть как на "решеточную регуляризацию" статистической суммы одномерной матричной модели

$$Z = \int \prod_x d\Phi(x) \times \times \exp \left\{ - \int dx N \text{tr} \left[ \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + \frac{m^2}{2} \Phi^2 + V_{\text{int}}(\Phi) \right] \right\}, \quad (1.19)$$

где обозначено  $\dot{\Phi} = d\Phi/dx$ . Каждой диаграмме теории возмущений в этой модели соответствует фейнмановский интеграл, который в координатном представлении имеет вид

$$F_G = \int \prod_i \left( \frac{dX_i}{2m} \right) \exp \left( -m \sum_{\langle ij \rangle} |X_i - X_j| \right). \quad (1.20)$$

Таким образом, например, для кубического потенциала взаимодействия вклад диаграмм рода  $n$  в свободную энергию равен

$$F_n = \sum_G \frac{\alpha^{v(G)}}{\#\text{Aut}(G)} F_G. \quad (1.21)$$

Переменные интегрирования  $X_i$  можно отождествить со значениями струнной координаты  $X$  в вершинах диаграммы, так что в непрерывном пределе суммированию диаграмм и интегрированию по  $X_i$  соответствует функциональное усреднение по метрикам и по полю  $X$  в (1.1), причем одномерный пропагатор воспроизводит кинетический член для бозонного поля<sup>9</sup>.

Действуя аналогичным образом, можно построить матричную модель, эквивалентную теории струн при любом  $D$  [32], но при  $D > 1$  нужно рассматривать уже не нульмерные интегралы и квантовую механику, а матрич-

<sup>8</sup> С точки зрения двумерной квантовой гравитации размерность пространства  $D$  равна центральному заряду полей материи в алгебре Вирасоро. В таком расширенном толковании  $D$  не обязательно должно быть целым числом.

<sup>9</sup> Строго говоря, для регуляризации (1.1) при  $D = 1$  нужно, чтобы пропагатор был пропорционален  $\exp[-m(X - X')^2]$ , что отвечает нелокальной по времени матричной модели. Однако рассмотрение такой модели было бы ненужным усложнением, так как в непрерывном пределе она лежит в одном классе универсальности с локальной теорией [31].

ную теорию поля. В этом случае уже не удается точно решить задачу при  $N \rightarrow \infty$  и построить  $1/N$  разложение. Поэтому  $D = 1$  служит своего рода барьером в теории бозонных струн.

При  $D > 1$  качественное поведение существенным образом меняется, что связано не столько с техническим усложнением теории, сколько с нестабильностью пертурбативного струнного вакуума. Дело в том, что квадрат массы наинизшего возбуждения струны пропорционален  $1 - D$ , и при  $D > 1$  основное состояние становится тахионом. Наличие инфракрасных расходимостей приводит к неустойчивости пертурбативного вакуума и проявляется, например, в том, что критический индекс  $\gamma_0$  приобретает мнимую часть. Многочисленные аналитические и численные исследования дискретизованных случайных поверхностей показывают (см. [33]), что струнной фазы при  $D > 1$  не существует. Мировая поверхность струны из-за инфракрасной неустойчивости вырождается в квазидономерный объект — ветвящийся полимер, и в результате бозонная струна не описывает системы с бесконечным числом степеней свободы. Так при  $D > 1$  разрешается проблема тахиона: над новым вакуумом, который стабилен, нет тахиона, но зато и нет струны.

### 1.5. Обобщение на суперструны

Для суперструн проблема тахиона выглядит несколько по-другому. В этом случае тахион можно исключить из спектра физических состояний (по крайней мере порядок за порядком теории возмущений) с помощью GSO-проекции. Это является аргументом в пользу того, что суперструна остается в струнной фазе и при  $D > 1$  в соответствии с хорошо известным из статистической механики фактом, что фермионы сглаживают динамическое поведение системы.

Развитие метода случайных триангуляций для суперструн наталкивается на определенные трудности, связанные прежде всего с дискретизацией суперсимметрии. Попытки построить суперсимметричное обобщение дискретизованных римановых поверхностей и матричных моделей предпринимались, начиная с [34]. Частичный успех был достигнут [35] только для простейшего случая двумерной супергравитации, хотя ее формулировка в виде суперсимметричной матричной модели и не была построена.

В основе подхода, предложенного осенью 1996 г., для непертурбативного описания М-теории и десятимерных суперструн лежат несколько другие идеи, но, тем не менее, фундаментальными объектами в этом подходе также оказываются матричные модели определенного вида. Причем уже сами матрицы имеют пространственно-временную интерпретацию.

В разделе 2 настоящего обзора дается введение в матричную теорию BFSS [1].

В разделе 3 рассматривается нульмерная матричная модель, предложенная Ишибashi, Каваи, Китазавой и Чучия (ИККТ) [2] непосредственно для описания суперструн типа IIB.

Модификация модели ИККТ [3], позволяющая на квантовом уровне воспроизвести матричный аналог действия Намбу–Гото, рассматривается в разделе 4.

В конце обзора приведены пояснения некоторых терминов, которые часто используются, но не объясняются в основном тексте (см. также [36]).

## 2. Матричная теория Бэнкса, Фишлера, Шенкера и Саскинда [1]

Матричная теория BFSS [1] для динамического описания М-теории выглядит очень похоже на первично квантованную формулировку теории суперчастиц или суперструн. Наиболее существенное отличие состоит в том, что уравнения движения для суперчастицы или суперструны можно выбором калибровки сделать линейными. Поэтому действие в формализме первичного квантования описывает распространение свободных частиц или свободных струнных состояний. Чтобы учесть взаимодействие, нужно рассматривать фейнмановские диаграммы для частиц или мировые поверхности с нетривиальной топологией для струн. Уравнения движения в матричной теории существенно нелинейны, поэтому даже первично квантованная теория оказывается взаимодействующей. Гипотеза BFSS состоит в том, что этими взаимодействиями все исчерпывается, и потребность во вторичном квантовании просто отпадает.

В [1] было предложено рассматривать одиннадцатимерную М-теорию в специальной системе отсчета, иногда называемой системой бесконечного импульса или светового конуса. При этом, конечно, часть одиннадцатимерной лоренц-ковариантности перестает быть явной и ее нужно отдельно проверять. Но только в калибровке светового конуса все степени свободы в матричной теории удается явно описать. В первично квантованной теории частиц или струн репараметризационная инвариантность действия позволяет отождествить одну из координат светового конуса со временем. Вторая координата фиксируется связями, которые возникают в результате выбора калибровки. Поэтому действие зависит только от поперечных координат. Ковариантная формулировка матричной теории пока не известна, и модель BFSS интерпретируется как теория с уже зафиксированной калибровкой светового конуса, так что продольные координаты в действии отсутствуют по определению.

Поперечные координаты одиннадцатимерной М-теории и их супер搭档еры описываются в матричной теории суперсимметричной квантовой механикой эрмитовых  $N \times N$  матриц. Размер матриц  $N$  отождествляется с положительным целым числом, которое определяет полный продольный импульс системы. Для описания одиннадцатимерной М-теории размер матриц должен стремиться к бесконечности, чтобы обеспечить правильную нормировку продольного импульса. Таков механизм возникновения бесконечного числа степеней свободы в матричной теории. Координаты пространства–времени возникают в матричной теории как параметры, характеризующие вырожденные минимумы потенциальной энергии.

### 2.1. Система бесконечного импульса

Одиннадцать координат  $x^\mu = (x^0, x^i, x^{10})$  М-теории разбиваются на девять поперечных координат  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, 9$  (или  $x^\perp$ ) и координаты светового конуса  $t \equiv x^+ = (x^0 + x^{10})/\sqrt{2}$  и  $x^- = (x^0 - x^{10})/\sqrt{2}$ , одна из которых играет роль времени, а вторая считается пространственной. Сопряженные переменные отождествляются, соответственно, с энергией  $E \equiv p_+$  и продольным импульсом  $p_-$ . Одно из достоинств калибровки светового

конуса состоит в том, что на массовой поверхности энергия и продольный импульс положительны. Метрика в координатах светового конуса имеет вид  $p^2 = 2p_+p_- - p_\perp^2$ , так что зависимость энергии безмассовой частицы от поперечного импульса дается нерелятивистским законом дисперсии

$$p_+ = \frac{p_\perp^2}{2p_-}. \quad (2.1)$$

Продольная координата  $x^-$  считается *компактной*:

$$x^- \equiv x^- + 2\pi R.$$

Радиус компактификации  $R$  служит параметром инфракрасной регуляризации и в конце вычислений его нужно устремлять к бесконечности. Вследствие компактности продольный импульс квантуется в единицах  $R^{-1}$ :

$$p_- = \frac{N}{R} \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

Для системы, имеющей конечный продольный импульс в некомпактном одиннадцатимерном пространстве,  $N$  должно стремиться к бесконечности так, чтобы отношение (2.2) оставалось фиксированным. Следует отметить, что состояний с отрицательными значениями  $p_-$  учитывать не нужно, что сильно упрощает построение фундаментального лагранжиана М-теории в системе бесконечного импульса.

## 2.2. 11D и 10D

Компактификация М-теории на окружность приводит к теории суперстррун типа ПА. Хотя радиус компактификации используется лишь как параметр инфракрасной регуляризации, все величины в ней имеют, по сути, десятимерное происхождение. Поэтому имеет смысл вкратце остановиться на том, как связаны параметры и степени свободы в десяти и одиннадцати измерениях.

М-теория характеризуется планковской длиной  $l_p$ , а теория струн — безразмерной константой связи  $g_s$  и натяжением

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} . \quad (2.3)$$

Вместо натяжения иногда удобно использовать параметр размерности длины  $l_s \equiv \sqrt{2\alpha'}$ . Радиус компактификации и струнная длина связаны с одиннадцатимерными величинами соотношениями

$$R = g_s^{2/3} l_p, \quad l_s = g_s^{-1/3} l_p. \quad (2.4)$$

В силу этих соотношений на М-теорию можно смотреть, как на предел сильной связи теории суперстррун типа ПА — при  $g_s \rightarrow \infty$  радиус компактификации стремится к бесконечности и теория фактически становится одиннадцатимерной.

Безмассовые состояния в М-теории образуют фундаментальный супермультиплет, который содержит 256 состояний, отвечающих одиннадцатимерному гравитону и его супер搭档рам — гравитино и антисимметричному тензорному полю ранга 3. Число 256 легко получить, заметив, что одиннадцатимерный суперзаряд имеет 32 компоненты, половина которых действует на безмассовые состояния тривиально [37]. Размерность

неприводимого представления алгебры остающихся 16 компонент суперзаряда равна  $2^{16/2} = 256$ .

После компактификации М-теории каждое состояние из гравитационного супермультиплета порождает бесконечный набор калуца-клейновских мод в десяти измерениях. С нулевыми модами все ясно — им соответствуют безмассовые степени свободы в теории суперстррун типа ПА, а хорошо известно, что описывающая их низкоэнергетическая эффективная теория — десятимерная некиральная  $\mathcal{N} = 2$  супергравитация — получается размерной редукцией из одиннадцати измерений.

Интерпретация массивных мод гораздо более неординарна. Соответствующие состояния в теории суперстррун существенно непертурбативны, поскольку их массы в струнных единицах обратно пропорциональны константе связи:  $N/R \rightarrow N/g_s$ . Целое число  $N$  с десятимерной точки зрения выглядит как сохраняющийся заряд. Оказывается, что калибровочное поле этого заряда возникает из RR-сектора суперстрруны. Ни одно из пертурбативных струнных состояний не несет RR-зарядов.

Однако в теории суперстррун есть солитонные состояния, обладающие нужными свойствами — D0-бранны. Элементарные D0-бранны несут единичный RR-заряд и удовлетворяют условию BPS (Богомольного–Прасада–Зоммерфельда), именно поэтому массы связанных состояний D0-бранны равны, с точностью до коэффициента, их заряду. По этой же причине они образуют супермультиплет размерности 256, а не  $256^2$ , как обычные массивные состояния в  $\mathcal{N} = 2$   $D = 10$  супергравитации (например, массивные моды суперстрруны).

Таким образом, одиннадцатимерный гравитон с продольным импульсом  $p_- = 1/R$  в десятимерной теории выглядит как D0-брана. Гравитону с импульсом  $p_- = N/R$  отвечает связанное состояние  $N$  D0-бранны.

## 2.3. Как появляются матрицы

В теории суперстррун есть разнообразные солитонные состояния. В общем случае они имеют вид протяженных объектов — р-бранны. Распространяясь в пространстве–времени, р-брана заметает  $(p+1)$ -мерный мировой объем. В десятимерных супергравитациях есть решения классических уравнений движения (см. [38]) такого типа. Они имеют конечное натяжение (массу на единицу пространственного объема) и могут, в отличие от пертурбативных струнных состояний, нести RR-заряды. Как было показано в [39], существует возможность описывать солитонные состояния, обладающие RR-зарядами, непосредственно в рамках теории струн, как D(irchlet)-бранны. В частности, D0-бранны (D-частицы), отвечающие калуца-клейновским модам одиннадцатимерного гравитона, представляют собой пример таких состояний.

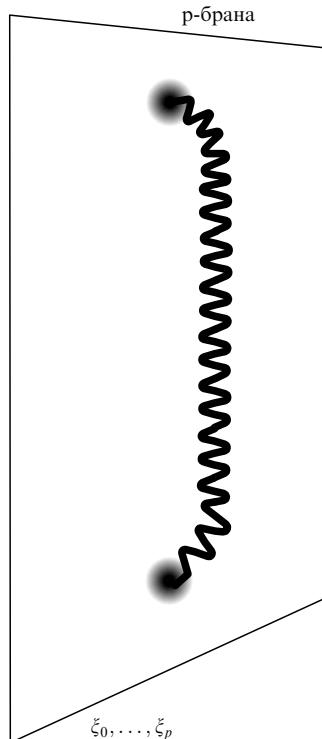
Динамическое описание D-бранны устроено следующим образом. Фундаментальные замкнутые струны в присутствии источника RR-заряда могут размыкаться, превращаясь в открытые струны, жестко связанные с D-браной. Концы струны могут свободно двигаться вдоль D-бранны, но не могут оторваться от нее. Математически это соответствует наложению граничных условий Дирихле на координаты струны, которые ортогональны мировому объему D-бранны, и условий Неймана на касательные координаты. Квантовые флуктуации струны при этом описываются обычным образом. Оказывается, что граничные условия Дирихле совместимы с

суперсимметрией и GSO-проекцией для D-бран четной размерности в теории суперструн типа IIA и нечетной — в теории типа IIB.

Как обычно, если характерный масштаб задачи много больше планковской длины, точное струнное описание теряет смысл, поскольку бесконечный набор массивных состояний струны дает пренебрежимо малый вклад, и можно ограничиться только безмассовыми или очень легкими степенями свободы. Низкоэнергетические взаимодействия безмассовых степеней свободы в таком приближении можно описать эффективной теорией поля с локальным лагранжианом. Низкоэнергетические возбуждения струн Дирихле распространяются только по D-бране, так как концы струн жестко с ней связаны. Следовательно, в низкоэнергетическом приближении D-брана описывается эффективной теорией поля на своем мировом объеме.

Струны Дирихле отличаются от десятимерных открытых суперструн только граничными условиями; квантовые флуктуации в обеих теориях одинаковы. Поэтому эффективный лагранжиан для D-браны будет таким же, как и для открытых суперструн. Безмассовыми степенями свободы открытой суперструны являются калибровочные поля и их суперпартнера. Так что низкоэнергетическая эффективная теория на мировом объеме D-браны получается из десятимерной U(1)-калибровочной теории размерной редукцией, т.е. отбрасыванием зависимости всех полей от координат, ортогональных мировому объему.

Предположим для определенности, что D-брана расположена в гиперплоскости  $x^{p+1} = 0, \dots, x^9 = 0$ , а ее мировой объем параметризуется координатами  $\xi^0, \dots, \xi^p$ , как это изображено на рис. 2. Компоненты



**Рис. 2.** D-брана (изображена как гиперплоскость, параметризуемая координатами  $\xi_0, \dots, \xi_p$ ) и фундаментальная (открытая) струна, концы которой лежат на D-брane.

векторного потенциала  $A^a(\xi)$  ( $a = 0, \dots, p$ ), касательные к D-брane, описывают внутренние калибровочные поля. В то же время, остальные  $(9 - p)$  компонент с точки зрения теории поля на мировом объеме выглядят, как скаляры. Можно показать, что они играют роль координат, описывающих флуктуации самой D-брane [40]:

$$X^i(\xi) = 2\pi\alpha' A^i(\xi) \quad (i = p + 1, \dots, 9). \quad (2.5)$$

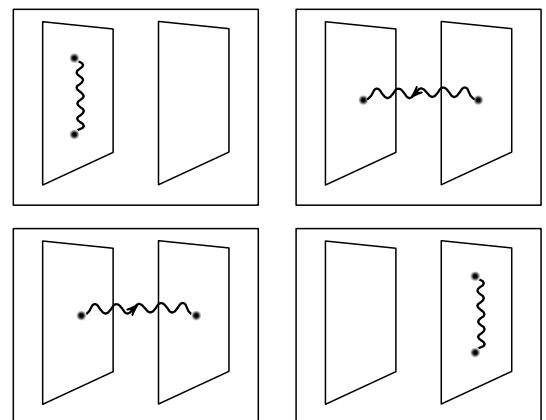
Состояние, несущее RR-заряд равный  $N$ , можно представить как суперпозицию  $N$  D-бран. Рассмотрим, например,  $N$  параллельных неподвижных D-бран, расположенных в гиперплоскостях  $x^{p+1} = X_I^{p+1}, \dots, x^9 = X_I^9$ ,  $I = 1, \dots, N$ . Каждой D-брane отвечает свое U(1)-поле, так что калибровочной группой низкоэнергетической эффективной теории будет  $[U(1)]^N$ . Координаты D-бран  $X_I^i$  можно отождествить со средними значениями скалярных полей (2.5).

На самом деле число струнных степеней свободы в присутствии  $N$  D-бран увеличивается не в  $N$ , а в  $N^2$  раз из-за того, что фундаментальные струны могут начинаться на одной D-брane, а заканчиваться на другой, как это изображено на рис. 3 для случая  $N = 2$ . Но, поскольку струны обладают натяжением, то для создания струны, связывающей различные браны, нужно затратить энергию, как минимум пропорциональную расстоянию между ними. Следовательно, соответствующее поле будет массивным:

$$M_{IJ} \sim T |X_I - X_J|, \quad (2.6)$$

если браны разведены в пространстве.

Однако массы струн натянутых между D-бранами становятся малы, если последние расположены достаточно близко друг к другу, и при исследовании связанных состояний соответствующие степени свободы должны быть учтены в низкоэнергетической теории. В экстремальном случае совпадающих D-бран безмассовыми будут все  $N^2$  состояний, отвечающие различным струнам, и калибровочная симметрия увеличивается до группы  $U(N)$  [41].



**Рис. 3.** Возникновение матриц для случая связанного состояния двух параллельных D-бран ( $N = 2$ ). Фундаментальная струна может начинаться и кончаться либо на той же самой, либо на другой D-брane. Поскольку струна ориентирована, есть четыре безмассовых векторных состояния для случая, когда D-браны расположены практически одна на другой. Они образуют представление группы  $U(2)$ .

Такая картина взаимодействия D-бран математически описывается следующим образом. В присутствии  $N$  D-бран каждой струне сопоставляются целые числа  $I$  и  $J$ , нумерующие D-браны, на которых струна начинается и заканчивается. Ситуация, когда концам струн приписываются дискретные индексы, сама по себе не нова — именно так в теории открытых струн вводится неабелева калибровочная симметрия с помощью факторов Чана–Патона. В низкоэнергетическом приближении суперструны с факторами Чана–Патона описываются суперсимметричной теорией Янга–Миллса. Учет струн, соединяющих все возможные пары D-бран, приводит к тому, что поля в низкоэнергетической эффективной теории становятся эрмитовыми матрицами с индексами  $I$  и  $J$ , пробегающими значения от 1 до  $N$ . Лагранжиан эффективной теории получается просто редукцией десятимерной суперсимметричной  $U(N)$ -калибровочной теории в  $(p+1)$ -мерное пространство:

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{g_s^2} \int d^{p+1} \xi \text{tr} \left\{ -\frac{1}{4} F_{ab}^2 + \frac{1}{2} (D_a X^i)^2 + \frac{1}{4} [X^i, X^j]^2 + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\alpha D_a \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^i [X_i, \psi] \right\}. \quad (2.7)$$

Когда заряд  $RR = 1$ , скалярные поля  $X^i$  играют роль поперечных координат D-браны. Для D-браны заряда  $N$  скалярные поля являются эрмитовыми  $N \times N$  матрицами. Пространственно-временная интерпретация таких "некоммутивных координат" основана на том обстоятельстве, что потенциал для скалярных полей (он возникает из члена, пропорционального  $F_{ij}^2$  в действии десятимерной теории Янга–Миллса) имеет плоские направления. Действительно, потенциал обращается в нуль, если матрицы  $X^i$  коммутируют и их можно одновременно диагонализовать:

$$X^i = \begin{pmatrix} X_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & X_N^i \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Когда скалярные поля приобретают вакуумные средние вида (2.8)<sup>10</sup>, калибровочная симметрия спонтанно нарушается до  $[U(1)]^N$ . Диагональные компоненты  $X_I^i$  матриц  $X^i$  следует отождествить с координатами  $N$  D-бран, при этом недиагональные компоненты скалярных и калибровочных полей, как и ожидалось, приобретают массы порядка (2.6).

#### 2.4. Лагранжиан матричной теории

Согласно гипотезе BFSS (см. также [42]), единственными фундаментальными степенями свободы M-теории в калибровке светового конуса являются D0-браны. Это означает, что все физические состояния в M-теории строятся из D0-бран. При этом число D0-бран равно  $N$  или, другими словами, их RR-заряд должен стремиться к бесконечности, так как с точки зрения M-теории он равен продольному импульсу в единицах  $R^{-1}$ , а  $R$  следует устремить к бесконечности, оставляя продольный импульс  $p_- = N/R$  фиксированным. Действие матричной

теории получается из низкоэнергетического эффективного действия (2.7) для D0-бран перерастяжкой полей и переходом к одиннадцатимерным планковским единицам.

Фундаментальный лагранжиан матричной теории имеет вид

$$L = \text{tr} \left\{ \frac{1}{2R} (D_t X^i)^2 + \frac{R}{4} [X^i, X^j]^2 + \theta D_t \theta + i R \theta \gamma_i [X^i, \theta] \right\}, \quad (2.9)$$

где  $X^i(t)$  суть девять  $N \times N$  эрмитовых бозонных матриц, а шестнадцатимерный девятимерный спинор  $\theta^\alpha(t)$  ( $\alpha = 1, \dots, 16$ ) составлен из  $N \times N$  эрмитовых фермионных матриц. Девятимерные матрицы Дирака  $\gamma_i$  удовлетворяют стандартным антисимметрическим соотношениям

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (2.10)$$

и используются планковские единицы измерения —  $l_p \equiv 1$ .

Ковариантная производная  $D_t$  в уравнении (2.9) определена как

$$D_t = \frac{d}{dt} - i[A, \cdot]. \quad (2.11)$$

Калибровочное поле  $A$  не является динамической степенью свободы; в принципе, его можно устраниТЬ выбором калибровки, но тогда действие перестанет быть явно суперсимметричным, поскольку преобразования суперсимметрии действуют в том числе и на  $A$ :

$$\delta X^i = \sqrt{R} \epsilon \gamma^i \theta, \quad (2.12)$$

$$\delta \theta = \left( \frac{i\sqrt{R}}{4} [X^i, X^j] \gamma_{ij} - \frac{1}{2\sqrt{R}} D_t X^i \gamma_i \right) \epsilon + \epsilon', \quad (2.13)$$

$$\delta A = R\sqrt{R} \epsilon \theta. \quad (2.14)$$

Спиноры  $\epsilon$  и  $\epsilon'$  образуют два набора из 16 независимых параметров преобразования, которые не зависят от времени  $t$ .

Следует обратить внимание на принципиальное различие между эффективным действием (2.7) для D0-бран и лагранжианом (2.9) матричной теории. В то время, как первое является эффективным действием и имеет смысл только на древесном уровне, (2.9) является лагранжианом *квантовой* теории, и для него квантовые петлевые эффекты существенны.

Матричная квантовая механика с лагранжианом (2.9), на первый взгляд, кажется слишком простой, чтобы описывать одиннадцатимерную квантовую супергравитацию. Но в пределе  $N \rightarrow \infty$ , когда число степеней свободы реально становится бесконечным, динамика матричной теории оказывается достаточно сложной. В частности, фазовое пространство матричной теории при  $N = \infty$  описывает весьма широкий набор состояний. В качестве иллюстрации приведем следующий пример. При  $N = \infty$  разница между матрицами и операторами исчезает. Будем считать, например,  $X^9$  оператором (бесконечной матрицей) специального вида:  $X^9 = -iR(\partial/\partial\sigma) - A$ , где  $\sigma$  — переменная, которая меняется от 0 до  $2\pi$ . Матрица  $A$  так же, как и  $X^i$  с  $i < 9$ , зависит только от  $\sigma$ . Подстановка такого anzата в

<sup>10</sup> Строго говоря, вырожденные минимумы потенциала соответствуют различным вакуумам только в теории поля, т.е. при  $p \geq 1$ ; при  $p = 1$  это также не совсем верно из-за инфракрасных расходностей; этот случай подробно рассмотрен в [41].

формулу (2.9) превращает ее в лагранжиан двумерной теории Янга–Миллса с  $\mathcal{N} = 8$  суперсимметрией. Приведенное построение соответствует компактификации девятого измерения на окружность радиуса  $R_9$ , и именно оно используется для описания струнного предела матричной теории [43].

Матрицы  $X_{IJ}^i$  и  $\theta_{IJ}^\alpha$  ( $I, J = 1, \dots, N$ ) в матричной теории играют примерно ту же роль, что и координаты мировой поверхности  $X^i(\sigma, t)$ ,  $\theta^\alpha(\sigma, t)$  в теории струны с той существенной разницей, что лагранжиан струны в калибровке светового конуса описывает распространение свободных струнных состояний, а лагранжиан матричной теории, согласно гипотезе BFSS, содержит *всю* информацию о динамике, в частности, он описывает состояния рассеяния и их взаимодействия.

Правда, в отличие от струнных координат, физический смысл некоммутирующих величин  $X^i$  на первый взгляд не вполне ясен. Есть две возможности придать матрицам  $X^i$  пространственно-временную интерпретацию — одна связана с десятимерной трактовкой гамильтониана матричной теории, а вторая заимствована из теории супермембран. Мы рассмотрим их в разделах 2.5 и 2.6.

## 2.5. Матричная квантовая механика

Гамильтониан, соответствующий лагранжиану (2.9), имеет вид

$$H = R \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i - \frac{1}{4} [X^i, X^j]^2 - i \theta_{ij} [X^i, \theta] \right\}, \quad (2.15)$$

где  $\Pi_i$  и  $X^i$  образуют пару канонически сопряженных переменных. Как обычно,  $\theta_{IJ}^\alpha$  удовлетворяют антисимметрическим соотношениям, и половина из них играет роль импульсов, а другая половина — координат.

Группу  $U(N)$  можно представить в виде прямого произведения  $U(1) \otimes SU(N)$ . При этом абелеву часть  $X^i$  следует отождествить с координатой центра масс

$$x^i(\text{цм}) = \frac{1}{N} \operatorname{tr} X^i. \quad (2.16)$$

Такое отождествление вполне естественно как с точки зрения D0-бран (см. (2.8)), так и в мембранный интерпретации действия матричной теории, рассмотренной в разделе 2.6.

Поперечный импульс центра масс

$$p_i(\text{цм}) = \operatorname{tr} \Pi_i = \frac{N}{R} \dot{x}_i(\text{цм}), \quad (2.17)$$

согласно равенству  $p_- = N/R$ , связан со скоростью обычным соотношением

$$\frac{1}{p_-} p_i(\text{цм}) = \dot{x}_i(\text{цм}). \quad (2.18)$$

Зависимость энергии центра масс от импульса следует из (2.15):

$$p_+ \equiv E = \frac{R}{N} \frac{p_\perp^2(\text{цм})}{2} = \frac{p_\perp^2(\text{цм})}{2p_-}, \quad (2.19)$$

и это в точности совпадает с выражением (2.1), справедливым для безмассовой частицы в одиннадцати измерениях.

Следует отметить, что от фермионных суперпартнеров координат центра масс гамильтониан просто не зависит. Так что состояние с определенным импульсом вырождено и образует представление алгебры шестнадцати компонент  $\operatorname{tr} \theta^\alpha$ . Размерность этого представления равна

$$2^{16/2} = 2^8 = 256.$$

Это как раз соответствует 256 состояниям одиннадцатимерного гравитона. Для полного согласия с супергравитацией необходимо еще, чтобы  $SU(N)$ -часть гамильтониана имела нормируемое вакуумное состояние с нулевой энергией. Достаточно тонкий вопрос о существовании такого состояния обсуждался в ряде работ [44, 45].

Таким образом, вакуумное состояние гамильтониана матричной теории соответствует супергравитону с продольным импульсом  $N/R$ . Возбужденные состояния имеют непрерывный спектр, начинающийся в нуле<sup>11</sup>. Непрерывный спектр возникает из-за того, что потенциал для  $X^i$  имеет плоские направления, обсуждавшиеся в разделе 2.3<sup>12</sup>. Возникновение непрерывного спектра в матричной теории выглядит совершенно естественно, поскольку он необходим для описания состояний рассеяния гравитонов. Следует отметить, что лишь небольшая часть непрерывного спектра выживает в пределе  $R \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Радиус компактификации  $R$  входит в гамильтониан только как общий множитель, так что собственные значения энергии имеют вид  $R\mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  не зависит от  $R$ . Только состояния с  $\mathcal{E} \sim 1/N$  имеют в некомпактном одиннадцатимерном пределе конечную энергию порядка  $R/N = 1/p_-$ .

Состояния рассеяния супергравитонов могут быть описаны в матричной теории как блочно-диагональные матрицы. Например, естественно сопоставить суперпозиции двух гравитонов матрицы

$$X^i = \begin{pmatrix} X_{(1)}^i & 0 \\ 0 & X_{(2)}^i \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где блоки  $X_{(I)}^i$  имеют размеры  $N_I \times N_I$ . Продольные и поперечные импульсы гравитонов равны  $N_I/R$  и  $\operatorname{tr} \dot{X}_{(I)}^i/R$ , соответственно. Стандартный метод фонового поля позволяет изучать взаимодействие между гравитонами в матричной теории. Результаты подобных вычислений находятся в полном согласии с одиннадцатимерной супергравитацией [1, 47, 48].

## 2.6. Связь с мембранами

Предел бесконечного размера матриц позволяет установить связь между матричной теорией и супермембранами. В основе такого соответствия лежат несколько формальных, но достаточно общие рассуждения, которые играют существенную роль и в матричных моделях суперструн, рассматриваемых ниже. В данном разделе такие рассуждения приводятся для мембран с топологией тора.

<sup>11</sup> Положительная определенность гамильтониана (2.15) следует из того, что он равен квадрату суперзаряда.

<sup>12</sup> Факт существования непрерывного спектра, несмотря на наличие плоских направлений, нетривиален и также следует из суперсимметрии [46].

Идея заключается в разложении динамических переменных в модели BFSS, т.е. матриц  $X^i$  и  $\theta^x$ , по специальному базису в  $g\ell(N)$ . Он вводится следующим образом [49]. Рассматриваются две унитарные матрицы  $g$  и  $h$ , удовлетворяющие соотношениям

$$hg = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)gh, \quad (2.21)$$

$$h^N = 1 = g^N. \quad (2.22)$$

В представлении, в котором матрица  $g$  диагональна,  $h$  действует как оператор сдвига:

$$g|n\rangle = \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right)|n\rangle, \quad (2.23)$$

$$h|n\rangle = |n-1\rangle. \quad (2.24)$$

При этом  $|0\rangle \equiv |N\rangle$ . Любую матрицу размера  $N \times N$  можно представить в виде функции от  $g$  и  $h$ :

$$Z = \sum_{n,m=0}^{N-1} Z_{n,m} g^m h^n. \quad (2.25)$$

При переходе к пределу  $N \rightarrow \infty$  пространство, в котором действуют  $g$  и  $h$ , становится бесконечномерным, и равенство (2.22) перестает быть существенным, а перестановочное соотношение (2.21) можно реализовать, выразив  $g$  и  $h$  через операторы координаты и импульса:

$$g = \exp iq, \quad h = \exp ip, \quad (2.26)$$

$$[q, p] = \frac{2\pi i}{N}. \quad (2.27)$$

Соотношение (2.27) показывает, что параметр  $N$  играет двоякую роль. Кроме того, что  $N$  определяет размер матриц,  $2\pi/N$  имеет смысл постоянной Планка. Поэтому предел  $N \rightarrow \infty$  одновременно играет роль квазиклассического. В квазиклассическом пределе операторы  $q$  и  $p$  превращаются в с-числа, так что матрице общего вида (2.25) при  $N \rightarrow \infty$  естественно поставить в соответствие функцию двух переменных

$$\begin{aligned} Z \Rightarrow Z(q, p) = & \sum_{n,m=0}^{N/2} Z_{n,m} \exp(imq + inp) + \\ & + \sum_{\substack{n,m=0 \\ (n,m)\neq(0,0)}}^{N/2} Z_{N-n, N-m} \exp(-imq - inp). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Функция  $Z(q, p)$  периодична по обеим переменным и тем самым определена на торе.

В квазиклассическом приближении коммутаторы заменяются на скобки Пуассона

$$[X, Y] \Rightarrow \frac{2\pi i}{N} (\partial_q X \partial_p Y - \partial_p X \partial_q Y), \quad (2.29)$$

а матричный след переходит в интеграл по фазовому пространству:

$$\text{tr } Z = N \int_0^{2\pi} \frac{dp dq}{(2\pi)^2} Z(p, q). \quad (2.30)$$

Последнее равенство, впрочем, не содержит никакого приближения.

Приведенные выше выкладки с заменой бесконечных матриц на функции двух переменных применимы к лагранжиану матричной теории (2.9). В калибровке  $A = 0$  он превращается в выражение

$$L = \int \frac{dp dq}{(2\pi)^2} \left[ \frac{p_-}{2} \dot{X}^2 - \frac{\pi^2}{p_-} (\partial_q X^i \partial_p X^j - \partial_p X^i \partial_q X^j)^2 + p_- \theta \dot{\theta} - 2\pi \theta \gamma_i (\partial_q X^i \partial_p \theta - \partial_p X^i \partial_q \theta) \right], \quad (2.31)$$

которое совпадает с лагранжианом супермембраны в калибровке светового конуса [50].

Связь матричной теории с супермембранами дает возможность элегантно разрешить проблему непрерывного спектра последних [46]. Непрерывный спектр в теории супермембран выглядит серьезной проблемой, если пытаться интерпретировать их в духе теории струн. Напротив, в матричной теории наличие непрерывного спектра является совершенно естественным, поскольку он отвечает состояниям рассеяния гравитонов, обсуждавшихся в предыдущем разделе.

К описанию мембран в матричной теории можно подойти и по-другому, не апеллируя к тому, как возникает лагранжиан (2.31), а просто идентифицируя их с классическими решениями. Мембранны в матричной теории можно рассматривать как статические решения классических уравнений движения

$$[X^i, [X^j, X^l]] = 0. \quad (2.32)$$

Мембрана, расположенная в плоскости  $(x^8, x^9)$ , имеет вид [1]

$$\begin{aligned} X^8 &= R_8 \sqrt{N} p, & X^9 &= R_9 \sqrt{N} q, \\ \text{все остальные } X^i &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь  $p$  и  $q$  — бесконечные матрицы (операторы), удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям, а  $R_8$  и  $R_9$  играют роль радиусов компактификации; они должны быть достаточно велики, для того чтобы периодичностью по  $x^8, x^9$  можно было пренебречь. Коммутатор  $[X^8, X^9]$  равен с-числу, поэтому (2.33) действительно является решением уравнений (2.32).

Взаимодействие на больших расстояниях между этими мембранными конфигурациями (и более общими классическими решениями, которые соответствуют Д-бранам четной размерности<sup>13</sup>) изучалось в рамках матричной теории [51–55] и сравнивалось с результатами для суперструны типа IIA. Мы не будем останавливаться здесь на деталях, поскольку вычисления аналогичны приведенным ниже для струны типа IIB.

### 3. Матричная модель Ишибаши, Каваи, Китазавы, Чучия [2]

Матричная теория была предложена в качестве модели, дающей полное квантовомеханическое описание М-теории в одиннадцати измерениях. Струны возникают в матричной теории только после компактификации.

<sup>13</sup> Строго говоря, с живущим на них, по-видимому, магнитным полем.

В другом подходе — IKKT [2] — матричная модель связывается непосредственно с суперструнами. Действие этой матричной модели получается из десятимерной суперсимметричной калибровочной теории редукцией к точке, т.е. рассмотрением полей, не зависящих от координат вообще. Согласно гипотезе IKKT, эта нульмерная матричная модель в пределе бесконечного размера матриц может рассматриваться в качестве непертурбативного определения теории суперструн типа IIB.

Матричная модель IKKT имеет много общих черт с матричной теорией BFSS. В частности, она тесно связана с D-бранами. В отличие от теории типа IIA, D-браны в IIB теории имеют нечетную размерность. Минимальную размерность,  $p = -1$ , имеют D-инстантоны; низкоэнергетическое эффективное действие для них как раз и получается в результате редукции теории Янга–Миллса к точке. Поэтому в модели IKKT D-инстантоны играют роль элементарных степеней свободы, такую же как D0-браны в матричной теории. Точно так же, фундаментальными протяженными объектами, вследствие уменьшения размерности на единицу, будут струны вместо мембран.

В основе подхода IKKT лежат те же рассуждения, которые позволяют связать матричную теорию с супермембранами. В результате выкладок типа приведенных в разделе 2.6 для мембран действие модели IKKT сводится к действию суперструны Грина–Шварца в формулировке Шильда; или, наоборот, лагранжиан модели IKKT можно рассматривать как матричный аналог действия Шильда для суперструны. Формулировка Шильда эквивалентна, по крайней мере на уровне классических уравнений движения, более известным подходам к теории струн, основанным на действии Намбу–Гото или на двумерной гравитации. Некоторые свойства действия Шильда обсуждаются в следующем разделе.

### 3.1. Действие Шильда

Обычно отправной точкой для теории струны служит действие Намбу–Гото. Геометрически оно представляет собой площадь ее мировой поверхности. Вводя вспомогательные поля, можно сформулировать вариационный принцип в теории струн несколькими различными способами. Все они эквивалентны формулировке Намбу–Гото, по крайней мере на классическом уровне. Стандартный подход связан с введением вспомогательной метрики на мировой поверхности [14, 56–58], но имеются и другие возможности, например использование формулировки, основанной на действии Шильда.

В действии Шильда присутствует одно вспомогательное поле — положительно определенная функция  $\sqrt{g}(\sigma_0, \sigma_1)$ , причем она входит в действие без производных:

$$S_{\text{Schild}} = \int d^2\sigma \left( -\frac{\alpha}{4\sqrt{g}} \{X^\mu, X^\nu\}^2 - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^\mu \{X_\mu, \Psi\} + \beta \sqrt{g} \right). \quad (3.1)$$

Скобки Пуассона  $\{ , \}$  определены обычным образом:

$$\{X, Y\} \equiv \epsilon^{ab} \partial_a X \partial_b Y. \quad (3.2)$$

Индексы  $\mu$  и  $\nu$ , пробегающие значения от 0 до 9, поднимаются и опускаются с помощью метрики Мин-

ковского  $\eta^{\mu\nu} = (+ - \dots -)$ . Матрицы  $\Gamma^\mu$  удовлетворяют антисимметрическим соотношениям

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Фермионное поле  $\Psi_\alpha(\sigma_1, \sigma_2)$  является скаляром на мировой поверхности и спинором Майорана–Вейля в пространстве–времени, т.е.  $\bar{\Psi} = \Psi \Gamma^0$  и  $\Gamma_{11} \Psi = \Psi$ . Отметим, что псевдоевклидовость метрики необходима для существования спиноров Майорана–Вейля в десяти измерениях. Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ , в принципе, можно включить в нормировку полей, но в дальнейшем будет удобно их сохранить.

Вспомогательное поле  $\sqrt{g}$  можно исключить с помощью классических уравнений движения. При этом изменится только бозонная часть действия, так как фермионный член в действии от  $\sqrt{g}$  не зависит. Варьируя (3.1) по  $\sqrt{g}$ , получим

$$\sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{-\{X^\mu, X^\nu\}^2}. \quad (3.4)$$

Подкоренное выражение в этом равенстве есть, с точностью до двойки, детерминант метрики, индуцированной на мировой поверхности струны:

$$\{X^\mu, X^\nu\}^2 = (\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2 = 2 \det_{ab} G_{ab}, \quad (3.5)$$

$$G_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (3.6)$$

Следует отметить, что подкоренное выражение в формуле (3.4) не может быть отрицательным. В противном случае индуцированная метрика была бы положительно определена, что возможно только для струны, движущейся быстрее скорости света.

В результате подстановки (3.4) в (3.1) и изменения нормировки фермионных полей получается действие Намбу–Гото для струны Грина–Шварца с фиксированной к-симметрией [2]:

$$S_{\text{NG}} = \int d^2\sigma \left( \sqrt{2\alpha\beta} \sqrt{-\det_{ab} G_{ab}} - 2i\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_b \Psi \right). \quad (3.7)$$

В квантовой теории по полю  $\sqrt{g}$  следует проинтегрировать. Существуют аргументы [59] в пользу того, что функциональный интеграл для струны с действием Шильда эквивалентен функциональному интегралу в обычной формулировке Полякова, если выбрана правильная мера интегрирования и сокращается конформная аномалия, т.е. в критической размерности  $D = 10$ .

Действие (3.1) обладает пространственно–временной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией

$$\begin{aligned} \delta\Psi_\alpha &= -\frac{1}{2} \sqrt{g} \{X_\mu, X_\nu\} (\gamma^{\mu\nu} \epsilon)_\alpha + \zeta_\alpha, \\ \delta X^\mu &= i\bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Параметры этого преобразования  $\zeta$  и  $\epsilon$  — вещественные спиноры той же киральности, что и  $\Psi$ , не зависящие от координат на мировой поверхности.

Действие Шильда, конечно, репараметризационно инвариантно. Вспомогательное поле  $\sqrt{g}$  при общекоординатных преобразованиях ведет себя как скалярная плотность, что следует, например, из (3.5). Отдельного комментария заслуживает специальный класс преобра-

зований мировой поверхности — симплектические диффеоморфизмы. Симплектические преобразования характеризуются единичным якобианом, т.е. они оставляют инвариантным элемент площади мировой поверхности. В классической механике преобразования, сохраняющие площадь фазового пространства, обычно называются каноническими. Хорошо известно, что их можно задать с помощью производящей функции:

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{g} &= \{\sqrt{g}, \Omega\}, \\ \delta X^\mu &= \{X^\mu, \Omega\}, \\ \delta\Psi_\alpha &= \{\Psi_\alpha, \Omega\}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Формулы (3.9) очень напоминают калибровочные преобразования в теории Янга–Миллса и поэтому играют важную роль в матричной модели.

### 3.2. Матричная формулировка суперструны ПВ

Действие матричной модели получается из действия суперструны заменой

$$X_\mu(\sigma_0, \sigma_1) \Rightarrow A_\mu^{IJ}, \quad (3.10)$$

$$\Psi_\alpha(\sigma_0, \sigma_1) \Rightarrow \psi_\alpha^{IJ}, \quad (3.11)$$

где  $A_\mu^{IJ}$  и  $\psi_\alpha^{IJ}$  — эрмитовы матрицы размера  $N \times N$ , бозонная и фермионная, соответственно. Переход от функций к бесконечным матрицам и обратно можно формализовать разложением по базисам  $J_{m_1, m_2}^{IJ}$  в  $gl(\infty)$  или  $j_{m_1, m_2}(\sigma_0, \sigma_1)$  в пространстве функций.

Переход от одного представления к другому осуществляется сверткой с матричной функцией

$$L(\sigma_0, \sigma_1)^{IJ} = \sum_{m_1, m_2} j_{m_1, m_2}(\sigma_0, \sigma_1) J_{m_1, m_2}^{IJ}, \quad (3.12)$$

а именно,

$$A_\mu = \int d^2\sigma N X_\mu L, \quad (3.13)$$

$$X_\mu = \text{tr } A_\mu L. \quad (3.14)$$

Матричные следы при этом переходят в интегралы, а коммутаторам при  $N \rightarrow \infty$  отвечают скобки Пуассона:

$$\text{tr} \Rightarrow \int d^2\sigma N, \quad (3.15)$$

$$[\cdot, \cdot] \Rightarrow \frac{i}{N} \{ \cdot, \cdot \}. \quad (3.16)$$

Последняя формула справедлива только для гладких конфигураций. Под словом "гладкие" понимаются поля или матрицы, для которых малы амплитуды высокочастотных мод с  $m_i \sim N$  в разложении по базису  $j_{m_1, m_2}(\sigma_0, \sigma_1)$  или  $J_{m_1, m_2}^{IJ}$ .

Формулы преобразования от матриц к функциям на торе из раздела (2.6) являются частным случаем приведенной выше конструкции. Вообще, выражения для базисных функций известны в явном виде для сферы и для тора; общий случай римановой поверхности рода  $g$  также рассматривался в ряде работ (см. обзор [60]).

В результате замены (3.10), (3.11) действие Шильда (3.1) переходит в

$$S = \text{tr} \left( \frac{\alpha}{4} [A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu [A_\mu, \psi] + \beta \right). \quad (3.17)$$

В модели ИККТ нет матричного аналога вспомогательного поля  $\sqrt{g}$ . Роль поля  $\sqrt{g}$  выполняет размер матриц  $N$ . Действительно, при замене следа на интеграл и коммутаторов на скобки Пуассона,  $N$  появляется в действии точно таким же образом, каким в него должно входить поле  $\sqrt{g}$ . Поэтому матричная модель ИККТ определяется интегралом по матрицам переменного размера, который, таким образом, тоже является динамической переменной.

Поскольку при переходе к евклидовой метрике возникают определенные проблемы, связанные со спинорами Майорана–Вейля, естественно определять модель не статистической суммой, а вакуумной амплитудой

$$Z = \sum_{N=1}^{\infty} \int dA_\mu d\psi_\alpha \exp(iS). \quad (3.18)$$

Если в этой амплитуде доминируют большие значения  $N$  и гладкие матрицы  $A_\mu$  и  $\psi_\alpha$ , то матричная модель может служить непертурбативным определением суперструны типа ПВ.

Действие (3.17), за исключением последнего члена, зависящего только от  $N$ , имеет вид лагранжиана десятимерной суперсимметричной теории Янга–Миллса, в котором опущены производные всех полей. Такое же эффективное действие возникает при описании связанных состояний  $N$  D-инстантонов в теории суперструн типа ПВ (ср. с (2.7) при  $p = -1$ ), так что модель ИККТ отличается от D-инстантонной матричной модели только суммированием по  $N$ .

К связи модели ИККТ с десятимерной теорией Янга–Миллса можно подойти и с несколько иной точки зрения, интерпретируя ее в духе редукции Эгучи–Каваи [61] (см. также обзор [62]). В пределе  $N \rightarrow \infty$  любая матричная теория поля эквивалентна редуцированной нульмерной матричной модели. Правда, в чисто калибровочной, несуперсимметричной теории прямолинейный вариант редукции, когда из действия просто выкидываются производные, не проходит из-за спонтанного нарушения инвариантности относительно сдвигов на постоянные матрицы

$$A_\mu^{IJ} \rightarrow A_\mu^{IJ} + c_\mu \delta^{IJ}. \quad (3.19)$$

О восстановлении этой симметрии нужно специально заботиться, для чего обычно используются определенного вида внешние поля. Однако, как было впервые обнаружено в четырехмерной  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной теории Янга–Миллса [63], суперсимметрия препятствует нарушению  $\mathbf{R}^D$ -инвариантности (3.19). Этот факт чрезвычайно важен в теории ИККТ, поскольку калибровочные потенциалы  $A_\mu$  играют роль пространственно-временных координат и симметрия (3.19) отвечает трансляционной инвариантности.

Действие (3.17) инвариантно относительно  $\mathcal{N} = 2$  суперпреобразований

$$\delta\psi_\alpha^{IJ} = \frac{i}{2} [A_\mu, A_\nu]^{IJ} (\Gamma^{\mu\nu} \epsilon)_\alpha + \delta^{IJ} \xi_\alpha, \quad (3.20)$$

$$\delta A_\mu^{IJ} = i\bar{\epsilon} \gamma_\mu \psi^{IJ}, \quad (3.21)$$

аналогичных (3.8). Одна из суперсимметрий, сдвиг  $U(1)$ -компонент фермионных матриц на  $\zeta$ , имеет кинематиче-

ское происхождение — действие от  $\text{tr} \psi$  вообще не зависит. На другую суперсимметрию можно смотреть, как на десятимерные суперпреобразования для полей, не зависящих от координат.

Действие модели IKKT также не меняется при калибровочных  $U(N)$ -преобразованиях

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= i[A_\mu, \omega], \\ \delta\psi_\alpha &= i[\psi_\alpha, \omega],\end{aligned}\quad (3.22)$$

которые при замене коммутаторов на скобки Пуассона переходят в симплектические преобразования (3.9) на мировой поверхности струны. Поэтому матричная модель автоматически обеспечивает инвариантность относительно диффеоморфизмов, сохраняющих площадь, вследствие калибровочной симметрии. Полная репараметризационная инвариантность в матричной модели остается неявной и должна возникать в (3.18) динамически при суммировании по  $N$ .

### 3.3. D-струны как классические решения

Матричные модели (как BFSS, так и IKKT) претендуют на полное непертурбативное описание струнной динамики. Непертурбативные эффекты в теории суперструн наиболее ярко проявляются в наличии в спектре физических степеней свободы солитонных p-бран, обладающих конечным натяжением и несущих электрические или магнитные заряды относительно тензорных калибровочных полей, присутствующих в гравитационном супермультиплете в десяти и одиннадцати измерениях. Общий формализм описания p-бран в матричных моделях был развит в [64] и основывается на двух наблюдениях:

1) в алгебре суперсимметрии при  $N = \infty$  появляются центральные заряды, имеющие нетривиальную тензорную структуру;

2) классические уравнения движения для матричных моделей имеют операторные решения, которые можно интерпретировать как p-браны различной размерности.

Центральные заряды в матричной теории были найдены в [64]. Для модели IKKT они вычислены в [65]. В настоящем обзоре центральные заряды обсуждаются не будут, а рассматриваются только решения классических уравнений.

Классические уравнения движения, следующие из действия (3.17), имеют вид

$$[A^\mu, [A_\mu, A_\nu]] = 0, \quad (3.23)$$

$$[A^\mu, (\Gamma_\mu \psi)_\alpha] = 0. \quad (3.24)$$

Первое из них является просто уравнением Янга–Миллса для полей, не зависящих от координат. Уравнения такого типа рассматривались и ранее в связи с мастер-полем в многоцветовой квантовой хромодинамике [66], а также при конечных  $N$  [67]. Решения, описывающие D-браны в матричных моделях, существуют только при  $N = \infty$ . Уравнение (3.24) определяет фермионные нулевые моды на фоне классической конфигурации бозонных полей. Вопрос о фермионных нулевых модах в матричных моделях, по-видимому, еще не изучался. Мы также будем обсуждать только уравнения движения для бозонных степеней свободы (3.23).

Простейшее решение имеет вид диагональной матрицы

$$A_\mu^{\text{cl}} = \begin{pmatrix} x_\mu^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_\mu^N & \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Классические вакуумы такого типа могут играть важную роль в матричной модели IKKT. Если интерпретировать матричную модель в духе эффективной теории для D-инстантонов, то, как обсуждалось в разделе 2.3,  $x^1, \dots, x^N$  естественно считать пространственно-временными координатами  $N$  D-инстантонов. С точки зрения редукции Эгучи–Каваи, пространственно-временная динамика также описывается диагональными компонентами калибровочных полей.

Решение (3.25) для D-инстантонов существует при любых  $N$ , а вот для описания протяженных объектов предел бесконечного размера матриц уже существует. При  $N = \infty$  число решений уравнений движения (3.23) значительно увеличивается. Дело в том, что предел бесконечного размера матриц позволяет решениям классических уравнений быть любыми операторами. Операторное решение, которое можно интерпретировать как D-струну, было предложено в [2]:

$$A_\mu^{\text{cl}} = \left( \frac{T}{2\pi} q, \frac{L}{2\pi} p, 0, \dots, 0 \right). \quad (3.26)$$

Здесь  $p$  и  $q$  — бесконечные матрицы, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям (2.27),  $T$  — интервал периодичности по времени, а  $L/2\pi$  — радиус компактификации. Обе эти величины должны быть достаточно велики, чтобы эффекты компактификации не были заметны. Решение (3.26) по форме совпадает с классической мембраной [1] в матричной теории (2.32). В десятимерном пространстве ему соответствует неподвижная струна, вытянутая вдоль оси  $x_1$ .

В квазиклассическом пределе

$$A_0^{\text{cl}} \implies X_0^{\text{cl}} = \frac{T}{2\pi} \sigma_0, \quad (3.27)$$

$$A_1^{\text{cl}} \implies X_1^{\text{cl}} = \frac{L}{2\pi} \sigma_1. \quad (3.28)$$

Решение (3.26) действительно обладает рядом свойств, характерных для D-струны. Оно сохраняет половину суперсимметрий, а значит является BPS-состоянием. Кроме того, в матричной модели можно вычислить потенциал взаимодействия между двумя струнами вида (3.26). На больших расстояниях ответ согласуется со взаимодействием D-струн в супергравитации [2]. В дополнение к этому решение (3.26) можно легко обобщить на D-браны с  $p > 1$ .

### 3.4. Dr-браны

Среди всех решений классических уравнений движения (3.23) выделены BPS-состояния — решения, сохраняющие половину суперсимметрий. Это отвечает тому, что первый член в формуле для вариации фермионов (3.20) сокращается со вторым при специальном выборе параметра  $\xi$ . Матричная структура второго члена тривиальна, поэтому сокращение возможно, только если

первый член пропорционален единичной матрице, т.е. при

$$[A_\mu^{\text{cl}}, A_v^{\text{cl}}] = i c_{\mu v} \mathbf{1}, \quad (3.29)$$

где  $c_{\mu v}$  — произвольные числа. Уравнение (3.29) играет роль условия BPS в матричной модели [2, 64]. Как водится, любая классическая конфигурация, удовлетворяя условию BPS, тем самым решает и уравнения движения (3.23).

Матрица  $c_{\mu v}$  всегда может быть приведена преобразованием Лоренца к канонической жордановой форме

$$c_{\mu v} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & & & \\ -\omega_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \omega_5 \\ & & & -\omega_5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Решение, для которого отличен от нуля  $(p+1)/2$  коэффициент  $\omega_k$  из 5, где  $p = 1, 3, 5, 7, 9$ , можно выразить через  $(p+1)/2$  пару канонически сопряженных операторов:

$$A_\mu^{\text{cl}} = (Q_1, P_1, \dots, Q_{(p+1)/2}, P_{(p+1)/2}, 0, \dots, 0), \quad (3.31)$$

что следует непосредственно из коммутационных соотношений (3.29):

$$[Q_k, P_k] = i\omega_k. \quad (3.32)$$

В частном случае  $p = 1$  мы получаем D-струну из предыдущего раздела, если положить  $Q_1 = Tq/2\pi$ ,  $P_1 = Lp/2\pi$  и

$$\omega_1 = \frac{TL}{2\pi N}. \quad (3.33)$$

При произвольном  $p$  решение (3.31) описывает протяженный  $p$ -мерный объект. Напрашивается интерпретация этого решения как Dp-браны в ПВ теории. Аргументы в пользу этого приведены в [65, 68]. Отметим, что размерность  $p$  автоматически оказывается нечетной. Другая точка зрения высказана в работах [69, 70], где решение (3.31) трактуется как Dp-брана с постоянным магнитным полем на ее мировом объеме. На такой объект можно смотреть как на связанное состояние Dp-браны с  $N$  D-инстантонами.

Для существования решения (3.31) необходимо предположить, что десятимерное пространство компактифицировано вдоль осей  $x_0, \dots, x_p$  на окружности радиусов  $L_0/2\pi, \dots, L_p/2\pi$ . Следовательно, собственные значения матриц  $Q_k, P_k$  равномерно распределены на интервалах  $[-L_{2k-2}, L_{2k-2}]$  и  $[-L_{2k-1}, L_{2k-1}]$ , соответственно. Пространство, в котором действуют матрицы  $A_\mu$ , естественным образом разбивается на тензорное произведение  $(p+1)/2$  пространств, на которых определены операторы  $Q_k, P_k$ . Таким образом, для р-бранного решения  $Q_k$  и  $P_k$  действуют в пространстве размерности  $N^{2/(p+1)}$  [64], стало быть, они имеют по  $N^{2/(p+1)}$  различных собственных значений. Поскольку радиусы компактификации пропорциональны  $N^{1/(p+1)}$  при  $N \rightarrow \infty$  [1, 2, 64], расстояние  $L_a N^{-2/(p+1)}$  между соседними собственными значениями стремится к нулю, как  $N^{-1/(p+1)}$ .

Величины  $\omega_k$  в коммутационных соотношениях (3.32) играют роль постоянной Планка. Они не являются независимыми параметрами — их можно выразить

через радиусы компактификации  $L_a$  и размер матриц  $N$ . Согласно правилу квантования Бора–Зоммерфельда число квантовых состояний пропорционально объему фазового пространства с коэффициентом  $(2\pi\hbar)^{-1}$ . В нашем случае  $\hbar = \omega_k$ ; собственные значения операторов  $Q_k$  и  $P_k$  заключены в интервалах от  $-L_{2k-2}/2$  до  $L_{2k-2}/2$  и от  $-L_{2k-1}/2$  до  $L_{2k-1}/2$ , соответственно, так что объем фазового пространства равен  $L_{2k-2}L_{2k-1}$ . Число состояний,  $N^{2/(p+1)}$ , определяется размером матриц  $Q_k$  и  $P_k$ . Правило Бора–Зоммерфельда дает

$$\omega_k = \frac{L_{2k-2}L_{2k-1}}{2\pi N^{2/(p+1)}}. \quad (3.34)$$

Формула (3.34) обобщает соотношение (3.33); ее нетрудно вывести из коммутационных соотношений для  $Q_k, P_k$  с помощью преобразования Фурье, не апеллируя к квазиклассическому правилу Бора–Зоммерфельда. Эта формула показывает, что  $\omega_k$  остаются конечными в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Перемножая соотношения (3.34) для всех  $k$ , можно выразить размер матриц через мировой объем р-браны,

$$V_{p+1} \equiv L_0 L_1 \dots L_p, \quad (3.35)$$

и параметры  $\omega_k$ :

$$N = V_{p+1} \prod_{i=1}^{(p+1)/2} (2\pi\omega_i)^{-1}. \quad (3.36)$$

Рассмотренные выше решения играют роль элементарных образующих, из которых можно строить более сложные классические конфигурации. Существует общий метод построения суперпозиции произвольных состояний в матричных моделях [1]. Пусть каждое из состояний характеризуется матрицами определенного вида. Тогда суперпозиция описывается блочно-диагональными матрицами, в которых элементарные составляющие вставлены в виде блоков. Свойства симметрий относительно перестановок блоков между собой отражают статистику образующих состояний.

Рассмотрим, например, две одинаковые р-браны, совпадающие в пространстве. Очевидно, что такой конфигурации отвечает матрица из двух одинаковых блоков. Относительную ориентацию р-бран можно сделать произвольной, действуя на каждую из них разными преобразованиями Лоренца. Скажем, в результате трансляции вдоль оси  $x_{p+1}$  получится конфигурация, состоящая из двух параллельных р-бран:

$$A_a^{\text{cl}} = \begin{pmatrix} B_a & 0 \\ 0 & B_a \end{pmatrix}, \quad a = 0, \dots, p, \\ A_{p+1}^{\text{cl}} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \\ A_i^{\text{cl}} = 0, \quad i = p+2, \dots, 9. \quad (3.37)$$

Через  $B_\mu$  здесь обозначено решение (3.31) для одной р-браны:

$$B_0 \equiv Q_1, \quad B_1 \equiv P_1, \quad \dots, \quad B_{p-1} \equiv Q_{(p+1)/2}, \quad B_p \equiv P_{(p+1)/2}. \quad (3.38)$$

Параметр  $b$  имеет смысл расстояния между р-бранами. Нетрудно понять, что (3.37) удовлетворяет условию BPS так же, как и составляющие браны.

Скрещенные р-браны получаются из параллельных вращением. Например, поворот в плоскости  $(x_p, x_{p+2})$  на угол  $\theta$  даст

$$\begin{aligned} A_a^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} B_a & 0 \\ 0 & B_a \end{pmatrix}, \quad a = 0, \dots, p-1, \\ A_p^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} B_p \cos \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & B_p \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ A_{p+1}^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}, \\ A_{p+2}^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} B_p \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & -B_p \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ A_i^{\text{cl}} &= 0, \quad i = p+3, \dots, 9. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Две скрещенные р-браны уже не образуют BPS-состояния, но по-прежнему удовлетворяют классическим уравнениям движения.

Движущиеся относительно друг друга р-браны получаются гиперболическим поворотом в плоскости  $(x_0, x_{p+2})$ . В системе центра масс такой конфигурации отвечает решение

$$\begin{aligned} A_0^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} B_0 \cosh \epsilon & 0 \\ 0 & B_0 \cosh \epsilon \end{pmatrix}, \\ A_a^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} B_a & 0 \\ 0 & B_a \end{pmatrix}, \quad a = 1, \dots, p, \\ A_{p+1}^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}, \\ A_{p+2}^{\text{cl}} &= \begin{pmatrix} B_0 \sinh \epsilon & 0 \\ 0 & -B_0 \sinh \epsilon \end{pmatrix}, \\ A_i^{\text{cl}} &= 0, \quad i = p+3, \dots, 9. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Скорость каждой из р-бран связана с параметром  $\epsilon$  обычным соотношением:

$$v = \tanh \epsilon. \quad (3.41)$$

### 3.5. Однопетлевое эффективное действие и взаимодействие р-бран

Самым простым способом проверки гипотезы IKKT оказывается сравнение потенциалов взаимодействия D-бран, вычисленных в матричной модели и в теории суперструн. Так как классические решения для суперпозиции р-бран в матричной модели имеют вид блочно-диагональных матриц, в классической теории взаимодействие отсутствует. Однако потенциал взаимодействия может генерироваться квантовыми поправками, если этому не препятствуют соображения суперсимметрии. Например, не должны перенормироваться BPS-состояния.

Связь модели IKKT с десятимерной теорией Янга – Миллса позволяет использовать для вычисления квантовых поправок к классическим решениям стандартный метод фонового поля. Бозонные переменные раскладываются в окрестности классического решения на фоновую часть и флуктуации:

$$A_\mu = A_\mu^{\text{cl}} + \alpha^{-1} a_\mu. \quad (3.42)$$

Вклад квантовых флуктуаций вычисляется по теории возмущений. Следует отметить, что в вычислениях, результаты которых приводятся ниже, размер матриц считается фиксированным (и бесконечным). Процедура вычисления квантовых поправок в модели IKKT без учета суммирования по  $N$  молчаливо предполагает, что такое суммирование насыщается некоторой седловой точкой при бесконечном  $N$ .

Как обычно при вычислениях квантовых поправок во внешнем поле, удобно выбрать фоновую калибровку

$$P_\mu a^\mu = 0, \quad (3.43)$$

где  $P_\mu$  — нульмерная ковариантная производная в присоединенном представлении

$$P_\mu = [A_\mu^{\text{cl}}, \cdot]. \quad (3.44)$$

Действие матричной модели в этой калибровке, с точностью до членов порядка  $\alpha^{-1}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} S = S^{\text{cl}} - \text{tr} \left[ \frac{1}{2} a^\mu (P^2 \eta_{\mu\nu} - 2i F_{\mu\nu}) a^\nu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu P_\mu \psi + \bar{c} P^2 c \right] + O(\alpha^{-1}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Последний член в квадратных скобках содержит духи Фаддеева – Попова. Через  $F_{\mu\nu}$  обозначена напряженность калибровочного поля в присоединенном представлении

$$F_{\mu\nu} = i[P_\mu, P_\nu] = i[A_\mu^{\text{cl}}, A_\nu^{\text{cl}}], \cdot. \quad (3.46)$$

Интегрирование по  $a_\mu$ ,  $\psi$  и  $c$  дает эффективное действие для фоновых полей. В низшем порядке теории возмущений по  $\alpha^{-1}$ , т.е. в однопетлевом приближении, эффективное действие имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(P^2 \delta_{\mu\nu} - 2i F_{\mu\nu}) - \\ - \frac{1}{4} \text{Tr} \ln \left[ \left( P^2 + \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \right) \frac{1 + \Gamma_{11}}{2} \right] - \text{Tr} \ln P^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Этот результат получается после квадрирования оператора Дирака и виковского поворота в евклидово пространство. Лишние множители  $1/2$  перед первым и вторым слагаемыми возникают из-за эрмитовости матриц  $A_\mu$  и  $\psi$ . Вклад фермионов содержит проектор, учитывающий киральность. Знаки "минус" перед вторым и третьим слагаемыми очевидны.

Рассмотрим сначала случай, когда фоновое поле удовлетворяет условию BPS. Это означает, что  $F_{\mu\nu} = 0$ . Вклады бозонов, фермионов и духов при этом взаимно компенсируются [2]:

$$W = \left( \frac{1}{2} \times 10 - \frac{1}{4} \times 16 - 1 \right) \text{Tr} \ln P^2 = 0. \quad (3.48)$$

Как и следовало ожидать, BPS-состояния не перенормируются и не взаимодействуют.

Важным следствием неперенормировки BPS-состояний является тот факт, что эффективный потенциал для диагональных матриц вида (3.25) обращается в нуль, так что распределение собственных значений  $x_\mu^I$  остается равномерным [63, 2]. Это не так в несуперсимметричных теориях, где возникает однопетлевой притягивающий потенциал для собственных значений, и  $\mathbf{R}^D$ -симметрия (3.19) оказывается спонтанно нарушенной квантовыми поправками.

Рассмотрим теперь однопетлевое эффективное действие, вычисленное на классических конфигурациях из предыдущего раздела. Оно имеет смысл энергии взаимодействия для неподвижных р-бран или фазового сдвига для р-бран, движущихся друг относительно друга.

Для параллельных р-бран эффективный потенциал обращается в нуль, как и ожидалось, поскольку такая конфигурация удовлетворяет условию BPS. Следовательно, энергия взаимодействия параллельных бран тождественно зануляется. В супергравитации такое сокращение происходит из-за компенсации гравитационного притяжения электрическим или магнитным отталкиванием р-бран.

Другие классические решения из предыдущего раздела не удовлетворяют условию BPS, и эффективное действие для них уже не обращается в нуль. Его можно вычислить в замкнутом виде, что позволяет сравнить энергию взаимодействия различных конфигураций р-бран в матричной модели со струнными результатами. Технически вычисление потенциала взаимодействия между р-бранами возможно благодаря тому, что классические поля для одной р-браны (3.38) в "координатном представлении" имеют вид операторов умножения и дифференцирования:

$$\begin{aligned} B_0 &= q_1, \quad B_1 = -i\omega_1 \partial_1, \quad \dots, \\ B_{p-1} &= q_{(p+1)/2}, \quad B_p = -i\omega_{(p+1)/2} \partial_{(p+1)/2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Таким образом, однопетлевое эффективное действие (3.47) при подстановке классических решений выражается через детерминанты некоторых дифференциальных операторов второго порядка. Мы приводим окончательные результаты вычислений эффективного действия [2, 65, 3], опуская промежуточные выкладки.

Энергия взаимодействия двух антипараллельных р-бран равна

$$\begin{aligned} W &= -2N \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(-b^2 s) \prod_{i=1}^{(p+1)/2} \frac{1}{2 \sinh 2\omega_i s} \times \\ &\times \left[ \sum_{i=1}^{(p+1)/2} (\cosh 4\omega_i s - 1) - 4 \left( \prod_{i=1}^{(p+1)/2} \cosh 2\omega_i s - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

На больших расстояниях потенциал убывает, как  $1/b^{7-p}$ :

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{16} N \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) \left[ 2 \sum_{i=1}^{(p+1)/2} \omega_i^4 - \left( \sum_{i=1}^{(p+1)/2} \omega_i^2 \right)^2 \right] \times \\ &\times \prod_{i=1}^{(p+1)/2} \omega_i^{-1} \left(\frac{2}{b}\right)^{7-p} + O\left(\frac{1}{b^{9-p}}\right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Этот результат согласуется с супергравитацией:  $1/b^{7-p}$  есть ни что иное, как кулоновский потенциал между  $p$ -мерными плоскостями в девятимерном пространстве. Струнный результат для потенциала [39, 40, 71], естественно, имеет ту же асимптотику на больших расстояниях. Но полный ответ, учитывающий обмен всеми, в том числе и массивными, модами замкнутой струны, не совпадает с формулой (3.50), получающейся в матричной модели<sup>14</sup>.

Эффективное действие для скрещенных р-бран имеет вид

$$\begin{aligned} W &= -4N^{2p/(p+1)} \frac{1}{\cos(\theta/2)} \prod_{a \neq p-1} L_a^{-1} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{p/2} \exp(-b^2 s) \tanh\left(\omega_{(p+1)/2} s \sin \frac{\theta}{2}\right) \times \\ &\times \sinh^2\left(\omega_{(p+1)/2} s \sin \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Его асимптотика при  $b \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} W &= -\Gamma\left(\frac{6-p}{2}\right) \frac{4V_p}{(4\pi)^{p/2}} \omega_{(p+1)/2}^4 \times \\ &\times \prod_{i=1}^{(p+1)/2} \frac{1}{\omega_i^2} \frac{\sin^3(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \frac{1}{b^{6-p}} + O\left(\frac{1}{b^{8-p}}\right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

правильно воспроизводит зависимость от угла и от расстояния для энергии взаимодействия между статическими скрещенными р-бранами в десятимерной супергравитации.

Фазовый сдвиг, который испытывают движущиеся р-браны при рассеянии друг на друге, получается из потенциала взаимодействия скрещенных бран аналитическим продолжением  $\theta/2 \rightarrow i\epsilon$ :

$$\delta = -\frac{V_p}{(2\pi)^p} \omega_1 \prod_{i=1}^{(p+1)/2} \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{p/2} \exp(-b^2 s) \times \\ \times \frac{[\cos(4\omega_1 s \sinh \epsilon) - 4 \cos(2\omega_1 s \sinh \epsilon) + 3]}{\cosh \epsilon \sin(2\omega_1 s \sinh \epsilon)}. \quad (3.54)$$

Функция, стоящая под интегралом в этой формуле, имеет полюса на вещественной оси, так что контур интегрирования нужно сместить в комплексную плоскость. Вычеты в полюсах определяют мнимую часть фазового сдвига. Величина этих вычетов совпадает со струнным результатом [73] при малых скоростях, если положить все  $\omega_i = 2\pi\alpha'$ . Вещественная часть фазового сдвига находится в согласии со струнными вычислениями на больших расстояниях, когда

$$\begin{aligned} \delta &= -4V_p (4\pi)^{-p/2} \frac{\sinh^3 \epsilon}{\cosh \epsilon} \Gamma\left(\frac{6-p}{2}\right) \omega_1^4 \times \\ &\times \prod_{i=1}^{(p+1)/2} \frac{1}{\omega_i^2} \frac{1}{b^{6-p}} + O\left(\frac{1}{b^{8-p}}\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

<sup>14</sup> В [72] предложено, что эффекты старших петель в матричной модели могут восстановить согласие с суперструнной для промежуточных расстояний.

Приведенные примеры показывают, что взаимодействие D-бран в модели IKKT согласуется с суперструнными результатами в определенной кинематической области, когда существенным оказывается вклад безмассовых состояний, а массивными модами можно пренебречь. Это говорит о том, что модель IKKT в том усеченном варианте, не включающем суммирования по  $N$ , который использовался при вычислениях, воспроизводит суперструны в низкоэнергетическом приближении — при малых скоростях или на больших расстояниях.

#### 4. Матричная модель с неабелевым действием Борна – Инфельда [3]

Как было отмечено, калибровочная симметрия матричной модели IKKT обеспечивает инвариантность струнного действия относительно диффеоморфизмов, сохраняющих площадь. Они представляют только часть общекоординатных преобразований, и полная репараметризационная инвариантность теории струны в формулировке Шильда должна восстанавливаться динамически за счет интегрирования по вспомогательному полю  $\sqrt{g}$ . В модели IKKT интегрирование по  $\sqrt{g}$  заменяется суммированием по размеру матриц  $N$ . При этом предполагается, что предельный переход  $N \rightarrow \infty$  осуществляется динамически.

С другой стороны, можно с самого начала ввести в матричную модель дополнительную степень свободы — матрицу  $Y^{IJ}$ , которая служит прямым аналогом поля  $\sqrt{g}$  в формулировке Шильда. Такая модификация модели IKKT была предложена в [3] и рассматривается ниже в этой части. Размер матрицы  $N$  становится параметром, а не динамической переменной, как в модели IKKT, что позволяет переходить к пределу  $N \rightarrow \infty$  непосредственно. Если интегрирование по  $Y$  воспроизводит матричный аналог действия Намбу – Гото, то можно надеяться, что матричная модель сохраняет репараметризационную инвариантность теории струны и на квантовом уровне.

Матричный аналог действия Намбу – Гото имеет вид

$$S = \sqrt{\alpha\beta} \operatorname{tr} \sqrt{[A_\mu, A_\nu]^2}. \quad (4.1)$$

Действительно, переходя к струнным переменным и заменяя при  $N \rightarrow \infty$  коммутаторы на скобки Пуассона, имеем

$$[A_\mu, A_\nu]^2 \implies -\frac{1}{N^2} \{X_\mu, X_\nu\}^2 = -\frac{2}{N^2} \det_{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (4.2)$$

так что

$$\operatorname{tr} \sqrt{[A_\mu, A_\nu]^2} \implies \int d^2\sigma \sqrt{-\{X_\mu, X_\nu\}^2}. \quad (4.3)$$

Выражение (4.1) выглядит как неабелево обобщение действия Борна – Инфельда (NBI) в пределе сильного поля<sup>15</sup>. Можно было бы работать прямо с действием (4.1), но это крайне неудобно из-за его неаналитичности.

Например, при рассмотрении классических уравнений движения для (4.1) напрашивается введение вспомогательного поля

$$Y \propto \sqrt{[A_\mu, A_\nu]^2}. \quad (4.4)$$

Ниже рассматривается матричная модель, для которой (4.4) будет следствием уравнений движения и которая воспроизводит неабелево действие Борна – Инфельда (4.1) как на классическом, так и на квантовом уровне.

#### 4.1. Матричное описание струны Шильда

Действие матричной модели NBI определено формулой

$$S = \operatorname{tr} \left( \frac{\alpha}{4} Y^{-1} [A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu [A_\mu, \psi] + \beta Y \right), \quad (4.5)$$

где  $Y^{IJ}$  — положительно определенная эрмитова  $N \times N$  матрица, которая рассматривается как независимая динамическая переменная и служит аналогом поля  $\sqrt{g}$  в действии Шильда (3.1).

Вакуумная амплитуда матричной модели NBI дается интегралом

$$Z_{\text{NBI}} = \int dA_\mu d\psi_\alpha dY (\det Y)^{-\gamma} \exp(iS) \quad (4.6)$$

по всем полям с действием (4.5), где параметр  $\gamma$ , определяющий меру интегрирования по матрице  $Y$ , связан с размером матриц формулой

$$\gamma = N - \frac{1}{2}. \quad (4.7)$$

Модель NBI суперсимметрична в пределе бесконечного размера матриц. Суперпреобразования

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \frac{i}{4} [Y^{-1}, [A_\mu, A_\nu]]_+ \Gamma^{\mu\nu} \epsilon + \xi, \\ \delta A_\mu &= i\bar{\epsilon} \Gamma_\mu \psi, \\ \delta Y &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

оставляют [3] действие (4.5) инвариантным с точностью до членов, которые исчезают при замене коммутаторов на скобки Пуассона. В формуле для вариации фермионов  $[\cdot, \cdot]_+$  обозначает матричный антисимметризатор.

Действие матричной модели NBI (4.5) переходит в действие Шильда для суперструны (3.1) после замены функций матрицами согласно (3.10), (3.11) и подстановки

$$Y^{IJ} \implies \sqrt{g}(\sigma_0, \sigma_1). \quad (4.9)$$

Точно так же матричный аналог действия Намбу – Гото можно получить, исключая вспомогательное поле  $Y$  с помощью классических уравнений движения

$$-\frac{\alpha}{4} (Y^{-1} [A_\mu, A_\nu]^2 Y^{-1})^{IJ} + \beta \delta^{IJ} = 0, \quad (4.10)$$

решение которых дается формулой

$$Y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{[A_\mu, A_\nu]^2}. \quad (4.11)$$

Это решение является единственным при условии, что матрица  $Y$  положительно определена, как в рассматриваемом случае.

<sup>15</sup> Отметим, что в теории струн более известно эффективное действие Борна – Инфельда для открытых струн и D-бран, которое имеет другую структуру.

Подставляя классическое решение (4.11) в действие (4.5), получим

$$S_{\text{NBI}} = \sqrt{\alpha\beta} \operatorname{tr} \sqrt{[A_\mu, A_\nu]^2} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\bar{\psi} \Gamma^\mu [A_\mu, \psi]). \quad (4.12)$$

Это выражение является суперсимметричным обобщением неабелева действия Борна – Инфельда (4.1).

Мы видим важное преимущество матричной модели NBI по сравнению с моделью IKKT: для нее существует простой матричный аналог связи между формулировкой Шильда и действием Намбу – Гото на классическом уровне.

Как действие, так и мера интегрирования в модели NBI, очевидно, калибровочно инвариантны, причем аналогично (3.22)  $Y$  преобразуется по присоединенному представлению группы  $U(N)$ :

$$\delta Y = -i[Y, \omega]. \quad (4.13)$$

Однако при переходе к струнному пределу симметрия теории увеличивается, поскольку струна в формулировке Шильда инвариантна относительно полной группы репараметризационных преобразований, а не только относительно диффеоморфизмов, сохраняющих площадь, которые соответствуют калибровочным преобразованиям. В матричной модели, строго говоря, нет аналогов репараметризаций, которые не сохраняют площадь. Например, при масштабных преобразованиях  $\sigma \rightarrow \lambda\sigma$ ,  $\sqrt{g} \rightarrow \lambda^{-2}\sqrt{g}$  меняется мера интегрирования на мировом листе струны,  $d^2\sigma$ , и скобки Пуассона:  $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \lambda^{-2}\{\cdot, \cdot\}$ , чему в матричной модели отвечало бы, кроме растяжений вспомогательного поля  $Y \rightarrow \lambda^{-2}Y$ , еще и преобразование следов  $\operatorname{tr} \rightarrow \lambda^2 \operatorname{tr}$  и коммутаторов  $[\cdot, \cdot] \rightarrow \lambda^{-2}[\cdot, \cdot]$ . Конечно, такие преобразования не являются симметрией в полном смысле этого слова. Тем не менее предстаетывается естественным потребовать, чтобы мера интегрирования по  $Y$  была инвариантна относительно масштабных преобразований. Это однозначно фиксирует параметр  $\gamma$  в (4.6):  $\gamma = N$ . На самом деле, достаточно считать  $\gamma = N + \eta$ , где  $\eta$  — любое число порядка единицы, от которого ничего не зависит, поскольку в конечном счете  $N$  нужно устремить к бесконечности.

Это рассуждение поясняет в какой-то мере формулу (4.7), отвечающую  $\eta = -1/2$ . Мы обсудим в следующем разделе, что при этом значении параметра  $\gamma$  интеграл по  $Y$  в определении (4.6) берется *точно*, что приводит в результате к эффективному действию типа (4.12). При произвольном  $\gamma$  эффективное действие можно вычислить в ведущем порядке  $1/N$  разложения [74]; оно оказывается нелокальным и не репараметризационно инвариантным при  $\gamma \neq N + O(1)$ .

## 4.2. Эффективное действие и мера

Матрица  $Y$ , будучи аналогом вспомогательного поля  $\sqrt{g}$ , играет роль множителя Лагранжа, интегрирование по которому индуцирует эффективное действие для полей  $A_\mu$  и их суперпартнеров. Причем  $Y$  не взаимодействует с фермионами, так что действие для них не изменяется. В квазиклассическом приближении, когда  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно стремятся к бесконечности быстрее, чем  $\gamma$ , эффективное действие имеет вид (4.12). При переходе к струнным переменным оно становится локальным и репараметризационно инвариантным. Не

вполне очевидно заранее, что эти свойства сохраняются и на квантовом уровне. В данном разделе мы остановимся на этом вопросе подробнее.

Поскольку о фермионах можно не заботиться, с аналитическим продолжением в евклидово пространство не возникает никаких проблем. Переход к евклидовой метрике позволяет работать со статистической суммой, а не с вакуумной амплитудой, что несколько более привычно для матричных моделей. Матрица  $Y$  преобразуется так же, как поле  $\sqrt{g}$ , и при переходе в евклидово пространство заменяется на  $iY$ .

Удобно ввести следующее обозначение

$$G = -[A_\mu, A_\nu]^2. \quad (4.14)$$

Тогда интеграл по  $Y$  в (4.6) после виковского поворота принимает вид

$$\begin{aligned} \exp[-S_{\text{eff}}(G)] &= \\ &= \int dY \exp\left(-\frac{\alpha}{4} \operatorname{tr} Y^{-1} G - \beta \operatorname{tr} Y - \gamma \operatorname{tr} \log Y\right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

На этот интеграл можно смотреть как на эрмитову одноМатричную модель во внешнем поле.

Стандартный метод вычисления матричных интегралов с внешним полем основан на приведении матрицы  $Y$  к диагональному виду унитарным преобразованием

$$Y = \Omega^\dagger \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_N) \Omega. \quad (4.16)$$

Собственные значения  $y_I$  положительны. Мера интегрирования в новых переменных принимает вид

$$dY = d\Omega \prod_{I=1}^N dy_I \Delta^2(y), \quad (4.17)$$

где  $\Delta(y)$  — определитель Вандермонда

$$\Delta(y) = \prod_{I>J} (y_I - y_J). \quad (4.18)$$

Интеграл по унитарной матрице  $\Omega$  вычисляется с помощью техники, развитой в [75]. В результате остается интеграл по собственным значениям:

$$\begin{aligned} \exp[-S_{\text{eff}}(G)] &\propto \\ &\propto \frac{1}{\Delta(g)} \int_0^\infty \prod_{I=1}^N \frac{dy_I}{y_I^{1/2}} \Delta(y) \exp\left[-\sum_I \left(\frac{\alpha g_I}{4y_I} + \beta y_I\right)\right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $g_I$  — собственные значения матрицы  $G$ . Интеграл (4.19) вычисляется, что дает [3]

$$\exp[-S_{\text{eff}}(G)] \propto \frac{\Delta(\sqrt{g})}{\Delta(g)} \exp\left[-\sqrt{\alpha\beta} \sum_I \sqrt{g_I}\right]. \quad (4.20)$$

Показатель экспоненты в правой части уравнения (4.20) совпадает с евклидовым вариантом неабелева действия Борна – Инфельда:

$$\sqrt{\alpha\beta} \sum_I \sqrt{g_I} = \sqrt{\alpha\beta} \operatorname{tr} \sqrt{G} = \sqrt{\alpha\beta} \operatorname{tr} \sqrt{-[A_\mu, A_\nu]^2}. \quad (4.21)$$

Дополнительный предэкспоненциальный фактор равен

$$J(G) = \frac{\Delta(\sqrt{g})}{\Delta(g)} = \prod_{I < J} \frac{1}{\sqrt{g_I} + \sqrt{g_J}}. \quad (4.22)$$

Как уже отмечалось, действие (4.21) является матричным аналогом струнного действия Намбу–Гото (4.1) (в евклидовом пространстве в данном случае). Таким образом, действие Намбу–Гото воспроизводится в модели NBI и на квантовом уровне. В квазиклассическом пределе предэкспоненциальный фактор (4.22) несуществен в соответствии с результатами из предыдущего раздела. В квантовом случае этот дополнительный фактор имеет смысл меры интегрирования по полю  $A_\mu$ , индуцированной усреднением по флуктуациям поля  $Y$ .

Представляет интерес вопрос, чему соответствует эта индуцированная мера в пределе  $N \rightarrow \infty$ , когда от матриц можно перейти к струнным координатам и

$$G \rightarrow \frac{1}{N^2} \{X_\mu, X_\nu\}^2 = \frac{2}{N^2} \det_{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (4.23)$$

Оказывается, что выражение (4.22) переходит в

$$J[G] = \text{const} \times (\text{Det } \sqrt{G})^{-1/2}. \quad (4.24)$$

Два альтернативных вывода этой формулы даны в [74] и [76].

Заслуживает внимания тот факт, что в результате интегрирования по  $Y$  получилось действие Намбу–Гото, которое репараметризационно инвариантно, хотя, как обсуждалось выше, репараметризационная инвариантность остается отчасти неявной в матричной формулировке. Не нарушает репараметризационной инвариантности и индуцированная мера интегрирования по струнным координатам, которая, согласно (4.24), определяется выражением

$$[dX_\mu] = \prod_\sigma dX_\mu(\sigma) G^{-1/4}(\sigma). \quad (4.25)$$

При замене координат на мировой поверхности,  $\sigma \rightarrow \sigma'$ , мера умножается на константу:

$$[dX_\mu] \rightarrow \text{const} \times [dX_\mu], \quad (4.26)$$

которая не зависит от полей, и тем самым сокращается во всех корреляционных функциях. Следует отметить локальность как эффективного действия, так и индуцированной меры, что также не следует из общих соображений.

### 4.3. Замечание о классических решениях

Так же, как и в модели IKKT, естественно предположить, что непертурбативные состояния суперструн описываются решениями классических уравнений движения в матричной модели. Уравнения движения для модели NBI имеют вид

$$Y^2 = \frac{\alpha}{4\beta} [A_\mu, A_\nu]^2, \quad (4.27)$$

$$[A^\mu, [Y^{-1}, [A_\mu, A_\nu]]_+] = 0, \quad (4.28)$$

$$[A_\mu, (\gamma^\mu \psi)_x] = 0. \quad (4.29)$$

Классические конфигурации (3.31), которые в модели IKKT отождествлялись с р-бранами, будут решениями и для NBI модели. Дело в том, что эти решения удовлетворяют условию BPS (3.29), поэтому для них матрица  $Y$ , определенная своим классическим уравнением (4.27), пропорциональна единичной. Так что в уравнении (4.28) ее можно просто вынести за скобки, после чего оно примет тот же вид, что и в IKKT модели.

Оказывается, в пределе  $N \rightarrow \infty$  верно более общее утверждение: любое решение классических уравнений для модели IKKT одновременно удовлетворяет классическим уравнениям для модели NBI. В его справедливости можно убедиться, переписывая уравнение (4.28) в виде

$$\left[ Y^{-1}, [A^\mu, [A_\mu, A_\nu]] \right]_+ + \left[ [A^\mu, Y^{-1}], [A_\mu, A_\nu] \right]_+ = 0. \quad (4.28)$$

Первый член в левой части исчезает для любого решения модели IKKT. Когда коммутаторы можно заменить на скобки Пуассона, равен нулю и второй член. Это следует из факта, установленного в [77]: следствием классических уравнений для струны Шильда, в которые при бесконечном  $N$  переходят уравнения движения модели IKKT, является стационарность  $Y$ :  $\partial_a Y^2 = 0$ . Поэтому скобка Пуассона  $\{A_\mu, Y^{-1}\}$  тождественно обращается в нуль.

Структура классических уравнений для модели NBI в некотором смысле богаче. Например, в ней есть решения с нетривиальным распределением собственных значений матрицы  $Y$  [78], что вообще характерно для матричных моделей в пределе  $N \rightarrow \infty$ .

## 5. Заключение

Рассмотрены три матричные модели, претендующие на непертурбативное описание суперструн. Следует отметить, что, несмотря на внешнее различие, все три модели тесно связаны между собой, и вполне может оказаться, что они полностью эквивалентны друг другу. В частности, если применить редукцию Эгучи–Кавай к матричной теории, то в результате редукции получится модель IKKT (без суммирования по  $N$ ). С другой стороны, матричная теория получается из модели IKKT выбором специальных вакуумных конфигураций в пределе бесконечного размера матриц [2]. Матричная модель NBI содержит дополнительные степени свободы по сравнению с моделью IKKT, но в [72] приведены аргументы в пользу того, что обе модели лежат в одном классе универсальности при  $N \rightarrow \infty$ .

Матричная модель BFSS является, быть может, самой перспективной из рассмотренных здесь ввиду ее прямой связи с M-теорией. Эта модель претендует на правильное описание динамических степеней свободы M-теории на малых расстояниях, которые являются непертурбативными возбуждениями с точки зрения десятимерных суперструн. Проведенные до сих пор проверки подтверждают гипотезу о том, что матричная теория BFSS действительно описывает M-теорию. В частности, взаимодействия классических решений согласуются с одиннадцатимерной супергравитацией, а также связь с теорией супермембран получается естественным образом. Кроме того, компактификация матричной теории на окружность является механизмом возникновения

пертурбативных струн в калибровке светового конуса из матричной модели BFSS.

Мы привели лишь формулировку матричной теории, и изложение в разделе 2 носит в основном иллюстративный характер. В то же время, матричная теория сформулирована лишь в калибровке светового конуса, и ковариантный подход до сих пор не построен.

Пока еще рано делать определенные выводы об адекватности подхода к теории суперструн, основанного на матричных моделях. Решающей проверкой этого подхода было бы сравнение с обычной струнной теорией возмущений. С этой точки зрения достаточно перспективной выглядит модель NBI, поскольку она позволяет воспроизвести суперсимметричную версию действия Намбу–Гото. Являясь непертурбативной формулой суперструн, суперсимметричные матричные модели должны, в принципе, ответить на обсуждавшийся во введении вопрос: живет ли суперструна в струнной фазе? В любом случае матричные модели суперструн требуют дальнейшего изучения, которое может привести к новому взгляду на теорию струн в целом.

**Благодарности.** В заключение авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность П. Ольсену, Д. Смиту, А. Файязуддину и Ю. Шепелеву за плодотворное сотрудничество. К.З. признателен И.Я. Арефьевой, А.С. Горскому, А.Д. Миронову, А.Ю. Михайлову и А.Ю. Морозову за интересные обсуждения и Л.О. Чехову за сотрудничество. Настоящая работа была выполнена при частичной поддержке грантов CRDF 96-RP1-253, INTAS 94-0840 и РФФИ 97-02-17927. Работа К.З. также частично поддержана грантом 96-15-96455 поддержки научных школ.

## 6. Словарь терминов

**Действие Грина–Шварца** — явно ковариантное и суперсимметричное действие для суперструны:

$$S_{GS} = \int d^2\sigma \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{ab} \eta_{\mu\nu} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu - i\varepsilon^{ab} \partial_a X^\mu (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_b \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_b \theta^2) + \varepsilon^{ab} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_a \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_b \theta^2 \right], \quad (6.1)$$

где  $h^{ab}$  — внутренняя метрика на мировой поверхности струны;  $\theta^1$  и  $\theta^2$  — десятимерные спиноры Майорана–Вейля, для суперструн типа IIB одинаковой киральности, а

$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_a \theta^1 - i\bar{\theta}^2 \Gamma^\mu \partial_a \theta^2. \quad (6.2)$$

Действие (6.1) репараметризационно инвариантно и обладает десятимерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией. Оно также инвариантно относительно локальной фермионной  $k$ -симметрии, что позволяет исключить половину фермионных степеней свободы. Большое количество симметрий действия Грина–Шварца приводит к сложной системе связей и затрудняет его ковариантное квантование.

**Действие Намбу–Гото** — стандартный функционал действия в теории бозонной струны. Действие Намбу–Гото

отвечает наглядному представлению о струне, как о нити с энергией пропорциональной ее длине. Следовательно, действие с точностью до коэффициента равно площади, замкнутой мировой поверхностью струны. Если обозначить через  $X^\mu(\sigma_1, \sigma_2)$  координаты траектории струны, то площадь выражается через индуцированную на мировой поверхности метрику стандартной формулой из дифференциальной геометрии:

$$S_{NG} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{|\det_{ab} G_{ab}|}, \quad (6.3)$$

где

$$G_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (6.4)$$

Действие Намбу–Гото, по своему определению, не зависит от выбора системы координат на мировой поверхности, т.е. оно инвариантно относительно произвольных репараметризаций  $\sigma \rightarrow f(\sigma)$ .

**Калуцы–Клейна моды** — бесконечный набор полей, возникающих из одного поля при компактификации высших измерений. Моды Калуцы–Клейна обладают массами порядка обратного радиуса компактификации.

**Компактификация** — уменьшение размерности пространства–времени путем "накручивания" части измерений на компактное многообразие малого радиуса. В теориях типа Калуцы–Клейна в качестве многомерного пространственно–временного многообразия рассматривается произведение  $\mathbf{R}^d \times K^{D-d}$ . Каждому полю  $\Psi(x, y)$  на  $\mathbf{R}^d \times K^{D-d}$  соответствует бесконечный набор полей в компактифицированной теории:

$$\Psi(x, y) = \sum_n \psi_n(x) \phi_n(y), \quad (6.5)$$

где  $x$  — координаты на  $\mathbf{R}^d$ , а  $y$  — на компактном многообразии  $K^{D-d}$ . Базис  $\phi_n(y)$  образует полный набор собственных функций волнового оператора для поля  $\Psi$  на многообразии  $K^{D-d}$ ; соответствующие собственные значения  $\lambda_n$  определяют массы полей  $\psi_n(x)$ :  $m_n^2 = m^2 + \lambda_n$ , где  $m$  — масса поля  $\Psi$  в некомпактной теории.

Рассмотрим в качестве простого примера компактификацию безмассового скалярного поля на окружность радиуса  $R$ . В этом случае  $\phi_n(y) = \exp(iny/R)$ ,  $\lambda_n = n^2/R^2$  и массы мод Калуцы–Клейна равны  $m_n = |n|/R$ .

Ориентированное на теорию струн введение в компактификацию высших измерений имеется в [4].

**M-теория** — квантовая теория одиннадцатимерной супергравитации. Как теория поля, супергравитация в одиннадцати измерениях сильно неперенормируема, так что последовательная теория, переходящая в супергравитацию на больших расстояниях, на планковских масштабах должна содержать дополнительные степени свободы, которые сокращают расходимости, аналогично тому, как это имеет место в теории суперструн.

Возможен и другой взгляд на M-теорию как на универсальную теорию, объединяющую все известные теории суперструн, которые содержатся в ней в качестве различных предельных случаев. Наиболее простым образом связаны с M-теорией суперструны типа IIA, они

получаются компактификацией одного из десяти пространственных измерений на окружность [8–10]. Радиус компактификации  $R$  выражается через планковскую длину  $l_p$  и струнную константу связи  $g_s$  соотношением  $R = g_s^{2/3} l_p$ , а струнная длина  $l_s \equiv \sqrt{2\alpha'}$  связана с одиннадцатимерным масштабом формулой  $l_s = g_s^{-1/3} l_p$ . Поэтому на М-теорию можно смотреть, как на предел сильной связи суперструн типа ПА, поскольку при  $g_s \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности радиус компактификации, и теория фактически становится одиннадцатимерной.

Безмассовые степени свободы в М-теории образуют одиннадцатимерный гравитационный супермультиплет. Он содержит метрику  $g_{\mu\nu}$ , гравитино  $\psi_\mu^\alpha$  и антисимметричное тензорное поле  $A_{\mu\nu\lambda}$ . Наличие калибровочного поля показывает, что в М-теории есть мембранны — они несут электрический заряд по полю  $A_{\mu\nu\lambda}$  — и дуальные к ним магнитно заряженные пятибраны. Имеются два тесно связанных между собой подхода к последовательному динамическому построению М-теории. Одна из гипотез состоит в том, что М-теория — это квантовая теория одиннадцатимерных супермембран [12, 13, 9]; альтернативный подход основывается на матричной модели BFSS [1].

**Матричная теория** — квантовая механика эрмитовых  $N \times N$  матриц с действием

$$S = \int dt \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{2R} (\dot{X}^i)^2 + \frac{R}{4} [X^i, X^j]^2 + \theta \dot{\theta} + iR\theta \gamma_i [X^i, \theta] \right\}, \quad (6.6)$$

которая, как ожидается, дает полное динамическое описание М-теории в пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow \infty$  [1]. Переменные  $X^i$  играют роль девяти поперечных координат в калибровке светового конуса; фермионные матрицы  $\theta$  являются их суперпартнерами. Время  $t$  отождествляется с одной из координат светового конуса; вторая координата считается компактифицированной на окружность радиуса  $R$ , так что  $p_- = N/R$  имеет смысл продольного импульса.

**Матричные модели** — в широком смысле — статистические системы случайных матриц. Матричные модели предложены в 1951 г. Е. Вигнером для описания возбужденных уровней ядер и широко применяются в статистической физике. В теории элементарных частиц термин "матричные модели" часто употребляется в связи с приложениями случайных матриц к флуктуациям геометрии. Наибольшего успеха такой подход достиг в двумерной квантовой гравитации (см. [28–30], а также раздел 1 настоящего обзора), где усреднение по метрикам и суммирование по топологиям можно заменить интегрированием по матрицам в пределе, когда их размер становится бесконечным. Иногда под матричными моделями понимаются именно системы случайных матриц в применении к двумерной гравитации.

**Мембранны** — протяженные объекты размерности 2, так что мировой объем мембранны трехмерен. Существует гипотеза, согласно которой супермембранны можно рассматривать как фундаментальные степени свободы в квантовой теории одиннадцатимерной супергравитации [12, 13, 9], по аналогии с десятимерным случаем, где в

качестве фундаментальных объектов выступают струны. Один из основных аргументов базируется на следующем факте:  $k$ -симметрия классического действия одиннадцатимерной супермембраны в искривленном пространстве накладывает ограничения на фоновые поля. Эти ограничения имеют вид дифференциальных уравнений, которые в точности совпадают с классическими уравнениями движения для супергравитации [12, 13]. Квантовая теория супермембран наталкивается на определенные, быть может чисто технические, трудности, связанные с нелинейностью теории поля на мировом объеме. В ней, в частности, есть обычные ультрафиолетовые расходимости. Кроме того, супермембранны обладают непрерывным спектром, что также считалось проблемой до того, как была предложена матричная теория.

**Натяжение р-браны** — масса на единицу пространственного объема.

**Планковский масштаб** — масштаб длины, времени, энергии или массы, определяемый гравитационной постоянной (в комбинации с другими мировыми константами). На планковских масштабах гравитационное взаимодействие перестает быть слабым.

**Редукция Эгучи–Каваи** — прием, позволяющий свести любую матричную теорию поля к нульмерной матричной модели в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Общий рецепт выглядит следующим образом — поля в действии теории нужно преобразовать по правилу

$$\Phi(x) \rightarrow \exp(-iPx)\Phi \exp(iPx), \quad (6.7)$$

где  $\Phi$  уже от  $x$  не зависит. Матрицы  $P_\mu$  диагональны,  $P_\mu = \operatorname{diag}(p_\mu^1, \dots, p_\mu^N)$ , и считаются фиксированными при вычислении корреляционных функций. Затем по фазам  $p_\mu^i$  следует усреднить с равномерным распределением; в результате усреднения они превращаются в промежуточные импульсы в фейнмановских диаграммах. Можно показать, что такая процедура восстанавливает обычную теорию возмущений при  $N = \infty$ , т.е. сумму планарных диаграмм. Кроме того, обоснованием редукции Эгучи–Каваи могут служить уравнения Дайсона–Шингера, одинаковые при  $N \rightarrow \infty$  в исходной и редуцированной теориях.

Ситуация несколько изменяется в теориях с калибровочной симметрией. Тогда зависимость от импульсов в (6.7) можно поглотить калибровочным преобразованием. Поэтому редукция сводится просто к рассмотрению полей, не зависящих от координат, а роль импульсов  $p_\mu^i$  выполняют диагональные компоненты самих калибровочных полей. Однако равномерность распределения  $p_\mu^i$  обычно нарушается квантовыми поправками, и приходится принимать специальные меры для ее восстановления, например, замораживать диагональные компоненты  $p_\mu^i$  при усреднении по калибровочным полям. Сказанное выше не относится к суперсимметричным калибровочным теориям, в которых нарушению  $R^D$  инвариантности  $p_\mu^i \rightarrow p_\mu^i + c_\mu$  препятствует суперсимметрия, и замораживать импульсы  $p_\mu^i$  нет необходимости [63].

**Суперструны.** Суперсимметричную теорию струн можно последовательно сформулировать в десятимерном про-

странстве – времени, когда сокращается конформная аномалия на мировой поверхности. Имеется несколько непротиворечивых десятимерных теорий суперструн. Во-первых, есть два типа замкнутых струн с  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией ПА и ПВ, отличающиеся киральностью: ПВ – теория киральна, а ПА – нет. Их низкоэнергетическим пределом являются киральная и некиральная  $\mathcal{N} = 2$  супергравитации, соответственно. Теория типа I может содержать и замкнутые, и открытые струны. Безмассовые состояния открытой струны описываются суперсимметричной теорией Янга–Миллса. Унитарность и отсутствие аномалий однозначно фиксируют калибровочную группу в теории суперструн типа I — ею может быть только  $SO(32)$ . Кроме суперструн типа I, ПА и ПВ есть еще гетеротические струны, представляющие собой гибрид суперсимметричных и двадцатишестимерных бозонных струн. Они обладают внутренней калибровочной симметрией с группой  $SO(32)$  или  $E_8 \times E_8$ .

**Типы суперструн.** Есть пять самосогласованных десятимерных теорий суперструн [4]: типа I, ПА, ПВ и гетеротические с калибровочными группами  $SO(32)$  или  $E_8 \times E_8$ . Теории типа II отличаются тем, что обладают расширенной ( $\mathcal{N} = 2$ ) суперсимметрией, причем в теории типа ПА суперзаряды имеют противоположную киральность, а в ПВ — одинаковую. Теории типа II содержат только замкнутые струны. В теории типа I есть еще и сектор открытых струн. У гетеротической струны левые и правые моды струнных координат описываются совершенно различным образом.

**Центральные заряды** в алгебре суперсимметрии — генераторы, которые появляются в антикоммутационных соотношениях суперзарядов, но коммутируют со всеми элементами алгебры. В каждом неприводимом представлении центральные заряды принимают определенные численные значения. В теории поля центральные заряды часто имеют вид топологических величин типа интегралов от полных производных. В этом случае ненулевыми центральными зарядами обладают солитонные состояния. Центральные заряды могут иметь тензорную структуру, тогда они связаны с протяженными объектами.

Другой характерный пример появления центральных зарядов в алгебре суперсимметрии связан с компактификацией дополнительных измерений. Возникновение центральных зарядов в этом случае можно схематически проиллюстрировать следующим примером. Пусть  $(D+1)$ -мерная теория компактифицирована на окружность радиуса  $R$ . Тогда компонента импульса вдоль компактного измерения квантуется в единицах  $R^{-1}$  и превращается в сохраняющийся заряд в  $D$ -мерной теории. Поскольку суперзаряды антикоммутируют на оператор импульса, для мод Калуцы–Клейна алгебра суперсимметрии оказывается центрально расширенной:

$$\{\bar{Q}_\alpha, Q_\beta\} = P_M \Gamma_{\alpha\beta}^M = P_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \frac{N}{R} \Gamma_{\alpha\beta}^D. \quad (6.8)$$

Дальнейший анализ зависит от четности числа измерений  $D$ . Важный момент заключается в том, что центральный заряд — коэффициент при последнем члене в правой части — по модулю равен массе частицы Калуцы–Клейна, возникающей из безмассового состояния в некомпактифицированной теории.

**Электромагнитная дуальность** — преобразование симметрии, меняющее местами электрические и магнитные поля и, соответственно, заряды. Имеет смысл пояснить, что понимается под словами электрический и магнитный заряды. При движении во внешнем электромагнитном поле волновая функция заряженной частицы приобретает дополнительную фазу  $\exp(i e S)$ , или, другими словами, в действии на мировой линии частицы появляется член

$$S = \int d\sigma^\mu A_\mu. \quad (6.9)$$

Коэффициент перед этим членом можно рассматривать как определение электрического заряда частицы. С другой стороны, магнитный заряд связан с потоком магнитного поля через сферу, окружающую точку, где этот заряд находится:

$$\Phi = \oint d\sigma^{ij} F_{ij}. \quad (6.10)$$

В четырехмерном случае и электрический, и магнитный заряды относительно векторного поля являются точечными объектами. Но можно рассмотреть более общую ситуацию, когда калибровочные потенциалы образуют антисимметричный тензор ранга  $r$  в пространстве–времени размерности  $D$ . Тогда электрический заряд несет  $p$ -бранны с  $p = r - 1$ , так как именно их мировая поверхность обладает нужной размерностью для того, чтобы по ней можно было проинтегрировать калибровочный потенциал:

$$S = \int d\sigma^{\mu_1 \dots \mu_r} A_{\mu_1 \dots \mu_r}. \quad (6.11)$$

В то же время, напряженность калибровочного поля

$$H_{\mu_0 \dots \mu_r} = \partial_{[\mu_0} A_{\mu_1 \dots \mu_r]} \quad (6.12)$$

образует антисимметричный тензор ранга  $r + 1$ , и магнитный поток определяется  $(r + 1)$ -кратным интегралом

$$\Phi = \oint d\sigma^{i_1 \dots i_{r+1}} H_{i_1 \dots i_{r+1}}. \quad (6.13)$$

Поверхность же, окружающая прямолинейную бесконечную  $p$ -бранию в  $(D-1)$ -мерном пространстве, — это цилиндр  $\mathbf{R}^p \times S^{D-p-2}$ . Так что магнитный заряд  $p$ -бранны определяется интегралом (6.13) по  $(D-p-2)$ -мерной сфере. Отсюда находим, что магнитные браны имеют размерность  $p = D - r - 3$ . Следовательно, в  $D$ -мерной теории дуальны друг другу браны размерности  $p$  и  $D - p - 4$ . Отметим важные частные случаи частиц (0-брани) в четырех измерениях и 2- и 5-брани в одиннадцатимерной теории.

**BPS (Bogomolny – Prasad – Sommerfield)-состояние** в суперсимметричных теориях — состояние, сохраняющее часть суперсимметрий. На классическом уровне чаще всего реализуется топологически стабильными решениями уравнений движения. Супермультиплет, образуемый BPS-состояниями, имеет меньшую размерность, чем обычный массивный супермультиплет. BPS-состояния

насыщают ограничения, накладываемые алгеброй суперсимметрии на массы, т.е. ограничения типа неравенств превращаются для них в равенства. Поэтому массы BPS-состояний жестко связаны с центральными зарядами в алгебре суперсимметрии; в простейшем случае масса BPS-состояния просто равна заряду. Если суперсимметрия не нарушена спонтанно, то это утверждение остается точным при учете всех квантовых поправок, так что на него можно смотреть как на теорему о неперенормировке. Стабильные BPS-состояния не взаимодействуют, поскольку, например, BPS-состояние заряда 2 имеет ту же энергию, что и суперпозиция двух состояний заряда 1. Примеры BPS-состояний: монополи BPS в четырехмерных теориях с расширенной суперсимметрией, экстремальные черные дыры, доменные стеки в суперсимметрических теориях [79, 80], D-браны. Моды Калуцы – Клейна безмассовых полей также являются BPS-состояниями.

**D(irichlet)-бранны** — солитоноподобные протяженные объекты в теории струн. Их динамическое описание устроено следующим образом. Концы открытых струн могут свободно двигаться по мировому объему D-бранны. Тем самым на координаты струны, касательные к D-брани, накладываются граничные условия Неймана, а на ортогональные координаты — условия Дирихле. Открытая струна, связанная с D-брани, заметает в пространстве–времени некоторую поверхность. В дуальном описании на нее можно смотреть как на мировую поверхность замкнутой струны, испущенной D-браний. Следовательно, D-бранны взаимодействуют с гравитонами, поскольку гравитон соответствует безмассовому состоянию замкнутой струны. Значит, D-бранны обладают натяжением. Кроме того, D-бранны несут RR-заряды и являются BPS-состояниями. В теории IIA D-бранны имеют четную размерность:  $p = 0, 2, \dots$ , а в IIB теории — нечетную:  $p = -1, 1, 3, \dots$ . Под  $(-1)$ -бранными понимаются точечные объекты — D-инстантоны.

**D-инстантон** — D-брана размерности  $p = -1$ .

**D-струна** — D-брана размерности  $p = 1$ .

**D-частица** — D-брана размерности  $p = 0$ .

**GSO (Gliozzi – Scherk – Olive)-проекция** — суперстринговое обобщение киральной проекции, состоящее в отбрасывании состояний струны, так называемая G-четность которых отрицательна. Для безмассовых мод открытой струны G-четность просто совпадает с киральностью. В безмассовом секторе замкнутой струны знак GSO-проекции для левых и правых мод может как совпадать, так и не совпадать. В зависимости от этого теория будет либо киральной (IIB), либо некиральной (IIA). GSO-проекция позволяет избавиться от тахиона, а также обеспечивает пространственно-временную суперсимметрию NSR-струны.

**NSR (Neveu – Schwarz – Ramond)-струна** — формулировка теории суперструны с локальной суперсимметрией на мировой поверхности. Мы не будем здесь приводить действия NSR-струны (см., например, [4]), отметим только, что физическими степенями свободы в NSR-формализме являются струнные координаты  $X^\mu$  и их

фермионные суперпартнеры (относительно суперсимметрии на мировой поверхности)  $\psi_A^\mu$  — майорановские спиноры, которые, кроме того, несут векторный пространственно-временной индекс. Критическая размерность NSR-струны равна 10, в ней NSR-струна обладает пространственно-временной суперсимметрией после GSO-проекции и эквивалентна суперструне Грина – Шварца.

**NS (Neveu – Schwarz)-сектор** в пространстве состояний NSR-струны соответствует разложению фермионных полей на мировой поверхности по полуцелым гармоникам, что для замкнутой струны отвечает антипериодическим граничным условиям.

**R (Ramond)-сектор** в пространстве состояний NSR-струны получается, если фермионы на мировой поверхности разлагаются в ряд Фурье с целыми гармониками, т.е. для замкнутой струны R-сектор соответствует периодическим граничным условиям для фермионов.

**RR (Ramond – Ramond)-заряды**. В пространстве пертурбативных состояний замкнутой суперструны имеется четыре сектора: R – R, R – NS, NS – R и NS – NS, соответствующие различным граничным условиям — периодическим или антипериодическим — для левых и правых фермионных мод на мировой поверхности струны в NSR-формализме. Бозонные степени свободы возникают из NS – NS и R – R-секторов. В частности, R – R-сектор содержит безмассовые векторные и тензорные поля. В низкоэнергетический эффективный лагранжиан эти поля входят только через свои напряженности. Вообще, ни одно пертурбативное состояние струны не заряжено относительно полей из R – R-сектора. Тем не менее солитонные состояния могут нести как электрические, так и магнитные RR-заряды. В общем случае эти состояния соответствуют протяженным объектам в зависимости от размерности калибровочного поля, по которому они заряжены.

В теории IIA безмассовый R – R-сектор состоит из векторного поля и антисимметричного тензорного поля ранга 3. Так что электрические p-бранны имеют размерность  $p = 0$  и  $p = 2$ , а магнитные —  $p = 6$  и  $p = 4$ . Безмассовые состояния из R – R-сектора IIB-теории отвечают псевдоскаляру, тензору второго ранга и тензору ранга четыре с самодуальной напряженностью. Соответственно, в этой теории RR-заряды несут дуальные друг другу 1- и 5-бранны и самодуальные 3-бранны.

**κ-симметрия** — локальная фермионная симметрия ковариантного действия суперчастицы, суперструны, и вообще суперсимметрических p-бранны, позволяющая откалибровать лишнюю половину фермионных степеней свободы. Важную роль κ-симметрия играет при построении формулировки Грина – Шварца суперструн, обладающей явной пространственно-временной суперсимметрией.

## Список литературы

1. Banks T et al. *Phys. Rev. D* **55** 5112 (1997)
2. Ishibashi N et al. *Nucl. Phys. B* **498** 467 (1997)
3. Fayyazuddin A et al. *Nucl. Phys. B* **499** 159 (1997)
4. Грин М, Шварц Дж, Виттен Э *Теория суперструн* (М.: Мир, 1990)

5. Di Vecchia P, hep-th/9708105<sup>16</sup>
6. Schwarz J H *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **55** 1 (1997)
7. Vafa C, hep-th/9707201
8. Duff M J et al. *Phys. Lett. B* **191** 70 (1987)
9. Townsend P K *Phys. Lett. B* **350** 184 (1995)
10. Witten E *Nucl. Phys. B* **443** 85 (1995)
11. Nahm W *Nucl. Phys. B* **135** 149 (1978)
12. Bergshoeff E, Sezgin E, Townsend P K *Phys. Lett. B* **189** 75 (1987)
13. Bergshoeff E, Sezgin E, Townsend P K *Ann. Phys.* **185** 330 (1988)
14. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **103** 207 (1981)
15. Поляков А М *Калибровочные поля и струны* (М.: ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995)
16. Книжник В Г *УФН* **159** (3) 401 (1989)
17. D'Hoker E, Phong D *Rev. Mod. Phys.* **60** 917 (1988)
18. Морозов А Ю *Физ. ЭЧАЯ* **23** 174 (1992)
19. Kazakov V A *Phys. Lett. B* **150** 282 (1985)
20. David F *Nucl. Phys. B* **257** [FS14] 45 (1985)
21. Ambjørn J, Durhuus B, Frölich J *Nucl. Phys. B* **257** [FS14] 433 (1985)
22. Koplik J, Neveu A, Nussinov S *Nucl. Phys. B* **123** 109 (1977)
23. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **72** 461 (1974)
24. Gross D, Witten E *Phys. Rev. D* **21** 446 (1980)
25. Brézin E, Kazakov V A *Phys. Lett. B* **236** 144 (1990)
26. Douglas M, Shenker S *Nucl. Phys. B* **335** 635 (1990)
27. Gross D, Migdal A A *Phys. Rev. Lett.* **64** 127 (1990)
28. Di Francesco P, Ginsparg P, Zinn-Justin J *Phys. Rep.* **254** 1 (1995)
29. Морозов А Ю *УФН* **164** (1) 3 (1994)
30. Ambjørn J, Durhuus B, Johnsson T *Quantum Geometry* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
31. Kazakov V A, Migdal A A *Nucl. Phys. B* **311** 171 (1988)
32. Kazakov V A, Kostov I K, Migdal A A *Phys. Lett. B* **157** 295 (1985)
33. Makeenko Y *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **49** 226 (1996)
34. Miković A, Siegel W *Phys. Lett. B* **240** 363 (1990)
35. Alvarez-Gaumé L et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **7** 5337 (1992)
36. Морозов А Ю *УФН* **162** (8) 83 (1992)
37. Бесс Ю, Беггер Дж *Суперсимметрия и супергравитация* (М.: Мир, 1986)
38. Stelle K S, hep-th/9701088
39. Polchinski J *Phys. Rev. Lett.* **75** 4724 (1995)
40. Polchinski J, hep-th/9611050
41. Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 335 (1995)
42. Seiberg N, hep-th/9710009
43. Dijkgraaf R, Verlinde E, Verlinde H *Nucl. Phys. B* **500** 43 (1997)
44. Claudson M, Halpern M B *Nucl. Phys. B* **250** 689 (1985)
45. Poratti M, Rozenberg A, hep-th/9708119
46. de Wit B, Lüscher M, Nicolai H *Nucl. Phys. B* **320** 135 (1989)
47. Becker K, Becker M, hep-th/9705091
48. Becker K et al. *Phys. Rev. D* **56** 3174 (1997)
49. Weyl H *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (New York: Dover, 1931)
50. de Wit B, Hoppe J, Nicolai H *Nucl. Phys. B* **305** [FS23] 545 (1988)
51. Aharony O, Berkooz M *Nucl. Phys. B* **491** 184 (1997)
52. Lifschytz G, Mathur S D, hep-th/9612087
53. Lifschytz G, hep-th/9612223
54. Polchinski J, Pouliot P, hep-th/9704029
55. Chepelev I, Tseytlin A *Phys. Rev. D* **56** 3672 (1997)
56. Brink L, Di Vecchia P, Howe P *Phys. Lett. B* **65** 471 (1976)
57. Deser S, Zumino B *Phys. Lett. B* **65** 369 (1976)
58. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **103** 211 (1981)
59. Yoneya T *Prog. Theor. Phys.* **97** 949 (1997)
60. Rankin S J *Ann. Phys.* **218** 14 (1992)
61. Eguchi T, Kawai H *Phys. Rev. Lett.* **48** 1063 (1982)
62. Das S R *Rev. Mod. Phys.* **59** 235 (1987)
63. Мкртчян Р Л, Хохлачев С Б *Письма в ЖЭТФ* **37** 160 (1983)
64. Banks T, Seiberg N, Shenker S *Nucl. Phys. B* **490** 91 (1997)
65. Chepelev I, Makeenko Y, Zarembo K *Phys. Lett. B* **400** 43 (1997)
66. Banks T, Casper A *Nucl. Phys. B* **167** 215 (1980)
67. Corrigan E, Wainwright P R, Wilson S M J *Commun. Math. Phys.* **98** 259 (1985)
68. Fayyazuddin A, Smith D J *Mod. Phys. Lett. A* **12** 1447 (1997)
69. Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **501** 41 (1997)
70. Chepelev I, Tseytlin A, hep-th/9705120
71. Green M B, Gutperle M *Nucl. Phys. B* **476** 484 (1996)
72. Fukuma M et al., hep-th/9705128
73. Bachas C *Phys. Lett. B* **374** 37 (1996)
74. Chekhov L, Zarembo K, hep-th/9705014
75. Itzykson C, Zuber J B *J. Math. Phys.* **21** 411 (1980)
76. Olesen P, hep-th/9708070
77. Eguchi T *Phys. Rev. Lett.* **44** 126 (1980)
78. Kristjansen C F, Olesen P *Phys. Lett. B* **405** 45 (1997)
79. Dvali G, Shifman M, hep-th/9611213
80. Kovner A, Shifman M, Smilga M, hep-th/9706089

<sup>16</sup> Доступ к hep-ph через, например, <http://xxx.lanl.gov/archive/>.

## An introduction to matrix superstring models

**K.L. Zarembo, Yu.M. Makeenko**

*Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences  
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russia  
E-mail: zarembo@vxitep.itep.ru, makeenko@vxitep.itep.ru*

The recently developed matrix approach to the superstring concept and M-theory is introduced. The Banks–Fishler–Shenker–Susskind matrix theory, built as a supersymmetric matrix quantum mechanics, is considered. Two supersymmetric matrix models providing a nonperturbative formulation of the IIB superstring problem are discussed. Applications to nonperturbative string theory are reviewed.

PACS numbers: 02.10.Sp, 11.15.-q, 11.25.-w

Bibliography — 80 references

Received 23 September 1997