

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Осесимметричные стационарные течения
в компактных астрофизических объектах

В.С. Бескин

Обзор посвящен последовательному изложению аналитических результатов, полученных для широкого класса осесимметричных стационарных течений в окрестности компактных астрофизических объектов. Задача о нахождении двумерной структуры полоидального магнитного поля (структуры гидродинамического течения) сталкивается с большими трудностями. Это связано со сложной структурой уравнения равновесия, описывающего стационарные осесимметричные течения. Тем не менее существует подход, все же позволяющий решать прямые задачи и в рамках метода уравнения равновесия. Такая возможность возникает в том случае, если известно его точное решение и исследуются течения, которые слабо отличаются от известного. В результате в рамках простых модельных задач удалось описать основные черты трансзвуковых течений вблизи реальных компактных объектов.

PACS numbers: 95.30.Lz, 95.30.Qd

Содержание

1. Введение (689).
2. Метод уравнения Грэда – Шафранова (690).
 - 2.1. $3 + 1$ -разложение. 2.2. Движение в заданном полоидальном поле. 2.3. Особые поверхности. 2.4. Уравнение для полоидально-го поля.
3. Гидродинамический предел — классические задачи аккреции и эжекции (695).
 - 3.1. Гидродинамический предел уравнения равновесия. 3.2. Аккреция на черную дыру. 3.3. Эжекция из медленно вращающихся звезд.
4. Бессилое приближение — магнитосфера радиопульсаров (702).
 - 4.1. Бессилое приближение уравнения равновесия в плоском пространстве. 4.2. Энергетические потери пульсаров. 4.3. Точные решения.
5. Бессилое приближение — магнитосфера черной дыры (707).
 - 5.1. Бессилое приближение уравнения равновесия в метрике Керра. 5.2. Поведение решения вблизи горизонта. 5.3. Точные решения. 5.4. Структуры магнитосферы.
6. Общий МГД-случай — проблема формирования струйных выбросов (711).
 - 6.1. Приближение холодной плазмы. 6.2. Ускорение частиц. 6.3. Структура струйных выбросов.
7. Заключение (718).
- Список литературы (719).

1. Введение

Осесимметричные стационарные течения, рассматриваемые в рамках идеальной магнитной гидродинамики, уже давно обсуждаются в связи с многими астрофизическими источниками. К этому классу течений относятся как аккреция на обычные звезды и черные дыры [1–3], так и аксиально-симметричный звездный (солнечный) ветер [4–7], струйные выбросы из молодых звездных объектов [8] и эжекция частиц из магнитосферы вращающейся нейтронной звезды [9, 10]. МГД-модели активно развиваются и в связи с теорией строения магнитосфер сверхмассивных черных дыр, которые, как полагают, являются "центральной машиной" в активных галактических ядрах и квазарах [11–13].

Отметим сразу, что приближение идеальной магнитной гидродинамики не позволяет учесть многие процессы, которые могут играть решающую роль в конкретных астрофизических источниках. Сюда можно отнести взаимодействие вещества с собственным излучением при аккреции [14–17] и при формировании звездного (солнечного) ветра [6, 7], вязкие силы [2, 3] и эффекты переноса излучения при дисковой аккреции [18, 19], а также кинетические эффекты [20]. Вместе с тем, в некоторых случаях приближение идеальной гидродинамики является все же достаточно хорошим. Так, например, излучение, связанное с адиабатическим разогревом аккрецирующего вещества, оказывается малым по сравнению с эддингтоновской светимостью, что и позволяет считать энтропию вещества постоянной [3]. Поэтому везде ниже будет рассматриваться лишь приближение идеальной (магнитной) гидродинамики.

Привлекательность МГД-моделей связана прежде всего с их относительной простотой. Дело в том, что благодаря осесимметричности и стационарности (а

В.С. Бескин. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
117924 Москва, Ленинский просп. 53, Россия
Тел. (095) 132-61-71
E-mail: beskin@td.lpi.ac.ru

Статья поступила 28 апреля 1997 г.

также условию вращенности) в общем случае имеет место пять "интегралов движения", сохраняющихся на осесимметричных магнитных поверхностях. Это прежде всего поток энергии (интеграл Бернулли) и z -компонента углового момента, а также электрический потенциал, энтропия и отношение потока частиц к потоку магнитного поля. Этот замечательный факт позволяет отделить задачу о структуре полоидального поля (структуре полоидального течения в гидродинамике) от задачи об ускорении частиц и структуре электрических токов. При этом решение последней задачи в заданном полоидальном поле выражается достаточно простыми алгебраическими соотношениями. Важно, что подобный подход достаточно легко обобщается и на течения вблизи вращающейся черной дыры, поскольку метрика Керра также является осесимметричной и стационарной. В результате стало возможным количественное исследование чрезвычайно широкого класса течений — от намагниченного звездного (солнечного) ветра [21–24], струйных выбросов из молодых звезд [25, 26], квазаров и активных галактических ядер [25, 27], до процессов, происходящих в магнитосфере радиопульсаров [28–31] и сверхмассивных черных дыр [32–35]. В частности, была показана принципиальная возможность извлечения энергии из вращающейся черной дыры [36, 37]. Иными словами, в этом направлении был достигнут несомненный прогресс.

С другой стороны, задача о нахождении структуры полоидального магнитного поля (структуры гидродинамического течения) сталкивается с гораздо большими трудностями. Прежде всего это связано со сложной структурой уравнения, описывающего стационарные осесимметричные течения. В общем случае оно оказывается нелинейным уравнением смешанного типа, меняющимся от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях и к тому же содержащим интегралы движения в виде свободных функций. Вообще говоря, аналогичные уравнения, восходящие к классическому уравнению Трикоми, обсуждались с начала этого века в связи с проблемой трансзвуковых гидродинамических течений [38, 39]. В частности, для плоских течений чрезвычайно плодотворным оказывается метод преобразования годографа (приводящий к линейному уравнению Чаплыгина), который позволил существенно продвинуться в понимании рассматриваемых процессов [39, 40]. В астрофизической же литературе за осесимметричными стационарными уравнениями равновесия закрепилось имя Грэда и Шафранова, сформулировавших в конце пятидесятых годов уравнение подобного вида в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [41, 42]. Это уравнение, однако, относилось лишь к равновесным статическим конфигурациям и требовало, вообще говоря, существенного изменения при обобщении на случай трансзвуковых течений (см., например, [38, 43]).

В применении к астрофизике уравнения типа Грэда – Шафранова (в бессиловом приближении и в отсутствие гравитации) впервые широко обсуждались в 70-х годах в связи с вопросом о строении магнитосфер радиопульсаров [44–48]. В 1979 г. они были обобщены Ардаваном на случай МГД-течений [49] и затем исследовались в работах [23–26, 50–54]. Наконец, в работе [55] рассматривался случай метрики Шварцшильда, а недавно в [56, 57] уравнение равновесия было записано и в наиболее

общей метрике Керра. Тем не менее, несмотря на большое количество работ, посвященных этому направлению, существенного прогресса здесь достигнуть не удалось.

Сложность, на наш взгляд, состоит в том, что сама постановка прямой задачи в рамках метода уравнения Грэда – Шафранова оказывается нетривиальной. Так, например, в гидродинамическом пределе, когда имеется лишь три интеграла движения, задача требует четырех граничных условий для трансзвукового режима течения. Это значит, что на некоторой поверхности должны быть заданы, например, две термодинамические функции, а также две компоненты скорости. Однако для определения интеграла Бернулли, без знания которого уравнение равновесия, естественно, не может быть решено, необходимо задать все три компоненты скорости, что невозможно, поскольку третья компонента скорости сама должна быть найдена из решения. В такой непоследовательности и заключена, собственно, одна из основных сложностей метода уравнения Грэда – Шафранова. Поэтому в большинстве случаев исследования проводились либо с помощью различных автомоделных подстановок [25, 27, 50, 58, 59], или же численно [60–66].

Тем не менее существует подход, все же позволяющий решать прямые задачи и в рамках метода уравнения Грэда – Шафранова. Такая возможность возникает в том случае, если известно его точное решение и исследуются течения, которые слабо отличаются от известного. Таким точным решением, как мы увидим, служит сферически-симметричная аккреция (эжекция) вещества. В результате, зная структуру течения в нулевом приближении, можно определить с нужной точностью как положение особых поверхностей, так и все интегралы движения непосредственно из граничных условий, что и позволяет решать уравнение равновесия в прямой постановке.

Отметим сразу, что подобный метод не нов и уже давно применялся в гидродинамических расчетах [39]. Тем не менее в применении к астрофизике до сих пор были построены лишь два подобных решения, а именно, бессловая модель магнитосферы медленно вращающейся черной дыры [36] и модель релятивистского замагниченного ветра из медленно вращающейся звезды с монополярным магнитным полем [67]. Вместе с тем, как будет показано, изложенный выше подход действительно позволяет существенно расширить класс точных решений. Обсуждению таких точных решений и посвящен предлагаемый обзор.

2. Метод уравнения Грэда – Шафранова

2.1. $3 + 1$ -разложение

Итак, рассмотрим осесимметричное стационарное течение плазмы в окрестности вращающейся черной дыры, т.е. в наиболее общей осесимметричной стационарной метрике. Как известно, такая метрика (метрика Керра) в координатах Бойера – Линдквиста r, θ имеет вид [13, 68]

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g_{ik}(dx^i + \beta^i dt)(dx^k + \beta^k dt), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma} \sqrt{A}, \quad \beta^r = \beta^\theta = 0, \quad \beta^\varphi = -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2},$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2, \quad g_{\varphi\varphi} = \varpi^2. \quad (2)$$

Здесь α — гравитационное красное смещение, равное нулю на горизонте $r_H = \mathcal{M} + (\mathcal{M}^2 - a^2)^{1/2}$, ω — угловая скорость локально невращающихся наблюдателей (так называемая угловая скорость Лензе – Тирринга),

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2\mathcal{M}r, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad \varpi = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta. \quad (3)$$

Как обычно, \mathcal{M} и a — соответственно масса и угловой момент черной дыры, отнесенный к единице массы, т.е. $a = J/\mathcal{M}$. Везде греческие индексы соответствуют четырехмерным величинам, а латинские — трехмерным. При этом индексы без шляпки обозначают компоненты векторов относительно координатного базиса $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$, $\partial/\partial \varphi$ в "абсолютном" 3-пространстве, а со шляпкой — их физические компоненты. Символ ∇_k всегда обозначает ковариантное дифференцирование в "абсолютном" 3-пространстве с метрикой g_{ik} (2). Наконец, за исключением специально оговоренных случаев, всюду используется система единиц $c = G = 1$.

В дальнейшем мы везде будем использовать технику $3 + 1$ -разложения [13]. В этом подходе физические величины выражаются через трехмерные векторы, которые в локальном эксперименте измерили бы наблюдатели, движущиеся вокруг вращающейся черной дыры с угловой скоростью ω . Удобство $3 + 1$ -разложения состоит в том, что в этой технике многие выражения имеют тот же вид, что и в плоском пространстве. Так, в уравнениях Максвелла (в которых мы сразу положим производные по времени $\partial/\partial t$ равными нулю)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{E}) = \mathcal{L}_\beta \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = -\mathcal{L}_\beta \mathbf{E} + 4\pi\alpha \mathbf{j} \quad (7)$$

первые два уравнения остаются без изменений. Во второй же паре добавляется лишь производная Ли, действующая по правилу $\mathcal{L}_\beta \mathbf{A} \equiv (\beta \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \beta$, появление которой связано с вращением опорных наблюдателей. Наконец, плотность энергии ε , поток энергии \mathbf{S} и тензор натяжений T_{ik} для электромагнитного поля и частиц определяются точно так же, как и в плоском пространстве [13]. С другой стороны, временная и пространственные компоненты закона сохранения энергии-импульса $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ записываются в более сложном виде:

$$-\frac{1}{\alpha}(\beta \nabla) \varepsilon = -\frac{1}{\alpha^2} \nabla \cdot (\alpha^2 \mathbf{S}) + H_{ik} T^{ik}, \quad (8)$$

$$\nabla_k T_i^k + \frac{1}{\alpha} S_\varphi \frac{\partial \omega}{\partial x^i} + (\varepsilon \delta_i^k + T_i^k) \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = 0. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{g} = -(1/\alpha) \nabla \alpha$ — гравитационное ускорение, $H_{ik} = (1/\alpha) \nabla_i \beta_k$ — так называемое гравимагнитное тензорное поле, а величины α и β_k определяются соотношениями (2). Наконец, уравнение непрерывности в стационарном случае запишется как

$$\nabla \cdot (\alpha n \mathbf{u}) = 0, \quad (10)$$

где n — концентрация частиц в их собственной системе покоя, а $\mathbf{u} = \mathbf{v}(1 - v^2)^{-1/2}$ — пространственная компонента 4-скорости вещества.

2.2. Движение в заданном полоидальном поле

Покажем теперь, как для осесимметричных стационарных течений возникают в общем случае пять "интегралов движения", постоянных на магнитных поверхностях. Для этого удобно ввести в рассмотрение скалярную функцию $\Psi(r, \theta)$, имеющую смысл магнитного потока. В результате получаем для магнитного поля

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla \Psi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{\alpha\varpi} \mathbf{e}_\varphi \quad (11)$$

($I(r, \theta)$ — полный электрический ток внутри области $\Psi < \Psi(r, \theta)$), благодаря чему уравнение Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ выполняется автоматически. Легко видеть, что $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0$, так что условие $\Psi(r, \theta) = \text{const}$ действительно задает магнитные поверхности. При этом коэффициент пропорциональности в (11) выбран таким образом, чтобы величина Ψ совпадала с магнитным потоком внутри трубки $\Psi = \text{const}$, т.е. $d\Psi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.

Будем считать, как обычно, что в магнитосфере содержится достаточное количество плазмы, необходимое для выполнения условия вмороженности, которое в $3 + 1$ -разложении запишется, как и в плоском пространстве, в виде

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (12)$$

С другой стороны, вследствие стационарности (а также из условия нулевого продольного электрического поля $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, следующего из (12)), поле \mathbf{E} может быть записано как

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_F - \omega}{2\pi\alpha} \nabla \Psi. \quad (13)$$

Подставляя теперь соотношение (13) в уравнение Максвелла (6), легко убедиться, что $\mathbf{B} \cdot \nabla \Omega_F = 0$, т.е. величина Ω_F должна быть постоянной на магнитных поверхностях (закон изоротации Ферраро [69]): $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$.

Далее, благодаря уравнению Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, уравнению непрерывности (10) и условию вмороженности (12), мы можем записать 4-скорость вещества \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{u} = \frac{\eta}{\alpha n} \mathbf{B} + \gamma(\Omega_F - \omega) \frac{\varpi}{\alpha} \mathbf{e}_\varphi, \quad (14)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор вещества, а величина η имеет смысл отношения потока частиц к магнитному потоку. При этом в силу соотношения $\nabla \cdot (\eta \mathbf{B}_p) = 0$, следующего из (5), (10), она также должна быть постоянной на магнитных поверхностях $\Psi = \text{const}$, т.е. $\eta = \eta(\Psi)$.

Следующие два интеграла движения связаны с осесимметричностью и стационарностью рассматриваемых течений, что приводит к сохранению потока энергии E и z -компоненты углового момента L_z :

$$E = E(\Psi) = \frac{\Omega_F I}{2\pi} + \mu \eta (\alpha \gamma + \omega u_\varphi), \quad (15)$$

$$L = L(\Psi) = \frac{I}{2\pi} + \mu \eta u_\varphi, \quad (16)$$

где $\mu = (\rho_m + P)/n$ (ρ_m — плотность внутренней энергии, P — давление) — релятивистская энтальпия. При этом

полные потери энергии W_{tot} и углового момента K_{tot} определяются простыми соотношениями

$$W_{\text{tot}} = \int_0^{\Psi_{\text{max}}} E(\Psi) d\Psi, \quad (17)$$

$$K_{\text{tot}} = \int_0^{\Psi_{\text{max}}} L(\Psi) d\Psi. \quad (18)$$

Наконец, в осесимметричном случае условие изэнтропийности дает $s = s(\Psi)$, так что энтропия на одну частицу $s(\Psi)$ является фактически пятым интегралом движения.

Покажем теперь, как, зная пять интегралов движения $\Omega_F(\Psi)$, $\eta(\Psi)$, $s(\Psi)$, $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$, а также полоидальное магнитное поле B_p , можно восстановить тороидальное магнитное поле B_ϕ и все остальные параметры плазмы. Для этого воспользуемся законами сохранения (15), (16), которые вместе с ϕ -компонентой уравнения (14) дают

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{\alpha^2 L - (\Omega_F - \omega)\varpi^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2}, \quad (19)$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha\mu\eta} \frac{\alpha^2(E - \Omega_F L) - M^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2}, \quad (20)$$

$$u_\phi = \frac{1}{\varpi\mu\eta} \frac{(E - \Omega_F L)(\Omega_F - \omega)\varpi^2 - LM^2}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2}, \quad (21)$$

где

$$M^2 = \frac{4\pi\eta^2\mu}{n}. \quad (22)$$

Легко видеть, что величина M^2 с точностью до коэффициента α^2 представляет собой квадрат числа Маха полоидальной скорости u_p по отношению к альфвеновской скорости $u_A = B_p(4\pi n\mu)^{-1/2}$, т.е. $M^2 = \alpha^2 u_p^2 / u_A^2$. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться именно величиной M^2 , поскольку она остается конечной на горизонте черной дыры.

Поскольку $\mu = \mu(n, s)$, определение (22) позволяет выразить концентрацию n (а значит, и удельную энтальпию μ) как функцию η , s и M^2 . Это означает, что наряду с пятью интегралами движения выражения для I , γ и u_ϕ зависят лишь от одной дополнительной величины — числа Маха M . Для определения же числа Маха M следует воспользоваться очевидным соотношением $\gamma^2 - u^2 = 1$, которое благодаря выражениям (20) и (21) может быть переписано в виде

$$\frac{K}{\varpi^2 A^2} = \frac{1}{64\pi^4} \frac{M^4 (\nabla\Psi)^2}{\varpi^2} + \alpha^2 \eta^2 \mu^2, \quad (23)$$

где

$$A = \alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2 - M^2, \quad (24)$$

$$K = \alpha^2 \varpi^2 (E - \Omega_F L)^2 [\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2 - 2M^2] + M^4 [\varpi^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2]. \quad (25)$$

Соотношения (19)–(21) и (23) и являются алгебраическими связями, позволяющими определить, хотя и в неявной форме, все характеристики течения по известному полоидальному полю B_p (т.е. по известному потенциалу Ψ) и пяти интегралам движения. Равенства (19)–(21) и (23) как раз и анализировались в бесчисленном количестве работ, начиная от посвященных звездному (солнечному) ветру [21–26], где, конечно, исполь-

зовался их нерелятивистский предел, до исследований релятивистского пульсарного ветра [28–31], гидродинамической и МГД-аккреции вещества на черные дыры [32–35].

2.3. Особые поверхности

Алгебраические соотношения (19)–(21), (23) позволяют определить особые поверхности рассматриваемых МГД-течений, на которых полоидальная скорость среды v_p сравнивается с собственными скоростями осесимметричных возмущений, способных распространяться в плазме. Такими особыми поверхностями являются:

1. Альфвеновская поверхность A , определяемая из условия равенства нулю знаменателя A (24) в алгебраических соотношениях (19)–(21):

$$A = 0. \quad (26)$$

Благодаря определениям (22) и (26), получаем, что на альфвеновской поверхности должно быть выполнено условие

$$u_p^2 = u_A^2 \left[1 - \frac{(\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2}{\alpha^2} \right], \quad (27)$$

что в нерелятивистском пределе совпадает, естественно, с альфвеновской скоростью. Как было показано еще в работе [21], на плоскости в координатах u^r, r она является точкой более высокого порядка, чем, например, седло или фокус. С другой стороны, оказалось, что через нее проходят все траектории с положительным квадратом энергии E . Это означает, что в самих алгебраических соотношениях (19)–(21) не содержится никакой сингулярности, а условия регулярности (равенство нулю числителей при нулевом знаменателе) определяет лишь положение альфвеновской поверхности. Вместе с тем, как будет показано, само уравнение Грэда–Шафранова имеет особенность на альфвеновской поверхности.

2. Быстрая и медленная магнитозвуковые поверхности F и S , которые легче всего определить как особенности в выражении для градиента числа Маха M . Действительно, воспользовавшись соотношениями (23)–(25), которые можно переписать в виде $(\nabla\Psi)^2 = F(M^2, E, L, \eta, \Omega_F, \mu)$, где

$$F = \frac{64\pi^4}{M^4} \frac{K}{A^2} - \frac{64\pi^4}{M^4} \alpha^2 \varpi^2 \eta^2 \mu^2, \quad (28)$$

получаем

$$\nabla_a M^2 = \frac{N_a}{D}, \quad (29)$$

где

$$N_a = -\frac{A}{(\nabla\Psi)^2} \nabla^b \Psi \cdot \nabla_a \nabla_b \Psi + \frac{A}{2} \frac{\nabla'_a F}{(\nabla\Psi)^2}. \quad (30)$$

Здесь и далее индексы a, b пробегает лишь значения r, θ , а оператор ∇'_a действует на все величины за исключением M^2 . При этом знаменатель D может быть переписан в виде

$$D = \frac{A}{M^2} + \frac{\alpha^2}{M^2} \frac{B_\phi^2}{B_p^2} - \frac{1}{u_p^2} \frac{A}{M^2} \frac{c_s^2}{1 - c_s^2}, \quad (31)$$

где $c_s^2 = (1/\mu)(\partial P/\partial n)_s$ — скорость звука, а $\nabla\mu$ представляется как

$$\nabla\mu = \frac{c_s^2}{1-c_s^2} \mu \left[2 \frac{\nabla\eta}{\eta} - \frac{\nabla M^2}{M^2} \right] + \frac{1}{1-c_s^2} \left[\frac{1}{nm_p} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_n + T \right] \nabla s. \quad (32)$$

Подчеркнем, что соотношение (32) следует использовать и при дифференцировании $\nabla'_a F$ в формуле (30), поскольку выражение (28) для F содержит величину μ . Условие равенства нулю знаменателя в выражении (29),

$$D = 0, \quad (33)$$

и определяет быструю и медленную особые поверхности. Действительно, воспользовавшись определением (22), получаем, что $D = 0$ при

$$(u_p)_{1,2}^2 = \frac{1}{2} W u_A^2 + \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{1-c_s^2} \pm \frac{1}{2} \left[\left(W u_A^2 + \frac{c_s^2}{1-c_s^2} \right)^2 - 4 \left(W - \frac{B_\phi^2}{B_p^2} \right) \frac{c_s^2}{1-c_s^2} u_A^2 \right]^{1/2}, \quad (34)$$

где

$$W = 1 - \frac{(\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2}{\alpha^2} + \frac{B_\phi^2}{B_p^2} \quad (35)$$

и по-прежнему $u_A = B_p/\sqrt{4\pi\mu}$, т.е. определяется через полоидальную компоненту магнитного поля. В нерелятивистском приближении имеем, соответственно, хорошо известные выражения [70]:

$$(u_p)_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (u_a^2 + c_s^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(u_a^2 + c_s^2)^2 - 4c_s^2 u_a^2 \cos^2 \theta}, \quad (36)$$

где теперь $u_a = B/\sqrt{4\pi\rho}$ (ρ — плотность вещества), а θ — угол между волновым вектором и магнитным полем. Для холодной плазмы $c_s = 0$ медленная магнитозвуковая скорость равна нулю [71], так что в этом случае медленная магнитозвуковая поверхность вообще отсутствует.

Быстрая и медленная поверхности в отличие от альфвеновской являются седловыми точками, т.е. трансзвуковые решения существуют лишь при определенной связи между интегралами движения. Они получаются из условия регулярности

$$N_r = 0, \quad N_\theta = 0 \quad (37)$$

при $D = 0$. Условия регулярности (33) и (37), как мы увидим, играют ключевую роль в построении аналитических решений уравнения равновесия.

3. Как будет показано ниже, уравнение равновесия имеет еще одну особую поверхность — **касповую поверхность** C , определяемую из условия $D = -1$. Эта особая поверхность связана с так называемой касповой скоростью, возникающей на групповой диаграмме Фридрихса как точка возврата для медленной магнитозвуковой волны [71]. В результате получаем для соответствующей скорости

$$u_c^2 = u_A^2 \frac{[\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2] c_s^2 / (1 - c_s^2)}{[\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2 + \alpha^2 B_\phi^2 / B_p^2] u_A^2 + \alpha^2 c_s^2 / (1 - c_s^2)}. \quad (38)$$

В нерелятивистском пределе при $B_\phi = 0$ это выражение также переходит в хорошо известное соотношение $u_c = u_a c_s (u_a^2 + c_s^2)^{-1/2}$ [71]. Касповая поверхность не приводит к дополнительным условиям регулярности.

4. **Световой цилиндр** R_L , т.е. поверхность, на которой электрическое поле E сравнивается по величине с полоидальной компонентой магнитного поля B_p . Согласно (11) и (13), вдали от гравитирующих тел $\varpi = R_L = 1/\Omega_F$. В случае же магнитосферы черной дыры возникает еще один "световой цилиндр", расположенный на поверхности $\alpha = |\Omega_F - \Omega_H| \varpi_H$. На световом цилиндре также не возникает никаких дополнительных условий регулярности.

5. Наконец, характерной поверхностью является и **световая поверхность** S_L , на которой электрическое поле E сравнивается по величине с магнитным B . Световая поверхность, подобно предельной линии в обычной гидродинамике, определяет естественную границу непрерывного течения.

Легко видеть, что плазма при своем движении пересекает сначала альфвеновскую поверхность, затем световой цилиндр и лишь затем быструю магнитозвуковую поверхность. Световая же поверхность (если она существует) расположена на еще больших расстояниях. С другой стороны, эффекты общей теории относительности приводят к появлению второго семейства особых поверхностей вблизи горизонта черной дыры. При этом чрезвычайно важным является тот факт, что внешняя альфвеновская поверхность (через которую, как уже говорилось, проходят все траектории) соответствует значениям $u^r > 0$, т.е. истекающей плазме, тогда как внутренняя альфвеновская точка соответствует значению $u^r < 0$, т.е. аккреции [34]. Но это противоречит предположению о постоянстве функции η на данной силовой линии $\Psi = \text{const}$. Следовательно, течение плазмы в магнитосфере черной дыры (а точнее, на силовых линиях, проходящих через горизонт) не может быть непрерывным, и мы должны ввести в рассмотрение области генерации плазмы, в которых уравнение Грэда — Шафранова неприменимо. Понятно, что сказанное выше не относится к гидродинамическому режиму аккреции, для которого альфвеновская поверхность отсутствует.

2.4. Уравнение для полоидального поля

Перейдем теперь к обсуждению собственно уравнения Грэда — Шафранова — уравнения равновесия магнитных силовых линий. Записав полоидальную компоненту закона сохранения энергии-импульса (8), убеждаемся, что это векторное уравнение равновесия сводится к скалярному уравнению второго порядка, умноженному на $\nabla_a \Psi$. Оно может быть записано в виде [57]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \nabla_k \left\{ \frac{1}{\alpha \varpi^2} [\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2 - M^2] \nabla^k \Psi \right\} + \\ & + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{G}{A} \right) - \\ & - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$G = \alpha^2 \varpi^2 (E - \Omega_F L)^2 + \alpha^2 M^2 L^2 - M^2 \varpi^2 (E - \omega L)^2. \quad (40)$$

Раскрывая в (39) члены $\nabla_a M^2$ согласно определению (29), (30), получаем окончательно

$$\begin{aligned} & A \left[\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \varpi^2} \nabla^k \Psi \right) + \frac{1}{\alpha^2 \varpi^2 (\nabla \Psi)^2} \frac{\nabla^a \Psi \cdot \nabla^b \Psi \cdot \nabla_a \nabla_b \Psi}{D} \right] + \\ & + \frac{1}{\alpha^2 \varpi^2} \nabla'_k A \cdot \nabla^k \Psi - \frac{A}{\alpha^2 \varpi^2 (\nabla \Psi)^2} \frac{1}{2D} \nabla'_k F \cdot \nabla^k \Psi + \\ & + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} \frac{d\Omega_F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{G}{A} \right) - \\ & - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где опять градиент ∇'_a действует на все величины за исключением M^2 , а производная $\partial/\partial\Psi$ действует лишь на интегралы движения. Формула (41) и определяет в наиболее общем виде уравнение равновесия магнитных поверхностей.

Подчеркнем, что уравнение (41) содержит лишь функцию тока Ψ и пять интегралов движения. Действительно, термодинамические величины с помощью уравнения состояния и определений (22) и (32) могут быть выражены как функции энтропии $s(\Psi)$, величины $\eta(\Psi)$ и квадрата числа Маха M^2 . Сама же величина M^2 вследствие уравнения связи (23) выражается, хотя и неявно, через градиент $(\nabla \Psi)^2$ и пять интегралов движения. При этом, конечно же, должен быть выбран физический корень уравнения (23). Что же касается собственно уравнения Грэда – Шафранова

$$\begin{aligned} & r^2 \sin^2 \theta \nabla_k \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \nabla^k \Psi \right) + 16\pi^2 I \frac{dI}{d\Psi} + \\ & + 16\pi^3 r^2 \sin^2 \theta \frac{dP}{d\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

т.е. уравнения, описывающего в нерелятивистском случае ($\alpha = 1$, $\omega = 0$) устойчивые стационарные ($\mathbf{v} = 0$, т.е. $\gamma = 1$) осесимметричные конфигурации, то оно получается из (41) в результате предельного перехода $\Omega_F \rightarrow 0$ (что соответствует бесконечно далекому световому цилиндру $R_L \rightarrow \infty$), $L \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$. В этом случае, как видно из определений (22) и (31), также $M^2 \rightarrow 0$, $D^{-1} \rightarrow 0$, а $E \rightarrow \mu\eta$, причем ток I и энтальпия μ (а следовательно, и любая другая термодинамическая функция) становятся интегралами движения.

Уравнение равновесия (41) является уравнением второго порядка, линейным относительно старших производных. Иными словами, оно может быть записано в канонической форме

$$A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 2B \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + C \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \mathcal{F} = 0, \quad (43)$$

причем $\mathcal{A} - B^2 = A^2 D(D+1)$. Поэтому, как и следовало ожидать, оно меняется от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях, на которых полоидальная скорость вещества сравнивается либо с быстрой или медленной магнитозвуковой скоростью, когда $D = 0$, либо с касповой скоростью, когда $D = -1$. На альфвеновской же поверхности $A = 0$ смены вида уравнения не происходит. Тем не менее альфвеновская поверхность все же является особой поверхностью уравнения равновесия, поскольку на ней должно быть выполнено условие

регулярности

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^2 \varpi^2} \nabla'_k A \cdot \nabla^k \Psi + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} \frac{d\Omega_F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 + \\ & + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{G}{A} \right) - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

следующее непосредственно из (41).

Следующий комплекс проблем связан с вопросом о граничных условиях. С одной стороны, уравнение равновесия содержит в гидродинамическом пределе три, а в общем случае пять интегралов движения, которые, вообще говоря, должны определяться из граничных условий. С другой же стороны, на особых поверхностях должны быть выполнены условия регулярности (37) и (44). Поэтому по крайней мере для простейших топологий, когда все силовые линии (линии тока) пересекают все s особые поверхности, число граничных условий b может быть записано в виде

$$b = 2 + i - s, \quad (45)$$

где i — число интегралов движения. Подчеркнем, что, поскольку уравнение равновесия может быть переписано в виде $D + K_1 N_r + K_2 N_\theta = 0$, соотношения (37) задают лишь одно условие регулярности. Второе же условие будет автоматически выполнено на решении уравнения (41).

Рассмотрим теперь подробно вопрос о поведении решения уравнения равновесия вблизи горизонта вращающейся черной дыры. Для физически разумных решений, когда скорость на горизонте не равна нулю, и, следовательно, также и $M^2(r_H) \neq 0$, величина $D(r_H)$ может быть переписана в виде

$$D(r_H) = -1 + \frac{\alpha^2}{M^2 B_p^2} (B_\phi^2 - E_\theta^2). \quad (46)$$

С другой стороны, как следует из алгебраического уравнения связи (23), при $M^2(r_H) \neq 0$ на горизонте должно быть выполнено условие

$$\frac{(E - \Omega_H L)^2}{[(\Omega_F - \Omega_H)^2 \varpi^2 + M^2]^2} = \frac{1}{64\pi^4} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{\rho^2 \varpi^2}, \quad (47)$$

где $\Omega_H = \omega(r_H)$ — по определению угловая скорость вращения черной дыры. Благодаря соотношениям (11) и (13), условие (47) может быть переписано в виде $|B_\phi(r_H)| = |E_\theta(r_H)|$. Этот результат находится в полном соответствии с основным положением "мембранной парадигмы", согласно которой опорный наблюдатель должен зарегистрировать лишь (расходящиеся как $1/\alpha$) ϕ -компоненту магнитного поля и θ -компоненту электрического поля [13]. В итоге, на горизонте должно быть выполнено условие

$$D(r_H) = -1, \quad (48)$$

так что для случая $M^2(r_H) \neq 0$ уравнение (41) вблизи горизонта черной дыры должно быть гиперболическим. Следовательно, мы приходим к важному выводу, что уравнение равновесия (41) не требует граничного условия на горизонте. Так и должно быть, поскольку никакой сигнал, по определению, не может распространяться от горизонта во внешние области магнитосферы [33].

Действительно, покажем в заключение, что условие (47) может быть получено непосредственно из уравнения Грэда–Шафранова (41). Для этого удобно воспользоваться уравнением (39). В пределе $\alpha \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2 \alpha} A \nabla^k \Psi \right) + \frac{\Omega_F - \Omega_H}{\alpha^2} (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} - \frac{32\pi^4}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[\frac{(E - \Omega_H L)^2}{A} \right] = 0. \quad (49)$$

Поскольку $D = -1$ на горизонте, уравнение (39) является здесь параболическим. В результате, умножая (49) на $(2A/\sin^2 \theta)(d\Psi/d\theta)$, имеем

$$2A\varpi^2(\Omega_F - \Omega_H) \frac{d\Omega_F}{d\Psi} \left[\frac{1}{\varpi^2 \rho^2} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)^2 - \frac{64\pi^4(E - \Omega_H L)^2}{A^2} \right] + \frac{d}{d\theta} \left[\frac{A^2}{\varpi^2 \rho^2} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)^2 - 64\pi^4(E - \Omega_H L)^2 \right] = 0, \quad (50)$$

откуда и следует соотношение (47).

3. Гидродинамический предел — классические задачи аккреции и эжекции

3.1. Гидродинамический предел уравнения равновесия

Вопрос об аккреции вещества на черные дыры является одним из классических вопросов современной астрофизики. С ним связаны проблема активности галактических ядер и квазаров [2, 3], вопрос о механизме образования струйных выбросов [12, 13], вопрос о природе некоторых других галактических рентгеновских источников [72, 73]. Исторически первым был рассмотрен режим изэнтропийного течения на движущийся гравитирующий центр (аккреция Бонди–Хойла [1]). В дальнейшем проведенные многими группами численные расчеты [61–65, 74] позволили достаточно полно проанализировать все основные свойства подобных течений. Вместе с тем даже для адиабатических течений с нулевой вязкостью точные решения до сих пор были получены лишь для ряда частных случаев. Все сказанное выше относится и к проблеме эжекции газа из звезд, для которых также отсутствуют точные двумерные решения, хотя численно этот вопрос исследован достаточно подробно [75, 76].

Рассмотрим поэтому прежде всего гидродинамический предел уравнения Грэда–Шафранова, в котором мы можем пренебречь вкладом электромагнитного поля. В этом случае удобно ввести новый потенциал $\Phi(\Psi)$, удовлетворяющий условию $\eta(\Psi) = d\Phi/d\Psi$. Как легко проверить, в (41) такая замена соответствует условиям $\Psi \rightarrow \Phi$, $\eta \rightarrow 1$. Согласно (14), получаем

$$\alpha m_p (\nabla \Phi \times \mathbf{e}_\phi). \quad (51)$$

Линии $\Phi(r, \theta) = \text{const}$ как раз определяют линии тока вещества.

В гидродинамическом пределе имеется лишь три интеграла движения. Это поток энергии и z -компонента момента импульса:

$$E(\Phi) = \mu(\alpha\gamma + \varpi\omega i_\phi), \quad (52)$$

$$L(\Phi) = \mu\omega i_\phi, \quad (53)$$

а также энтропия $s = s(\Phi)$. При этом алгебраическое соотношение связи (23) имеет теперь вид

$$(E - \omega L)^2 = \alpha^2 \mu^2 + \frac{\alpha^2}{\varpi^2} L^2 + \frac{\hat{M}^4}{64\pi^4 \varpi^2} (\nabla \Phi)^2, \quad (54)$$

где квадрат "числа Маха" \hat{M}^2 определяется как $\hat{M}^2 = 4\pi\mu/n$. Уравнение же Грэда–Шафранова (41) переписывается как [57]

$$\begin{aligned} & -\hat{M}^2 \left[\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \varpi^2} \nabla^k \Phi \right) + \frac{1}{\alpha^2 \varpi^2 (\nabla \Phi)^2} \frac{\nabla^a \Phi \cdot \nabla^b \Phi \cdot \nabla_a \nabla_b \Phi}{D} \right] + \\ & + \frac{\hat{M}^2 \nabla_k \hat{F} \cdot \nabla^k \Phi}{2\alpha^2 \varpi^2 (\nabla \Phi)^2 D} + \\ & + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2 \hat{M}^2} \left[\varpi^2 (E - \omega L) \left(\frac{dE}{d\Phi} - \omega \frac{dL}{d\Phi} \right) - \alpha^2 L \frac{dL}{d\Phi} \right] - \\ & - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Phi} = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

где теперь

$$D = -1 + \frac{1}{u_p^2} \frac{c_s^2}{1 - c_s^2}, \quad (56)$$

$$\hat{F} = \frac{64\pi^4}{\hat{M}^4} [\varpi^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2 - \varpi^2 \alpha^2 \mu^2]. \quad (57)$$

Здесь, как и в общем случае, производная ∇_k' действует на все переменные за исключением числа Маха \hat{M} . Как мы видим, уравнение (55) содержит лишь одну особую поверхность — звуковую поверхность, определяемую из условия $D = 0$. Наконец, в производной $\nabla_k \hat{M}^2 = -\hat{M}^2 N_k/D$ числитель N_k выглядит теперь как

$$N_k = -\frac{\nabla^i \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi}{(\nabla \Phi)^2} + \frac{1}{2} \frac{\nabla_k \varpi^2}{\varpi^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2 \nabla_k \alpha^2}{E^2 - \alpha^2 \mu^2}, \quad (58)$$

а D задается уравнением (56).

В нерелятивистском случае уравнение (51) имеет вид

$$n \mathbf{v}_p = \frac{1}{2\pi\varpi} (\nabla \Phi \times \mathbf{e}_\phi), \quad (59)$$

а первые два интеграла движения (52) и (53) есть

$$E(\Phi) = \frac{v^2}{2} + w(n, s) + \varphi_G(r, \theta) \quad (60)$$

(что есть не что иное, как интеграл Бернулли) и

$$L(\Phi) = r v_\phi \sin \theta. \quad (61)$$

Здесь w — нерелятивистская энтальпия на одну частицу. Далее, нерелятивистское уравнение Грэда–Шафранова запишется теперь как

$$\begin{aligned} & -\varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \Phi \right) - \frac{\nabla^i \Phi \cdot \nabla^k \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi}{D (\nabla \Phi)^2} + \frac{\nabla \varpi^2 \cdot \nabla \Phi}{2D \varpi^2} - \\ & - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\nabla \varphi_G \cdot \nabla \Phi}{D (\nabla \Phi)^2} - 4\pi^2 n^2 \frac{D+1}{D} L \frac{dL}{d\Phi} + \\ & + 2\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\nabla \varpi^2 \cdot \nabla \Phi}{D \varpi^4 (\nabla \Phi)^2} L^2 + 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{D+1}{D} \frac{dE}{d\Phi} - \\ & - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \left[\frac{D+1}{D} \frac{T}{m_p} + \frac{1}{D m_p n} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \right] \frac{ds}{d\Phi} = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь m_p представляет собой массу частиц,

$$D = -1 + \frac{c_s^2}{v_p^2}, \quad (63)$$

$\varphi_G = \varphi_G(r, \theta)$ — ньютоновский гравитационный потенциал, а все операторы ∇_k действуют в плоском пространстве: $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = \varpi^2 = r^2 \sin^2 \theta$. Наконец, алгебраическое уравнение связи имеет вид

$$2E - 2\varphi_G(r, \theta) - 2w(n, s) - \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{(\nabla\Phi)^2}{4\pi^2 r^2 n^2 \sin^2 \theta}. \quad (64)$$

Поскольку энтальпия w может быть выражена как функция n и s , то уравнение (64) и определяет, хотя и неявно, концентрацию n , а вместе с ней и все остальные термодинамические величины как функции потенциала Φ и трех интегралов движения. Условие же (29) перепишется теперь в виде $\nabla_k n = n N_k / D$, где

$$N_k = -\frac{\nabla^i \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2} + \frac{1}{2} \frac{\nabla_k \varpi^2}{\varpi^2} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\nabla_k \varphi_G}{(\nabla\Phi)^2}. \quad (65)$$

Как мы видим, в нерелятивистском случае роль "числа Маха" играет просто концентрация частиц n .

Приведем теперь основные соотношения для случая сферически-симметричной аккреции вещества на невращающуюся (шварцшильдовскую) черную дыру. Скорость среды на бесконечности естественно положить равной нулю, так что $\gamma_\infty = 1$. Течение в этом случае полностью определяется двумя постоянными, например двумя термодинамическими функциями на бесконечности, s_∞ и μ_∞ , которые, согласно (60), фиксируют и интеграл Бернулли E . При этом функция тока Φ дается тривиальной формулой

$$\Phi = \Phi_0(1 - \cos \theta). \quad (66)$$

Сама же величина Φ_0 (а вместе с ней и темп аккреции $2m_p \Phi_0$) должна определяться из условия гладкого прохождения через звуковую точку $D(r_0, c_0) = 0$ и $N_r(r_0, c_0) = 0$. Воспользовавшись, наконец, соотношением связи (54), получаем хорошо известные выражения для радиуса звуковой поверхности [3]

$$r_0 = \frac{\mathcal{M}}{2} \left(\frac{1}{c_0^2} + 3 \right) \quad (67)$$

(так что при $c_0^2 \ll 1$ имеем просто $r_0 = \mathcal{M}/(2c_0^2)$), скорости звука на звуковой поверхности

$$c_0^2 = \frac{2}{5 - 3\Gamma} c_\infty^2, \quad \Gamma \neq \frac{5}{3} \quad (68)$$

и темпа аккреции

$$2m_p \Phi_0 = -\pi \left(\frac{2}{5 - 3\Gamma} \right)^{(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)} \frac{\mathcal{M}^2}{c_\infty^3} \rho_\infty. \quad (69)$$

Отметим еще два случая, в которых могут быть получены точные решения уравнения равновесия (55). Прежде всего такое решение может быть получено для пылевидного вещества с $P = 0$, для которого $c_s^2 = 0$ и, следовательно, $D = -1$ [63]. В этом случае движение вещества должно совпадать с движением пробных частиц, покоящихся на бесконечности и не обладающих угловым моментом относительно черной дыры. Как

известно (см., например, [68]), для такого движения линии тока должны представлять собой прямые $\theta = \text{const}$, плотность которых благодаря отсутствию давления не обязательно должна быть однородной. Легко проверить, что произвольная функция $\Phi = \Phi(\theta)$ при $D = -1$ действительно является решением нелинейного уравнения равновесия для любого, сколь угодно быстрого вращения черной дыры.

Наконец, решение может быть получено и для среды с $c_s^2 = 1$, когда, согласно (56), имеем $D^{-1} = 0$. В этом случае уравнение равновесия (55) становится линейным:

$$\Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (70)$$

Решение же линейного уравнения (70) может быть разложено по собственным функциям $Q_n(\theta)$ углового оператора:

$$\mathcal{L}_\theta = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (71)$$

Они имеют вид

$$Q_0 = 1 - \cos \theta, \quad (72)$$

$$Q_m = \frac{2^m m! (m-1)!}{(2m)!} \sin^2 \theta P'_m(\cos \theta), \quad m = 1, 2, \dots \quad (73)$$

(P_m — полиномы Лежандра). В частности, $Q_1 = \sin^2 \theta$ и $Q_2 = \sin^2 \theta \cos \theta$. При этом пропорциональное $g_0(1 - \cos \theta)$ слагаемое соответствует случаю сферически-симметричной аккреции. Что же касается слагаемого, пропорционального $g_1(r) \sin^2 \theta$, то оно, как легко проверить непосредственно из уравнения (70), на больших расстояниях ($r \gg \mathcal{M}$) от черной дыры имеет вид

$$\Phi = \pi n_\infty v_\infty r^2 \sin^2 \theta, \quad (74)$$

что соответствует однородному потоку вещества. Так, для шварцшильдовской черной дыры имеем

$$\Phi = \Phi_0(1 - \cos \theta) + \Phi_1(r^2 - 2\mathcal{M}r) \sin^2 \theta. \quad (75)$$

В случае $c_s^2 = 1$, как мы видим, темп аккреции $2\Phi_0$ является произвольным, поскольку течение остается дозвуковым вплоть до горизонта черной дыры. Решение, эквивалентное (75), впервые было получено в работе [63] для произвольной скорости вращения черной дыры.

3.2. Аккреция на черную дыру

Рассмотрим прежде всего аккрецию на медленно вращающуюся черную дыру [77]. Согласно (45), такая задача требует, вообще говоря, четырех граничных условий. Здесь мы предположим, однако, что аккрецирующая плазма не обладает собственным угловым моментом. Поскольку величина L является интегралом движения, имеем везде $L(\Phi) = 0$, что, согласно (53), означает, что и $u_\varphi = 0$. Равенство же $u_\varphi = 0$ показывает, что тороидальная скорость вещества относительно удаленных наблюдателей как раз соответствует вращению с угловой скоростью Лензе–Тирринга ω (2). Кроме того, ясно, что течение на больших расстояниях должно быть сферически-симметричным $\Phi \rightarrow \Phi_0(1 - \cos \theta)$. В результате течение, как и в случае сферически-симметричной аккреции, должно однозначно определяться двумя вели-

чинами, например двумя термодинамическими функциями на бесконечности.

Вводя теперь параметр $\varepsilon = a/\mathcal{M}$, имеем, следовательно, для условия медленности вращения $\varepsilon \ll 1$. Как видно из определений (2) и (3), в случае $\varepsilon \ll 1$ поправки к метрическим коэффициентам g_{ik} имеют порядок малости ε^2 . Естественно поэтому искать решение уравнения равновесия (55) в виде малой поправки к сферически-симметричному решению (66):

$$\Phi = \Phi_0 [1 - \cos \theta + \varepsilon^2 f(r, \theta)], \quad (76)$$

где величина Φ_0 по-прежнему определяется соотношением (69). Подставляя теперь выражение (76) в уравнение равновесия (55), получаем

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \alpha^2 D \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon^2}{\rho^2} (D+1) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \alpha^2 N_r \frac{\partial f}{\partial r} = \\ = \frac{a^2}{r^4} \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \left(1 - 2 \frac{\mu^2}{E^2 - \alpha^2 \mu^2} \frac{\mathcal{M}}{r} \right) \sin^2 \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$N_r = \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{E^2 - \alpha^2 \mu^2} \frac{\mathcal{M}}{r^2}. \quad (78)$$

Отметим прежде всего, что благодаря условию (56), а также соотношению $u_p^2 = (E^2 - \alpha^2 \mu^2)/\alpha^2 \mu^2$ имеем $D+1 \propto \alpha^2$. Следовательно, линеаризованное уравнение равновесия (77) не содержит никаких особенностей на горизонте черной дыры. С другой стороны, угловой оператор в уравнении (77) совпадает с угловым оператором уравнения (70). В итоге, как показано в [77], полное решение уравнения (24) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) = \Phi_0 [1 - \cos \theta + \varepsilon^2 g_0(1 - \cos \theta) + \\ + \varepsilon^2 g_2(r) \sin^2 \theta \cos \theta], \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$g_0 = -2 \frac{\mathcal{M}^3}{r_0^3} \quad (80)$$

(что соответствует уменьшению темпа аккреции), а $g_2(r)$ должно быть найдено как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} -D \frac{d^2 g_2}{dr^2} + N_r \frac{dg_2}{dr} + 6 \frac{\mu^2}{E^2 - \alpha^2 \mu^2} \frac{c_s^2}{1 - c_s^2} \frac{g_2}{r^2} = \\ = \frac{\mathcal{M}^2}{r^4} \left(1 - 2 \frac{\mu^2}{E^2 - \alpha^2 \mu^2} \frac{\mathcal{M}}{r} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

с граничными условиями $g_2(\infty) = 0$ и $g_2(r_0) = -\mathcal{M}^2/2r_0^2$. Более того, в асимптотической области $r \ll r_0$ имеем

$$g_2(r) = -G(\Gamma) \frac{\mathcal{M}^2}{r_0^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{(1-3\Gamma)/2} \quad (82)$$

($|G(\Gamma)| \sim 1$), причем асимптотика (82) полностью определяется неоднородным решением уравнения (81), т.е. не зависит от граничных условий. Как видно из (82), вращение приводит к формированию диска в экваториальной плоскости.

Отметим, что для физически разумного условия $c_\infty^2 \ll 1$ радиус звуковой поверхности r_0 (67) значительно

превышает радиус черной дыры $2\mathcal{M}$. Поэтому эффекты вращения в этой области оказываются чрезвычайно малы. Соответственно, слабо будет искажаться и форма звуковой поверхности, так что в реальных условиях рассматривавшиеся здесь эффекты вряд ли имеют практический интерес. Поэтому, на наш взгляд, основной результат лежит в математической плоскости. Фактически, было показано, что хорошо известный ранее сферически-симметричный режим аккреции является устойчивым относительно малых возмущений, связанных с вращением черной дыры.

Вместе с тем, как было недавно показано Парьевым [78], в задаче об аккреции на вращающуюся черную дыру все же можно выйти за рамки малых возмущений. Дело в том, что условие $c_\infty^2 \ll 1$ выполнено обычно с хорошей точностью. С другой стороны, как уже говорилось, сферически-симметричное решение для холодной плазмы остается справедливым для любой скорости вращения черной дыры. В результате структура течения для малой величины $c_\infty \ll 1$ была определена и для аккреции на быстро вращающуюся черную дыру. Как показано на рис. 1, и в этом случае течение мало отличается от сферически-симметричного.

Рассмотрим теперь задачу об аккреции на шварцшильдовскую черную дыру, движущуюся относительно среды со скоростью $v_\infty \ll c_\infty$ [77]. Малым параметром здесь является величина

$$\varepsilon_1 = \frac{v_\infty}{c_\infty}. \quad (83)$$

Перейдем сразу в систему отсчета, в которой черная дыра покоится, а среда движется относительно нее со скоростью v_∞ . В результате, как и в предыдущем разделе, решение уравнения равновесия (55) может быть представлено в виде

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 [1 - \cos \theta + \varepsilon_1 g_1(r) \sin^2 \theta], \quad (84)$$

причем при $r \rightarrow \infty$ асимптотика (84) должна соответствовать однородному набегающему потоку (74). Как

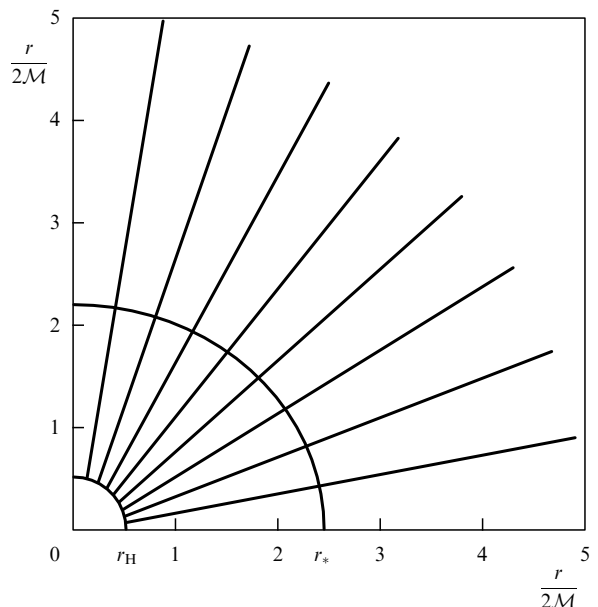


Рис. 1. Структура течения на быстро вращающуюся черную дыру для $c_\infty^2 = 0,1$, $a = \mathcal{M}$ и $\Gamma = 4/3$ [78].

мы видим, в первом порядке по величине ε_1 темп аккреции не изменяется. При этом форма звуковой поверхности задается простым соотношением

$$r_*(\theta) = r_0 [1 + 2\varepsilon_1 k \cos \theta], \quad (85)$$

где постоянная $k \sim 1$ зависит от показателя политропы Γ [77]. С другой стороны, оказалось, что при $r \ll r_0$ функция $g_1(r)$ имеет асимптотику

$$g_1(r) = K_{\text{in}}(\Gamma) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/2}, \quad (86)$$

где постоянная $K_{\text{in}} \sim 1$ также зависит от показателя политропы Γ . Мы видим, что в случае

$$\varepsilon_1 > \frac{1}{|K_{\text{in}}|} \left(\frac{\mathcal{M}}{r_0} \right)^{1/2}$$

на расстояниях

$$2\mathcal{M} < r < r_0 \varepsilon_1^2 K_{\text{in}}^2 \quad (87)$$

возмущенный член $\Phi_0 \varepsilon_1 g_1(r) \sin^2 \theta$ становится больше слагаемого $\Phi_0(1 - \cos \theta)$, соответствующего сферически-симметричной аккреции. Это означает, что в этой области линейное приближение уже не применимо, так что здесь следует решать полное нелинейное уравнение (55). Впрочем, нарушение линейного приближения имеет место в гиперболической области, которая не влияет на поведение решения при $r > r_0$.

Отметим сразу, что формально разложение (84) справедливо лишь на малых расстояниях от черной дыры $r \ll r_0 \varepsilon_1^{-1/2}$, так как на больших расстояниях возмущение становится больше слагаемого $\Phi_0(1 - \cos \theta)$, описывающего сферически-симметричную аккрецию. Тем не менее разложение (84) правильно описывает поведение функции тока во всем пространстве. Полное доказательство можно найти в работе [77]. Однако этот вывод легко может быть понят из следующих простых соображений. Дело в том, что для сферически-симметричной аккреции плотность вещества на расстояниях $r \gg r_0$ можно считать постоянной [3]. Постоянной будет плотность и в однородном потоке набегающей плазмы. С другой стороны, постоянная плотность соответствует бесконечно большой скорости звука, при которой уравнение Грэда–Шафранова (55) становится линейным. Поэтому неудивительно, что сумма двух решений (66) и (74) в асимптотике $r \gg r_0$ оказалась также решением уравнения (55).

На рисунке 2 показана структура течения (84) и форма звуковой поверхности (85) для случая $\Gamma = 4/3$, $\varepsilon_1 = 0,6$. Штрихами показаны линии тока и звуковая поверхность, полученные численно в работе Ханта [60]. Как мы видим, решение (84) практически совпадает с результатом численного расчета, несмотря на то, что параметр ε_1 в рассматриваемом случае близок к единице.

Вместе с тем вывод о том, что в случае аккреции Бонди–Хойла течение может существенно отличаться от сферически-симметричного и на малых расстояниях (87), ранее известен не был. При этом, поскольку знак коэффициента $K_{\text{in}}(\Gamma)$ зависит от политропного индекса Γ , область сгущения линий тока будет либо с фронтальной стороны для $\Gamma > 1,27$, либо с тыльной стороны для $\Gamma < 1,27$. Этот эффект был бы интересен как для галактических черных дыр солнечных масс, так и в системе

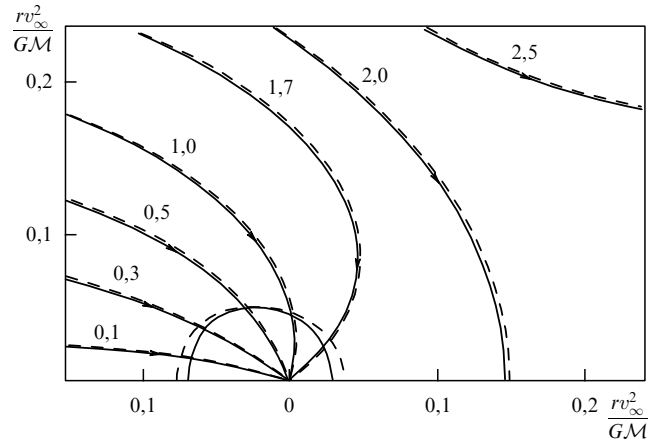


Рис. 2. Структура течения и форма звуковой поверхности на движущуюся черную дыру для случая $\Gamma = 4/3$, $\varepsilon_1 = 0,6$. Числа соответствуют величине Φ/Φ_0 , штрихами показаны линии тока и звуковая поверхность, полученные численно в работе Ханта [60].

двойных черных дыр, существующих, как полагают, в активных галактических ядрах. Однако для обсуждения этого эффекта необходим более подробный анализ, выходящий за рамки метода малых возмущений.

Рассмотрим, наконец, задачу об аккреции вещества с угловым моментом на невращающуюся черную дыру [79]. Следуя методу расчета, развитому ранее, будем считать, что угловой момент аккрецирующего вещества L достаточно мал, так что радиальная скорость среды v_r всегда больше азимутальной скорости v_ϕ . В этом случае естественно предположить, что структура течения будет слабо отличаться от сферически-симметричной аккреции. Предположим кроме того, что энтропия s одинакова для всех линий тока. Тогда уравнение, описывающее осесимметричную стационарную аккрецию, имеет вид

$$\begin{aligned} & -\alpha \omega^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \omega^2} \nabla^k \Phi \right) - \frac{1}{\nabla \Phi^2} \frac{\nabla^i \Phi \cdot \nabla^k \Phi \cdot \nabla_i \nabla_k \Phi}{D} + \\ & + \frac{1}{2D} \frac{(E^2 \nabla_k \omega^2 - L^2 \nabla_k \alpha^2 - \mu^2 \nabla_k \omega^2 \alpha^2) \nabla^k \Phi}{\omega^2 E^2 - \alpha^2 L^2 - \omega^2 \alpha^2 \mu^2} + \\ & + \frac{1}{D} \left(\omega^2 E \frac{dE}{d\Phi} - \alpha^2 L \frac{dL}{d\Phi} \right) \frac{(\nabla \Phi)^2}{\omega^2 E^2 - \alpha^2 L^2 - \omega^2 \alpha^2 \mu^2} + \\ & + \frac{64\pi^4}{M^4} \left(\omega^2 E \frac{dE}{d\Phi} - \alpha^2 L \frac{dL}{d\Phi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (88)$$

а D по-прежнему задается формулой (56).

Будем считать, что газ при $r = R$ вращается как единое целое, т.е. $v_\phi \propto \sin \theta$, $v_\theta = 0$. В этом случае $L = L_0 \sin^2 \theta$,

$$E = E_0 + \frac{L_0^2}{2R^2 E_0} \sin^2 \theta,$$

так что малым параметром оказывается величина $\varepsilon_L = L_0/E_0 r_H$. В результате, как показано в [79], функция тока может быть записана в виде

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 [(1 + \varepsilon_L^2 g_0)(1 - \cos \theta) + \varepsilon_L^2 g_2(r) \cos \theta \sin^2 \theta], \quad (89)$$

где $g_0 = -(16/3)c_0^2$, а радиальная функция $g_2(r)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, эквивалентного (81). При этом оказалось, что при малых r решение этого уравнения универсально, причем функция тока вблизи черной дыры может быть записана как

$$\Phi(r, \theta) \simeq \Phi_0 \left[(1 + \varepsilon_L^2 g_0)(1 - \cos \theta) - 2\varepsilon_L^2 \frac{r_H}{r} \cos \theta \sin^2 \theta \right], \quad (90)$$

т.е. она не зависит ни от условий на внешней границе, ни от показателя политропы Γ . При этом, поскольку $g_0 < 0$, вращение уменьшает темп аккреции. Наконец, концентрация газа вблизи горизонта черной дыры имеет вид

$$n = \frac{|\Phi_0|}{2\pi\sqrt{r_H r^3}} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_L^2}{2} \frac{r_H}{r} \left[13 \cos^2 \theta - 5 + \frac{r_H}{r} (1 - \cos^2 \theta) \right] \right\}. \quad (91)$$

На рисунке 3 построены линии тока $\Phi(r, \theta) = \text{const}$ для значений ε_L^2 равных 0,1 и 0,3. Как мы видим, благодаря наличию у вещества углового момента, плотность газа вблизи экватора становится больше плотности вблизи оси вращения. Тем самым аналитически подтвержден хорошо известный результат, полученный ранее в численных расчетах. Что же касается области параметров $\varepsilon_L \gtrsim 1$, то в этом случае на расстояниях $r \simeq r_g \varepsilon_L^2$ в рамках идеальной гидродинамики неизбежно должна появиться точка остановки газа $v_r = 0$, так что рассматриваемое приближение $v_r \gg v_\phi$ в этом случае будет нарушено.

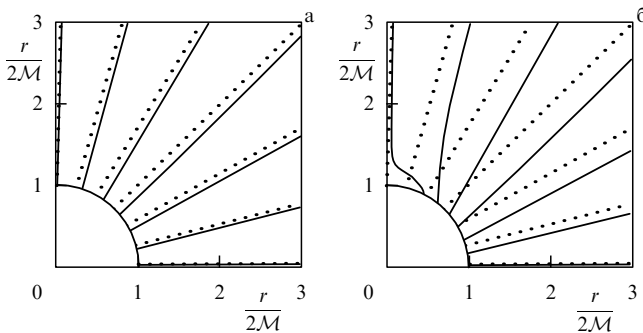


Рис. 3. Линии тока вещества при аккреции вещества с угловым моментом. Параметр ε_L^2 равен 0,1 (а) и 0,3 (б). Для сравнения пунктиром показаны линии тока для сферически-симметричной аккреции.

3.3. Эжекция из медленно вращающихся звезд

Вопрос о структуре и характеристиках звездного ветра, наблюдающегося прежде всего у звезд ранних спектральных классов, также является одним из фундаментальных вопросов современной астрофизики [6, 7]. В частности, имеются множественные подтверждения того факта, что истечение газа должно быть трансзвуковым, т.е. дозвуковым вблизи поверхности звезды и сверхзвуковым на больших расстояниях от нее. При этом истечение газа с поверхности быстро вращающихся V_e -звезд приводит, как показывают и прямые наблюдения, к образованию достаточно плотного диска

в экваториальной плоскости. В настоящее время имеются численные расчеты, которые подтверждают существование такого диска [75, 76]. С другой стороны, вопрос о построении последовательной аналитической теории для двумерного трансзвукового течения остается фактически открытым. Имеется лишь единственное аналитическое решение — решение Паркера [4] для случая сферически-симметричного истечения с поверхности невращающейся звезды (см. также [59]). В случае же истечения из вращающейся звезды структура линий тока неизвестна и должна быть определена как решение уравнения равновесия. В результате задача вновь сводится к уравнению типа Грэда–Шафранова.

Итак, рассмотрим теперь нерелятивистское истечение газа из медленно вращающейся звезды [80]; в этом разделе для ясности восстанавливается размерность. Малым параметром нашей задачи будет величина

$$\varepsilon_*^2 = \frac{\Omega^2 R^3}{GM}, \quad (92)$$

где Ω — характерная угловая частота вращения звезды. В частности, как известно, возмущение поверхности звезды $r_R(\theta)$ может быть записано в виде [6]

$$r_R(\theta) = R[1 + \varepsilon_*^2 \rho(\theta)], \quad (93)$$

где $\rho(\theta) \simeq 1$, а термодинамические величины, например температура на одну частицу $t_R(\theta)$ и концентрация $n_R(\theta)$ — в виде

$$t_R(\theta) = t_R[1 + \varepsilon_*^2 \tau(\theta)], \quad (94)$$

$$n_R(\theta) = n_R[1 + \varepsilon_*^2 \eta(\theta)]. \quad (95)$$

Благодаря термодинамическому соотношению

$$ds = \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{dt}{t} - \frac{dn}{n},$$

имеем, следовательно,

$$\delta s(\theta) = \varepsilon_*^2 \left[\frac{1}{\Gamma - 1} \tau(\theta) - \eta(\theta) \right]. \quad (96)$$

Далее, определим угловую скорость вращения поверхности звезды как

$$\Omega(R, \theta) = \Omega \omega_1(\theta), \quad (97)$$

где $\omega_1(\theta)$ — безразмерная угловая скорость, описывающая дифференциальное вращение. Это означает, что азимутальная компонента скорости на поверхности запишется как

$$v_\phi(R, \theta) = \varepsilon_* \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2} \omega_1(\theta) \sin \theta. \quad (98)$$

Наконец, радиальную скорость на поверхности звезды следует записать в виде

$$v_r(R, \theta) = v_R[1 + \varepsilon_*^2 h(\theta)]. \quad (99)$$

Ясно, что в случае медленного вращения звезды решение полного уравнения равновесия (62) также можно искать в виде малой поправки к сферически-

симметричному течению (66):

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 [1 - \cos \theta + \varepsilon_*^2 f(r, \theta)] . \quad (100)$$

Подставляя соотношение (100) в полное уравнение равновесия линий тока (62), получаем в первом порядке по малой величине ε_*^2

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_*^2 \Phi_0 D \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon_*^2}{r^2} \Phi_0 (D+1) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\ & + \varepsilon_*^2 \Phi_0 N_r \frac{\partial f}{\partial r} = 4\pi^2 n^2 (D+1) L \frac{dL}{d\Phi} - \\ & - 4\pi^2 n^2 \frac{\cos \theta}{\Phi_0 \sin^2 \theta} L^2 - 4\pi^2 n^2 r^2 \sin^2 \theta (D+1) \frac{dE}{d\Phi} + \\ & + 4\pi^2 n^2 r^2 \sin^2 \theta \left[(D+1)t + \frac{\Gamma-1}{\Gamma} c_s^2 \right] \frac{ds}{d\Phi} , \end{aligned} \quad (101)$$

причем теперь интегралы движения E и s зависят, вообще говоря, от линий тока Φ , а угловой момент L отличен от нуля.

Поскольку мы рассматриваем течения, мало отличающиеся от сферически-симметричного, то возмущения интегралов движения $\delta E(\theta)$ и $L^2(\theta)$ как функции угла θ с точностью до членов порядка ε_*^2 будут совпадать с их значениями на поверхности звезды. Имеем поэтому

$$\begin{aligned} \delta E(\theta) &= \varepsilon_*^2 v_R^2 h(\theta) + \frac{1}{2} \varepsilon_*^2 \frac{GM}{R} \omega_1^2(\theta) \sin^2 \theta + \\ &+ \varepsilon_*^2 \frac{\Gamma}{\Gamma-1} t\tau(\theta) + \delta\varphi_G(R, \theta) , \end{aligned} \quad (102)$$

$$L^2(\theta) = \varepsilon_*^2 R^2 \frac{GM}{R} \omega_1^2 \sin^2 \theta , \quad (103)$$

а $\delta s(\theta)$ задается соотношением (96). В частности, для звезды, вся масса которой сосредоточена в центре, возмущение гравитационного потенциала $\delta\varphi_G(R, \theta)$ на поверхности запишется в виде

$$\delta\varphi_G(R, \theta) = \varepsilon_*^2 \frac{GM}{R} \rho(\theta) . \quad (104)$$

В итоге решение уравнения (101) вновь может быть разложено по собственным функциям оператора (71), причем радиальные функции в безразмерных переменных

$$x = \frac{r}{r_0} , \quad u = \frac{n}{n_0} , \quad a = \frac{c_s^2}{c_0^2} , \quad (105)$$

должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & (1 - x^4 a u^2) \frac{d^2 g_m}{dx^2} + 2 \left(\frac{1}{x} - x^2 u^2 \right) \frac{dg_m}{dx} + \\ & + m(m+1) x^2 a u^2 g_m = \kappa_m \frac{R^2}{r_0^2} x^4 a u^4 - \lambda_m \frac{R^2}{r_0^2} u^2 - \\ & - \sigma_m x^6 a u^4 + \frac{1}{\Gamma} v_m x^6 a^2 u^4 + \frac{\Gamma-1}{\Gamma} v_m x^2 a u^2 . \end{aligned} \quad (106)$$

Здесь $-m(m+1)$ — собственные числа оператора (71), а численные коэффициенты κ_m , λ_m , σ_m и v_m суть коэффициенты разложения по угловым функциям $Q_m(\theta)$:

$$\sin \theta \frac{dE}{d\theta} = \varepsilon_*^2 c_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m Q_m(\theta) , \quad (107)$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} L^2 = \varepsilon_*^2 c_0^2 r_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m Q_m(\theta) , \quad (108)$$

$$\frac{L}{\sin \theta} \frac{dL}{d\theta} = \varepsilon_*^2 c_0^2 r_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \kappa_m Q_m(\theta) , \quad (109)$$

$$\sin \theta \frac{ds}{d\theta} = \varepsilon_*^2 \sum_{m=0}^{\infty} v_m Q_m(\theta) . \quad (110)$$

Они должны определяться из граничных условий на поверхности звезды.

Перейдем теперь к рассмотрению граничных условий к уравнению (106). Согласно (45), в рассматриваемой нами задаче для определения двумерной структуры трансзвукового течения необходимо задать на поверхности тела $\rho(\theta)$ четыре граничных условия, т.е. не только две термодинамические функции, например $t_R(\theta)$ и $n_R(\theta)$, и азимутальную скорость $v_\theta(R, \theta)$, но и еще одну компоненту скорости, например $v_r(R, \theta)$ или же $v_\theta(R, \theta)$. Так, задав радиальную скорость, имеем в силу определения (59)

$$g_m \left(\frac{R}{r_0} \right) = \frac{(2m)!}{2^m (m+1)! m!} (\eta_m + h_m + 2\rho_m) , \quad (111)$$

где g_m , η_m , h_m и ρ_m суть коэффициенты разложения по полиномам Лежандра. Если же задавать на поверхности звезды меридиональную компоненту скорости $v_\theta(R, \theta)$, то, воспользовавшись определением (59), получаем

$$\begin{aligned} n v_\theta(R, \theta) &= - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{1}{2\pi R \sin \theta} = \\ &= \varepsilon_*^2 \frac{\Phi_0}{2\pi R \sin \theta} \sum_m \left(\frac{dg_m}{dr} \right)_{r=R} Q_m(\theta) , \end{aligned} \quad (112)$$

благодаря чему величина $v_\theta(R, \theta)$ определяет фактически производную g'_m на поверхности звезды. В частности, при отсутствии меридиональной конвекции, $v_\theta(R, \theta) = 0$, имеем просто

$$g'_m \Big|_{x=R/r_0} = 0 . \quad (113)$$

Второе же граничное условие для радиальных функций $g_m(r)$, связанное с условием гладкого прохождения решения через звуковую поверхность, может быть получено из условия регулярности $N_\theta(r_*) = 0$. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2^m (m+1)! m!}{(2m)!} g_m(1) = \\ & = \frac{1}{\varepsilon_*^2 c_0^2} \delta E_m - \frac{\delta s_m}{\varepsilon_*^2} - \frac{1}{2\varepsilon_*^2 c_0^2 r_0^2} \left(\frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right)_m , \end{aligned} \quad (114)$$

где индексы m соответствуют гармоникам разложения функций $\delta E(\theta)$, $L^2(\theta)/\sin^2 \theta$ и $\delta s(\theta)$ по полиномам Лежандра $P_m(\cos \theta)$. Как мы видим, радиальные функции $g_m(1)$ при $r = r_0$ полностью определяются поведением трех интегралов движения, значения которых, в свою очередь, определяются изменением параметров на поверхности звезды.

Таким образом, соотношения (111) и (114) (или же (112) и (114)) задают два граничных условия к дифференциальному уравнению (106) соответственно в точках $x = R/r_0$ и $x = 1$. Как мы видим, они действительно зависят от четырех функций, которые следует задать на поверхности звезды $r_R(\theta)$. При этом, помимо двух термодинамических функций, например концентрации $n_R(\theta)$ (95) и скорости звука $c_R(\theta)$, а также азимутальной скорости вращения $v_\varphi(R, \theta)$ (98), на поверхности звезды необходимо задать еще либо радиальную компоненту скорости истечения $v_r(R, \theta)$ (99), если используется граничное условие (111), либо меридиональную компоненту скорости $v_\theta(R, \theta)$, если используется граничное условие (112) [80, 81]. На первый взгляд, последнее обстоятельство кажется удивительным, поскольку в сферически-симметричном случае радиальная компонента скорости v_R , а вместе с ней и темп истечения Φ_0 полностью определяются двумя термодинамическими функциями n_R и c_R^2 на поверхности звезды. Однако в действительности никакого противоречия здесь нет. Дело в том, что в случае вращающейся звезды нулевая гармоника h_0 , входящая в определение скорости $v_r(R, \theta)$ (99), а значит, и полный темп аккреции

$$\Phi(\pi) = 2\Phi_0[1 + \varepsilon_*^2(2\rho_0 + h_0 + \eta_0)] \quad (115)$$

по-прежнему не могут быть заданы произвольно. Формально это связано с тем, что в отличие от высших гармоник g_m нулевая гармоника g_0 должна определяться лишь одним из двух собственных решений уравнения (106), причем, как легко проверить, решением $g_0 = \text{const}$. Второе же собственное решение уравнения для $m = 0$, которое зависит от радиуса $f = g_0(r)(1 - \cos \theta)$, привело бы к особенности полного решения на оси $\theta = \pi$. В результате значение $g_0(R/r_0)$ должно совпадать со значением $g_0(1)$:

$$g_0\left(\frac{R}{r_0}\right) = g_0(1). \quad (116)$$

Равенство (116) вместе с соотношениями (111) и (114) и определяет величину h_0 как функцию термодинамических величин, заданных на поверхности звезды.

В качестве примера рассмотрим трансзвуковое истечение газа с поверхности однородно вращающейся звезды ($\omega_1(\theta) = 1$) в отсутствие меридиональной конвекции. В этом случае медленное вращение приводит к следующему искажению формы поверхности:

$$r_R(\theta) = R\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 R^3}{GM} \sin^2 \theta\right). \quad (117)$$

Кроме того, воспользуемся условием фон Цейпеля [5], согласно которому температура на поверхности звезды удовлетворяет условию

$$T(R, \theta) = T_R \left(\frac{|\nabla \varphi_{\text{eff}}|}{|\nabla \varphi_G|} \right)^{1/4}, \quad (118)$$

где

$$\varphi_{\text{eff}} = \varphi_G - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (119)$$

В результате имеем

$$\sigma_0 = 0,$$

$$\sigma_m = -\frac{(2m)!}{2^m m! (m-1)!} \frac{v_R^2}{c_0^2} h_m \quad \text{при} \quad m \neq 0, 2,$$

$$\lambda_m = \kappa_m = v_m = 0 \quad \text{для} \quad m \neq 2,$$

$$\sigma_2 = 2 \frac{r_0}{R} - \frac{5 - 3\Gamma}{2(\Gamma - 1)} + \frac{1}{2} \frac{v_R^2}{c_0^2} - 3 \frac{v_R^2}{c_0^2} h_2, \quad (120)$$

$$\lambda_2 = 2 \frac{R}{r_0}, \quad \kappa_2 = 4 \frac{R}{r_0}, \quad v_2 = -\frac{\Gamma}{\Gamma - 1}, \quad (121)$$

так что возмущение функции тока вновь будет определяться лишь нулевой и второй гармониками оператора (71).

Теперь, чтобы получить полное решение задачи, необходимо решать обыкновенное дифференциальное уравнение (106) для $m = 2$ с граничными условиями

$$g_2(1) = \frac{1}{2} \frac{v_R^2}{c_0^2} h_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{r_0} - \frac{r_0}{R} \right) - \frac{1}{12} \frac{v_R^2}{c_0^2} - \frac{5}{12},$$

$$g_2\left(\frac{R}{r_0}\right) = \frac{1}{2} (h_2 - 1),$$

$$g_2'\left(\frac{R}{r_0}\right) = 0. \quad (122)$$

Именно это решение определяет константу h_2 . С другой стороны, из (111), (114) и (116) получаем

$$h_0 = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \left(\frac{r_0}{R} - \frac{R}{r_0} \right) \left(1 - \frac{v_R^2}{c_0^2} \right)^{-1}. \quad (123)$$

При этом в соответствии со (115) темп эжекции может быть определен как

$$\Phi = 2\Phi_0 \left[1 + \frac{\Omega^2 R^3}{GM} (1 + h_0) \right]. \quad (124)$$

Так как $1 + h_0 > 0$, мы видим, что вращение увеличивает темп эжекции.

Полное решение уравнения равновесия получено в работе [80]. Асимптотику же решения на больших расстояниях можно получить аналитически. Действительно, легко проверить, что при $r \gg r_0$ величина $g_2(r)$ не зависит от радиуса r . В результате получаем

$$\Phi = \Phi_0 \left[(1 - \cos \theta) + \frac{\Omega^2 R^3}{GM} (1 + h_0) (1 - \cos \theta) + \frac{\Omega^2 R^3}{GM} q_2 \sin^2 \theta \cos \theta \right], \quad (125)$$

$$n(r, \theta) = n_0 \frac{c_0}{v_\infty} \frac{r_0^2}{r^2} \left[1 + \frac{\Omega^2 R^3}{GM} b_0 + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 R^3}{GM} b_2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right], \quad (126)$$

где постоянные b_0 , b_2 и q_2 определены в [80]. Мы видим, что асимптотика (125) не зависит от радиуса r . Это значит, что линиями тока на бесконечности являются прямые линии $\theta = \text{const}$. При этом, как было показано в [80], во всех случаях $b_2 < 0$ и $q_2 < 0$. Это означает, что вращение звезды действительно приводит к формированию диска в экваториальной плоскости. С другой стороны, при определенных условиях скорость течения

газа в экваториальной плоскости может даже уменьшиться по сравнению со сферически-симметричным течением.

Таким образом, мы показали, как наличие точного аналитического решения — сферически-симметричной аккреции или эжекции — позволяет построить решение прямой задачи и для двумерных трансзвуковых течений, обладающих осевой симметрией. В частности, было показано, что вращение приводит к образованию диска в экваториальной плоскости. Что же касается более подробного сравнения предсказаний теории с наблюдательными данными, то нам оно представляется нецелесообразным. Как уже отмечалось, в реальных условиях большую роль должны играть диссипативные процессы (вязкость, теплопроводность, лучевое давление), которые не могут быть последовательно учтены в приближении идеальной гидродинамики.

4. Бессиловое приближение — магнитосфера радиопульсаров

4.1. Бессиловой предел уравнения равновесия в плоском пространстве

Радиопульсары (вращающиеся нейтронные звезды, радиус $R \sim 10^6$ см, масса $M \sim M_\odot$, период вращения $P \sim 0,0016-1$ с, магнитное поле на поверхности $B_0 \sim 10^{12}$ Гс) представляют собой уникальные астрофизические источники. Дело в том, что они являются единственными космическими объектами, в которых механизм замедления вращения (а значит, и эволюция) определяется электродинамическими силами [82–84]. С другой стороны, хотя гравитационные силы вблизи нейтронных звезд чрезвычайно сильны, они все же оказываются на много порядков меньше силы электромагнитного взаимодействия. Это позволяет с хорошей точностью ограничиться рассмотрением уравнения равновесия в плоском пространстве. Вместе с тем, в некоторых случаях эффекты общей теории относительности все же могут стать существенными [85–87].

Как мы увидим, потери энергии радиопульсаров полностью определяются пондеромоторным действием электрического тока, циркулирующего в магнитосфере, который, в свою очередь, может быть определен только вместе со всей структурой магнитного поля. Поэтому вопрос об эволюции радиопульсаров может быть последовательно решен только в рамках общей задачи, которая для осесимметричной магнитосферы вновь приводит нас к уравнению равновесия (41).

Итак, рассмотрим бессиловой предел уравнения Грэда–Шафранова, в котором теперь следует пренебречь вкладом частиц; здесь мы для ясности вновь восстанавливаем размерность. Если ввести, следуя Майкелю, параметр намагниченности [28] $\sigma = E/\mu\eta$, то условия малости вклада частиц $T_{ik}^{\text{matter}} \ll T_{ik}^{\text{em}}$ могут быть записаны в виде

$$\sigma \gg \gamma_{\text{in}}. \quad (127)$$

Здесь γ_{in} — характерный лоренц-фактор плазмы у поверхности звезды. Как легко проверить, при выполнении условия (127) вплоть до светового цилиндра $R_L = c/\Omega$ будет выполнено и условие $M^2 \ll 1$. С другой стороны, бессиловой предел не означает, конечно, полного отсутствия частиц, поскольку в этом случае про-

должное электрическое поле не обращалось бы в нуль. Как известно, для экранирования продольного электрического поля плотность заряда должна быть близка к так называемой гольдрайховской плотности [82]

$$\rho_{\text{GJ}} = -\frac{\Omega \cdot \mathbf{B}}{2\pi c}. \quad (128)$$

Поэтому для концентрации частиц имеем

$$n \gg n_{\text{GJ}} = \frac{\Omega B}{2\pi c|e|}. \quad (129)$$

Для радиопульсаров условия (127), (129) выполняются с хорошей точностью [88–90]. Действительно, плазма, заполняющая магнитосферу, является вторичной по отношению к магнитному полю. При этом частицы (электроны и позитроны) рождаются за счет однофотонной конверсии жестких гамма-квантов в сильном магнитном поле в полярных областях нейтронной звезды, где продольное электрическое поле не равно нулю [84, 88].

Переходя теперь в общем уравнении (41) к пределу $M^2 \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$, получаем [45–48, 91–93]

$$-\left(1 - \frac{\Omega^2 \varpi^2}{c^2}\right) \nabla^2 \Psi + \frac{2}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varpi} - \frac{16\pi^2}{c^2} I \frac{dI}{d\Psi} + \frac{\varpi^2}{c^2} \Omega_F (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} = 0, \quad (130)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа, причем теперь $\varpi = r \sin \theta$, $E(\Psi) = \Omega_F(\Psi)L(\Psi)$, а продольный ток I , согласно (15) и (16), также становится интегралом движения.

Как мы видим, бессиловое уравнение (130) имеет лишь два интеграла движения. Это угловая скорость $\Omega_F(\Psi)$ и продольный ток $I(\Psi)$. В отличие от полного уравнения равновесия (41), уравнение (130) является эллиптическим и имеет заведомо лишь одну особую поверхность — альфвеновскую поверхность, которая в бессиловом пределе совпадает со световым цилиндром. Следовательно, согласно (45), уравнение (130) требует трех граничных условий. В качестве таких граничных условий обычно выбирают величины двух интегралов движения, $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$ и $I = I(\Psi)$, а также нормальную компоненту магнитного поля на поверхности нейтронной звезды $r = R$ или, что то же самое, значение потенциала $\Psi = \Psi(R, \theta)$. Так, например, для дипольного магнитного поля имеем

$$\Psi(R, \theta) \simeq M_m \frac{\sin^2 \theta}{R}. \quad (131)$$

Здесь M_m — магнитный момент нейтронной звезды. Что же касается световой поверхности (которая в бессиловом пределе совпадает с быстрой магнитозвуковой поверхностью), то ее существование, как будет показано, тесно связано с величиной продольного тока.

4.2. Энергетические потери пульсаров

Прежде чем переходить к обсуждению вопроса о потерях энергии нейтронной звезды, напомним некоторые соотношения, относящиеся к квазистационарному обобщению сформулированных выше уравнений, описывающих уже магнитосферу наклонного ротатора. При этом предполагается, что все величины зависят от времени t и угловой координаты φ лишь в комбинации $\varphi - \Omega t$. В этом случае [44]

$$\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}_R \times \mathbf{B}] = -\nabla\psi, \quad (132)$$

где $\boldsymbol{\beta}_R = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]/c$, а ψ имеет смысл электрического потенциала во вращающейся системе координат. В частности, для идеально проводящей звезды, где $\mathbf{E}_{\text{in}} + [\boldsymbol{\beta}_R \times \mathbf{B}_{\text{in}}] = 0$, имеем $\psi = 0$. С другой стороны, для случая нулевого продольного электрического поля, $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$, имеем $(\mathbf{B} \cdot \nabla\psi) = 0$. Таким образом, потенциал ψ должен быть постоянен на магнитных поверхностях:

$$\psi = \psi(\Psi), \quad (133)$$

причем, согласно (13) и (132), в осесимметричном случае угловая скорость Ω_F перепишется просто как

$$\Omega_F = \Omega - \frac{d\psi}{d\Psi}. \quad (134)$$

Поэтому в области замкнутых силовых линий (т.е. силовых линий, не выходящих за пределы светового цилиндра) имеем просто $\psi = 0$. С другой стороны, в области открытых силовых линий, которые отделены от нейтронной звезды областью продольного электрического поля, потенциал ψ будет отличен от нуля. Потенциал ψ и приводит к ускорению частиц в области продольного электрического поля. При этом его величина $\psi(P, B_0)$ будет определяться конкретным механизмом рождения частиц. В дальнейшем нам будет удобно ввести безразмерный ускоряющий потенциал $\beta_0 = \psi(P, B_0)/\psi_{\text{max}}$, где

$$\psi_{\text{max}} = \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 R B_0 \quad (135)$$

— максимальное падение потенциала в области ускорения [82, 88]. В результате угловая скорость Ω_F над областью ускорения, где вторичная плазма экранирует продольное электрическое поле (и где, следовательно, уже можно использовать метод уравнения Грэда–Шафранова), определится просто как $\Omega_F = (1 - \beta_0)\Omega$. Что же касается продольных токов, то их удобно нормировать на гольдрайховскую плотность тока $j_{\text{GJ}} = c\rho_{\text{GJ}}$. В результате можно записать $I(\Psi) = i_0 I_{\text{GJ}}$, где

$$I_{\text{GJ}} = \frac{B_0 \Omega^2 R^3}{2c} \quad (136)$$

— характерный полный ток через поверхность полярной шапки.

Появление продольных токов в магнитосфере пульсаров имеет решающее значение, поскольку именно продольные токи определяют торможение нейтронной звезды. Действительно, полный ток, стекающий с поверхности пульсара, должен быть равен нулю. В результате по поверхности пульсара должны течь токи \mathbf{J}_s , замыкающие продольные токи, текущие в магнитосфере. Пондеромоторное действие этих токов и приводит к наблюдаемому замедлению радиопулсаров [10, 82]. Чтобы показать это, запишем скорость потерь энергии как

$$W_{\text{tot}} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{K}, \quad (137)$$

где

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{r} \times [\mathbf{J}_s \times \mathbf{B}]] dS \quad (138)$$

— тормозящий момент, связанный с силой Ампера токов, текущих по поверхности. Он направлен антипараллельно магнитному моменту нейтронной звезды. Используя теперь определения (137) и (138), имеем

$$W_{\text{tot}} \simeq \frac{B_0^2 \Omega^4 R^6}{c^3} i_0 \cos \chi, \quad (139)$$

где χ — угол между магнитной осью и осью вращения. Как мы видим, в аналитическом выражении потери (139) совпадают с магнитодипольными потерями [94]

$$W_{\text{md}} = \frac{1}{6} \frac{B_0^2 \Omega^4 R^6}{c^3} \sin^2 \chi. \quad (140)$$

Однако магнитодипольные потери (140) отсутствуют для осесимметричного случая $\chi = 0$. Вместе с тем, потери (139) пропорциональны электрическому току i_0 , циркулирующему в магнитосфере. Тем не менее для большинства радиопулсаров безразмерный ток $i_0 \sim 1$, так что простейшая магнитодипольная формула (140) дает в целом правильную оценку для полных потерь энергии вращения нейтронной звезды [10].

Подчеркнем, что токовые потери W_{tot} (139) не совпадают с потоком энергии (17), который в бессиловом случае связан лишь с потоком вектора Пойнтинга:

$$W_{\text{em}} = \frac{1}{2\pi} \int I(\Psi) \Omega_F(\Psi) d\Psi. \quad (141)$$

Действительно, формулы (137), (138) могут быть преобразованы к виду [10]

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{em}} + W_{\text{matter}}, \quad (142)$$

где второе слагаемое

$$W_{\text{matter}} = \int \psi \mathbf{j}_e \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int I(\Psi) [\Omega - \Omega_F(\Psi)] d\Psi, \quad (143)$$

согласно (132), как раз соответствует энергии, приобретаемой первичными частицами в области ускорения.

С другой стороны, потери углового момента (16) будут полностью обусловлены электродинамическими потерями (138):

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2\pi} \int I(\Psi) d\Psi. \quad (144)$$

Так и должно быть, поскольку угловой момент фотонов \mathcal{L}_{ph} , излучаемых вблизи поверхности звезды, много меньше $\Omega \mathcal{E}_{\text{ph}}$. В результате в силу (141) и (143) условие $W_{\text{tot}} = \Omega K_{\text{tot}}$ (по определению, справедливое для вращающейся нейтронной звезды) оказывается тождественно выполнено и для уходящего излучения. Вместе с тем, как мы видели, это соотношение не может быть получено без дополнительного слагаемого (143). Попытка же решить вопрос о потерях в рамках бессилового приближения неизбежно приводит к недоразумениям [95, 96]. Отметим, что полные потери W_{tot} могут быть переписаны в виде $W_{\text{tot}} = \psi_{\text{max}} I$, где I — полный ток, циркулирующий в магнитосфере. Соотношения (141)–(144), как показано в [10], остаются справедливыми и для случая наклонного ротатора.

4.3. Точные решения

Уравнение равновесия (130) является нелинейным уравнением, однако теперь вся нелинейность связана с интегралами движения. В частности, в отсутствие про-

дольного тока и при постоянной угловой скорости $\Omega_F(\Psi) = \Omega$ оно становится линейным. Поскольку же уравнение (130) не содержит явно цилиндрической переменной z , его решение можно искать методом разделения переменных [48, 92]:

$$\Psi(\varpi, z) = M_m \int_0^\infty \varphi(\lambda) Q(\varpi, \lambda) \cos(\lambda z) d\lambda. \quad (145)$$

Это свойство и позволило достаточно быстро построить решение уравнения (130) для дипольного (и монопольного) магнитного поля звезды при отсутствии продольного тока, т.е. когда единственными токами в магнитосфере будут токи коротации $\Omega \varpi \rho_{GJ} \mathbf{e}_\varphi$ [46, 48] (рис. 4). Для этих решений область применимости уравнения равновесия простирается лишь до светового цилиндра, который в этом случае совпадает как с альфвеновской, так и со световой поверхностью. При этом оказалось, что токи коротации приводят к концентрации магнитных поверхностей вблизи экваториальной плоскости, а магнитное поле вдоль оси вращения убывает экспоненциально. Интересным свойством магнитосферы является также и то, что на некоторых открытых силовых линиях, где $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{B} = 0$, плотность заряда, согласно (128), меняет знак. Понятно, что однозарядная плазма, истекающая из звезды, не смогла бы обеспечить выполнения условия $\rho_e = \rho_{GJ}$. Поэтому была высказана гипотеза о существовании "внешнего зазора" вблизи линии $\rho_{GJ} = 0$, в котором возникающее продольное электрическое поле также приводит к рождению вторичной электронно-позитронной плазмы; здесь из-за слабого магнитного поля основным механизмом рождения частиц будет процесс двухфотонной конверсии $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$ [97]. Конечно, в реальных условиях плазма, истекающая из магнито-

сферы, содержит частицы обоих знаков, так что, в принципе, условие $\rho_e = \rho_{GJ}$ могло бы быть выполнено за счет небольшого изменения продольных скоростей частиц. Однако такая задача, требующая, вообще говоря, кинетического рассмотрения, в настоящее время не решена [98].

Далее, в работе [92] подобным же образом были построены решения и для случая наклонного ротатора (см. рис. 4.). Это стало возможным благодаря тому, что при $i_0 = 0, \beta_0 = 0$ квазистационарное уравнение равновесия также остается линейным. При этом был подтвержден результат работы [99], согласно которой магнитное поле на поверхности светового цилиндра имеет лишь ϖ -компоненту, а электрическое поле — лишь φ -компоненту. Следовательно, в отсутствие продольного тока и ускоряющего потенциала поток вектора Пойнтинга через поверхность светового цилиндра должен быть равен нулю. Иными словами, токи коротации, текущие в магнитосфере, полностью экранируют магнитодипольное излучение нейтронной звезды. Это как раз и означает, что и в случае наклонного ротатора все потери энергии будут связаны с продольным током, циркулирующим в магнитосфере.

Наконец, Майкелем было найдено еще одно замечательное аналитическое решение для случая монопольного магнитного поля звезды [91]. Оказалось, что при специальном выборе продольного тока

$$I(\Psi) = I_M = \frac{\Omega_F}{4\pi} \left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0} \right) \quad (146)$$

и при $\Omega_F = \text{const}$ монопольное магнитное поле

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0(1 - \cos \theta) \quad (147)$$

является точным решением нелинейного уравнения равновесия (130), в том числе и за пределами светового цилиндра. Иными словами, при $I(\theta) = I_{M,A} \sin^2 \theta$ (который фактически совпадает с гольдрайховским током $j_{GJ} = c\rho_{GJ}$) происходит полная компенсация влияния продольного тока и токов коротации. Как следует из соотношений (146), (147), в решении Майкеля электрическое поле равно по величине тороидальной компоненте магнитного поля

$$B_\varphi = E_\theta = B_0 \frac{\Omega R}{c} \frac{R}{r} \sin \theta, \quad (148)$$

которая на больших расстояниях становится существенно больше полюидального магнитного поля $B_p = B_0(R/r)^2$. С другой стороны, в этом решении полное магнитное поле остается больше электрического вплоть до бесконечности, что отодвигает до бесконечности и световую поверхность. Решение Майкеля, несмотря на свою искусственность, играет важную роль в теории магнитосферы черных дыр.

В качестве иллюстрации рассмотрим еще модельную задачу о малом возмущении монопольного решения Майкеля. Как уже говорилось, уравнение (130) требует трех граничных условий. Будем считать, что угловая скорость вращения Ω_F остается такой же, как и в решении Майкеля, а потенциал $\Psi(R, \theta)$ на поверхности звезды также не изменяется. Что же касается продольного тока $I(R, \theta)$, то будем считать, что он мало отличается от равновесного тока (146):

$$I = I_M(\theta) + l(\theta) = I_{M,A} \sin^2 \theta + l(\theta), \quad (149)$$

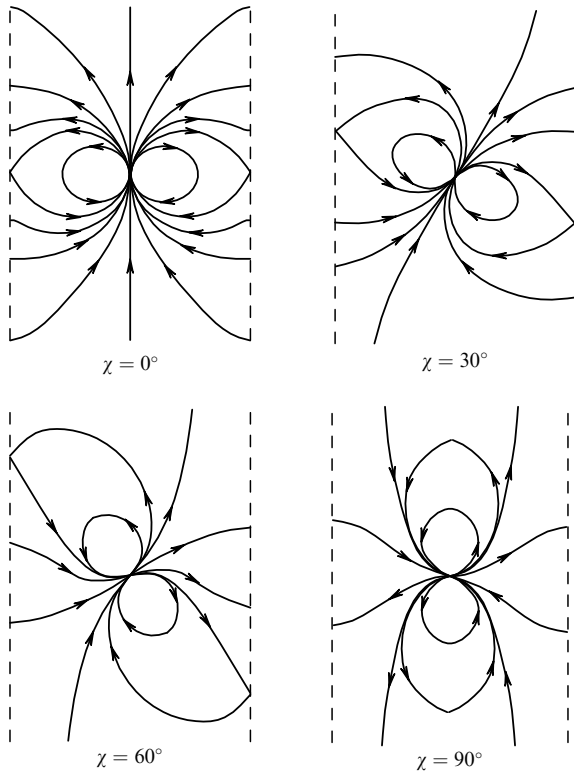


Рис. 4. Структура магнитосферы наклонного ротатора при нулевых продольных токах [10].

так что $l(\theta)/I_{M,A} \ll 1$. Поскольку возмущения предполагаются малыми, соотношение (149) определяет величину тока и как функцию потенциала Ψ .

Записывая вновь решение уравнения (130) в виде $\Psi(r, \theta) = \Psi_0[1 - \cos \theta + \varepsilon f(r, \theta)]$, получаем в первом порядке по малому параметру $\varepsilon = l/I_M$

$$\begin{aligned} \varepsilon(1 - x^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \varepsilon(1 - x^2 \sin^2 \theta) \frac{\sin \theta}{x^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \\ - 2\varepsilon x \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} - 2\varepsilon \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2\varepsilon(3 \cos^2 \theta - 1)f + \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (l \sin^2 \theta) = 0. \end{aligned} \quad (150)$$

Уравнение (150), как и следовало ожидать, имеет особенность на световом цилиндре $x \sin \theta = 1$. В результате получаем для $l(\theta) = I_{M,A} h \sin^2 \theta$, $h = \text{const} \ll 1$ (и для $R \ll R_L$) [100]

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0[1 - \cos \theta + hr^2 \Omega_F^2 \sin^2 \theta \cos \theta]. \quad (151)$$

К сожалению, в общем случае решение даже линеаризованного уравнения (150) имеет чрезвычайно громоздкий вид.

Решение (151) как раз показывает, что при $I < I_M$ ($h < 0$) силовые линии магнитного поля поджимаются к экватору ($\delta\Psi < 0$ при $\theta < \pi/2$). При этом световая поверхность находится на конечном расстоянии

$$\varpi_C = |h|^{-1/4} R_L, \quad (152)$$

на котором возмущение монополярного поля еще можно считать малым. Соответственно, при $I > I_M$ ($h > 0$) магнитные силовые линии разворачиваются в сторону оси вращения ($\delta\Psi > 0$ при $\theta < \pi/2$), а световая поверхность по-прежнему достигается лишь на бесконечности.

Перейдем теперь к ключевой части этого раздела — обсуждению структуры магнитосферы нейтронной звезды при наличии продольного тока I и ускоряющего потенциала ψ . Как уже говорилось, в этом случае уравнение равновесия (130) становится нелинейным, что существенно затрудняет его анализ. Однако при специальном выборе продольного тока и потенциала уравнение (130) все же может быть сведено к линейному. Это становится возможным, если выбрать значения $\Omega_F(\Psi)$ и $I(\Psi)$ в виде

$$\Omega_F = \Omega(1 - \beta_0), \quad (153)$$

$$I(\Psi) = \frac{c}{4\pi} i_0 \Psi, \quad (154)$$

где i_0 и β_0 являются постоянными. Уравнение равновесия в области открытых силовых линий (в безразмерных переменных $x = \Omega\varpi/c$) примет при этом вид

$$-\nabla^2 \Psi [1 - x^2(1 - \beta_0)^2] + \frac{2}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - i_0^2 \Psi = 0. \quad (155)$$

В области же замкнутых силовых линий имеем просто

$$-\nabla^2 \Psi (1 - x^2) + \frac{2}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (156)$$

В результате вся нелинейность будет заключена в тонком переходном слое вблизи сепаратрисы, само положение которой должно быть найдено из решения. Отметим, что в отличие от предыдущих работ мы не требуем, чтобы

нулевая точка магнитного поля лежала на поверхности светового цилиндра $x = 1$.

Определим теперь граничные условия к системе уравнений (155), (156). Ясно, что в присутствии продольного тока (т.е. при $B_\varphi \neq 0$) световая поверхность уже не будет совпадать со световым цилиндром. С другой стороны, альфвеновская поверхность, на которой требуется выполнение условия регулярности (44), по-прежнему совпадает со световым цилиндром $x_L = 1/(1 - \beta_0)$. В области открытых силовых линий уравнение (155), согласно (45), требует трех граничных условий. Прежде всего такими условиями являются величины i_0 и β_0 , определяемые на поверхности звезды. Кроме того (и это чрезвычайно важно), следует потребовать еще, чтобы магнитное поле спадало на бесконечности вдоль оси вращения при $z \rightarrow \infty$. Необходимость введения "дополнительного" граничного условия связано просто с тем фактом, что магнитная силовая линия, уходящая на бесконечность вдоль оси вращения, не пересекает световой цилиндр, и, следовательно, для нее не возникает дополнительного условия регулярности. Нарушение же этого условия приводит к нефизическим решениям, не спадающим на бесконечности [101]. Третьим же граничным условием будет не только значение потенциала $\Psi(R, \theta)$ на поверхности звезды (131), но и значение потенциала Ψ на поверхности сепаратрисы, разделяющей области открытой и замкнутой магнитосферы [47]. Условие же регулярности (44) на световом цилиндре $x = x_L$ запишется теперь как

$$\frac{2}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - i_0^2 \Psi = 0. \quad (157)$$

Что же касается области замкнутых силовых линий, в общем случае вообще не достигающей светового цилиндра, то для нее роль дополнительных граничных условий должны играть именно условия "сшивки" областей замкнутых и разомкнутых силовых линий. Такими условиями должны быть прежде всего совпадение положения сепаратрисной силовой линии $z = z_*(x)$ для обеих областей,

$$\Psi^{(1)}[x, z_*(x)] = \Psi^{(2)}[x, z_*(x)], \quad (158)$$

и, кроме того, непрерывность величины $L_b = \mathbf{B}^2 - E^2$,

$$L_b^{(1)}[x, z_*(x)] = L_b^{(2)}[x, z_*(x)]. \quad (159)$$

Последнее условие легко получить, интегрируя бессловое уравнение равновесия, записанное в форме $\mathbf{EVE} + [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = 0$, поперек тонкого переходного слоя [47, 102].

На рисунке 5 показана структура магнитных поверхностей для ненулевого продольного тока i_0 и ускоряющего потенциала β_0 , полученная в результате решения уравнений (155), (156) [103]. Отметим, однако, что решение задачи может быть построено не при любых значениях i_0 и β_0 . Дело в том, что при определенных параметрах i_0 и β_0 решение уравнения (155) для области разомкнутых силовых линий показывает, что нулевая линия магнитного поля располагается за пределами светового цилиндра $x_L = 1$. Ясно, что в этом случае решение не может быть сшито с областью замкнутой магнитосферы, так как она не может быть распространена до области $x > 1$. Как показано на рис. 6, на

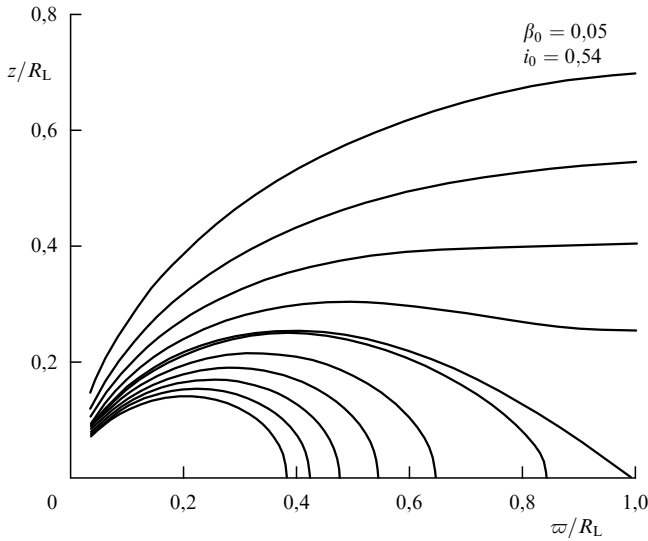


Рис. 5. Структура магнитосферы соосного ротатора при ненулевых продольных токах. Значения i_0 и β_0 соответствуют соотношению согласования (160).

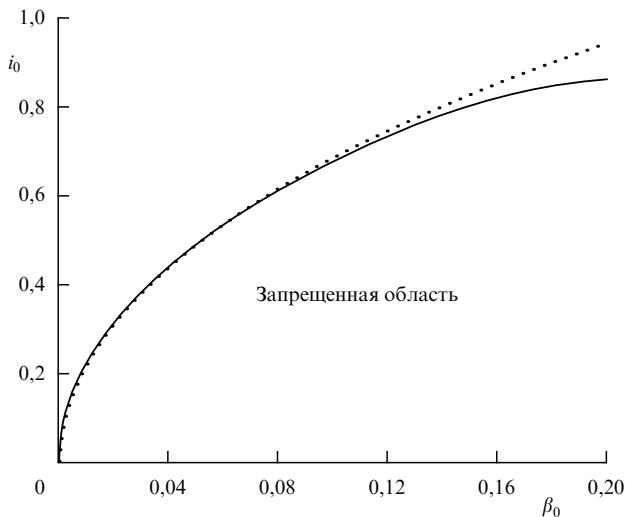


Рис. 6. Область параметров i_0, β_0 , при которых возможно построение решения. Пунктиром показана линия (160).

плоскости параметров i_0, β_0 запрещенная область соответствует достаточно малым значениям i_0 .

Таким образом, существование в магнитосфере нейтронной звезды замкнутых магнитных силовых линий, не пересекающих альфвеновскую поверхность, накладывает определенные ограничения на продольные токи, циркулирующие в магнитосфере. Более того, детальные расчеты показывают, что полная энергия электромагнитного поля оказывается минимальной именно вблизи граничной линии $\beta_0 = \beta_0(i_0)$, когда, кстати, нулевая точка магнитного поля лежит вблизи светового цилиндра $x = 1$ [103]. Следовательно, можно предположить, что равновесие магнитосферы радиопульсаров реализуется лишь при определенной связи между ускоряющим потенциалом $\psi(P, B_0)$ и продольным током.

Существование такого "закона Ома" является, безусловно, чрезвычайно важным выводом. Действительно, как было показано, именно продольные токи опреде-

ляют потери энергии вращения нейтронной звезды. Следовательно, при существовании связи между продольным током и ускоряющим потенциалом потери энергии нейтронной звезды должны полностью определяться конкретным механизмом рождения частиц у поверхности пульсара.

Отметим, что соотношение согласования, задающее нелинейный "закон Ома", может быть получено непосредственно из уравнения равновесия. Действительно, предполагая, что силовая линия $\Psi = \Psi_*$, соответствующая решению уравнения (155) в области открытой магнитосферы, проходит вблизи нулевой точки (где $B_z \sim \partial\Psi/\partial x = 0$), расположенной на световом цилиндре (где $x = 1$), имеем

$$\beta_0(i_0) = 1 - \left(1 - \frac{i_0^2}{i_{\max}^2}\right)^{1/2}, \quad (160)$$

где $i_{\max} = (\nabla^2\Psi/\Psi_*)^{1/2} \approx 1,58$ [92]. Как видно из рис. 6, аналитическая оценка (160) находится в хорошем согласии с численными расчетами. При этом, как показано в [10], соотношение (160) в целом остается справедливым и для наклонного ротатора.

Анализ астрофизических данных выходит за рамки настоящей работы. Тем не менее напомним здесь кратко основные наблюдательные данные, которые могли бы быть объяснены на основе развитой выше теории.

1. Если мы правильно понимаем природу пульсаров, то их радиоизлучение должно быть связано со вторичной плазмой, рождаемой в области продольного электрического поля у поверхности звезды [9, 10]. Следовательно, условие $\psi(P, B) = \psi_{\max}$ можно рассматривать как условие для максимального периода, до которого нейтронная звезда может быть зарегистрирована как радиопульсар. Так, в модели Рудермана–Сазерленда (затрудненный выход частиц с поверхности, дипольное магнитное поле) [88, 89] имеем $P_{\max} \sim 1$ с, что как раз соответствует наблюдениям [104, 105]. Соотношение $P < P_{\max}$ можно переписать в виде $Q < 1$, где [106]

$$Q = 2 \left(\frac{P}{1\text{с}}\right)^{11/10} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-15}}\right)^{-4/10}. \quad (161)$$

Параметр $Q \simeq i_0$, определяемый, как мы видим, непосредственно из наблюдений, оказывается чрезвычайно удобным параметром, описывающим основные характеристики радиопульсаров [106–108]. Так, пульсары с $Q \sim 1$, у которых диаграмма направленности представляет собой достаточно тонкий конус, должны в большей степени иметь двугорбый средний профиль радиоизлучения; именно у таких пульсаров в их радиоизлучении должны регистрироваться различные нерегулярности, такие как прекращение радиоизлучения (нуллинг), переключение мод и т.д. Напротив, пульсары с $Q \ll 1$ должны характеризоваться стабильным радиоизлучением, их средние профили в большинстве должны быть одногорбыми. Как известно, именно такая ситуация и наблюдается в действительности [10].

2. Важнейшим параметром радиопульсаров, несущим информацию о характере замедления вращения, является так называемый параметр торможения n_{br} [105], который может быть определен непосредственно из наблюдений: $n_{\text{br}} = \dot{\Omega}\Omega/\dot{\Omega}^2$. К сожалению, в настоящее время параметр торможения определен лишь у несколь-

ких радиопульсаров [105], причем $n_{br} = 2,24$ для пульсара PSR 0540 – 693 и $n_{br} = 2,84$ для пульсара PSR 1509 – 58. Для магнитодипольных потерь (140) имеем $n_{br} = 3 + (\cos \chi)^{-2}$, что не согласуется с наблюдениями. С другой стороны, для токовых потерь [10] $n_{br} = 1,93 + 1,5 \tan^2 \chi$, что не противоречит наблюдениям.

3. В стандартной модели с затрудненным выходом частиц [88] продольный ток равен как раз гольдрайховскому току. Соответственно, достаточно большой оказывается и полная энергия частиц, бомбардирующих поверхность нейтронной звезды, что приводит к противоречию с наблюдаемым рентгеновским излучением [90]. Однако, согласно (160), у быстрых радиопульсаров (у которых лишь и наблюдается рентгеновское излучение) продольный ток должен быть значительно меньше гольдрайховского тока. В результате значительно меньшим по сравнению со стандартными оценками [88] должен быть и нагрев полярной шапки, вызванный вторичными частицами. Напомним, что в модели Арона [90] подобной проблемы не возникало.

Таким образом, ключевые предсказания теории (основанные на модели с затрудненным выходом частиц с поверхности нейтронной звезды, а также на изложенной выше гипотезе о связи продольного тока и ускоряющего потенциала) не противоречат данным наблюдений. Более того, в последнее время нашли свое подтверждение и другие, более косвенные выводы, такие как утверждение об отсутствии эволюции магнитного поля нейтронной звезды за время ее активности как радиопульсара, а также статистический вывод о том, что начальный период радиопульсаров в большинстве случаев составляет не 1–10 мс, как в случае наиболее известных молодых пульсаров Crab и Vela, а лишь 0,1–1 с [106]. Конечно, ключевым экспериментом было бы прямое измерение эволюции угла наклона осей χ , который должен стремиться к $\pi/2$ в модели токовых потерь. Однако в настоящий момент сделать это не представляется возможным.

5. Бессилловое приближение — магнитосфера черной дыры

5.1. Бессилловый предел уравнения равновесия в метрике Керра

Как известно, в настоящее время наиболее популярной моделью "центральной машины" в активных галактических ядрах и квазарах является сверхмассивная черная дыра с массой $M \sim (10^8 - 10^9) M_\odot$ [12, 109–114]. Действительно, именно аккреция на подобные компактные объекты позволяет понять природу как их чрезвычайно интенсивного энерговыделения $L \sim 10^{44} - 10^{46}$ эрг с⁻¹, так и достаточную стабильность наблюдаемых струйных выбросов [115].

Отметим, что имеется два ключевых отличия магнитосферы черной дыры от магнитосферы нейтронных звезд. Прежде всего, собственное магнитное поле черной дыры должно исчезать за динамическое время $\sim r_H/c$ [13], что для галактических ядер составляет лишь $\sim 10^3$ с. Поэтому магнитное поле должно постоянно поддерживаться внешними источниками, а именно токами, текущими в аккреционном диске. Согласно как первым оценкам [13, 37], так и последним работам [116, 117], магнитное поле у поверхности черной дыры может

достигать так называемых эддингтоновских величин

$$B_{\text{Edd}} \sim 10^4 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot} \right)^{-1/2} \text{ Гс}, \quad (162)$$

когда плотность энергии магнитного поля совпадает с плотностью аккрецирующей плазмы, дающей как раз эддингтоновскую светимость [115]. Кроме того, ясно, что в самом аккреционном диске, где вязкие силы являются определяющими, сам метод уравнения Грэда – Шафранова становится некорректным. Вместе с тем, в полярных областях магнитосферы плотность энергии магнитного поля может уже существенно превышать плотность энергии частиц. Поэтому в настоящем разделе мы уделим основное внимание именно той области магнитосферы, которая связана силовыми линиями с горизонтом черной дыры, тем более что альтернативные модели, в которых основную роль в формировании струйных выбросов играют силовые линии, проходящие через аккреционный диск, достаточно подробно исследованы как в рамках метода автомодельных решений [27, 55, 118], так и численно [119–121].

Перейдем теперь к обсуждению магнитосферы вращающейся черной дыры. Запишем прежде всего основные уравнения бессилового приближения. Уравнение равновесия переписывается теперь в виде [37, 68]

$$\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left\{ \frac{\alpha}{\varpi^2} \left[1 - \frac{(\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2}{\alpha^2} \right] \nabla^k \Psi \right\} + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} + \frac{16\pi^2}{\alpha^2 \varpi^2} I \frac{dI}{d\Psi} = 0. \quad (163)$$

Это уравнение является эллиптическим уравнением второго порядка, содержащим лишь два интеграла движения. При этом, как уже говорилось, оно содержит две особые поверхности — альфвеновские поверхности, которые вновь совпадают со световыми цилиндрами. Одна из них, соответствующая истекающей плазме, полностью эквивалентна световому цилиндру в магнитосфере нейтронных звезд, а вторая, внутренняя поверхность, на которой $\alpha \approx (\Omega_H - \Omega_F) \varpi_H$, обусловлена эффектами общей теории относительности. Условие же на горизонте (47), которое в бессилловом приближении может быть переписано как [37]

$$4\pi I(\Psi) = (\Omega_H - \Omega_F) \sin \theta \frac{r_H^2 + a^2}{r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta} \frac{d\Psi}{d\theta}, \quad (164)$$

как было показано выше в общем виде, получается просто путем интегрирования уравнения равновесия (163) и не может поэтому рассматриваться как граничное условие.

Как уже говорилось, в общем магнитогидродинамическом подходе на силовых линиях, проходящих через горизонт, неизбежно возникает область генерации вещества, разделяющая области аккреции и эжекции, где само уравнение Грэда – Шафранова уже неприменимо. Однако, если в области генерации падение потенциала много меньше характерной разности потенциалов, а поверхностные токи много меньше продольных токов, то в этом случае можно считать, что $\Omega_F^+ = \Omega_F^-$ и $I^+ = I^-$. В результате значения двух интегралов движения будут одинаковыми вдоль всей магнитной силовой линии, связанной с черной дырой.

С другой стороны, во многих отношениях магнитосфера черной дыры оказалась сходной с магнитосферой радиопульсаров. Прежде всего, условия (127)–(129), необходимые для справедливости бессилового приближения, оказываются выполненными и для полярных областей магнитосферы черной дыры. При этом ключевым результатом здесь является эффект Блендфорда–Знайека [36], благодаря которому вращающаяся черная дыра может терять энергию и угловой момент за счет продольных токов, текущих в магнитосфере. Этот вывод, по существу, основан на том факте, что вдали от звезды, где пространство является плоским, мы по-прежнему можем пользоваться соотношениями (141) и (144). Более того, в рамках так называемой мембранной парадигмы можно ввести понятия "поверхностного заряда" и "поверхностного тока" черной дыры, в результате чего потери энергии запишутся в виде, полностью эквивалентном соотношению (138) для пондеромоторного действия поверхностных токов, текущих по поверхности нейтронной звезды [13].

Имеется, однако, еще одно существенное различие магнитосфер черной дыры и нейтронной звезды. Дело в том, что запасы энергии черной дыры содержатся не только в энергии вращения, но и в так называемой неприводимой массе, пропорциональной площади поверхности черной дыры [13]. Поэтому энергетический баланс для черной дыры отличается от простейшего соотношения $W_{\text{tot}} = \Omega K_{\text{tot}}$, справедливого для нейтронных звезд. Будучи записанным в термодинамической форме, он имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = T \frac{dS}{dt} - \Omega_H \frac{dJ}{dt}. \quad (165)$$

Здесь $dE/dt = -W_{\text{tot}}$, $dJ/dt = -K_{\text{tot}}$, а "температура" T и "энтропия" S как раз связаны с внутренними параметрами черной дыры (подробнее см. [13]).

Воспользовавшись теперь соотношениями (141), (144) и (165), получаем для полных потерь энергии

$$W_{\text{tot}} = k_1 i_0 \Omega_F (\Omega_H - \Omega_F) \frac{B_0^2 r_H^4}{c}, \quad (166)$$

где $k_1 \simeq 1$, а i_0 вновь соответствует величине безразмерного тока. Следовательно, потери энергии будут положительными лишь при выполнении условия

$$0 < \Omega_F < \Omega_H, \quad (167)$$

причем наибольшие потери достигаются при $\Omega_F = \Omega_H/2$. Имеем в результате $W_{\text{tot}} \sim W_{\text{BZ}}$, где

$$W_{\text{BZ}} = \frac{1}{4} \frac{\Omega_H^2 B_0^2 r_H^4}{c} = 10^{45} \left(\frac{B_0}{10^4 \text{ Гс}} \right)^2 \left(\frac{\Omega_H r_H}{c} \right)^2 \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right], \quad (168)$$

так что для быстро вращающейся черной дыры теория действительно позволяет объяснить и наблюдаемые энергии струйных выбросов [13, 37].

С другой стороны, мы видим, что проблема определения энергетических потерь вращающейся черной дыры связана не столько с вопросом о величине продольного тока, как это было в случае магнитосферы радиопульсаров, сколько с вопросом о величине угловой скорости вращения магнитных силовых линий $\Omega_F(\Psi)$. Действительно, в случае магнитосферы черной дыры угловая

скорость $\Omega_F(\Psi)$, вообще говоря, никак не связана с угловой скоростью черной дыры Ω_H , а должна сама определяться из решения полной задачи. Величина же продольного тока I может быть определена тогда с помощью соотношения (164).

Отметим, что для простейшего случая бесконечно тонкого диска в задаче о структуре магнитосферы черной дыры большую роль приобретает простейшее монополярное решение (146), (147), полученное Майкелем для магнитосферы пульсара [46]. Действительно, в простейшей вакуумной модели, в которой магнитные силовые линии не проникают в тонкий аккреционный диск, имеющий внутренний радиус b , структура магнитного поля (в отсутствие черной дыры) будет описываться потенциалом

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) = \\ = \Psi_0 \left[1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2 + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{b^2}} \right]. \end{aligned} \quad (169)$$

В пределе $b \rightarrow 0$ (и при сохранении полного потока Ψ_0) формула (169) в каждой из полусфер переходит в монополярное поле (147). Скачок же магнитного поля на экваторе связан как раз с токами, текущими по поверхности диска.

5.2. Поведение решения вблизи горизонта

Обсудим теперь основные свойства магнитосферы вблизи горизонта черной дыры, где эффекты общей теории относительности играют определяющую роль. Начнем с того, что, как было показано, в общем магнитогидродинамическом случае над горизонтом черной дыры общее уравнение (41) имеет гиперболическую область, благодаря чему это уравнение не требует здесь никаких дополнительных граничных условий. При этом, согласно (48), даже в пределе $M^2 \rightarrow 0$ на горизонте должно быть выполнено условие $D = -1$. С другой стороны, уравнение (163) остается эллиптическим вплоть до самого горизонта. Поэтому необходимо рассмотреть вопрос о предельном переходе к случаю бессиловой магнитосферы более подробно.

Рассмотрим поэтому условия регулярности (33), (37) при $M^2 \rightarrow 0$ на быстрой магнитозвуковой поверхности. Как видно из (31), само положение поверхности при $M^2 \rightarrow 0$ стремится к горизонту черной дыры. С другой стороны, вся сингулярность в величине D содержится в факторе $1/M^2$. Величины же $N'_a = \nabla_a M^2 D / M^2 = N_a / A$ остаются при $M^2 \rightarrow 0$ конечными на горизонте. Поэтому в качестве предела условий регулярности (37) можно рассмотреть значения N'_a при $M^2 = 0$ и $r = r_H$.

Запишем прежде всего условие $N'_\theta(r_H) = 0$, которое может быть представлено в виде

$$\frac{d}{d\theta} \left[64\pi^4 \frac{(E - \Omega_H L)^2}{(\Omega_F - \Omega_H)^4 \varpi^2} - \frac{1}{\rho^2(r_H)} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)^2 \right] = 0. \quad (170)$$

Как легко видеть, (170) совпадает с условием (164) и, следовательно, не накладывает никаких дополнительных ограничений. Аналогично, как легко проверить, к условию (164) приводит и равенство $M^2 D(r_H) = 0$. Наконец, условие $N'_r(r_H) = 0$ после элементарных, хотя и громозд-

ких преобразований может быть сведено к виду

$$r_H \frac{\partial}{\partial r} \left[(\nabla \Psi)^2 - \frac{16\pi^2 I^2}{(\Omega_F - \omega)^2 \varpi^2} \right]_{r_H} + \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)^2 \frac{2\xi + (\Omega_H - \Omega_F) \varpi [\xi^2 + 1/(\alpha\gamma)^2]}{(\Omega_H - \Omega_F) \varpi \rho^2} = 0, \quad (171)$$

где

$$\xi = \left(\frac{u_{\phi}}{\alpha\gamma} \right)_{r=r_H}, \quad (172)$$

а все метрические величины в (171) берутся для горизонта черной дыры.

Как мы видим, условие (171), помимо "бессиловых" величин $I(\Psi)$ и $\Omega_F(\Psi)$, содержит еще параметры плазмы γ и u_{ϕ} , причем для релятивистской плазмы, $\alpha\gamma \gg 1$, — лишь их отношение ξ (172). Следовательно, бессиловой предел общего магнитогидродинамического условия регулярности (37) на внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности не накладывает никаких дополнительных условий на бессиловое уравнение (163), а лишь фиксирует отношение ξ на горизонте черной дыры. При этом, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r} (\nabla \Psi)^2 \sim \frac{\Psi_0^2}{r_H^3},$$

имеем

$$u_{\phi}(r_H) \sim \alpha\gamma \Omega_H \varpi_H, \quad (173)$$

что полностью согласуется с общими уравнениями (20), (21).

Рассмотрим теперь вопрос об условии регулярности (44) на альфвеновской поверхности при стремлении к нулю угловой скорости вращения черной дыры. Как легко видеть из определения (24), альфвеновская поверхность при этом также будет стремиться к поверхности горизонта (на оси же вращения альфвеновская поверхность в бессиловом приближении всегда касается поверхности черной дыры). В результате, записав бессиловой предел условия регулярности (44), имеем при $\alpha \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0. \quad (174)$$

Но последнее условие совпадает с ведущим членом в уравнении (163) (при $\Omega_F = 0$ и $I = 0$), описывающим вакуумное магнитное поле у поверхности черной дыры. Таким образом, условие (164) может рассматриваться как граничное условие на горизонте лишь в том случае, если потенциал Ψ соответствует вакуумному магнитному полю.

5.3. Точные решения

Первый пример точного решения уравнения (163) для случая бесконечно тонкого аккреционного диска был построен Блендфордом и Знайеком [36], которые в качестве нулевого приближения рассмотрели магнитосферу невращающейся черной дыры с монополярным магнитным полем. Как было показано, для медленно вращающейся черной дыры ($\Omega_H r_H \ll 1$) монополярное поле $\Psi = \Psi_0(1 - \cos \theta)$ при условии

$$\Omega_F = \frac{\Omega_H}{2}, \quad I(\Psi) = I_M = \frac{\Omega_F}{8\pi^2} \left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0} \right) \quad (175)$$

остается точным решением и для нелинейного уравнения (163). Оно является обобщением решения Майкеля [46] на случай медленно вращающейся черной дыры. При этом двумя граничными условиями, определившими это решение, являлись нулевая нормальная компонента магнитного поля на поверхности диска и монополярное поведение поля на бесконечности. В той же работе [36] было построено еще одно решение для случая, когда в отсутствие вращения потенциал Ψ имеет вид $\Psi(r, \theta) = r(1 - \cos \theta)$.

Отметим, что в работе Блендфорда и Знайека фактически была рассмотрена обратная задача, когда значения продольного тока $I(\Psi)$ и угловой скорости $\Omega_F(\Psi)$ были определены для конкретной структуры полоидального магнитного поля. Более точно, были найдены такие значения $I(\Psi)$ и $\Omega_F(\Psi)$, для которых монополярное поле остается решением уравнения равновесия во всем пространстве. Действительно, условия (175) могут быть сразу получены непосредственно из алгебраических соотношений, характеризующих поведение решения у горизонта черной дыры и на бесконечности. В качестве первого соотношения должно быть выбрано условие на горизонте (164). Вторым же условием будет соотношение

$$4\pi I(\Psi) = \Omega_F(\Psi) \left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0} \right). \quad (176)$$

Как легко проверить, при выполнении условия (176) монополярное магнитное поле будет решением уравнения равновесия (163) для любой функции $\Omega_F(\Psi)$. В итоге для малых угловых скоростей вращения можно положить $\Psi = \Psi_0(1 - \cos \theta)$, в результате чего система уравнений (164), (176) приводит к выражениям (175).

Отметим, наконец, что соотношение (176) является отражением более общего утверждения, согласно которому уравнение Грэда – Шафранова удастся проинтегрировать в тех случаях, когда вследствие каких-то причин оно становится одномерным. Так, легко проверить, что в асимптотически далекой области $r \rightarrow \infty$ для конических магнитных поверхностей $\Psi = \Psi(\theta)$ уравнение равновесия (163) приводит к соотношению [122, 123]

$$4\pi I(\theta) = \Omega_F(\theta) \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta}, \quad (177)$$

обобщающему равенство (176). Для цилиндрического же решения в плоском пространстве, в котором все величины зависят лишь от координаты ϖ , имеем [124]

$$\Omega_F^2(\Psi) \varpi^4 B_z^2 = \varpi^2 B_\phi^2 + \int_0^\varpi x^2 \frac{d}{dx} B_z^2 dx. \quad (178)$$

В частности, однородное магнитное поле $B_z = \text{const}$ будет решением нелинейного уравнения (163) при любых значениях интегралов движения $\Omega_F(\Psi)$ и $I(\Psi)$, удовлетворяющих условию

$$4\pi I(\Psi) = 2\Omega_F(\Psi) \Psi. \quad (179)$$

Таким образом, в одномерном случае задание любых двух величин полностью определяет решение уравнения равновесия. При этом необходимо, однако, иметь в виду, что решение прямой задачи (т.е. определение полоидального магнитного поля по заданным величинам $B_\phi(\varpi)$ и $\Omega_F(\varpi)$) не всегда имеет решение. Действительно, при

$B_\varphi = 0$ и $\Omega_F = \text{const}$ получаем

$$B_z(\varpi) = \frac{B_z(0)}{1 - \Omega_F^2 \varpi^2}, \quad (180)$$

так что в этом случае решение не может быть продолжено за пределы светового цилиндра. С другой стороны, при заданном магнитном поле $B_z(\varpi)$ всегда можно найти значения $B_\varphi(\varpi)$ и $\Omega_F(\varpi)$, для которых это поле будет решением уравнения равновесия. В этом случае, однако, величина продольного тока должна быть близка к гольдрайховскому току I_M .

5.4. Структура магнитосферы

Рассмотрим прежде всего вопрос о возможности рождения плазмы в полярных областях магнитосферы, связанной с релятивистскими эффектами в магнитосфере черной дыры. Согласно (13), точная релятивистская формула для гольдрайховской плотности заряда ρ_{GJ} имеет вид

$$\rho_{GJ} = \frac{1}{8\pi^2} \nabla \left(\frac{\Omega_F - \omega}{\alpha c} \nabla \Psi \right). \quad (181)$$

В частности, вблизи оси вращения имеем просто

$$\rho_{GJ} \approx - \frac{(\Omega_F - \omega) B}{2\pi c \alpha}. \quad (182)$$

Таким образом, эффекты общей теории относительности приводят к тому, что гольдрайховская плотность становится равной нулю при $\Omega_F \simeq \omega$. Это становится возможным при выполнении условия $0 < \Omega_F < \Omega_H$ (167), при котором как раз и происходит выделение вращательной энергии черной дыры. Например, для монополярного магнитного поля поверхностью $\rho_{GJ} = 0$ является сфера радиусом $r_0 = 2^{1/3} r_H \approx 1,26 r_H$. Как мы видим, эта поверхность расположена не столь близко к горизонту черной дыры. В общем же случае для определения поверхности $\rho_c = 0$ необходимо знать как структуру магнитного поля $\Psi(r, \theta)$, так и зависимость угловой скорости Ω_F от потенциала Ψ .

В результате в магнитосфере черной дыры возникает область, вполне аналогичная внешнему зазору в магнитосфере радиопульсаров [97]. В этой области, как уже отмечалось, возможно появление продольных электрических полей, так как течение однозарядной плазмы не может обеспечить выполнение условия $\rho_c = \rho_{GJ}$. Продольное же электрическое поле приводит к ускорению частиц, что, как оказалось, и способно инициировать рождение вторичной электронно-позитронной плазмы за счет двухфотонного процесса $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$. При этом жесткие γ -кванты появляются за счет взаимодействия ускоренных частиц с фоновым излучением (подробнее см. [125, 126], где также показано, что в реальных условиях размер области ускорения много меньше размеров системы, так что область ускорения не влияет на глобальную структуру магнитосферы). Однофотонное же рождение частиц, как и в случае внешнего зазора в магнитосфере радиопульсаров, невозможно из-за слишком слабого магнитного поля (162).

Перейдем теперь к вопросу о структуре магнитосферы черной дыры; заодно будут определены значения угловой скорости $\Omega_F(\Psi)$ и тока $I(\Psi)$, а значит, и форма поверхности $\rho_{GJ} = 0$. В отличие от случая монополярного магнитного поля, мы рассмотрим, на наш взгляд, более реалистичный случай, когда черная дыра находится в

центре хорошо проводящего диска с внутренним радиусом b . При этом, как и в работе [36], будем предполагать, что магнитные силовые линии не проникают в аккреционный диск.

В отсутствие черной дыры потенциал Ψ , как уже говорилось, описывается формулой (169). Разлагая теперь выражение (169) около $r = 0$ в ряд по мультиполям и пришивая каждую гармонику к ее асимптотике у горизонта черной дыры, легко получить выражение для потенциала Ψ в вакуумном приближении (а значит, и для магнитосферы невращающейся черной дыры) [125]. Так, при $r_H \ll b$ имеем

$$\Psi_v = \Psi_0 \left[\frac{1}{2} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} - \frac{1}{120} \frac{r^4}{b^4} F(r) (4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^4 \theta) + \dots \right], \quad (183)$$

где $F(-4, -2, 1, 1 - r_H/r)$ — гипергеометрическая функция. Следовательно, вблизи черной дыры магнитное поле является однородным:

$$\Psi_v \approx \frac{1}{2} \Psi_0 \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2}. \quad (184)$$

Рассмотрим теперь случай медленно вращающейся черной дыры. Легко видеть, что в широкой области $r_H (\Omega_H r_H)^2 \ll r - r_H \ll 1/\Omega_H$ уравнение равновесия (163) с точностью до малой величины $\sim (\Omega_H r_H)^2$ совпадает с вакуумным уравнением. Поэтому, как и в работе Блендфорда–Знайека [36], задача об определении поправок к вакуумному магнитному полю фактически отделяется от задачи об определении продольного тока I и угловой скорости Ω_F . При этом двумя граничными условиями для их определения являются условия на внешней и внутренней альфвеновских поверхностях. Действительно, потенциал Ψ (169), как легко проверить, дает монополярное магнитное поле $\Psi = \Psi_0 (1 - \cos \theta)$ на больших расстояниях от черной дыры: $r \gg b$. В результате это поле останется решением нелинейного уравнения (163) (и, в частности, не будет иметь особенности на альфвеновской поверхности) при выполнении условия [36]

$$4\pi I(\Psi) = \Omega_F(\Psi) \left(2\Psi - \frac{\Psi^2}{\Psi_0} \right). \quad (185)$$

С другой стороны, вблизи горизонта, как было показано выше, условие регулярности на внутренней альфвеновской поверхности (при условии, что само магнитное поле (184) является решением вакуумного уравнения), совпадает с условием на горизонте (164), что дает

$$4\pi I(\Psi) = 2\Psi \sqrt{1 - \frac{\Psi}{\Psi_*}} [\Omega_H - \Omega_F(\Psi)]. \quad (186)$$

Здесь $\Psi_* = 0,5 \Psi_0 r_H^2 / b^2$ — магнитный поток через поверхность черной дыры. В результате, комбинируя соотношения (185) и (186), получаем

$$\Omega_F(\Psi) = \frac{\sqrt{1 - \Psi/\Psi_*}}{1 - \Psi/2\Psi_0 + \sqrt{1 - \Psi/\Psi_*}} \Omega_H, \quad (187)$$

$$4\pi I(\Psi) = 2\Psi \left(1 - \frac{\Psi}{2\Psi_0} \right) \frac{\sqrt{1 - \Psi/\Psi_*}}{1 - \Psi/2\Psi_0 + \sqrt{1 - \Psi/\Psi_*}} \Omega_H. \quad (188)$$

Соотношения (187), (188) и определяют структуру электрических полей и продольных токов в магнитосфере черной дыры.

Мы видим прежде всего, что $I(\Psi_*) = 0$. Следовательно, в построенной выше модели в пределах силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры, неизбежно возникает обратный ток, так что полный ток, текущий в области $\Psi < \Psi_*$, автоматически равен нулю. Соответственно, условие $\Omega_F(\Psi_*) = 0$ показывает, что будет равен нулю и полный электрический заряд. Далее, как видно из рис. 7, область продольного тока образует "струйный выброс" с угловым раствором

$$\theta_j = \arccos\left(1 - \frac{\Psi_*}{\Psi_0}\right) \approx \frac{r_H}{b}.$$

При этом энергия, переносимая электромагнитным полем

$$E = \frac{1}{2\pi} \int \Omega_F(\Psi) I(\Psi) d\Psi$$

в пределах "струйного выброса", близка к максимально возможной (168) $W_{\text{tot}} = 0,489 W_{\text{BZ}}$, поскольку угловая скорость (187) близка к $\Omega_H/2$.

На рисунке 7 показана также форма поверхности $\rho_{\text{GJ}} = 0$. Как мы видим, каждая магнитная силовая линия, пересекающая горизонт черной дыры, пересекает и поверхность $\rho_{\text{GJ}} = 0$, где, как было показано, и происходит рождение вторичной плазмы, заполняющей магнитосферу. При этом различные ветви этой поверхности соответствуют различным направлениям продольного тока $j \propto dI/d\Psi$. Этот результат (который не зависит от величины угловой скорости черной дыры) легко может быть объяснен. Дело в том, что вблизи горизонта, где, согласно (164), электрическое поле стремится к магнитному, $|\mathbf{E}| \rightarrow |\mathbf{B}|$, а все частицы движутся по направлению

к дыре со скоростью, близкой к скорости света, главную роль начинает играть дрейфовая компонента

$$\mathbf{j} = c\rho_e \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2} \approx -c\rho_e \frac{\mathbf{r}}{r},$$

которая как раз пропорциональна плотности заряда ρ_{GJ} .

Таким образом, построена модель бессиловой магнитосферы для случая квазиоднородного магнитного поля вблизи горизонта черной дыры. Показано, что, в отличие от квазимонопольной модели Блендфорда–Знайека, как полный заряд, так и полный электрический ток, текущий в области силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры, тождественно равны нулю.

6. Общий МГД-случай — проблема формирования струйных выбросов

6.1. Приближение холодной плазмы

В заключение рассмотрим вопрос о свойствах истекающей плазмы, излучение которой регистрируется в струйных выбросах из активных галактических ядер и квазаров [12, 115], а также из молодых звезд [8, 127] и в остатках сверхновых (плерионах), содержащих радиопульсары [128–131]. Как уже говорилось, в настоящее время именно магнитогиродинамическая модель рассматривается как наиболее предпочтительная для объяснения природы таких выбросов [115], так как здесь удается достаточно легко понять как энергетический источник их активности (вращающийся компактный объект, например аккрецирующая черная дыра), так и механизм выделения энергии и углового момента. Кроме того, в рамках подобных моделей механизм передачи энергии от поля к частицам может стать неэффективным, что в принципе объяснило бы и передачу энергии от "центральной машины" к областям излучения в радиогалактиках [12]. Неудивительно поэтому, что магнитогиродинамической модели струйных выбросов посвящено значительное количество работ, начиная от исследования вопросов о самой возможности коллимации магнитных поверхностей [25, 27, 51, 67, 132, 133] и их реальной структуре [134–137] и кончая работами по их устойчивости [138, 139] и природе наблюдаемого излучения [12, 115]. При этом было выполнено большое количество численных расчетов [140–142], позволивших значительно продвинуться в понимании структуры струйных выбросов и, в частности, в определении механизма выделения энергии в активных областях. Однако, как уже говорилось, последовательных аналитических результатов до настоящего времени получено не было. С другой стороны, о молодых радиопульсарах давно было известно, что уже на расстояниях, малых по сравнению с размерами остатка взрыва сверхновой, основная часть энергии переносится не электромагнитной волной, а частицами [129, 143], хотя в пределах светового цилиндра ситуация, как мы видели, обратная. Следовательно, в радиопульсарах должна осуществляться эффективная передача энергии от электромагнитного поля к частицам.

В теоретическом же плане ключевым вопросом здесь является вопрос о величине продольного электрического тока, циркулирующего в магнитосфере. Как мы видели, при токах, превышающих гольдрайховский ток (146), становится возможной коллимация магнитных силовых

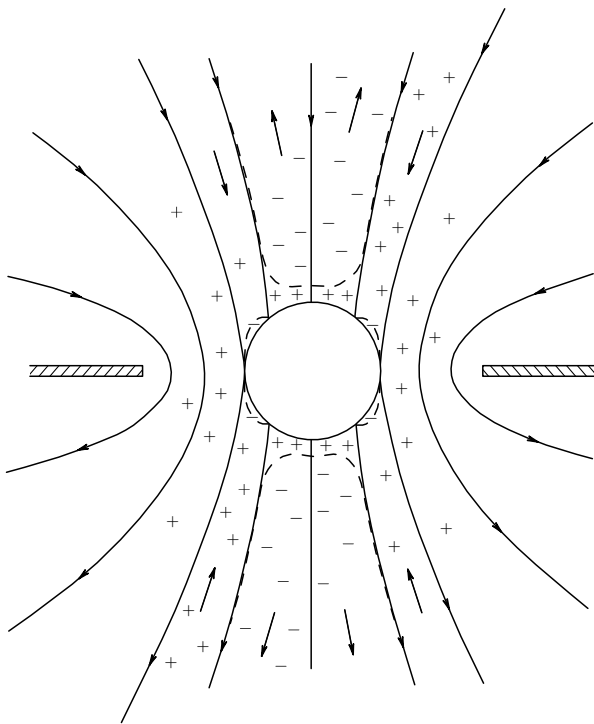


Рис. 7. Структура магнитосферы черной дыры и форма поверхности $\rho_{\text{GJ}} = 0$.

линий вдоль оси вращения. Напомним, что в рамках бессилового приближения продольный ток является свободной величиной. Однако в общем магнитогидродинамическом случае, когда число особых поверхностей увеличивается, гладкое прохождение через все особые поверхности становится возможным лишь при фиксированном выборе продольного тока.

Ниже мы для простоты рассмотрим случай холодной плазмы, поскольку, как уже отмечалось, тепловые процессы в магнитосфере радиопульсаров не играют определяющей роли. Что же касается струйных выбросов из активных галактических ядер, то здесь это приближение применимо в тех областях магнитосферы, в которых плотность аккрецирующего газа невелика. Это, по-видимому, верно для силовых линий, проходящих через поверхность черной дыры, которые как раз и рассматривались в предыдущем разделе.

Итак, рассмотрим осесимметричное стационарное течение холодной релятивистской плазмы. Ясно, что такое приближение фактически определяет один из интегралов движения, поскольку теперь $s(\Psi) = 0$. Следовательно, в рассматриваемом приближении имеются лишь четыре интеграла движения. Это потоки энергии и углового момента, а также угловая скорость вращения $\Omega_F(\Psi)$ и отношение потока частиц к магнитному потоку $\eta(\Psi)$. При этом энтальпия μ теперь совпадает с массой частиц и, следовательно, является постоянной. В результате, хотя внешне уравнение равновесия (41), где теперь

$$D = \frac{A}{M^2} + \frac{\alpha^2}{M^2} \frac{B_\phi^2}{B_p^2}, \quad (189)$$

а также условие связи практически совпадают с уравнениями (23) и (41), фактически они существенно проще. Прежде всего это связано с тем, что производная ∇'_k теперь уже не действует на величины μ . Кроме того, уравнение связи (23) при $\mu = \text{const}$ становится алгебраическим уравнением четвертого порядка для величины M^2 . В результате, как будет показано, в некоторых случаях это позволит получить аналитические асимптотики уравнения (23), т.е. явно определить M^2 как функцию четырех интегралов движения и потенциала Ψ . Кроме того, в приближении холодной плазмы будут отсутствовать медленная и касповая особые поверхности [71], что также существенно упрощает анализ уравнения равновесия. В результате, согласно (45), уравнение равновесия (41) требует четырех граничных условий.

Интересно, что, как и в бессильном приближении, уравнение равновесия в одномерном случае может быть проинтегрировано [26]. Действительно, для конических магнитных поверхностей $\Psi = \Psi(\theta)$ в асимптотически далекой области $r \rightarrow \infty$ уравнение равновесия (41) переписывается в виде

$$-\frac{g}{g+1} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{A^2}{64\pi^4 r^4 \sin^2 \theta} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu^2 \eta^2}{\Omega_F^2 g} \frac{d\Omega_F}{d\theta} + \frac{g}{g+1} \frac{dE^2}{d\theta} - \frac{d}{d\theta} (\mu^2 \eta^2) = 0, \quad (190)$$

где

$$g = \frac{M^2}{\Omega_F^2 \varpi^2}. \quad (191)$$

В итоге, воспользовавшись асимптотикой уравнения связи (23), имеем

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\mu^2 \eta^2}{g^2 \Omega_F^2} \right) = 0. \quad (192)$$

В частности, при $\eta = \text{const}$, $\Omega_F = \text{const}$ получаем просто

$$g = \text{const}. \quad (193)$$

Подчеркнем, что соотношения (190)–(193) не справедливы при $\theta \rightarrow 0$, так как они были получены в предположении $\varpi \gg R_L$.

Наконец, уравнение равновесия (41) (для случая медленного вращения и при отсутствии гравитации) было проинтегрировано Боговаловым в задаче об истечении релятивистской электронно-позитронной плазмы с поверхности шара с монополярным магнитным полем [67]. При этом был как раз применен метод, широко используемый в настоящей работе. Действительно, ясно, что в отсутствие вращения (т.е. при $\Omega_F = 0$, $L = 0$) монополярное магнитное поле $\Psi = \Psi_0(1 - \cos \theta)$ вновь является решением уравнения равновесия. При этом четырьмя граничными условиями на поверхности шара радиуса R будут значения

$$\begin{aligned} \Omega_F(R, \theta) &= 0, \\ \gamma(R, \theta) &= \gamma_{\text{in}} = \text{const}, \\ n(R, \theta) &= n_{\text{in}} = \text{const}, \end{aligned} \quad (194)$$

а также монополярное магнитное поле на поверхности $\Psi(R, \theta) = \Psi_0(1 - \cos \theta)$. На расстоянии

$$r_a = R \frac{B_p}{\sqrt{4\pi n_{\text{in}} m_e c^2}} \quad (195)$$

течение плазмы гладко пересекает альфвеновскую и совпадающую с ней при $I = 0$ быструю магнитозвуковую поверхности.

Предположим теперь, что тело начинает вращаться с малой угловой скоростью Ω , так что параметр

$$\varepsilon_B = \frac{\Omega r_a}{c} \quad (196)$$

остается много меньше единицы. В результате решение уравнения равновесия вновь можно искать в виде

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0 [1 - \cos \theta + \varepsilon_B g_2(x) \sin^2 \theta \cos \theta],$$

где $x = r/r_a$, а радиальная функция $g_2(x)$ должна определяться из уравнения

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 g_2}{dx^2} + 2x \frac{dg_2}{dx} + \frac{6}{x^2} g_2 - \frac{2}{\sigma^2} = 0. \quad (197)$$

Точное решение уравнения (197) можно найти в работе Боговалова [67]. Асимптотика же решения при $r \rightarrow \infty$, как и в большинстве гидродинамических задач, рассмотренных в разделе 3, полностью определяется неоднородным решением уравнения (197), т.е. не зависит от граничных условий. В результате имеем на расстояниях $r \gg r_a$

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0 \left[1 - \cos \theta + 2\varepsilon_B^2 \frac{1}{\sigma^2} \ln \left(\frac{r}{r_a} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right]. \quad (198)$$

Как мы видим, хотя магнитные силовые линии и имеют тенденцию к коллимации вдоль оси вращения (поправка $\delta\Psi > 0$ при $\theta < \pi/2$), этот процесс происходит чрезвычайно медленно, так что даже в районе светового цилиндра, который в рассматриваемой задаче находится значительно дальше по сравнению с особыми поверхностями (195), $R_L \approx \varepsilon_B^{-1} r_a$, возмущение магнитного поля $\sim \varepsilon_B^2 \ln(1/\varepsilon_B)$ здесь оказывается много меньше единицы. Что же касается энергии частиц, то в рассматриваемой задаче она практически не изменяется по сравнению с начальной энергией $m_e c^2 \gamma_{in}$.

Отметим еще одно чрезвычайно важное обстоятельство, касающееся определения величины продольного тока I (или интеграла L). Как уже говорилось, величина продольного тока в рассматриваемой задаче не является свободной функцией, а должна определяться из условия гладкого прохождения через особые поверхности. Как легко проверить, для малых величин ε_B гладкий переход с дозвуковой на сверхзвуковую ветвь возможен лишь в том случае, если положение альфвеновской поверхности, которое по-прежнему задается соотношением

$$r_a^2 \sin^2 \theta = \frac{L}{\Omega_F E} \quad (199)$$

(здесь $E = \gamma_{in} \mu \eta = \text{const}$), в нулевом порядке по малой величине ε_B будет совпадать с положением быстрой магнитозвуковой поверхности (195). В результате имеем

$$L(\theta) = \frac{\Omega_F}{8\pi^2} \Psi_0 \sin^2 \theta, \quad (200)$$

так что продольный ток (19) здесь практически совпадает с майкелевским током I_M (146). Не удивительно поэтому, что при таком токе практически отсутствует коллимация магнитных поверхностей вдоль оси вращения.

Интересно, что решение Боговалова может быть легко обобщено и на случай аккреции — эжекции на медленно вращающуюся черную дыру. Действительно, монополярное решение (147) остается точным решением и для невращающейся черной дыры. Единственным усложнением задачи при этом является необходимость введения области генерации вещества, обеспечивающей как истечение, так и аккрецию, а также появление второго семейства особых поверхностей для аккрецирующего вещества за счет эффектов общей теории относительности. Воспользовавшись теперь соотношением (26) для определения величины α^2 на альфвеновской поверхности при $\Omega_H \rightarrow 0$,

$$\alpha_A^2 = \frac{(\Omega_H - \Omega_F^-) \varpi_H^2 E^-}{L^-}, \quad (201)$$

а также условием $\alpha_F^2 = M^2(r_H)$ для альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхности при $\Omega_H = 0$, имеем

$$L^-(\theta) = \frac{\Omega_H - \Omega_F^-}{8\pi^2} \Psi_0 \sin^2 \theta. \quad (202)$$

Что же касается истекающего вещества, то для него мы по-прежнему можем пользоваться соотношениями (199), (200). В результате, если считать, что в области генерации плазмы падение потенциала не изменяет угловую скорость вращения, $\Omega_F \approx \Omega_F^-$, и, кроме того, здесь $L \approx L^-$

(что означает отсутствие поверхностных токов вдоль области генерации плазмы), получаем

$$\Omega_F \approx \frac{\Omega_H}{2}. \quad (203)$$

Как мы видим, и здесь угловая скорость оказалась равной половине угловой скорости вращения черной дыры, когда выделение энергии вращения наиболее эффективно.

6.2. Ускорение частиц

Прежде всего рассмотрим случай малого продольного тока $i_0 < 1$, когда световая поверхность находится вблизи светового цилиндра. Как уже подчеркивалось, световая поверхность является естественной границей применимости уравнения Грэда–Шафранова, поскольку здесь, по определению, электрическое поле сравнивается по величине с магнитным, так что условие вмороженности (12) уже не может быть выполнено. В результате в этой области становится возможным ускорение частиц перпендикулярно магнитным поверхностям, что и приводит к резкому увеличению их энергии. Следовательно, при исследовании движения частиц в этой области необходимо сформулировать полную систему уравнений, включающую также и уравнения движения отдельных частиц. Как было показано [10, 92], при достаточно малых продольных токах в тонком переходном слое, расположенном вблизи световой поверхности, практически вся энергия, переносимая во внутренних областях электромагнитным полем, передается частицам плазмы. С другой стороны, в переходном слое происходит и замыкание продольного тока, циркулирующего в магнитосфере.

Исследуем теперь более подробно другой предельный случай, когда продольный ток, текущий в магнитосфере, достаточно велик, так что световая поверхность уходит на бесконечность. Для простоты рассмотрим истечение релятивистской холодной плазмы с поверхности вращающегося шара с монополярным магнитным полем. Как уже говорилось, такая модель вполне может служить первым приближением и для внешних областей магнитосферы черной дыры. Далее, в качестве нулевого приближения мы рассмотрим бессильное решение Майкеля [46], дающее как раз монополярное поле при специальном выборе продольного тока $I_M(\theta)$ (146) и угловой скорости вращения Ω_F . Иными словами, будем считать, что параметр замагниченности $\sigma \gg 1$.

Согласно (45), рассматриваемая нами задача требует четырех граничных условий, в качестве которых могут быть выбраны условие $\Psi = \Psi(R, \theta)$ и значения еще трех физических величин на поверхности тела. Для простоты пусть

$$\Omega_F(R, \theta) = \Omega_F = \text{const}, \quad (204)$$

$$\gamma(R, \theta) = \gamma_{in} = \text{const}, \quad (205)$$

$$n(R, \theta) = n_{in} = \text{const}. \quad (206)$$

Введя теперь малые возмущения к бессильным значениям интегралов движения L_0 (146) и $E_0 = \Omega_F L_0$ как

$$E(\Psi) = E_0(\Psi) + b(\Psi), \quad (207)$$

$$L(\Psi) = L_0(\Psi) + l(\Psi), \quad (208)$$

получаем

$$\eta = \frac{n_{\text{in}}}{B_p}, \quad (209)$$

$$e = E - \Omega_F L = b - \Omega_F l = \frac{B_p}{4\pi} M^2(R) = \gamma_{\text{in}} \mu \eta, \quad (210)$$

причем интегралы движения η , Ω_F и e постоянны во всем пространстве. В соотношении (210) $M^2(R)$ — число Маха (22) на поверхности звезды, $n(r, \theta) = n_{\text{in}}/\gamma_{\text{in}}$, а $B_p = \Psi_0/2\pi R^2$ — радиальное магнитное поле на поверхности. Напомним, что, согласно (146), (147), величина E_0 может быть представлена в виде $E_0 = E_A \sin^2 \theta$, причем как раз $\sigma = E_A/\mu\eta$. При этом в силу условия $\sigma \gg 1$ имеем также $e/E \ll 1$. Наконец, согласно (210), мы можем записать

$$b(\Psi) = e + \Omega_F l(\Psi). \quad (211)$$

Что же касается величины $l(\Psi)$ (которая при малых возмущениях монопольного поля может быть рассмотрена как функция угла θ , т.е. $l = l(\theta)$), то она должна быть определена из условия регулярности (37) на быстрой магнитозвуковой поверхности.

Как и ранее, будем искать решение уравнения (41) в виде $\Psi(r, \theta) = \Psi_0[1 - \cos \theta + \varepsilon f(r, \theta)]$, где $\varepsilon \sim \gamma_{\text{in}} \sigma^{-1} \ll 1$. Подставляя это разложение в (41), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon A \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \varepsilon A \frac{D+1}{Dr^2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - 2\varepsilon \Omega_F^2 r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \\ - 2\varepsilon \Omega_F^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2\varepsilon \Omega_F^2 (3 \cos^2 \theta - 1) f + \\ + \frac{8\pi^2 \Omega_F}{\Psi_0} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (l \sin^2 \theta) - 2\varepsilon \frac{A}{Dr^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \\ + 2\varepsilon \frac{A}{Dr^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} f - \frac{64\pi^4 A}{\Omega_F^2 D \Psi_0^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{e^2}{M^4} + \\ + 2A \cos \theta \frac{1 - M^2}{D \Omega_F^2 r^4 \sin^2 \theta} + \frac{16\pi^2 A \cos \theta}{\Omega_F^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{e}{D \Psi_0} - \\ - \frac{8\pi^2 A \sin \theta}{D \Omega_F^2 r^2 \Psi_0} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{Dr^2} \frac{A \cos \theta}{\Omega_F^2 r^2 \sin^2 \theta} + \\ + 2\Omega_F^2 \sin^2 \theta \cos \theta \frac{M^2}{A} - 16\pi^2 \Omega_F^2 r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \frac{e}{A \Psi_0} = 0. \end{aligned} \quad (212)$$

Рассмотрим прежде всего вопрос о положении быстрой магнитозвуковой поверхности, которая, как и все остальные параметры течения, должна определяться из решения уравнения (212) с граничными условиями (204)–(206). Для определения положения быстрой магнитозвуковой поверхности $r = r_F$ (а также для определения физического корня M^2) необходимо решить уравнение четвертого порядка (23). Для этого удобно воспользоваться величиной g (191). Согласно (191) и (212), $g \ll 1$ для $\sigma \gg 1$, так что вдали от альфвеновской поверхности

$$\gamma = \frac{E}{\mu\eta} g. \quad (213)$$

Следовательно, g является, фактически, отношением потока энергии частиц к полному потоку энергии, причем для $g \ll 1$ основной вклад в перенос энергии будет

давать электромагнитное поле. В результате алгебраическое уравнение (23) может быть переписано в виде

$$g^3 - \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\Omega_F^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) g^2 + \frac{\mu^2 \eta^2}{2E^2} + \frac{e^2}{2\Omega_F^2 r^2 E^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad (214)$$

где мы опустили слагаемое g^4 (которое дает нефизический корень $g < 0$) и ввели величину

$$\begin{aligned} \xi = 1 - \frac{\Omega_F^4 r^2 \sin^2 \theta (\nabla \Psi)^2}{64\pi^4 E^2} = \\ = 2 \frac{e + \Omega_F l}{E} - \frac{2\varepsilon}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + 4\varepsilon \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} f. \end{aligned} \quad (215)$$

Как легко проверить, $\xi = 0$ для бессилового решения Майкеля (146) и $\xi \ll 1$ при $\sigma^{-1} \ll 1$. Подчеркнем, что именно зависимость ξ от εf позволяет анализировать нашу задачу самосогласованно.

Ясно, что быстрая магнитозвуковая поверхность соответствует пересечению двух корней уравнения (214) в одной точке. С другой стороны, уравнение (214) имеет три действительных корня лишь при $Q \leq 0$, где дискриминант кубического уравнения (при $r \approx r_F$) есть

$$Q = \frac{1}{16} \frac{\mu^4 \eta^4}{E^4} - \frac{1}{16 \cdot 27} \frac{\mu^2 \eta^2}{E^2} \left(\xi + \frac{1}{\Omega_F^2 r^2 \sin^2 \theta} \right)^3. \quad (216)$$

При этом условия регулярности решения вблизи быстрой магнитозвуковой поверхности ($r = r_F$) имеют теперь вид

$$Q = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0. \quad (217)$$

Как легко проверить, условия (217) в точности совпадают с условиями регулярности $D = 0$ (33), $N_r = 0$ и $N_\theta = 0$ (37). В результате имеем

$$r_F(\theta) \approx R_L \sigma^{1/3} \sin^{-1/3} \theta \quad (218)$$

при $\theta > \sigma^{-1/2}$ и (ср. [144])

$$r_F \approx R_L \left(\frac{\sigma}{\gamma_{\text{in}}} \right)^{1/2} \quad (219)$$

вблизи оси вращения. Более того, поскольку значения корней уравнения (214) в момент их совпадения не зависят от величины ξ , имеем точно

$$g(r_F, \theta) = \left(\frac{\mu\eta}{E} \right)^{2/3}. \quad (220)$$

Следовательно,

$$\gamma(r_F, \theta) = \left(\frac{E}{\mu\eta} \right)^{1/3} = \sigma^{1/3} \sin^{2/3} \theta, \quad (221)$$

что совпадает с результатом Майкеля [28] (см. также [145]). Единственное отличие состоит в том, что энергия (221) достигается уже на конечном расстоянии r_F (218). Положения альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей показаны на рис. 8. В случае же $\gamma_{\text{in}} > \sigma^{1/3}$ быстрая магнитозвуковая поверхность является сферой радиуса $r_F = (\sigma/\gamma_{\text{in}})^{1/2} R_L$.

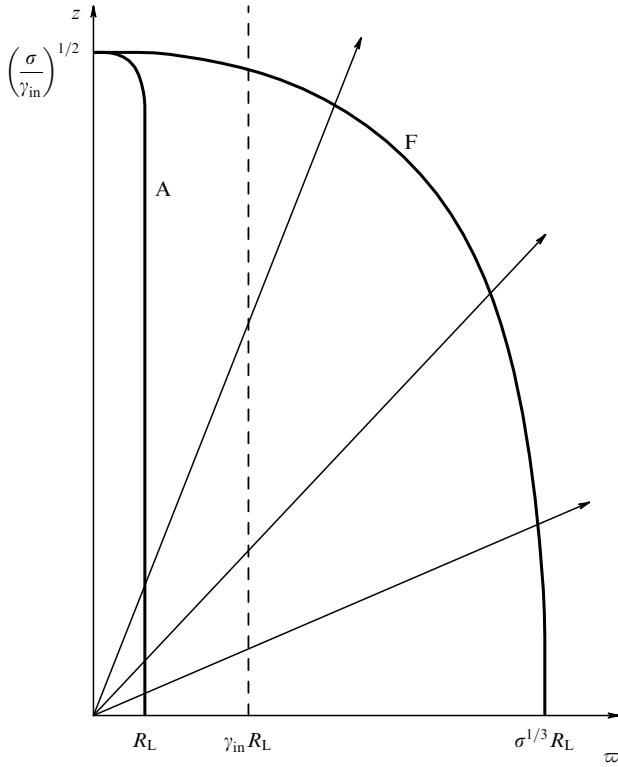


Рис. 8. Положения альфвеновской и быстрой магнитозвуковой поверхностей при $\sigma > \gamma_{in}^3$.

Рассмотрим теперь внутреннюю область $r \sin \theta < \gamma_{in} R_L$, $r < r_F$. В этой области физический корень уравнения (214) (т.е. корень, соответствующий дозвуковому течению $D > 0$) есть

$$g = \frac{e}{E}. \quad (222)$$

Следовательно, согласно (213), в этой области ускорения частиц не происходит:

$$\gamma(r, \theta) = \gamma_{in}. \quad (223)$$

В частности, при $\sigma < \gamma_{in}^3$ энергия частиц остается постоянной вплоть до быстрой магнитозвуковой поверхности.

Далее, в промежуточной области $\gamma_{in} R_L < r \sin \theta$, $r < r_F$, которая существует при $\sigma > \gamma_{in}^3$, физический корень $D > 0$ алгебраического уравнения (214) имеет вид

$$g = \frac{\mu \eta}{E} \Omega_F r \sin \theta. \quad (224)$$

В результате имеем

$$\gamma(r, \theta) = \Omega_F r \sin \theta, \quad (225)$$

$$M^2(r, \theta) = \sigma^{-1} \Omega_F^3 r^3 \sin \theta \quad (226)$$

и $D = M^{-2}$. Как мы видим, в этой области все физические характеристики течения вообще не зависят от ξ и, следовательно, от возмущения поля $\epsilon f(r, \theta)$. Поэтому для их определения не нужно знать точное решение уравнения равновесия (212). С другой стороны, сравнивая решение (151) с условиями регулярности на быстрой магнитозвуковой поверхности (217), получаем

$$\frac{l}{L_0} \sim \sigma^{-4/3}. \quad (227)$$

Следовательно, для гладкого прохождения быстрой магнитозвуковой поверхности продольный ток должен практически совпадать с бессильным током I_M (146). Тем самым мы подтвердили наш выбор $I = 2\pi L_0(\Psi)$ в качестве нулевого приближения. Наконец, имеем согласно (215) и (227)

$$\epsilon f(r_F) \sim \sigma^{-2/3}. \quad (228)$$

Таким образом, возмущение магнитного поля также остается малым вплоть до быстрой магнитозвуковой поверхности $r = r_F$.

Что же касается асимптотической области $r \gg r_F$, то здесь физическим корнем уравнения (214), соответствующим сверхзвуковому течению $D < 0$, является

$$g = \frac{\xi}{2} \left(1 - 4 \frac{\mu^2 \eta^2}{\xi^3 E^2} \right). \quad (229)$$

При этом, как легко проверить, соответствующее значение энергии частиц $\gamma = g(E/\mu\eta)$ совпадает с лоренц-фактором $\gamma = (1 - U_{dr}^2)^{-1/2}$, определяемым дрейфовой скоростью $U_{dr} = |\mathbf{E}|/|\mathbf{B}| \approx |\mathbf{E}|/B_\phi$. С другой стороны, уравнение равновесия может быть переписано здесь в простой форме:

$$\epsilon r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2\epsilon r \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \theta \frac{D+1}{D} \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0, \quad (230)$$

где g задается формулой (229), причем

$$D+1 = 8 \frac{\mu^2 \eta^2}{E^2 \xi^3} \ll 1. \quad (231)$$

Так, для радиального течения $\partial f / \partial r = 0$ имеем $dg/d\theta = 0$, что как раз соответствует найденному ранее интегралу (193) [26]. Однако, как мы видим, в полном уравнении (230) производная $\partial g / \partial \theta$ имеет малый коэффициент $D+1 \ll 1$. Следовательно, это слагаемое в действительности не играет никакой роли в полном уравнении (230). В результате, согласно (230), в асимптотически далекой области $r \gg r_F$ возмущение магнитного поля ϵf выходит на постоянную величину

$$\epsilon f(r, \theta) = \sigma^{-2/3} a(\theta), \quad a(\theta) \sim 1. \quad (232)$$

Соответственно, в силу (213) и (229) перестает возрастать и энергия частиц:

$$\gamma(\infty) \approx \sigma^{1/3} \sin^{2/3} \theta. \quad (233)$$

Таким образом, фактически построен пример решения, когда условия регулярности на особых поверхностях ограничивают величину продольного тока, в результате чего за пределами быстрой магнитозвуковой поверхности как коллимация, так и ускорение частиц становятся неэффективными. С другой стороны, показано, что полученное еще Майкелем [28] выражение для энергии частиц на бесконечности $\gamma \sim \sigma^{1/3}$ (в рамках рассматриваемой модели) остается справедливым.

6.3. Структура струйных выбросов

Наконец, рассмотрим вопрос о коллимации магнитных поверхностей и внутренней структуре струйных выбросов. Как уже говорилось, вопрос о коллимации является ключевым во всей проблеме строения магнитосферы компактного объекта, так что ему было посвящено значительное количество работ [25–27], в том числе численных [146, 147]. Вместе с тем в большинстве

случаев основное внимание было уделено собственной коллимации в том смысле, что влияние внешней среды предполагалось несущественным. Однако прежде всего такая ситуация возможна лишь при ненулевом продольном токе I , текущем в пределах струйного выброса [148], так что встает вопрос о его замыкании во внешних частях магнитосферы. С другой стороны, величина продольного тока ограничена условиями регулярности на особых поверхностях, что, как было показано в предыдущем разделе, далеко не всегда приводит к достаточно большому продольному току, необходимому для коллимации.

Вместе с тем совершенно ясно, что вопрос о коллимации не может быть решен в отрыве от внешних условий (см., например, [138]). Более того, как хорошо известно на примере движущихся космических тел (спутники Юпитера или же искусственные спутники Земли [149]), внешнее магнитное поле может служить эффективным передаточным звеном, порой определяющим общие энергетические потери системы. Поэтому вопрос о построении последовательной модели магнитосферы компактных объектов, погруженных во внешнее магнитное поле, представляет, на наш взгляд, несомненный интерес.

Безусловно, вопрос о существовании внешнего регулярного магнитного поля в окрестности компактных объектов является в значительной степени дискуссионным. Как известно, в нашей Галактике регулярное магнитное поле (т.е. поле, постоянное на масштабах, сравнимых с самой Галактикой) $B_{\text{ext}} \sim 10^{-6}$ Гс практически совпадает с хаотической компонентой магнитного поля, меняющейся уже на масштабах в несколько парсек [150]. Однако, если предположить, что коллимация действительно обусловлена просто наличием внешнего поля, становится возможным очень просто оценить поперечный размер струйных выбросов r_j . Действительно, считая, что магнитное поле в джете близко к внешнему магнитному полю, получаем из условия сохранения магнитного потока

$$r_j \sim R \left(\frac{B_{\text{in}}}{B_{\text{ext}}} \right)^{1/2}, \quad (234)$$

где R и B_{in} — соответственно радиус и магнитное поле компактного объекта. Так, для активных галактических ядер ($B_{\text{in}} \sim 10^4$ Гс, $R \sim 10^{13}$ см) имеем $r_j \sim 1$ пк, что как раз соответствует наблюдаемым поперечным размерам джетов [12]. Соответственно, для молодых звездных объектов ($B_{\text{in}} \sim 10^2$ Гс, $R \sim 10^{10}$ см) [8] имеем $r_j \sim 10^{16}$ см, что также соответствует наблюдениям. Поэтому нам представляется интересным в качестве примера рассмотреть вопрос об одномерном струйном выбросе, погруженном во внешнее однородное магнитное поле [151].

Итак, рассмотрим структуру одномерного струйного выброса. Как и везде в этом разделе, температура вещества будет предполагаться равной нулю. Тогда вдали от гравитирующих тел уравнение равновесия (41) запишется в виде

$$\frac{1}{\varpi} \frac{d}{d\varpi} \left(\frac{A}{\varpi} \frac{d\Psi}{d\varpi} \right) + \Omega_F (\nabla \Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} + \frac{64\pi^4}{\varpi^2} \frac{1}{2M^2} \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{G}{A} \right) - \frac{64\pi^4}{M^2} \mu^2 \eta \frac{d\eta}{d\Psi} = 0, \quad (235)$$

где $\varpi = r \sin \theta$, а G по-прежнему задается соотношением (40).

Уравнение (235) содержит четыре интеграла движения. Понятно, что на границе струйного выброса $\Psi = \Psi_*$, где продольное движение вещества отсутствует, все четыре интеграла движения должны обращаться в нуль. Как мы видели, интегралы движения $\Omega_F(\Psi)$ (187), $L(\Psi) = I(\Psi)/2\pi$ (188) и $E(\Psi) = \Omega_F(\Psi)L(\Psi)$, полученные для бессиловой магнитосферы черной дыры, удовлетворяют этим условиям и, значит, могут быть непосредственно использованы при исследовании структуры струйного выброса. Единственным, но, как будет показано, чрезвычайно существенным уточнением здесь является тот факт, что при конечной величине σ вблизи оси вращения, т.е. при $\Psi \rightarrow 0$, к бессиловому значению интеграла энергии $E(\Psi)$ необходимо добавить вклад частиц, поскольку на оси вращения поток энергии электромагнитного поля неизбежно должен обращаться в нуль. В результате согласно (15) и (188) имеем

$$E(\Psi) \approx \mu \eta \left(\gamma_{\text{in}} + 2\sigma \frac{\Psi}{\Psi_*} \right). \quad (236)$$

Таким образом, вклад электромагнитного поля становится определяющим лишь при $\Psi > \Psi_{\text{in}}$, где

$$\Psi_{\text{in}} = \frac{\gamma_{\text{in}}}{\sigma} \Psi_*. \quad (237)$$

При малых же значениях Ψ основная энергия будет переноситься релятивистскими частицами, причем их энергия, как следует непосредственно из соотношения (236), остается постоянной и равной первоначальной энергии γ_{in} .

Подчеркнем, что сама возможность использования интегралов движения, полученных при анализе внутренних областей магнитосферы, не является тривиальной. Действительно, формирование одномерного потока может произойти лишь за счет взаимодействия с внешней средой. Поэтому в областях взаимодействия, где условия применимости идеальной гидродинамики, безусловно, будут нарушены, возможно существенное перераспределение энергии E и углового момента L . Тем не менее мы здесь для простоты будем считать, что интегралы движения $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$ как функции потока Ψ остаются в точности такими же, как и во внутренних областях магнитосферы.

Перейдем теперь к решению уравнения равновесия. Как и для конических магнитных поверхностей, удобно сразу свести уравнение второго порядка (235) к системе двух уравнений первого порядка для величин $\Psi(\varpi)$ и $M^2(\varpi)$. Это становится возможным благодаря уже отмеченному свойству уравнения Грэда–Шафранова, согласно которому в одномерном случае оно может быть проинтегрировано. В результате, вновь домножая уравнение (235) на $(2M^2/64\pi^4)(d\Psi/d\varpi)$, а также используя соотношение связи (23), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{M^4} [(e^2 - \mu^2 \eta^2) + \mu^2 \eta^2 \Omega_F^2 \varpi^2] \frac{dM^2}{d\varpi} = \\ & = \frac{4}{M^2} \mu^2 \eta^2 \Omega_F^2 \varpi - \frac{2}{AM^2} e^2 \Omega_F^2 \varpi + 2 \frac{M^2}{A} \frac{L^2}{\varpi^3} - \\ & - \frac{1 - \Omega_F^2 \varpi^2}{M^2} \frac{d}{d\varpi} (\mu^2 \eta^2) + \frac{1}{M^2} \frac{d}{d\varpi} e^2 + \frac{\mu^2 \eta^2 \varpi^2}{M^2} \frac{d}{d\varpi} \Omega_F^2, \end{aligned} \quad (238)$$

где вновь $e = E - \Omega_F L$. Вторым же уравнением будет само условие связи (23), которое теперь нужно рассматривать как уравнение для производной $d\Psi/d\varpi$:

$$\left(\frac{d\Psi}{d\varpi}\right)^2 = \frac{64\pi^4}{M^4} \left(\frac{K}{A^2} - \varpi^2 \eta^2 \mu^2\right). \quad (239)$$

Обсудим общие свойства системы (238), (239). Отметим прежде всего, что в рассматриваемом нами релятивистском случае с хорошей точностью можно положить $\gamma = u$. В результате уравнение (239) на больших расстояниях от оси вращения $\varpi \gg \gamma_{\text{in}} R_L$ может быть переписано в виде

$$\frac{d\Psi}{d\varpi} = \frac{8\pi^2 E(\Psi)}{\varpi \Omega_F^2(\Psi)}. \quad (240)$$

Как мы видим, уравнение (240) вообще не содержит величины M^2 и поэтому может быть проинтегрировано независимо. Полагая в (240) $B_p(\Psi_*) = B_{\text{ext}}$, получаем в частности для размера струйного выброса

$$r_j^2 = \lim_{\Psi \rightarrow \Psi_*} \frac{4\pi E(\Psi)}{\Omega_F^2(\Psi) B_{\text{ext}}} \sim \frac{\Psi_*}{\pi B_{\text{ext}}}, \quad (241)$$

что фактически совпадает с оценкой (234).

Далее, легко видеть, что для рассматриваемых здесь значений интегралов движения (187) и (188) решение уравнения (240) действительно дает постоянное магнитное поле

$$B_p(\varpi) = B_{\text{ext}}, \quad (242)$$

но лишь при условии $M_0^2 < \gamma_{\text{in}}^2$, где величина числа Маха на оси $M_0^2 = M^2(0)$ связана с магнитным полем соотношением

$$B_p = \frac{4\pi\mu\eta\gamma_{\text{in}}}{M_0^2} \sim \frac{\gamma_{\text{in}}}{\sigma M_0^2} B(R_L), \quad (243)$$

$B(R_L) \sim \Psi_* R_L^2$ — характерное магнитное поле на световом цилиндре. В этом случае поток магнитного поля при $\varpi > \gamma_{\text{in}} R_L$ превышает Ψ_{in} (237), так что здесь определяющий вклад в величину E вносит электромагнитное поле. Если же $M_0^2 > \gamma_{\text{in}}^2$ (т.е. если $\Psi(\gamma_{\text{in}} R_L) < \Psi_{\text{in}}$), то на расстояниях $\varpi > \gamma_{\text{in}} R_L$ интеграл Бернулли E , согласно (236), напротив, будет полностью определяться вкладом частиц. В этом случае величину $E(\Psi)$ следует считать постоянной и равной $\mu\eta\gamma_{\text{in}}$. В результате при $x = \varpi/R_L > \gamma_{\text{in}}$ решение уравнения (240) дает степенное убывание магнитного поля [152, 153]:

$$B_p(x) \approx B_p(0) \frac{\gamma_{\text{in}}^2}{x^2}. \quad (244)$$

Следовательно, магнитный поток будет очень медленно (логарифмически) возрастать с увеличением расстояния от оси вращения. Но это, в свою очередь, противоречит оценке (241) размера джета. Таким образом, можно заключить, что магнитное поле на оси вращения не может быть меньше величины

$$B_{\text{min}} = \frac{4\pi\mu\eta}{\gamma_{\text{in}}} \sim \frac{1}{\sigma\gamma_{\text{in}}} B(R_L). \quad (245)$$

В общем же случае, как уже говорилось, структура полоидального магнитного поля определяется конкретным выбором интегралов $E(\Psi)$ и $\Omega_F(\Psi)$.

С другой стороны, столь же просто можно оценить и решение уравнения (238), определяющего величину числа Маха $M^2(\varpi)$. В частности, при $x = \varpi/R_L > \gamma_{\text{in}}$ имеем

$$M^2(x) = \frac{M_0^2}{\gamma_{\text{in}}} x. \quad (246)$$

Соответственно,

$$g(x) = \frac{M_0^2}{\gamma_{\text{in}}} \frac{1}{x} \quad (247)$$

и, следовательно, согласно (213),

$$\gamma(x) = x, \quad x > \gamma_{\text{in}}. \quad (248)$$

Таким образом, мы видим, что при $\varpi > \gamma_{\text{in}} R_L$ энергия частиц выходит на универсальную асимптотику (248). Столь простая асимптотика (аналогичная, кстати, закону (225) для энергии частиц в монополярном магнитном поле в промежуточной области $\gamma_{\text{in}} R_L < r_F$), естественно, может быть получена и из более простых соображений [115]. Действительно, воспользовавшись уравнением в замороженности (12), получаем

$$v^2 = \frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{B}|^2} = \left(\frac{B_\phi^2}{|\mathbf{E}|^2} + \frac{B_p^2}{|\mathbf{E}|^2} \right)^{-1}. \quad (249)$$

Но в рассматриваемом нами случае в силу (11) и (13) имеем $B_\phi^2 \approx |\mathbf{E}|^2$ и $|\mathbf{E}|^2 \approx x^2 B_p^2$, что мгновенно приводит к асимптотике (248).

На рисунке 9 показана зависимость энергии частиц $\gamma(x)\mu\eta$, полученная путем интегрирования уравнений (238) и (239) для интегралов движения (187) и (188). Штриховой линией отмечено поведение этой величины, следующее из аналитической оценки (248). Как мы видим, при достаточно малых значениях x решение практически совпадает с аналитической асимптотикой (248). В частности, при $M_0^2 \sim \gamma_{\text{in}}^2$ получаем для максимальной энергии

$$\gamma_{\text{max}} \sim (\gamma_{\text{in}} \sigma)^{1/2}, \quad (250)$$

что для струйных выбросов из активных галактических ядер дает $\gamma_{\text{max}} \sim 10^4 - 10^5$. С другой стороны, сравнивая

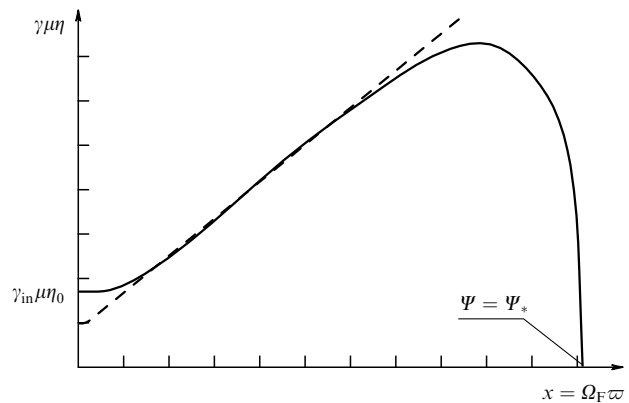


Рис. 9. Зависимость энергии частиц $\gamma(x)\mu\eta$ от координаты x . Штриховой линией показано поведение этой величины, следующее из аналитической оценки (248).

оценку $M_0^2 < \gamma_{\text{in}}^2$ с выражением (247) для величины g , получаем, что параметр g вдали от светового цилиндра должен быть много меньше единицы. Так, при $B_{\text{ext}} \sim B_{\text{min}}$ имеем

$$g \sim \left(\frac{\gamma_{\text{in}}}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (251)$$

Следовательно, вклад частиц в общий баланс потока энергии оказывается незначительным. Наконец, решение показывает, что при $B_{\text{ext}} > \gamma_{\text{in}} B_{\text{min}}$ во внутренних областях струйного выброса, $\varpi < \varpi_F$, где

$$\varpi_F \sim \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{min}}} R_L, \quad (252)$$

неизбежно возникает область с дозвуковым течением (подробнее см. [151]).

Таким образом, мы приходим к заключению, что уравнение Грэда – Шафранова действительно позволяет построить самосогласованную модель струйного выброса, погруженного во внешнее однородное магнитное поле. Как и для бессилового случая, суммарный электрический ток, текущий вдоль джета, и его полный электрический заряд, автоматически равны нулю. При этом однородность магнитного поля в пределах струйного выброса здесь является следствием выбора интегралов движения (187) и (188). Наконец, показано, что энергия, переносимая частицами, составляет лишь малую долю ($\sim \sigma^{-1/2}$) полного потока энергии, переносимой электромагнитным полем.

В заключение, как и для магнитосферы радиопульсаров, напомним кратко основные предсказания обсуждавшейся выше теории замагниченного ветра из компактных источников (см. также [115]).

1. Если продольный ток, циркулирующий в магнитосфере радиопульсаров, действительно невелик, то истекающая плазма неизбежно должна пересечь световую поверхность на расстояниях, сравнимых со световым цилиндром. При этом происходит доускорение частиц, в результате чего за пределами световой поверхности практически вся энергия будет переноситься уже релятивистской плазмой. Тем самым, в этом случае полностью решается ключевой вопрос о механизме трансформации энергии электромагнитного поля в частицы [128, 143]. Одновременно становится понятно, как осуществляется и замыкание продольного электрического тока, циркулирующего в магнитосфере.

2. Как было показано в разделе 5, учет эффектов общей теории относительности неизбежно приводит к появлению поверхности вблизи черной дыры, свойства которой аналогичны "внешнему зазору" в магнитосфере радиопульсаров. При этом вблизи этой поверхности действительно может происходить генерация вторичных частиц. Тем самым, решается вопрос о заполнении плазмой полярных областей магнитосферы черной дыры, а также становится понятным и источник электронно-позитронной плазмы, истекающей из активных галактических ядер, в пользу существования которой в настоящее время имеются достаточно веские свидетельства [111].

3. Важным результатом, на наш взгляд, является и утверждение о том, что при учете внешнего регулярного магнитного поля уравнения магнитной гидродинамики позволяют построить самосогласованную модель струй-

ного выброса, в котором полный продольный электрический ток $I(\Psi_*)$ (как и суммарный электрический заряд) автоматически равен нулю. При этом однородное магнитное поле, совпадающее с магнитным полем внешней среды, может быть решением и для внутренних областей джета. Как уже подчеркивалось, тем самым объясняется величина поперечного размера струйных выбросов. Одновременно благодаря малой трансформации энергии электромагнитного поля в энергию частиц можно объяснить и каналирование энергии от компактного объекта в области энергосвечения. Вместе с тем, как было показано, продолжение магнитогидродинамического решения в область струйного выброса требует чрезвычайно высоких энергий частиц, $\sim 10^4$ МэВ, которые в настоящее время не зарегистрированы. Впрочем, для последовательного обсуждения вопроса об энергии истекающей плазмы требуется корректный учет взаимодействия частиц с окружающей средой (например, с фоновым излучением), которое может привести к существенному изменению их энергии [12].

Подчеркнем, что поскольку для активных галактических ядер поперечный размер струйного выброса всегда на несколько порядков превышает радиус светового цилиндра, $r_j \sim (10^4 - 10^5) R_L$, в той же пропорции тороидальное магнитное поле в пределах струйного выброса должно превышать полоидальное магнитное поле [115]. Поэтому обнаружение такой сильной тороидальной компоненты явилось бы важнейшим результатом, подтверждающим обсуждаемую здесь картину. К сожалению, в настоящее время определение реальных физических условий в струйных выбросах связано со значительными трудностями, хотя в последнее время появились указания на существование такой структуры магнитного поля у объектов типа BL Lac [154].

7. Заключение

Таким образом, выше было показано, как в некоторых случаях удается достаточно просто формулировать и решать прямые задачи магнитной гидродинамики, относящиеся к самому широкому классу астрофизических компактных объектов. При этом, за исключением медленной магнитозвуковой и касповой поверхностей, были охвачены все особые поверхности общего уравнения равновесия (41), а также исследована роль всех пяти интегралов движения. Как было показано, во многих случаях удалось получить достаточно простые модельные решения, позволяющие судить об основных физических характеристиках рассматриваемых течений. Тем самым, продемонстрирована исключительная эффективность метода уравнения Грэда – Шафранова при исследовании многих астрофизических объектов.

Вместе с тем необходимо оговориться, что метод уравнения Грэда – Шафранова является в значительной степени тупиковым направлением. Прежде всего, нет никакой возможности обобщить это уравнение на случай, когда диссипативные процессы (вязкость, теплопроводность, излучение плазмы и ее взаимодействие с излучением, кинетические эффекты и т.д.) начнут играть заметную роль. Это связано с тем, что в самом подходе заложено существование интегралов движения. Нарушение же этого предположения мгновенно приводит к невозможности свести полную систему уравнений к одному уравнению второго порядка. Точно так же

практически невозможно обобщить этот метод на случай неосесимметричных и нестационарных течений, а значит, и последовательно исследовать полученные решения на устойчивость.

Далее, как уже говорилось, возможность решать прямые задачи непосредственно связана с наличием точного аналитического решения уравнения равновесия. В этом смысле астрофизические задачи оказались проще других прикладных проблем, поскольку простейшее сферически-симметричное течение во многих случаях достаточно хорошо описывает реальную ситуацию. В общем же случае, когда точное решение неизвестно, прямая задача поставлена и решена быть не может. Поэтому в численных расчетах обычно приходилось решать временную задачу установления, которая в самой своей постановке отличается от метода уравнения Грэда–Шафранова.

Тем не менее полученные выше результаты представляют, как можно надеяться, вполне определенный интерес. Прежде всего, удалось в рамках достаточно простых модельных задач описать все основные черты трансзвуковых течений вблизи реальных компактных объектов. Это позволило получить достаточно простые аналитические выражения практически для всех ключевых величин, характеризующих такие течения. Далее, можно надеяться, что многие результаты, полученные в рамках модельных решений (отсутствие собственной коллимации при истечении замагниченного релятивистского ветра, связь между током и потенциалом в магнитосфере радиопульсаров, рождение вторичной плазмы в магнитосфере черной дыры) качественно правильно описывают реальные процессы, тем более что многие другие решения, например формирование диска при трансзвуковой аккреции и эжекции, подтвердили ранее известные результаты. Наконец, точные аналитические решения могут служить хорошей проверкой и при различных численных расчетах.

В заключение хотелось бы поблагодарить В.Л. Гинзбурга и А.В. Гуревича за постоянный интерес и поддержку, а также С.В. Боговалова, Я.Н. Истомина, М.В. Конюкова и В.И. Парьева за плодотворные дискуссии, позволившие прояснить многие детали развитой выше теории.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-02-18217).

Список литературы

1. Bondi H, Hoyle F *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **104** 273 (1944)
2. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967)
3. Шапиро С, Тьюколски С *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1985)
4. Parker E N *Astrophys. J.* **128** 664 (1958)
5. Бисноватый-Коган Г С *Физические вопросы теории звездной эволюции* (М.: Наука, 1989)
6. Тассуль Ж-Л *Теория вращающихся звезд* (М.: Мир, 1982)
7. Михалас Д *Звездные атмосферы* (М.: Мир, 1982)
8. Lada C J *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **23** 267 (1985)
9. Michel F C *Theory of Neutron Star Magnetosphere* (Chicago: The University of Chicago Press, 1991)
10. Beskin V S, Gureich A V, Istomin Ya N *Physics of the Pulsar Magnetosphere* (Cambridge: Cambridge University Press, 1993)
11. Phinney E S *Astrophysical Jets* (Eds A Ferrari, A G Pacholczyk) (Dordrecht: D Reidel, 1983)
12. Бегельман М К, Блендфорд Р Д, Рис М Дж *Физика внегалактических источников радиоизлучения* (Под ред. Р Д Дагкесаманского) (М.: Мир, 1987)
13. Торн К, Прайс Р, Макдональд Д *Черные дыры. Мембранный подход* (М.: Мир, 1988)
14. Шварцман В Ф *Астрон. журн.* **47** 660 (1970)
15. Bisnovaty-Kogan G S, Blinnikov S I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **191** 711 (1980)
16. Thorne K S, Flammang R A, Zytkov A N *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **194** 475 (1981)
17. Nobili L, Turolla R, Zampieri L *Astrophys. J.* **383** 250 (1991)
18. Abramowicz M A et al. *Astrophys. J.* **332** 646 (1988)
19. Narayan R, Yi I *Astrophys. J.* **452** 710 (1995)
20. Гуревич А В, Димант Я С, Зыбин К П *ЖЭТФ* **104** 2265 (1993)
21. Weber E J, Davis L (Jr) *Astrophys. J.* **148** 217 (1967)
22. Mestel L *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **138** 359 (1968)
23. Sakurai T *Computer Phys. Rep.* **12** 247 (1990)
24. Соловьев А А, Соловьева Е А *Письма в АЖ* **19** 1053 (1993)
25. Blandford R D, Payne D G *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **199** 883 (1982)
26. Heyvaerts J, Norman J *Astrophys. J.* **347** 1055 (1989)
27. Li Zh-Yu, Chiueh T, Begelman M C *Astrophys. J.* **394** 459 (1992)
28. Michel F C *Astrophys. J.* **158** 727 (1969)
29. Ardavan H *Astrophys. J.* **204** 889 (1976)
30. Okamoto I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **185** 69 (1978)
31. Kennel C F, Fujimura F S, Okamoto I *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **26** 147 (1983)
32. Camenzind M *Astron. Astrophys.* **162** 32 (1986)
33. Punsly B, Coroniti F C *Astrophys. J.* **354** 583 (1990)
34. Takahashi M et al. *Astrophys. J.* **363** 206 (1990)
35. Chakrabarti S K *Theory of Transonic Astrophysical Flows* (Singapore: World Scientific, 1990)
36. Blandford R, Znajek R L *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179** 433 (1977)
37. McDonald D A, Thorne K S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **198** 345 (1982)
38. Мизес Р *Математическая теория течений сжимаемой жидкости* (М.: ИЛ, 1961)
39. Франкль Ф И *Избранные труды по газовой динамике* (М.: Наука, 1973)
40. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
41. Шафранов В Д *ЖЭТФ* **33** 710 (1957)
42. Grad H *Rev. Mod. Phys.* **32** 830 (1960)
43. Соловьев Л С *Вопросы теории плазмы* Т. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1963) с. 245
44. Mestel L *Astrophys. Space Science* **24** 289 (1973)
45. Scharlemann E T, Wagoner R V *Astrophys. J.* **182** 951 (1973)
46. Michel F C *Astrophys. J.* **180** 207 (1973)
47. Okamoto I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **167** 457 (1974)
48. Mestel L, Wang Y-M *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **188** 799 (1979)
49. Ardavan H *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **189** 397 (1979)
50. Low B C, Tsinganos K *Astrophys. J.* **302** 163 (1986)
51. Lovelace R V E, Wang J C L, Sulkanen M E *Astrophys. J.* **315** 504 (1987)
52. Боговалов С В *Письма в АЖ* **16** 844 (1990)
53. Pelletier G, Pudritz R E *Astrophys. J.* **394** 117 (1992)
54. Shu F H et al. *Astrophys. J.* **429** 797 (1994)
55. Lovelace R V E et al. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **62** 1 (1986)
56. Nitta S, Takahashi M, Tomimatsu A *Phys. Rev. D* **44** 2295 (1991)
57. Бескин В С, Парьев В И *УФН* **163** 95 (1993)
58. Бисноватый-Коган Г С и др. *Астрон. журн.* **56** 359 (1979)
59. Tsinganos K, Sauty C *Astron. Astrophys.* **255** 405 (1992)
60. Hunt R *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **198** 83 (1979)
61. Hawley J F, Smarr L L, Wilson J R *Astrophys. J.* **277** 296 (1984)
62. Shima E et al. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **217** 367 (1985)
63. Petrich L I, Shapiro S L, Teukolsky S A *Phys. Rev. Lett.* **60** 1781 (1988)
64. Petrich L I et al. *Astrophys. J.* **336** 313 (1989)
65. Ruffert M, Arnett D *Astrophys. J.* **427** 351 (1994)
66. Cao X, Spruit H C *Astron. Astrophys.* **287** 80 (1994)
67. Боговалов С В *Письма в АЖ* **18** 832 (1992)
68. Новиков И Д, Фролов В П *Физика черных дыр* (М.: Наука, 1986)
69. Альев Г, Фельтхаммар К-Г *Космическая электродинамика* (М.: Мир, 1967)
70. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
71. Ахмезер А И и др. *Электродинамика плазмы* (М.: Наука, 1974)
72. Mirabel I F et al. *Nature (London)* **358** 215 (1992)
73. Сюняев Р А *Письма в АЖ* **17** 975 (1991)
74. Igumenshchev I V, Chen X, Abramowicz M A *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **278** 236 (1996)

75. Bjorkman J E, Cassinelli J P *Astrophys. J.* **409** 429 (1993)
76. Owocki S P, Cranmer S R, Blondin J M *Astrophys. J.* **424** 887 (1994)
77. Бескин В С, Пидопрыгора Ю Н *ЖЭТФ* **107** 1025 (1995)
78. Pariev V I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **283** 1264 (1996)
79. Бескин В С, Малышкин Л М *Письма в АЖ* **22** 532 (1996)
80. Бескин В С, Пидопрыгора Ю Н *Астрон. журн.* (1997) (в печати)
81. Bogovalov S V *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* (1997) (in press)
82. Goldreich P, Julian W H *Astrophys. J.* **157** 869 (1969)
83. Mestel L *Nature Phys. Sci.* **233** 149 (1971)
84. Sturrock P A *Astrophys. J.* **164** 529 (1971)
85. Муслимов А Г, Цыган А И *Астрон. журн.* **34** 133 (1990)
86. Muslimov A G, Tsygan A I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **255** 61 (1992)
87. Бескин В С *Письма в АЖ* **16** 665 (1990)
88. Ruderman M A, Sutherland P G *Astrophys. J.* **196** 51 (1975)
89. Гуревич А В, Истомин Я Н *ЖЭТФ* **89** 3 (1985)
90. Arons J, Scharlemann E T *Astrophys. J.* **231** 854 (1979)
91. Michel F C *Astrophys. J.* **180** L133 (1973)
92. Бескин В С, Гуревич А В, Истомин Я Н *ЖЭТФ* **85** 401 (1983)
93. Mestel L, Shibata S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **271** 621 (1994)
94. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
95. Holloway N J *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **181** 9 (1977)
96. Shibata S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **269** 191 (1994)
97. Cheng K S, Ho C, Ruderman M A *Astrophys. J.* **300** 500 (1986)
98. Lyubarsky Yu E *Physics of Pulsars* (Malaysia: Harwood Acad. Publ., 1995)
99. Henriksen R N, Norton J A *Astrophys. J.* **201** 719 (1975)
100. Beskin V S, Kuznetsova I V, Rafikov R R, in *Proc. Second Int. Sakharov Conf. on Physics* (Eds I M Dremine, A M Semikhatov) (Singapore: World Scientific, 1997) p. 104
101. Endean V G *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **204** 1067 (1983)
102. Любарский Ю Э *Письма в АЖ* **16** 34 (1990)
103. Beskin V S, Malyskin L M *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* (1998) (in press)
104. Lyne A G, Manchester R N, Taylor J H *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **213** 613 (1985)
105. Lyne A G, Graham-Smith F G *Pulsar Astronomy* (Cambridge: Cambridge University Press, 1990)
106. Beskin V S, Gurevich A V, Istomin Ya N *Astrophys. Space Sci.* **102** 301 (1984)
107. Taylor J H, Stinebring D R *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **24** 285 (1986)
108. Rankin J *Astrophys. J.* **352** 247 (1990)
109. Sol H, Pelletier G, Asseo E *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **237** 411 (1989)
110. Henri G, Pelletier G *Astrophys. J.* **383** L7 (1991)
111. Reynolds C S et al. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **283** 873 (1996)
112. Okamoto I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **254** 192 (1992)
113. Tomimatsu A *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **46** 643 (1994)
114. Horiuchi S, Mestel L, Okamoto I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **275** 1160 (1995)
115. Blandford R *Active Galactic Nuclei* (Eds R Blandford, H Netzer, L Woltjer) (Berlin: Springer, 1992)
116. Camenzind M, Khanna R *Astron. Astrophys.* **307** 665 (1996)
117. Brandenburg A *Astrophys. J.* **465** L115 (1996)
118. Contopoulos J, Lovelace R V E *Astrophys. J.* **429** 139 (1994)
119. Lovelace R, Romanova M M, Bisnovatyi-Kogan G S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **275** 224 (1995)
120. Matsumoto R et al. *Astrophys. J.* **461** 115 (1996)
121. Ustyugova G V et al. *Astrophys. J.* **439** L39 (1995)
122. Inghram R L *Astrophys. J.* **186** 625 (1973)
123. Michel F G *Astrophys. J.* **187** 585 (1974)
124. Istomin Ya N, Pariev V I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **267** 629 (1994)
125. Beskin V S, Istomin Ya N, Pariev V I, in *Extragalactic Radio Sources — From Beams to Jets* (Eds J Roland, H Sol, G Pelletier) (Cambridge: Cambridge University Press, 1992) p. 45
126. Бескин В С, Истомин Я Н, Парьев В И *Астрон. журн.* **69** 1258 (1992)
127. Königl, in *Astrophysical Jets* (Eds D Burgarella, M Livio, C P O'Deo) (Cambridge: Cambridge University Press, 1992) p. 235
128. Rees M J, Gunn J E *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **167** 1 (1974)
129. Шкловский И С *Звезды* (М.: Наука, 1975)
130. Markwardt C B, Ögelman H *Nature* (London) **375** 40 (1995)
131. Hester J J et al. *Astrophys. J.* **448** 240 (1995)
132. Sulkanen M E, Lovelace R V E *Astrophys. J.* **350** 732 (1990)
133. Ferreira J, Pelletier G *Astron. Astrophys.* **276** 625 (1993)
134. Chan K L, Henriksen R N *Astrophys. J.* **241** 534 (1980)
135. Königl A *Astrophys. J.* **342** 208 (1989)
136. Torricelli-Ciamponi G, Pietrini P *Astrophys. J.* **361** 32 (1990)
137. Komissarov S S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **269** 394 (1994)
138. Appl S, Camenzind M *Astron. Astrophys.* **274** 699 (1993)
139. Istomin Ya N, Pariev V I *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281** 1 (1996)
140. Stone J M, Norman M L *Astrophys. J.* **433** 746 (1994)
141. Hardee P E, Clarke D A *Astrophys. J.* **449** 119 (1995)
142. Ouyed R, Pudritz R E, Stone J M *Nature* (London) **385** 409 (1997)
143. Kennel C F, Coroniti F V *Astrophys. J.* **283** 694 (1984)
144. Bogovalov S V, in *Proc. Second Int. Sakharov Conf. on Physics* (Eds I M Dremine, A M Semikhatov) (Singapore: World Scientific, 1997) p. 104
145. Begelman M C, Li Zh-Yu *Astrophys. J.* **426** 269 (1994)
146. Sauty C, Tsinganos K *Astron. and Astrophys.* **287** 893 (1994)
147. Fendt C, Camenzind M, Appl S *Astron. Astrophys.* **300** 791 (1995)
148. Nitta S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **276** 825 (1995)
149. Альперт Я Л, Гуревич А В, Питаевский Л П *Искусственные спутники в разреженной плазме* (М.: Наука, 1964)
150. Марочник Л С, Сучков А А *Галактика* (М.: Наука, 1984)
151. Бескин В С, Малышкин Л М *Письма в АЖ* (1997) (в печати)
152. Nitta S *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* (1997) (in press)
153. Боговалов С В *Письма в АЖ* (1997) (в печати)
154. Gabuzda D et al. *Astrophys. J.* **388** 40 (1992)
155. Nitta Vol. 284 p. 899

Axisymmetric stationary flows in compact astrophysical objects

V.S. Beskin

*P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskiĭ prosp. 53, 117924 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 132-61 71
E-mail: beskin@td.lpi.ac.ru*

A review is presented of the analytical results available for a large class of axisymmetric stationary flows in the vicinity of compact astrophysical objects. The determination of the two-dimensional structure of the poloidal magnetic field (hydrodynamic flowfield) faces severe difficulties, due to the complexity of the equation of balance for stationary axisymmetric flows. However, an approach exists which enables direct problems to be solved even within the balance law framework. This possibility arises when an exact solution to the equation is available and flows close to it are investigated. As a result, with the use of simple model problems, the basic features of supersonic flows past real compact objects are determined.

PACS numbers: 95.30.Lz, 95.30.Qd

Bibliography — 155 references

Received 28 April 1997