

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Аттракторы и инварианты в замороженности в турбулентной плазме

В.В. Яньков

Дан обзор турбулентных равновесий в плазме, т.е. аттракторов, характеризуемых лагранжевыми инвариантами. Такие аттракторы существуют также в конвективной зоне Солнца и в атмосферах. Основное внимание, однако, уделено проблеме турбулентных переносов в токамаках. Гидродинамическое понятие замороженности перенесено на уравнение Власова. С помощью этого инструмента показано, почему в бесстолкновительной плазме топология магнитного поля сохраняется, хотя обычное гидродинамическое описание неприменимо. Аргументируется утверждение, что канонические профили плазмы в токамаках соответствуют аттрактору, характеризующему замороженностью плазмы в полоидальное магнитное поле. Фактически из обычного набора интегралов замороженности достаточно исключить замороженность плазмы в тороидальное магнитное поле. Причина разрушения этого инварианта — полоидальная неинвариантность магнитного поля, к которой особенно чувствительны запертые частицы. Как аттрактор, так и две границы области притяжения (Н-мода, подавление транспорта инвертированным широм) подтверждаются экспериментальными данными с разумной точностью.

PACS numbers: 52.30.-q, 52.35.Ra, 52.55.Fa

Содержание

1. Введение. Аттрактор на Солнце (499).
 2. Турбулентные равновесия (501).
 - 2.1. Соль в тесте. 2.2. Структура турбулентной транспортной матрицы и симметрия Онсагера. 2.3. Пограничная устойчивость и близость к аттрактору. 2.4. Простая двумерная модель турбулентного равновесия в плоской геометрии и в z-пинче.
 3. Интегралы замороженности в бесстолкновительной плазме (505).
 - 3.1. Понятие замороженности и инвариант Пуанкаре. 3.2. Лагранжевы инварианты и замороженность для дрейфового уравнения Власова. 3.3. Полуидеальная МГД и ион-ион-частицы. 3.4. Замороженность плазмы в полоидальное магнитное поле.
 4. Аттрактор в токамаке и его область притяжения (508).
 - 4.1. Турбулентное равновесие и минимальная модель канонических профилей для супершотов и L-моды. 4.2. Подавление транспорта инвертированным широм. 4.3. Н-мода. 4.4. Резюме для токамаков.
 5. История турбулентных равновесий (514).
 6. Заключение (515).
- Список литературы (515).

В.В. Яньков. Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, пл. Курчатова 1, Россия
Тел. (095) 196-73-45
Uppsala University, Box 534, S-751 21 Uppsala, Sweden
Тел. +46-18-183 097
Fax +46-18-554 917
E-mail: yankov@snobben.teknikum.uu.se

Статья поступила 15 сентября 1996 г.,
после доработки 3 декабря 1996 г.

1. Введение. Аттрактор на Солнце

Хорошо известно, что даже обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения, вообще говоря, глобально неинтегрируемы. Тем более неинтегрируемы уравнения в частных производных, описывающие турбулентность. Определений неинтегрируемости много, но главным признаком можно считать экспоненциальную неустойчивость по крайней мере части решений, что делает невозможным представление глобального решения в виде гладкой функции, содержащей необходимое число произвольных констант (произвольных функций в случае частных производных). Точные частные решения, как и полностью интегрируемые уравнения, представляют нетипичное поведение и описывают идеализированные модели. Довольно естественно, что легче исследуемые интегрируемые случаи заполняют основной объем научных журналов, но не следует забывать и о более общем неинтегрируемом случае. Может показаться, что неинтегрируемость ведет к непознаваемости объекта, но это не совсем так. Знать общее решение необязательно, поскольку почти все время неинтегрируемые системы проводят вблизи аттракторов.

Идеология аттрактора не нова и выражена в старом правиле механики: энергия стремится к минимуму. Аристотель абсолютизировал это правило и писал, что движение существует до тех пор, пока существует вынуждающая сила. Уравнения нелинейного двумерного осциллятора с трением неинтегрируемы, но притяжение к дну потенциальной ямы очевидно и вполне достаточно для качественного понимания. Минимум потенциала — это простейший пример аттрактора; при наличии вынуж-

дающих сил в последние десятилетия были открыты более сложные странные аттракторы, обладающие фрактальной структурой [1–3]. В данном обзоре мы ограничимся другим типом аттрактора, также давно известным. Состояние термодинамического равновесия Максвелла–Больцмана–Гиббса, по современной терминологии, не что иное, как статистический аттрактор, характеризуемый законом сохранения энергии и лагранжевым инвариантом, теоремой Лиувилля. Прилагательное *статистический* подчеркивает, что от этого аттрактора можно отодвинуться в результате флуктуации, хотя и недалеко. Напомним, что в случае многих степеней свободы теорема Лиувилля не запрещает существование статистических аттракторов, диссипация (необходимая для появления обычных и странных аттракторов) появляется в физике как приближенное описание гамильтоновых систем со многими степенями свободы. В случае турбулентности сохранение энергии может заменяться другими инвариантами, а статистический аттрактор будем называть турбулентным равнораспределением (TRP, turbulent equipartition — ТЕР).

Хотя важность инвариантов давно известна, не могу удержаться от дифирамбов в их адрес. Инварианты, как и полученные на их основе результаты, первичнее и надежнее уравнений движения и следующих из них результатов. Например, энергия сохраняется во множестве ситуаций, когда уравнения движения неизвестны или известны приближенно. Почти все важные уравнения физики выведены из условия сохранения ранее известных инвариантов. "Вывод" инвариантов из уравнений движения является обычно простой проверкой. Платой за надежность метода инвариантов является скудность результатов. Чем сложнее система, тем важнее роль инвариантов. Взаимоотношения людей плохо описываются уравнениями движения, но регулируются и описываются инвариантом денег.

Главный объект приложения в данном обзоре — турбулентная плазма токамаков. Канонические профили плазмы будут интерпретированы как турбулентные равнораспределения, именно по этой причине мы ограничимся одним типом аттрактора.

Токамаки — далеко не первый термоядерный реактор. ТЕР давно известны в естественных термоядерных реакторах с турбулентным транспортом энергии к поверхности — в звездах. Выделившаяся в термоядерных реакциях вблизи центра звезды энергия переносится за счет лучистой теплопроводности, ближе к поверхности температура понижается и лучистый теплоперенос уступает место конвекции. Конвекция сохраняет лагранжевы инвариант, удельную энтропию, и перемешивание приводит к турбулентному равнораспределению, постоянству удельной энтропии в пространстве, а не только вдоль траекторий:

$$\frac{T}{n^{2/3}} = \text{const}.$$

Здесь мы приняли приближение полной ионизации. Вместе с условием гидростатического равновесия ТЕР немедленно приводит к универсальному каноническому профилю плотности. Вблизи края звезды можно принять силу тяжести постоянной, что приводит к уравнению гидростатического равновесия $d(n^{5/3})/dx \sim n$ и распределению плотности $n \propto x^{3/2}$, расстояние x отсчитывается от верхнего края атмосферы. В отличие от экспоненци-

альной изотермической изоэнтропической атмосфера имеет резкую верхнюю границу, что можно увидеть и не прибегая к теории, а просто взглянув на Солнце.

Недавно профиль Солнца был измерен с высокой точностью с помощью гелиосейсмологии [4]. Измерение смещения спектральных линий позволяет измерить частоты собственных колебаний Солнца, по спектру частот восстанавливается радиальное распределение скорости звука. Вместе с условием равновесия это дает профили температуры и плотности. Оказалось, что условие адиабатичности выполнено в конвективной зоне с точностью выше одного процента. Для теории турбулентности точность фантастическая, и объясняется она высокой точностью сохранения лагранжева инварианта — удельной энтропии — при конвекции. В изоэнтропической сухой земной атмосфере спад температуры с высотой составил бы 10 градусов на километр, однако метеорологи принимают для стандартной атмосферы 6 градусов на километр. По свидетельству Заславского артиллеристы при расчете дальности также предполагают градиент 6 градусов на километр, если нет прямых измерений. Такое отклонение от простейшей модели связано с конденсацией пара и лучистым теплопереносом, которые снижают точность сохранения упрощенного лагранжева инварианта. Забегая вперед, скажем, что точность в токамаке будет ближе к "земной", чем к "солнечной".

Турбулентный транспорт признан главной и наиболее запутанной проблемой на пути к управляемому термоядерному синтезу, а токамаки признаны лидирующим типом установок. Турбулентному транспорту в токамаках посвящены десятки обзоров (например, [5–8]), но тема не исчерпана. По свидетельству Вагнера и Строта [7] всего несколько лет назад были неясны ни тип турбулентности, ни причины транспорта, ни стабилизирующие элементы. Недавние эксперименты, особенно подавление транспорта обращенным магнитным широм [9–11], дают возможность выбрать из теоретических моделей наиболее адекватные. Выбор этот, однако, не вполне однозначен, и мнения специалистов противоречивы. По нашему мнению, развитие теории и особенно эксперимента подтвердило конвекцию запертых частиц как главную причину транспорта, предложенную еще в первом обзоре по этому вопросу [5]. Крупномасштабные МГД-неустойчивости обычно не относят к проблеме турбулентного транспорта и рассматривают отдельно [12–14].

Традиционная программа исследования турбулентных переносов в токамаках стартует с уравнений движения, на их основе делается линейный анализ неустойчивостей, затем с помощью общих рассуждений об уровне нелинейности оцениваются коэффициенты переноса, затем решаются транспортные уравнения. Это хорошая прямая программа, и она была бы совсем хороша, если бы легко выполнялась. Несмотря на тысячи работ и применение всей мощи компьютеров, удовлетворительная точность достигается лишь в отдельных случаях, а новые режимы улучшенного удержания найдены, в основном, экспериментально (некоторое исключение составляет подавление транспорта обращенным широм, предсказанное на основе разных аргументов в [5, 15, 16]).

Программа данного обзора заключается в том, чтобы начать с инвариантов (вместо уравнений движения) и из них найти аттрактор и область притяжения к нему.

Весь метод магнитного удержания основан на инвариантах вмероженности, приклеенности частиц плазмы к силовым линиям магнитного поля. Если вмероженность идеальна, а силовые линии лежат на вложенных торах, то нет и турбулентного транспорта. Анализ турбулентного транспорта в значительной степени сводится к анализу разрушения инвариантов вмероженности. Здесь уже в самом начале исследователь сталкивается с неприятным сюрпризом: никаких корректных трехмерных МГД-уравнений для слабостолкновительной или бесстолкновительной плазмы нет, откуда же взять инварианты? Замагниченная плазма — очень сложная многомерная система. В токамаке или слеллараторе функция распределения зависит минимум от шести переменных, не похожих друг на друга: малый радиус, тороидальный угол, полоидальный угол, время, продольная скорость, поперечная скорость. В шестимерном сильно анизотропном пространстве можно расположить много разных объектов, поэтому естественно, что никаких простых МГД-уравнений, адекватных проблеме турбулентного переноса, неизвестно. При попытке писать МГД-уравнения оказывается, что давление — уже не скаляр, а весьма неопределенный тензор, и понятие вмероженности не удастся вывести теоретически, хотя в экспериментах вмероженность имеет место.

Инварианты вмероженности, однако, могут сохраняться и в отсутствие МГД-уравнений движения. Важнейший новый инструмент анализа — обобщение вмероженности на уравнение Власова с помощью инварианта Пуанкаре. Вместе с предположением об интегрируемости поведения некоторой группы частиц это ведет к новому важному и общему утверждению о сохранении топологии магнитного поля в бесстолкновительной плазме.

Используя тороидальную симметрию токамака, мы покажем, что на транспортных временах вмероженность плазмы в полоидальное поле сохраняется, а в тороидальное поле разрушена, что давно известно для запертых частиц [5], и сразу ведет к возможности конвекции. Если вмероженность в полоидальное поле сохраняется, то величина nr/B_p является лагранжевым инвариантом и ведет к аттрактору $n \propto 1/q$. Этот канонический профиль плотности объясняет парадокс турбулентного пинчевания и близок к наблюдаемому в супершотах и L-моде. Если принять необоснованный, хотя и естественный, закон политропы для температуры, то в омическом режиме профили аттрактора (плотность, температура, магнитное поле) определены однозначно и весьма близки к экспериментально наблюдаемым.

Турбулентные равнораспределения полностью характеризуются инвариантами; без преувеличения, инварианты — это прямые рельсы, проложенные через болото переменных. Знание инвариантов турбулентного аттрактора позволяет предсказать, при каких условиях турбулентный транспорт подавляется. Если атмосфера подогревается сверху или если сила тяжести перевернута, то нет причин для конвекции. В токамаке отрицательный знак (обращение) магнитного шира приводит к тому, что плазма сжимается при движении наружу, что энергетически невыгодно и подавляет конвекцию. Это положение 30-летней давности нашло недавно уверенную экспериментальную поддержку [9–11].

Тороидальная компонента закона вмероженности разрушена запертыми частицами. Если плазма вра-

щается в полоидальном направлении и захваченные ионы отсутствуют, исчезает причина разрушения вмероженности и, как следствие, турбулентный транспорт подавляется. Это предсказание Н-моды также было сделано 30 лет назад [17, 18], но почему-то не обсуждалось после экспериментального обнаружения подобной картины [19].

Таким образом, анализ разрушения одного инварианта позволяет естественно объяснить три совершенно непохожих режима удержания в токамаках, которые соответствуют аттрактору и двум границам его области притяжения. Такая экономность обычно является признаком правильности, хотя и не может служить доказательством.

2. Турбулентные равнораспределения

Эволюция нелинейных систем с большим числом степеней свободы зависит от формы гиперповерхности в фазовом пространстве, задаваемой законами сохранения. Если гиперповерхность открытая и ее площадь сосредоточена на бесконечности, то эволюцию системы обычно описывают в терминах потоков энергии и других инвариантов по образцу колмогоровской модели турбулентности [20]. Этот случай наиболее распространен, но он не является единственно возможным. Если гиперповерхность замкнута, то потокам некуда течь и естественно притяжение к статистическому аттрактору, равнораспределению на гиперповерхности интегралов движения. Величины, сохраняющиеся вдоль траекторий (лагранжевы инварианты), дают принципиальный инструмент исследования равнораспределений. В этом разделе будет выведено уравнение диффузии, описывающее релаксацию к пространственно-неоднородным ТРР. Это диффузионное уравнение отличается от обычно используемого в токамаках наличием дополнительных потоков.

2.1. Соль в тесте

С использованием турбулентных равнораспределений человечество столкнулось тысячи лет назад: при приготовлении теста для равномерного распределения в нем соли тесто достаточно перемешивать долго, при этом интенсивность перемешивания может быть и неоднородной в пространстве. Древние, несомненно, знали ответ, хотя могли и не знать причин равнораспределения. Сформулируем эти причины в явном виде.

1. Полное количество соли сохраняется.

2. Движения несжимаемы, т.е. $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Из этих двух предположений следует сохранение концентрации соли c вдоль траекторий, т.е. имеется лагранжев инвариант

$$\frac{dc}{dt} = 0. \quad (1)$$

Подчеркнем, что лагранжев инвариант богаче интегрального, поскольку сохраняется вдоль бесконечного количества траекторий. Интегральный инвариант (полное количество соли) следует из лагранжева, но не наоборот. Роль молекулярной диффузии при перемешивании сводится к сглаживанию сильных осцилляций концентрации. Если перемешивание и диффузия уже привели к установлению $c = \text{const}$, то никакое несжимающее перемешивание не способно изменить концентрации, т.е. решение $c = \text{const}$ является аттрактором. Эти сооб-

ражения позволяют также сразу получить уравнение диффузии, описывающее релаксацию к равнораспределению в локальном приближении. (Само равнораспределение не требует локальности.)

Материя не исчезает, поэтому

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0.$$

Поток \mathbf{q} должен обращаться в нуль на равнораспределении, так что, предполагая еще и изотропность, получаем

$$\mathbf{q} = -D \nabla c.$$

Окончательно

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} D \cdot \nabla c. \quad (2)$$

Коэффициент диффузии D определяется деталями турбулентности, в то время как форма уравнения определяется лагранжевым инвариантом.

В природе, однако, встречаются не только несжимаемые движения. Следующий простой, но важный пример дает атмосферная турбулентность, пульсации которой медленны по сравнению со скоростью звука. При подъеме воздух расширяется, а при опускании сжимается, поэтому его концентрация уже не является лагранжевым инвариантом. Температура также подвержена адиабатическим изменениям, поэтому нельзя утверждать, что результатом перемешивания будет изотермическая атмосфера. Удельная энтропия s , однако, является лагранжевым инвариантом, и для нее выполняются как точное, $ds/dt = 0$, так и усредненное,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} D \cdot \nabla s,$$

уравнения переноса. Релаксированным равновесным состоянием является изоэнтропическая атмосфера, безразлично устойчивая по отношению к конвекции. Для нас ценность этого примера заключена в том, что турбулентный теплоперенос при учете сжимаемости обращается в нуль отнюдь не на изотермическом распределении и система релаксирует не к нему. Учет недиагональных переносов недостаточен. Это обстоятельство обычно упускается из виду при обсуждении потоков тепла и частиц в токамаках, но давно и хорошо известно в физике атмосферы (см., например, [21]).

Для установления изоэнтропического профиля существенно, что атмосфера подогревается снизу, причем для неустойчивости градиент температуры должен превысить критический. При нагреве сверху нет причин для неустойчивости и ТРР появятся, лишь если есть дополнительный источник турбулентности, например ветер.

2.2. Структура турбулентной транспортной матрицы и симметрия Онсагера

Если система неоднородна и анизотропна, то вместо скалярного коэффициента диффузии появляется тензор, структура которого определяется лагранжевыми инвариантами. В разделе показано, что турбулентность не просто разрушает симметрию Онсагера, но приводит к потокам в отсутствие градиентов термодинамических величин.

В пренебрежении турбулентными переносами, когда основной вклад в перенос вызван кулоновскими столкновениями, неоклассические коэффициенты [22, 23] обладают онсагеровской симметрией [24], т.е. потоки числа частиц, тепла, заряда, тороидального момента и др. пропорциональны градиентам термодинамических величин:

$$q_i = a_{ik} \nabla \varphi_k, \quad (3)$$

а коэффициенты a_{ik} симметричны либо антисимметричны [24]. Учет турбулентности обычно сводят к добавлению в матрицу переносов вклада от турбулентности:

$$q_i = (a_{ik} + T_{ik}) \nabla \varphi_k. \quad (4)$$

Существует множество работ, в которых турбулентный перенос в токамаках обладает симметрией, и работ, в которых показывается, что симметрии нет (см. обсуждение в [25]). Мы покажем, что симметрия может быть для упрощенных моделей турбулентности, в общем же случае разрушается не только симметрия — неверно само матричное уравнение (4), турбулентность вызывает потоки в отсутствие градиентов термодинамических величин [16]. Это утверждение — главный результат раздела.

Наличие или отсутствие симметрии не является специфичным для турбулентности в токамаках, это общая проблема турбулентности, поэтому постараемся рассмотреть ее, используя минимум предположений. Главным ограничением является несжимаемость фазового потока, следующая из гамильтоновости системы (теорема Лиувилля). Сначала посмотрим, как возникает одномерное уравнение переноса. Пусть на двумерной плоскости совершаются несжимаемые перестановки, т.е.

$$\frac{df(x, y)}{dt} = 0,$$

а средняя функция распределения f_0 зависит только от x . Тогда для потока q

$$q_x = \langle \delta f \delta x \rangle = \frac{\partial f_0}{\partial x} \langle \delta x^2 \rangle,$$

откуда

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_{xx} \frac{\partial f_0}{\partial x}.$$

Так происходит, например, с квазилинейной диффузией на волнах [26]. Полезно отметить, что коэффициент квазилинейной диффузии однозначно определяется из условия сохранения энергии

$$\gamma W = D_{xx} \frac{mv^2}{2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Здесь γ — декремент затухания Ландау, а W — плотность энергии волн.

Если диффузия существенно двумерна и турбулентность анизотропна, но не гиротропна, то существуют фундаментальные перестановки типа представленной на рис. 1а, из которых можно составить несжимаемую

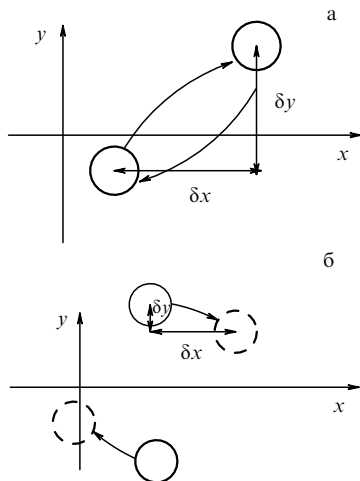


Рис. 1. Несжимаемая перестановка, типичная для анизотропной, но негиротропной турбулентности (а). Несжимаемая перестановка, типичная для изотропной, но гиротропной турбулентности (б).

перестановку общего вида. Для нее

$$q_x = \langle \delta f \delta x \rangle = \frac{\partial f_0}{\partial x} \langle \delta x^2 \rangle + \frac{\partial f_0}{\partial y} \langle \delta x \delta y \rangle,$$

$$q_y = \langle \delta f \delta y \rangle = \frac{\partial f_0}{\partial x} \langle \delta x \delta y \rangle + \frac{\partial f_0}{\partial y} \langle \delta y^2 \rangle.$$

Мы видим, что в этом частном случае матрица переноса симметрична и может быть приведена к диагональному виду поворотом.

Для частного случая двумерной гиротропной, но изотропной турбулентности фундаментальная перестановка выглядит как локальный поворот на малый угол, эта перестановка представлена на рис. 1б. Оценки, аналогичные предыдущим, показывают, что матрица переноса в этом случае антисимметрична. В более общем случае сумма симметричной и антисимметричной матриц не имеет симметрии. В случае оригинальной симметрии Онсагера предусмотрено изменение знака магнитного поля, для турбулентности можно сделать аналогичные предположения. Возникшие соотношения выглядят не слишком полезными для эксперимента. Реальная ситуация, однако, может быть еще хуже. Причина в том, что в многомерном случае (а фазовое пространство уравнения Власова шестимерно) двумерные перестановки могут быть сжимаемыми за счет компенсирующих сжатий по другим координатам. В результате возможны потоки и при нулевых градиентах термодинамических величин, и против градиентов. Это не противоречит никаким общим принципам термодинамики (см. [27]). Следует, однако, помнить, что матричные элементы от градиентов термодинамических величин могут зависеть квадратично или иначе.

Таким образом, в общем случае турбулентные переносы в токамаке для полудюжины величин (плотность, электронное и ионное тепло, тороидальная скорость вращения, полоидальное магнитное поле, радиальное электрическое поле и т.д.) определяются полной матрицей плюс члены в отсутствие градиентов, т.е. несколькими десятками независимых коэффициентов, вычислить которые нереально. К счастью, аттрактор можно исследовать без знания этих коэффициентов.

2.3. Пограничная устойчивость и близость к аттрактору

Пограничная устойчивость потенциально дает более полную информацию, чем ТРР, но ТРР проще.

Принцип пограничной устойчивости предполагает, что потоки, вызывающие отклонение от равновесия, так малы, что уже слабой неустойчивости достаточно для достижения нового равновесия. Неустойчивость возникает при градиентах, превышающих критические значения, а критические градиенты можно найти из условия равенства нулю инкрементов неустойчивостей. Для Солнца пограничная неустойчивость в простейшем приближении дает постоянство удельной энтропии, как и ТРР. Близость к аттрактору связана с малостью потока энергии по сравнению с газодинамическим потоком (произведение плотности тепловой энергии на скорость звука).

Для токамака принцип пограничной устойчивости (marginal stability) был предложен в [28]. Сложность проблемы линейной устойчивости пока не позволила его реализовать, хотя быстро прогрессирующие численные методы вселяют надежды [29–32]. Кадомцев и Погуде дали близкую к боровской оценку утечки на запертых частицах [5], если превышение градиентов над критическими порядка единицы. Экспериментально создаваемые нагревом потоки тепла много меньше боровских, что иногда ошибочно используется как аргумент против теории Кадомцева и Погуде. Реально это указывает лишь на близость градиентов к критическим. Еще прямее на близость к аттрактору указывает малость наблюдаемых статических коэффициентов переноса по отношению к динамическим. Статические коэффициенты могут и совпадать с динамическими, но в любом случае отсчитывать измеряемые градиенты следует от критических градиентов.

Совпадающий с пограничной устойчивостью аттрактор был рассмотрен Пастуховым для переходного слоя магнитоэлектростатической ловушки [33].

Хорошо известное плато, возникающее при одномерной квазилинейной релаксации частиц на волнах, — также пример ТРР. Турбулентное равновесие, таким образом, тесно связано с пограничной (маргинальной) устойчивостью, а обращение инкремента в нуль связано с невозможностью дальнейшей релаксации равновесного состояния. В простейших случаях ТРР и пограничная устойчивость дают одинаковые ответы, однако учет затухания или возбуждения волн столкновениями или нелинейными биениями ведет к расхождению ответов. Анализ ТРР, однако, проще, поскольку для него достаточно знания инвариантов движения. По этой причине мы в дальнейшем будем рассматривать метод ТРР, вспоминая о пограничной устойчивости по мере необходимости.

2.4. Простая двумерная модель турбулентного равновесия в плоской геометрии и в z-пинче

Уже простейшая двумерная модель с одной компонентой магнитного поля демонстрирует важные черты ТРР: пинчевание частиц и тепла, связь с инвариантами в замороженности. Аналогичная модель вполне реалистична в z-пинчах.

Рассмотрим четыре постепенно усложняющихся примера ТРР.

Простейшим примером является домашний холодильник, производящий потоки тепла в отсутствие начального градиента температур. Как и турбулентность, холодильник активен, поэтому такие потоки не запрещены.

Пример холодильника может показаться искусственным, поэтому напомним уже рассмотренное во введении адиабатическое перемешивание в изначально изотермической термодинамически равновесной атмосфере. Поднятые объемы воздуха расширятся и потому охладятся, опущенные сожмутся и нагреются, появится поток тепла, направленный вниз. Конечно, изотермическая атмосфера конвективно устойчива и нуждается во внешнем источнике турбулентности, например горизонтальном ветре. Уравнение для потока тепла легко получить из условия обращения его в нуль в изоэнтропической атмосфере $s = \text{const}$:

$$q = D \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Коэффициент D определяется турбулентностью. Конечно, мы не претендуем на значимость приведенного процесса для атмосферы, но он вполне прозрачен и физичен. В токамаках аналогичный процесс назвали бы тепловым пинчем.

Фундаментальный интерес представляет двумерная идеализированная модель магнитного удержания. Магнитное поле предположим заданным, имеющим одну компоненту вдоль оси z и зависящим от двух остальных координат, т.е. $B = B_z(x, y)$. Также предположим, что плазма описывается идеальной одножидкостной МГД. Это означает, что заморожена величина n/B , являющаяся лагранжевым инвариантом. Если плазма перемешивается дрейфовыми течениями, то, естественно, возникает пространственно неоднородное ТРР, соответствующее равномерному распределению инварианта:

$$n(x, y) \propto B(x, y).$$

Простота ответа и быстрота, с которой он был получен, не должны вводить в заблуждение. Пинчевание по этому механизму опущено почти во всех работах по турбулентным переносам. Численная проверка притяжения к этому аттрактору проведена в [34] в рамках МГД, результат следует аналитической теории с высокой точностью. Аналогичный результат дало моделирование уравнения Власова [35]. На рисунке 2 приведены установившийся профиль концентрации и модельный профиль магнитного поля, турбулентность имитировалась случайным набором гармоник. Очевидно совпадение профилей, хотя гидродинамический инвариант замороженности, из которого был получен аналитический ответ $n/B = \text{const}$, неприменим. Отгадка заключена в переносе замороженности на уравнение Власова (см. следующий раздел).

Равнораспределения рассматривались также в z -пинчах. Сначала Кадомцев [36] для перестановочной неустойчивости осесимметричного z -пинча в рамках идеальной МГД получил критерий пограничной устойчивости в виде

$$\frac{rp^{3/5}}{B} = \text{const}. \quad (5)$$

Этот критерий имеет ясный физический смысл. Тепловое давление, нормированное на единицу магнитного

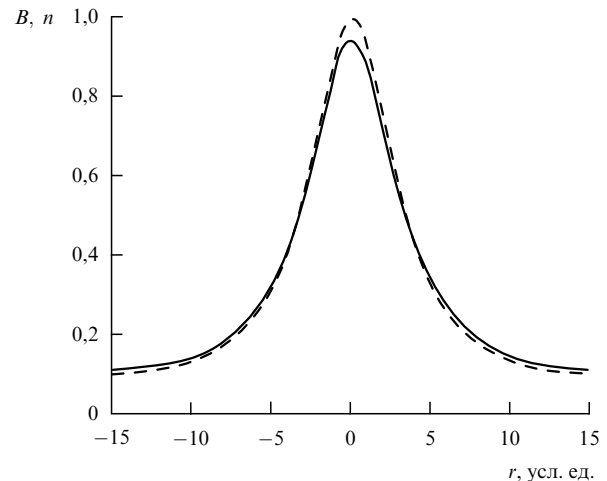


Рис. 2. Магнитное поле (штриховая линия) и плотность (сплошная линия), полученные при численном моделировании кинетики в [35].

потока, вызывает неустойчивость, если оно больше у оси пинча. Аналогия с конвекцией в атмосфере полная.

Затем Сасоров [37] предположил, что при развитии перетяжки в результате выворачивания пинча наизнанку вблизи оси формируется область с приблизительно одинаковым значением инварианта (5). Экспериментальные данные для плазменного фокуса неплохо согласуются с этой гипотезой. Фактически — это метод ТРР, и он ставит следующий естественный вопрос. В пинче, в отличие от атмосферы, два независимых лагранжевых инварианта — замороженная функция (5) и удельная энтропия. Почему мы игнорируем энтропию? Ответ прозрачен: пограничная устойчивость и МГД чувствуют только один инвариант (5), поэтому тенденция к его равнораспределению будет проявляться настойчивее. Иначе говоря, помимо активных инвариантов бывают и пассивные, вроде соли в тесте. Отсутствие ТРР для удельной энтропии не влечет МГД-неустойчивостей, но если турбулентность интенсивная, может возникнуть и ТРР энтропии. На самом деле МГД-уравнения имеют и третий лагранжев инвариант — зависящую от двух первых инвариантов нормированную на магнитный поток плотность частиц nr/B , поэтому турбулентный диффузионный поток, записанный для простоты в короне пинча, где магнитное поле убывает обратно пропорционально радиусу, имеет вид

$$q_n = D \frac{\partial(nr^2)}{\partial r}.$$

Здесь одна единица в показателе степени r^2 возникла из-за зависимости магнитного поля от радиуса, а вторая — из-за цилиндричности. Равнораспределение достигается на сильно неоднородном профиле, в токамаках подобный феномен называется пинчеванием частиц. Однако пограничной устойчивости для удельной энтропии и плотности нет, в рамках рассмотренной модели их роль подобна соли в тесте, эти инварианты — пассивные скаляры.

Равнораспределения, основанные на лагранжевых инвариантах гидродинамики, относительно просты. Со стороны низких размерностей к ним примыкают известные МГД-теории релаксированных состояний Тейлора

[38] и Кадомцева [39], а со стороны высоких размерностей — менее известные и более сложные равномерные распределения для неинтегрируемых уравнений нелинейных волн. В последних статистическими аттракторами выступают уединенные волны (солитоны) [40, 41].

Рассмотренные в этом разделе примеры ранее изучались в МГД в связи с плазменным фокусом [37] и ионным диодом [42], а также онсагеровской симметрией и пинчеванием в токамаках [43]. Эти простые примеры показывают, что не только онсагеровская симметрия разрушена турбулентностью [25, 44, 45], но пересматривается само равновесие. Описание равновесий-аттракторов дается лагранжевыми инвариантами.

3. Интегралы в замороженности в бесстолкновительной плазме

Обычный закон в замороженности неприменим к бесстолкновительной плазме из-за тензорного вида сил теплового давления. Перенос понятия в замороженности на уравнение Власова показывает, что топология магнитного поля может сохраняться и в присутствии тепловых сил, но плазма в общем случае более не заморожена в это поле. В тороидально-симметричном токамаке плазма заморожена в полоидальное поле: $nr/B_p = \text{const}$.

3.1. Понятие в замороженности и инвариант Пуанкаре

Фундаментальная причина появления закона в замороженности в плазме вызвана потенциальностью сил. Закон в замороженности связан с сохранением завихренности в идеальной жидкости, с каноничностью уравнений Гамильтона для жидкой частицы и с инвариантом Пуанкаре. Инвариант Пуанкаре помогает обобщить закон в замороженности.

Силы в природе обычно потенциальны, что ведет к сохранению углового момента. В случае сплошных сред это проявляется в виде сохранения завихренности в идеальной жидкости, в замороженности магнитного поля в плазме, а также в обобщенной завихренности. Устойчивость волчка и магнитное удержание плазмы имеют общую природу. К сожалению, этот вопрос практически не освещен в учебниках, а в замороженности магнитного поля дается как частное свойство уравнений движения. В дифференциальной формулировке в замороженности означает, что эволюция магнитного поля \mathbf{B} описывается уравнением

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{V} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (6)$$

где \mathbf{v} — скорость плазмы. В эквивалентной интегральной формулировке поток магнитного поля \mathbf{B} сквозь любой замкнутый контур, переносимый со скоростью плазмы \mathbf{v} , сохраняется.

Уравнение (6) можно получить, взяв ротор от гидродинамического уравнения движения электронов и положив токовую скорость и массу электронов равными нулю. Между тем, и с учетом конечной массы уравнение движения каждой компоненты плазмы может быть представлено в форме сохранения обобщенной завихренности Ω :

$$\Omega_t = \mathbf{V} \times [\mathbf{v} \times \Omega], \quad (7)$$

где $\Omega = \mathbf{V} \times \mathbf{p}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}/c$ — обобщенный импульс частицы. Когда в обобщенном импульсе доминирует

механическая часть, получаем известную с прошлого века теорему Кельвина о циркуляции в идеальной жидкости, при доминировании электромагнитной части — в замороженности магнитного поля. Интеграл движения Ω не исчез с введением конечной массы электронов, немного изменилось его определение. Поэтому учет конечной массы электронов не вызывает ни утечек плазмы, ни бесстолкновительного перезамыкания. Работы в этой области нередко упускают из виду сохранение обобщенной завихренности.

Сохранение обобщенной завихренности было введено Дираком и в плазме Суданом [46, 47]. На более математическом языке связь завихренности и гамильтоновости изложена в монографиях [48, 49].

Новая запись также помогает прояснить фундаментальную причину появления понятия в замороженности. Причина сохранения обобщенной завихренности не случайна, она кроется в канонической форме уравнений Гамильтона жидкой частицы. Действительно, гидродинамические уравнения движения для давления, зависящего только от плотности, могут быть получены из гамильтониана

$$H = P(\mathbf{q}) + e\phi(\mathbf{q}) + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2}{2m}, \quad (8)$$

где $P(\mathbf{q})$ — нормированное давление, $\phi(\mathbf{q})$, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ — электростатический и векторный потенциалы. Уравнения имеют канонический вид:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}}. \quad (9)$$

Тогда из (9) следует сохранение относительного интегрального инварианта Пуанкаре

$$I = \oint \mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad (10)$$

где контур интегрирования переносится фазовым потоком. (Не следует путать этот точный инвариант с приближенным адиабатическим, происходящим от инварианта Пуанкаре и имеющим тот же самый вид. Разница заключена в контуре интегрирования: в случае адиабатического инварианта интеграл берется по периодической траектории частицы. Периодическая траектория лишь приближенно совпадает с контуром, переносимым фазовым потоком.) Поскольку в гидродинамике обобщенный импульс есть функция координат и времени, возможно осуществить проекцию из шестимерного фазового пространства в обычное трехмерное. После этого контурный интеграл может быть преобразован в поток $\mathbf{V} \times \mathbf{p}$ сквозь поверхность, натянутую на контур, а это интегральная формулировка в замороженности величины

$$\Omega = \mathbf{V} \times \mathbf{p}.$$

Из-за переменности магнитного поля электрическое поле непотенциально, поэтому может показаться, что и циркуляция импульса не должна сохраняться. Разгадка в том, что изменение обобщенного импульса по этому механизму уже скрыто в его магнитной части и каноничность уравнений Гамильтона не нарушена.

По аналогичным причинам закон в замороженности можно ввести и в общую теорию относительности,

когда магнитное поле обретаёт вес, а пространство искривлено. Закон вмороженности можно ввести и для плазмы Янга – Миллса.

3.2. Лагранжевы инварианты и вмороженность для дрейфового уравнения Власова

Для дрейфового уравнения Власова в этом разделе введен лагранжев инвариант, основанный на относительном интегральном инварианте Пуанкаре, а также поперечном и продольном адиабатических инвариантах. Раздел не содержит выкладок, но обобщение гидродинамического понятия вмороженности на кинетику требует усилий. Эти усилия необходимы, ибо без этого понимание вмороженности в бесстолкновительной плазме неполно.

Гидродинамическое условие вмороженности плохо обосновано для движений плазмы со скоростями порядка скорости тепловых дрейфов частиц, но его можно обобщить на уравнение Власова. Инвариант Пуанкаре, существующий в шестимерном фазовом пространстве, может быть рассмотрен и в пространстве уравнения Власова, вся разница в том, что поля в уравнении Власова конкретизированы. Можно сказать, что уравнение Власова для электронов описывает бесконечное количество электронных гидродинамик с нулевым тепловым давлением, в каждой сохраняется свой инвариант (10). Начальный контур интегрирования произволен, и успех зависит от того, как этим произволом воспользоваться. Сила интеграла в способности ограничивать движение. Если бы контур оставался на некоторой двумерной поверхности, количество частиц внутри контура сохранялось бы, поскольку линия: 1) делит поверхность, 2) приклеена к частицам.

Линия не делит шестимерное пространство, но размерность можно понизить до двух введением адиабатических инвариантов, естественно существующих в замагниченной плазме. Особенно прост поперечный адиабатический инвариант, магнитный момент

$$\mu = \frac{v_{\perp}^2}{B}. \quad (11)$$

Его сохранение сразу понижает размерность на два. Если теперь рассмотреть квазипериодическое движение частицы между магнитными пробками и ввести сохранение продольного адиабатического инварианта,

$$J = \oint v_{\parallel} dl, \quad (12)$$

то размерность пространства понижается еще на две единицы и движение центров банановых орбит лежит на гиперповерхности размерности 2, что сразу влечет серьезные ограничения. Внутри контура теперь сохраняется не только поток Bs , но и число частиц $n_{\mu,J}s$, что позволяет поделить первый на второе и "сократить" контур интегрирования. Поскольку мы уже перешли к дрейфовому приближению, в инварианте Пуанкаре следует сохранить лишь магнитную часть импульса, и контурный интеграл принимает замечательно простой вид лагранжева инварианта. Вдоль траекторий сохраняется величина

$$L = \frac{B_{\perp}}{n_{\mu,J}}, \quad (13)$$

где B_{\perp} — компонента магнитного поля, перпендикулярная поверхности центров банановых дрейфовых орбит. Этот лагранжев инвариант обобщает понятие вмороженности на уравнение Власова и очень удобен для анализа структуры уравнений турбулентного транспорта — это главный инструмент настоящего обзора. Напомним, что инвариант (13) и оба адиабатических инварианта получены из одного инварианта Пуанкаре, разница — в контурах интегрирования.

Рассмотрим простой пример, когда магнитное поле имеет только z -компоненту. В этом случае воспользуемся сохранением поперечного адиабатического инварианта

$$\mu = \frac{v_{\perp}^2}{B}.$$

Теперь дрейфовое уравнение Власова сохраняет инвариант Пуанкаре (10) и аналог (13) — лагранжев инвариант n_{μ}/B . Соответствующее ТРР

$$n_{\mu}(x, y) \propto B(x, y)$$

отличается от гидродинамического только тем, что то же самое ТРР верно на каждой гиперповерхности $\mu = \text{const}$. По этой причине усреднение по различным μ сводится к отбрасыванию индекса.

Этот результат можно получить менее строго, но более наглядно. Холодная частица испытывает только электростатический дрейф вдоль эквипотенциалей. Поскольку скорость дрейфа пропорциональна B^{-1} , частица проводит больше времени в областях повышенного магнитного поля. Горячая частица испытывает дополнительный дрейф вдоль линий постоянного магнитного поля, но на этих линиях плотность полученного выше ТРР постоянна и потому не возмущается.

Таким образом, в этом частном случае гидродинамическое и власовское ТРР полностью совпали. Причина кроется в независимости власовского ТРР от μ . Этот пример объясняет, почему при численном моделировании кинетики [35] получилось то же турбулентное равнораспределение, что и при моделировании гидродинамики [34]. Отметим практически важное приятное свойство: распределение концентрации следует бесстолкновительному ТРР даже тогда, когда поперечный адиабатический инвариант разрушен столкновениями. Причина в том, что столкновения не меняют магнитной части импульса, принципиально сохранение только крупномасштабного инварианта Пуанкаре. Более подробное рассмотрение двумерных ТРР дано в [50].

В общем трехмерном случае совпадения гидродинамического и власовского ТРР, вообще говоря, нет.

3.3. Полуидеальная МГД и инь-ян-частицы

Понятие вмороженности используется в бесстолкновительной плазме вообще и в токамаках в частности без достаточных оснований, поскольку непотенциальная часть сил теплового давления могла бы разрушать топологию магнитного поля на транспортных временах. В этом разделе показано, что частицы с интегрируемым поведением обеспечивают прекрасную продольную проводимость плазмы и, тем самым, сохранение магнитной топологии, в то время как неинтегрируемые частицы дают основной вклад в поперечные утечки.

В первых токамаках температура была низкой и классический транспорт был хотя и меньше турбулентного, но не пренебрежимо мал. С ростом электронной температуры проводимость плазмы росла, и все четче обозначался парадокс: диффузия магнитного поля все сильнее уступала диффузии частиц, хотя в рамках МГД за обе диффузии ответствен один процесс — трение электронов об ионы. Попытка объяснения расщеплением магнитных поверхностей предсказывает усиленную диффузию быстрых электронов, что, похоже, противоречит эксперименту.

Этот парадокс имеет фундаментальное значение и тонкие физические причины, но стал обсуждаться лишь недавно. В явном виде парадокс был сформулирован Бузером [51]: "Хорошо известно, что в лабораторной плазме напряжение обхода определяется спитцеровской проводимостью, хотя поперечный транспорт может быть в 10^3 раз больше, чем предсказано классическим сопротивлением". Бузер также показал, что если продольная проводимость бесконечна, то магнитная топология сохраняется и магнитное поле подчиняется уравнению

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{V} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (14)$$

где \mathbf{u} — скорость некоторого абстрактного хранителя в замороженности, не совпадающая со скоростью плазмы \mathbf{v} . Связь сохранения топологии магнитного поля и продольной проводимости отмечалась также в [52], уравнение (14) было выведено в [53] из инварианта Пуанкаре для бесстолкновительного уравнения Власова.

Бузер приводит две возможных причины сильной разницы между продольной и поперечной проводимостями. Первая причина в том, что возмущения в замагниченной плазме сильно вытянуты вдоль магнитного поля, $k_\perp \gg k_\parallel$. Если $k_\perp/k_\parallel \simeq 10^3$, то основная передача импульса частицам поперечна и большая величина поперечного транспорта может быть объяснена, хотя это и требует очень мелкомасштабных возмущений.

Вторая причина тоньше и глубже: "Продольная проводимость близка к классической, если часть пролетных частиц имеет низкую диссипацию". Эта причина существует даже для $k_\perp \simeq k_\parallel$. То же предположение было сделано в работах [16, 53] на основе анализа инварианта Пуанкаре и в замороженности в уравнении Власова.

Сосуществование областей в фазовом пространстве с интегрируемым и неинтегрируемым поведением (нерезонансных и резонансных частиц на линейном языке) типично для гамильтоновой механики [48, 49]. Для краткости будем называть частицы с интегрируемыми траекториями инь-частицами, а с неинтегрируемыми — ян-частицами. В древнекитайской философии инь-ян символизируют противоположные начала, женское и мужское, пассивное и активное. Это вполне соответствует роли двух типов поведения частиц в плазме, к тому же инь напоминает слово интегрируемый и легко запоминается.

Методы описания инь- и ян-частиц совершенно различны. Еще Птолемей в своей теории эпициклов воспользовался интегрируемостью движения планет, что приводит к дискретности разложения траекторий в ряд Фурье, а слабость взаимодействия планет и малая эллиптичность орбит приводят к быстрой сходимости и

успеху эпициклов. Этот метод может применяться для описания инь-частиц в токамаках.

Диффузия и ТРР используются для описания ян-частиц. При разделении на инь и ян следует учитывать не только линейный резонанс Ландау, но и все нелинейности, связанные с конвективными ячейками, несовершенством магнитного поля и т.п. Последствия сосуществования инь- и ян-частиц для бесстолкновительной плазмы токамаков очень значительны. Подобно двухкомпонентному сверхтекучему гелию или электронам в сверхпроводниках, электроны в плазме можно описывать как состоящие из инь-частиц, хранителя в замороженности [51, 53], и ян-частиц, ответственных за поперечный транспорт.

Интегрируемость легче разрушается для запертых частиц, которые, похоже, составляют основную долю ян-частиц и дают главный вклад в утечки плазмы. Пролетные инь-частицы обеспечивают прекрасную продольную проводимость. Разумеется, их доля не может быть слишком мала, они должны быть способны перенести весь ток без существенного сопротивления. Из близости экспериментально измеренной продольной проводимости к спитцеровской следует, что доля инь-частиц не может быть заметно меньше половины, что естественно и с теоретической точки зрения. Диссипация волн и вихрей тесно связана с неинтегрируемостью, поскольку ян-частицам соответствует непрерывный спектр и любые возмущения находят свой резонанс.

Контур интеграла Пуанкаре для инь-частиц прост, малой механической частью импульса можно пренебречь, что ведет к сохранению циркуляции векторного потенциала и изовмороженности магнитного поля. Инвариант Пуанкаре сохраняется и для ян-частиц, но контур интегрирования при этом экспоненциально удлиняется, запутывается, поэтому пренебречь механической частью импульса и восстановить по инварианту магнитное поле невозможно (как и восстановить по магнитному полю положение контура и частиц).

МГД с бесконечной продольной проводимостью хранителя в замороженности, удовлетворяющее уравнению (14), в [54] была названа "полуидеальной МГД". Полуидеальная МГД сохраняет магнитную топологию, полоидальное магнитное поле в заморожено в тороидальное. Уравнение движения плазмы при этом не определено, а уравнение эволюции магнитного поля также содержит неопределенную скорость. Тем не менее из этого можно извлечь полезную информацию. Например, в токамаке магнитное поле довольно жесткое по отношению к тепловому давлению. Из этого следует, что эволюцией магнитного поля можно пренебречь и рассматривать диффузию частиц в заданном поле.

Наша трактовка несколько отклоняется от оригинальной трактовки Бузера [51] тем, что здесь причиной поперечного транспорта объявляется не конечная поперечная проводимость, а тензорность теплового давления (направление гидродинамической силы не определяется током).

Таким образом, инь-ян-дуальность, а как следствие, и полуидеальный характер МГД можно считать фактом эксперимента и теории. Относительно неидеальной части — движения плазмы — известно мало. Мы лишь предположим, что плазма лучше в заморожена в полоидальное поле, чем в тороидальное (см. следующий раздел).

3.4. Вмороженность плазмы в полоидальное магнитное поле

Непотенциальная часть сил теплового давления разрушает вмороженность плазмы в магнитное поле на транспортных временах. На кинетическом языке запертые частицы вморожены лишь в полоидальное магнитное поле, а пролетные не участвуют в транспорте и вморожены в обе компоненты поля. Это приводит к гипотезе о том, что вмороженность в полоидальное поле сохраняется лучше, чем вмороженность в тороидальное.

В слабостолкновительной плазме токамака турбулентные возмущения теплового давления неизбежно имеют тензорный вид и разрушают вмороженность. Нет никакой возможности корректно выписать эти возмущения, но можно проанализировать инварианты вмороженности для пролетных и запертых частиц. Следуя Кадомцеву и Погуце [5] предположим, что все пролетные частицы — это инь-частицы и не участвуют в транспорте, тогда как часть запертых относится к ян-частицам. В уравнении Власова была выведена вмороженность запертых частиц в полоидальное поле с лагранжевым инвариантом

$$L = \frac{n_{\mu} J}{B_p}.$$

Кулоновские столкновения меняют лишь малую механическую часть обобщенного импульса и слабо влияют на полный импульс, роль столкновений сводится к перемешиванию запертых и пролетных частиц. Естественна гипотеза, что при этом выживет полоидальная компонента закона вмороженности, которая сохранялась обеими группами частиц в бесстолкновительной плазме. Соответствующий лагранжев гидродинамический инвариант, в котором плотность определена в обычном пространстве, а не на гиперповерхности адиабатических инвариантов, имеет вид

$$L = \frac{nr}{B_p}. \quad (15)$$

Тороидальная компонента не сохраняется, физически это соответствует хорошо известным непотенциальным полоидальным пробочным силам, возникающим при попытке вращать плазму в полоидальном направлении.

Неясно, достаточно ли для этого вывода инвариантности лишь одного направления положительной инь-янь-дualности и естественных параметров малости. Напомним, что неизвестно никаких корректных МГД-уравнений, адекватных проблеме турбулентного транспорта.

4. Аттрактор в токамаке и его область притяжения

Турбулентный аттрактор и две границы его области притяжения соответствуют трем разным режимам удержания в токамаках. Похоже, что все три режима наблюдаются в экспериментах. Вмороженность плазмы в полоидальное магнитное поле при обычном положительном магнитном шире ведет к неустойчивости, ТРР и каноническим профилям. При инвертированном шире неустойчивость и турбулентный транспорт подавляются, профили не следуют ТРР. Устранение запертых ионов полоидальным вращением плазмы восстанавливает полный закон вмороженности и также подавляет турбулентность.

4.1. Турбулентное равнораспределение и минимальная модель канонических профилей для супершотов и L-моды

Вмороженность плазмы в полоидальное магнитное поле и предположение о турбулентном равнораспределении объясняют канонические профили (для омического режима) и парадокс пинчевания.

Интересно отметить, что интерпретации эксперимента, почти эквивалентные наблюдению аттрактора, были сделаны прежде теории, идущей от первых принципов, и известны под именем каноничности, универсальности или сопротивляемости профилей [55–60]. К явлению канонических профилей тесно примыкает парадокс пинчевания частиц. Явление пинчевания состоит в образовании и поддержании профиля концентрации с максимумом в центре, хотя источник частиц расположен на краю, а нормальная диффузия направлена наружу. Пинчевание удобно описывать феноменологически с помощью выражения конвективного переноса частиц к центру со скоростью v [58, 61]:

$$Q = -D \frac{\partial n}{\partial r} + nv. \quad (16)$$

Этот конвективный поток не только не противоречит основным принципам, но и естествен для неоднородных ТРР. Идеология неоднородных ТРР объясняет конвекцию и требует переписать поток в форме, подчеркивающей неоднородное равновесие $n_0(r)$:

$$Q = -D_1 \frac{\partial(n/n_0)}{\partial r}. \quad (17)$$

Здесь $n_0(r)$ — безразмерная форма ТРР, $D_1 = Dn_0$, потоки вызваны отклонениями от него. В работе [61] было проверено, что величина D/av , где a — малый радиус токамака, приблизительно равна 0,5 в различных режимах, хотя диффузия и скорость менялись сильно. Похоже, что такова ситуация во всех токамаках, иначе профили плотности были бы плоскими или узкими.

Уравнение Власова со столкновительным членом слишком многомерно и анизотропно, чтобы можно было убедительно выяснить причины аномальных переносов в токамаках исходя из чистой теории. Любая неустойчивость увеличивает перенос, поэтому экспериментальные данные по временам удержания не слишком облегчают выбор. Другое дело — парадоксальное пинчевание частиц, существующее во всех токамаках и долгое время не имевшее простых объяснений. (Мы не рассматриваем пинчевание Уэйра [62], малое по сравнению с турбулентной диффузией, как не рассматриваем и другие неоклассические переносы [22, 23].)

В дальнейшем нас интересуют равновесие и $n_0(r)$ и мало интересуют потоки и D_1 . Турбулентное равнораспределение определяется вмороженностью в полоидальное поле (15) и ведет к профилю плотности [63–65]

$$n_0 \propto \frac{B_p}{r} \propto q^{-1}, \quad (18)$$

здесь q — запас устойчивости.

Это принципиальная формула обзора, поэтому получим ее еще двумя способами. Совсем просто (18) можно понять, если рассмотреть чисто тороидальное электрическое поле, как при пинчевании Галеева – Уэйра. Запертые частицы дрейфуют по радиусу со скоростью $v/c = E/B_p$.

Из постоянства потока по радиусу $nvr = \text{const}$ сразу следует формула (18). Конечно, постоянное тороидальное электрическое поле в токамаке мало — проводимость вдоль магнитного поля слишком велика. Но переменное электростатическое поле не запрещено и вдоль магнитного, именно оно и вносит решающий вклад в перемешивание. При такой грубой оценке, однако, неясно, надо ли учитывать зависимость доли захваченных частиц от радиуса и влияние столкновений.

Бесстолкновительные распределения нередко оказываются теми же и в случае столкновений. На это есть причина: инвариант Пуанкаре с большим контуром интегрирования не разрушается за одно кулоновское столкновение, поскольку основной вклад в него дает электромагнитный импульс. Особенно хорошо это видно в следующем выводе ТРР. Как отметил Пастухов [33], ТРР аналогичны квазилинейному плато [26]. В токамаке инвариантно тороидальное направление, поэтому рассмотрим плато на функции распределения по обобщенному тороидальному импульсу:

$$f = \frac{dN}{dp} = \text{const}, \quad p = mv + \frac{eA}{c}. \quad (19)$$

Пренебрегая в импульсе малой механической частью, дифференцируя (19) по радиусу и подставляя $dA/dr = B_r$, $dN/dr = 2\pi rn$, получаем

$$nr \propto B_r,$$

т.е. уже знакомое распределение. Здесь возможность пренебречь кулоновскими столкновениями, меняющими малую механическую часть импульса, естественна. Отметим, однако, что проверка предположений, ведущих к плато, требует некоторой внимательности. Предположения сводятся к пренебрежению неинвариантными направлениями и выполнению теоремы Лиувилля для инвариантного направления.

В 1980 г. Коппи высказал гипотезу о каноничности профиля электронной температуры в токамаках [55]. ТРР дает близкие к эксперименту профили не только температуры, но также плотности и запаса устойчивости.

Рассмотрим профили плазмы в токамаке в предположении, что плотность определяется ранее найденным ТРР

$$n \propto \frac{B_\theta}{r} \propto q^{-1}, \quad (20)$$

для температуры предположим политропу

$$T \propto n^{\gamma-1} \propto q^{-\gamma+1},$$

где величину γ пока оставим произвольной. Тогда проводимость — также известная функция q :

$$\sigma \propto T^{3/2} \propto q^{(1-\gamma)3/2}.$$

Предполагая, что весь ток в плазме индукционный и электрическое поле постоянно, т.е. профили стационарные, из закона Ома получаем

$$j \propto \frac{1}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2/q)}{dr} \propto \sigma E \propto q^{(1-\gamma)3/2}.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка легко интегрируется:

$$q = q_0(1 + r^{2\beta})^{1/\beta}, \quad \beta = \frac{3}{2}(\gamma - 1) - 1.$$

Важно, что этот профиль близок к используемому экспериментаторами $q = q_0(1 + r^2)$ при любом β . Это позволяет выбрать показатель адиабаты относительно произвольно и не внести при этом большой погрешности. Вспоминая, что при перемешивании меняется в основном продольная энергия запертых частиц, предположим одномерную адиабату для температуры:

$$T \propto n^2 \propto q^{-2}.$$

В результате получается минимальная модель канонических профилей [16]:

$$q = q_0(1 + r^4)^{1/2}, \quad T \propto (1 + r^4)^{-1}, \quad n \propto (1 + r^4)^{-1/2}, \quad (21)$$

где радиус нормирован так, чтобы на границе получалось правильное значение запаса устойчивости.

Модель минимальна в том смысле, что все время принимались простейшие предположения, в которых нет разницы между токамаками. Например, в диверторных токамаках приближение круглого сечения $q = q_0(1 + r^4)^{1/2}$ заведомо неверно вблизи сепаратрисы, где магнитный шир расходится. Нетрудно обобщить формулу (19) на случай крутого тора с некруглым сечением. Для этого в (19) достаточно заменить момент A на угловой момент $M = Ar$. Поверхности постоянного углового момента совпадают с магнитными; вводя объем внутри магнитной поверхности $V(M)$, приходим к формуле для плотности

$$n \propto \frac{dM(V)}{dV}. \quad (22)$$

Эта формула, как и формула $n \propto q^{-1}$, применима и в диверторных токамаках, причем в эксперименте градиенты плотности и температуры действительно возрастают вблизи сепаратрисы. Более того, на токамаке JET подгонкой данных было независимо обнаружено [66], что профиль плотности определяется преимущественно профилем q и может быть аппроксимирован формулой $n \propto q^{-1/2}$.

Еще раньше было обнаружено, что профили давления и температуры во многих токамаках выглядят аналогично после нормировки на граничное значение q_a [56, 57]. Более того, в обзорах [56, 57] пикированность $n(0)/\langle n \rangle$ растет с q_a , что качественно согласуется с формулой (18).

Для более детального сравнения с теорией нужно иметь одновременные измерения радиальных профилей плотности и полоидального магнитного поля. На рисунке 3 приведены результаты для токамака ТЕХТ, полученные с помощью Исиченко через базу данных по магнитному удержанию, описанную в [67]. Показаны величины n , q и nq как функции малого радиуса. Видно, что $nq = \text{const}$ с неплохой точностью, хотя мы проводили вычисления лишь для равновесного состояния, тепловые потоки и пилообразные колебания обязательно должны его возмущать. Напомним, что для сравнения с аттрактором следует по возможности рассматривать режимы

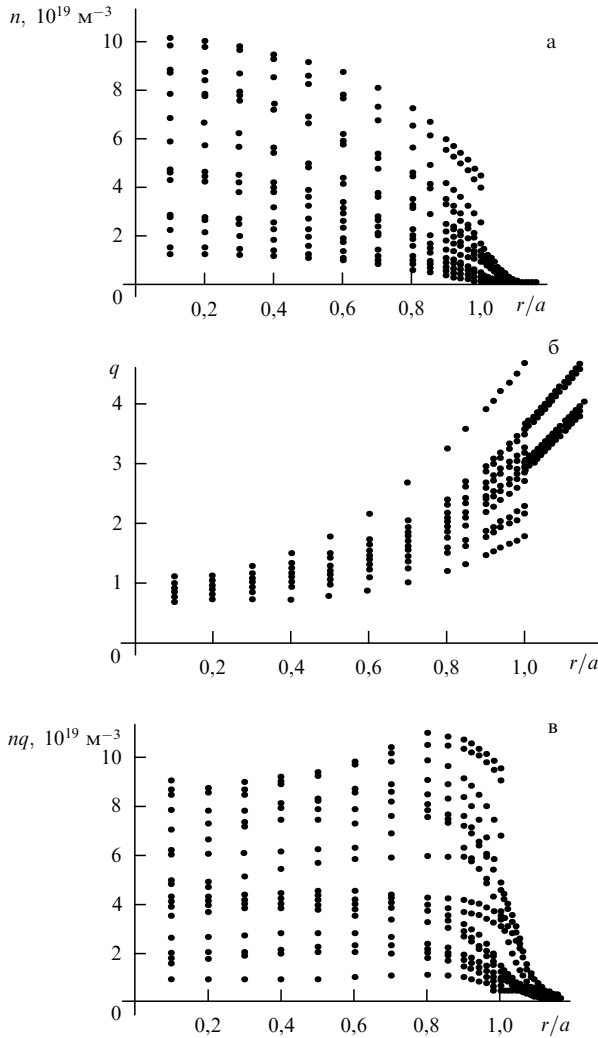


Рис. 3. Зависимости концентрации n , запаса устойчивости q и лагранжева инварианта nq в токамаке TEXT (выстрелы 88127–124778) [67].

свободные от ELM, MARFE, (L–H)-переходов и МГД-активности.

В токамаке TFTR удается получать супершоты свободные от пилообразных колебаний [68, 69]. В этом режиме значение nq постоянно с разумной точностью (рис. 4а и 4б). Совпадение теории и эксперимента аналогично и в других доступных супершотах. В L-моде TFTR профили плотности обычно уплощены из-за пилообразных колебаний, по этой причине некоторое расхождение с профилем (18) естественно (см. комментарий в [70]). Более того, даже для L-моды доступные профили плотности в TFTR лишь немного более плоские, чем $nq = \text{const}$, т.е. знак отклонения согласуется с теорией (рис. 4в).

Таким образом, пикированность профилей плотности в токамаках явно коррелирует с пикированностью $1/q$. Там, где есть детальные измерения, пикированность следует квазилинейному плато $nq = \text{const}$ или более слаба, что вполне естественно. Сложно объяснить пинчевание, а уплощающих факторов много.

Для того чтобы описать отклонения от канонических профилей, должна рассматриваться транспортная матрица, и аналитическая теория теряет простоту. Для этого более приспособлены численные коды [29–32].

Канонические профили температуры и тока (21) неплохо согласуются с экспериментом, хотя нужны более детальные сравнения.

Если объяснено пинчевание частиц, то и тепловой пинч [71] — не проблема, так как нагрев, по крайней мере адиабатический, неизбежен. Интересно отметить, что тепловое пинчевание было впервые обнаружено и интерпретировано в радиационных поясах Земли [72]. Нагрев происходит при сохранении продольного и поперечного инвариантов в дипольном магнитном поле $B \propto r^{-3}$, перемешивание обеспечивается энергией солнечной активности. Эта идея используется в проекте предложенного Хасегавой дипольного реактора с низкими температурами и плотностью плазмы вблизи стенки [73, 74]. Давление в дипольной ловушке падает очень круто, как $p \propto r^{-20/3}$. Недавно Кадомцев высказал мнение, что физика радиационных поясов и токамаков сходна [27, 72].

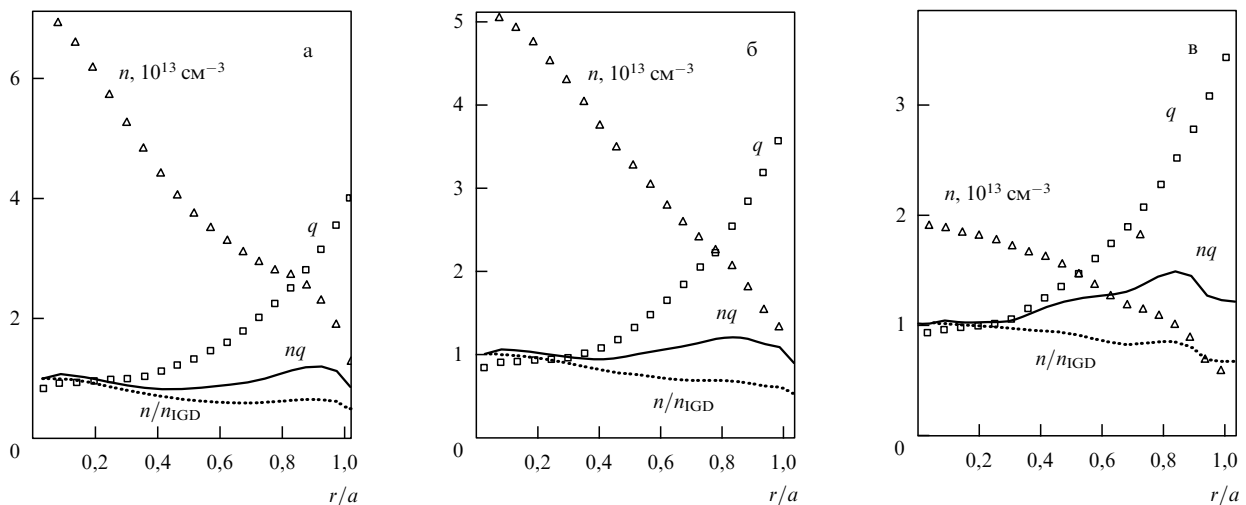


Рис. 4. Зависимости концентрации n , запаса устойчивости q и лагранжева инварианта nq в токамаке TFTR [69]: (а) супершот 76770, максимум температуры; (б) тот же супершот, после выключения нагрева перед срывом; (в) L-мода. Здесь n_{IGD} — профиль, предложенный в [77].

В токамаке пинчевание зависит от q и выражено не столь резко, как в дипольной ловушке.

Увидеть пинчевание можно и исходя из обычного квазилинейного диффузионного уравнения для запертых частиц в токамаке [75, 76]. Такой анализ дан в [77] и показал пинчевание, зависящее от профиля q . Трудности этого подхода связаны с неопределенностью коэффициента диффузии.

Метод инвариантов не требует детальной информации о модах турбулентности, хотя крупномасштабная конвекция естественной сохраняет вмерзненность в полоидальное поле. Чаще обсуждаются коротковолновые электростатические возмущения, которые легче исследовать теоретически и измерять, но некоторые измерения крупномасштабной конвекции имеются [78].

Очень существенно, что изложенная теория канонических профилей применима только при положительном магнитном шире. При отрицательном шире использованный закон вмерзненности запрещает турбулентность, что также согласуется с экспериментом, как будет показано в следующем разделе.

4.2. Подавление транспорта инвертированным широм

Новые подтверждения принципа "плазма вмерзнена только в полоидальное поле" дают эксперименты с измененным направлением потока тепла или частично инвертированным профилем q .

Если атмосфера подогревается не снизу, а на некоторой высоте, то ниже высоты подогрева нет источника турбулентности. Аналогичное явление наблюдалось в токамаках в экспериментах с неосевым электронно-циклотронным нагревом, при котором переносы в центральной части сильно уменьшались без существенного изменения профилей [59]. Подавление турбулентности можно получить и не перемещая источника тепла в атмосфере, а "перевернув" силу тяжести. В токамаке это достигается уменьшением фактора безопасности с радиусом, что действительно привело к впечатляющему подавлению переносов в недавних экспериментах [9–11].

На временах меньше скин-слоя, при большой доле бутстреп-тока или в случае неиндукционного метода поддержания тока профиль полоидального магнитного поля может сильно отклоняться от канонического, так что можно создать область с отрицательным магнитным широм. В первых же работах по неустойчивости захваченных частиц Кадомцев и Погуце указали, что отрицательный шир подавляет эту неустойчивость [5]. Энергия захваченных частиц чувствительна к профилю $q(r)$, так как $q(r) = rB_\phi / (RB_\theta)$ определяет расстояние между точками отражения. Это расстояние порядка qR . Здесь r и R — малый и большой радиусы. Если шир отрицательный, $dq/dr < 0$, то захваченные частицы сжимаются вдоль поля при дрейфе наружу и сохранении поперечного (μ) и продольного (J) адиабатических инвариантов. Продольная энергия при этом растет и неустойчивость подавлена. Эта оценка верна только для типичной частицы, да и поперечная энергия тоже возмущается, так что критерий весьма приблизителен.

Если воспользоваться гидродинамическим лагранжевым инвариантом nq , то плазма сжимается при движении наружу в области отрицательного шира, нагревается, и энергетический критерий устойчивости на редкость прост, $dq/dr < 0$ [16], и эксперименты [9–11] следуют этому критерию. Напомним, что этот критерий основан

на принципе вмерзненности плазмы в полоидальное поле.

Анализ линейной устойчивости более сложен, Кадомцев и Погуце показали, что условие

$$\frac{d(\ln q)}{d(\ln r)} < -\frac{3}{2}$$

ведет к устойчивости [5]. Более детальные анализы дают численные коды, работа [15] указывает на стабилизацию мод на захваченных ионах отрицательным широм. Некоторые коды дают иные результаты, имеется разноречие и в аналитических работах, что указывает на сложность проблемы.

Энергетический анализ можно провести для бесстолкновительной плазмы не только в гидродинамике, но и в кинетике, на основе энергетического принципа Тейлора [79]. Полная кинетическая энергия запертых частиц может быть записана в виде

$$E = \int W f dr dv, \quad (23)$$

где W — энергия на частицу, f — функция распределения. Рассмотрим акт перемешивания, когда два объема в фазовом пространстве обмениваются местами. Достаточное условие устойчивости заключается в том, что энергия E растет в результате любого такого события. Предположим сохранение адиабатических инвариантов μ и J . Так как фазовый поток несжимаем, объемы $dr dv$ двух элементов должны быть равны, а f — лагранжевы инвариант по теореме Лиувилля. Устойчивость гарантируется, если

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_{\mu, J} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\mu, J} < 0. \quad (24)$$

Энергетический принцип Тейлора [79] гласит, что плазма устойчива, если плотность в фазовом пространстве больше там, где энергия минимальна. В токамаке желательно, чтобы минимум энергии приходился на центр плазмы, $(\partial W / \partial r)_{\mu, J} > 0$. Согласно (24), неустойчивость полностью подавлена, если $(\partial f / \partial r)_{\mu, J} < 0$.

Знак $(\partial W / \partial r)_{\mu, J}$ существенно зависит от знака магнитного шира. Зависимость кинетической энергии W захваченной частицы от малого радиуса r и двух первых адиабатических инвариантов μ и J является источником энергии для турбулентности. Эта зависимость связана со скоростью тороидального дрейфа "бананов" уравнением Гамильтона:

$$v_\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = -\frac{1}{B_\theta} \left(\frac{\partial (W + \Phi)}{\partial r} \right)_{\mu, J}. \quad (25)$$

Здесь H — гамильтониан, Φ — электростатический потенциал, усредненный по банановой орбите, p_ϕ — тороидальный канонический момент. Полоидальное поле имеет вид

$$B_\theta = -\frac{\partial A_\phi}{\partial r} = -\frac{\partial p_\phi}{\partial r},$$

где мы пренебрегли механической частью момента. Тороидальный дрейф был вычислен еще в [5], из него

следует

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{\mu, J} = \frac{\mu B_0}{R} \left\{ 2 \left[1 + \frac{2rq'(r)}{q} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{E(\sin(\alpha/2))}{K(\sin(\alpha/2))} \right] - \cos \alpha \right\}. \quad (26)$$

Здесь α — полоидальный угол точки отражения, E и K — полные эллиптические интегралы. Знак изменения энергии существенно зависит от знака шири dq/dr .

Полезно взглянуть на графики энергии W как функции радиуса при фиксированных μ и J . На рисунке 5 представлена энергетическая зависимость для выстрела 23100 на JET [80], в котором шир был отрицателен внутри области $r = 0,5$. Видно, что $(\partial W/\partial r)_{\mu, J} < 0$ в области положительного шири для почти всех запертых частиц и $(\partial W/\partial r)_{\mu, J} > 0$ для большинства частиц в области отрицательного шири. Не все вопросы решаются большинством, но эта энергетическая невыгодность хорошо согласуется с наблюдавшимся улучшением удержания в области отрицательного шири. Столкновения частиц вводят некоторое усреднение по функции распределения, но его трудно рассчитать. Столкновения в токамаке недостаточно часты, чтобы полагать возмущения локально максвелловскими, но недостаточно редки, чтобы ими можно было вовсе пренебречь (особенно для электронов).

Таким образом, хотя строгих результатов нет, простые модели, гидродинамическая и бесстолкновительная кинетическая, ясно указывают на стабилизацию отрицательным широм. Напомним, что сохранение инварианта гидродинамической модели следует и из согласия теории TRP с каноническими профилями при положительном шире.

В современных экспериментах электронная температура и, следовательно, проводимость и скин-время велики, так что профили q зависят не только от закона Ома, но также от истории выстрела, неиндукционного поддержания тока и т.д. В этом случае можно далеко отклониться от канонических профилей и получить

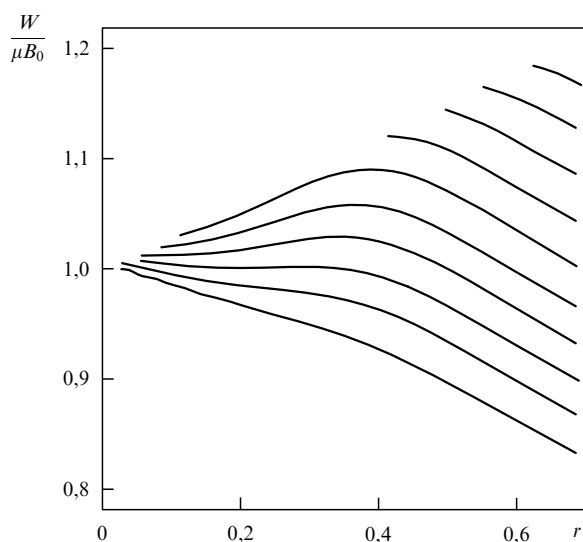


Рис. 5. Зависимость энергии запертых частиц $W(r)$ от радиуса при фиксированных адиабатических инвариантах.

профили с отрицательным широм в центральной части шнура [80, 81]. Большое значение β в этих экспериментах обычно связывают со второй зоной устойчивости баллонных мод [14], но существенно и подавление транспорта.

Впечатляющие результаты в зоне инвертированного шири были получены недавно сразу на нескольких токамаках [9–11]. В TFTR диффузия частиц и тепла упала в 40 раз, до неоклассического уровня и даже ниже [10]. Часто полагают, что транспорт не может быть меньше неоклассического [22, 23], но это не совсем так. Полоидальное вращение способно устранить запертые ионы, а вместе с ними и неоклассический транспорт (см. раздел 4.3). В токамаке RTP [11] неосевой электронно-циклотронный нагрев привел к инверсии шири, полым электронным профилям и исключительно низкому электронному транспорту. Отметим, что эксперименты на TFTR указывают на сильное подавление ионного транспорта и скупо освещают электронный транспорт.

Поскольку транспорт тороидального момента в токамаках аномален [82], подавление турбулентного транспорта отрицательным широм, естественно, ведет к раскручиванию плазмы несбалансированной инжекцией, что, возможно, наблюдалось в [9]. Многие полагают, что это вращение дает важный вклад в стабилизацию, хотя вращение — естественное следствие стабилизации — и причинная зависимость может быть обратной. Кроме того, после появления области отрицательного шири сильное подавление транспорта наблюдается не сразу, происходит переход барьера по не вполне ясному параметру. В TFTR барьер связывают с критической мощностью, в DIII-D — с размером зоны перехода, близким к толщине ионного банана.

Хотя подавление неустойчивостей на запертых частицах отрицательным широм и предсказывалось разными методами [5, 15, 16], подавление транспорта в экспериментах столь впечатляет, что возникает вопрос, куда подевались остальные предсказанные теоретиками кинетические неустойчивости, не чувствительные к магнитному ширю? На него еще надо искать ответ, но можно высказать довольно общую гипотезу. Частицы с неинтегрируемым поведением трудно описывать, поэтому теоретики обычно делают предположения, исключаящие эти частицы из рассмотрения или сохраняют лишь линейный резонанс Ландау. Между тем, как уже упоминалось при анализе инвариантов замороженности, неинтегрируемость влечет к диссипации и, возможно, к дополнительному затуханию волн. Это означает, что слабые неустойчивости могут исчезнуть, если отказаться от чрезмерных упрощений типа плоской геометрии. Экспериментально наблюдаемая мелкомасштабная турбулентность может создаваться большими градиентами за счет крупномасштабной конвекции, как это бывает в атмосфере. В этом случае мелкомасштабная турбулентность должна исчезать вместе с конвекцией.

В целом можно сказать, что гипотеза о замороженности плазмы в полоидальное магнитное поле неплохо соответствует экспериментам как с положительным, так и с инвертированным широм, хотя проявления совершенно различны.

4.3. Н-мода

Канонические профили L-моды и супершотов были объяснены аттрактором, возникшим в результате разру-

шения тороидальной компоненты закона в замороженности запертыми частицами. Подавление транспорта отрицательным широм соответствует энергетическому запрету неустойчивостей на запертых частицах и определяет одну из границ области притяжения аттрактора. После этого естественно ожидать, что удаление запертых ионов быстрым полоидальным вращением подавляет турбулентность и дает другую границу области притяжения. Эта граница вполне соответствует феноменологии Н-моды, и, более того, была предсказана 30 лет назад.

Мода улучшенного удержания, Н-мода, была обнаружена на токамаке ASDEX в 1982 г. [19]. С тех пор она была получена и исследована во многих токамаках [82–84]. Время удержания в этой моде в 2–3 раза больше, чем в L-моды, и почти все улучшение вызвано транспортным барьером, расположенным на поверхности плазмы и имеющим толщину несколько больше ионного банана. Шумы в этом слое обычно подавлены, а плазма вращается, так что радиальное электрическое поле в слое много больше, чем в основной плазме. Доминирует точка зрения, что транспорт подавляется в результате декорреляции турбулентных флуктуаций, вызванных широм электрического дрейфа $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ [85, 86].

Мы сосредоточимся на ином механизме, прямо связанном с запертыми ионами и инвариантами в замороженности. Режим с чертами Н-моды был предложен задолго до эксперимента в 1967 г. Берком и Галеевым [17] и Галеевым, Сагдеевым и Вонгом [18], но почти не упоминался в литературе до появления работы [87]. В работах [17, 18] было предположено, что в результате потери ионов из поверхностного слоя толщиной в ионный банан поверхностный слой плазмы начнет вращаться, исчезнут запертые ионы, а вместе с ними и только что предсказанные Кадомцевым и Погуце неустойчивости на запертых ионах [5]. Следуя [87], сравним идею Берка, Галеева, Сагдеева, Вонга с экспериментом.

Если плазма вращается вдоль магнитного поля со скоростью выше ионной тепловой, $v > v_{Ti}$, то захваченными остаются лишь ионы на хвосте максвелловского распределения. В экспериментах плазма вращается не только вдоль поля, но критерий незапертости основной массы ионов можно сформулировать, если заметить, что равномерное по радиусу тороидальное вращение почти инвариантно и не меняет доли запертых ионов. Таким образом, важна только полоидальная компонента скорости. Проектируя скорость на полоидальное направление, превратим критерий $v > v_{Ti}$ в главную формулу раздела — критерий для полоидального ионного числа Маха:

$$M = \frac{v_\theta B}{v_{Ti} B_\theta} > 1. \quad (27)$$

Это условие качественно согласуется с экспериментом. На рисунке 6 представлены данные токамака JFT-2M [88], в которых Н-моды соответствуют значениям $M > 3$. К сожалению, скорость вращения ионов водорода не измеряется ни в одном токамаке, в JFT-2M по сдвигу спектральных линий измерялась полоидальная скорость примесей. В токамаке DIII-D были проведены измерения вращения в гелиевой плазме, и данные на рис. 4 в работе [89] указывают на ясную корреляцию моды удержания с полоидальным числом Маха: $M < 1$ в L-моды и $M > 1$ в

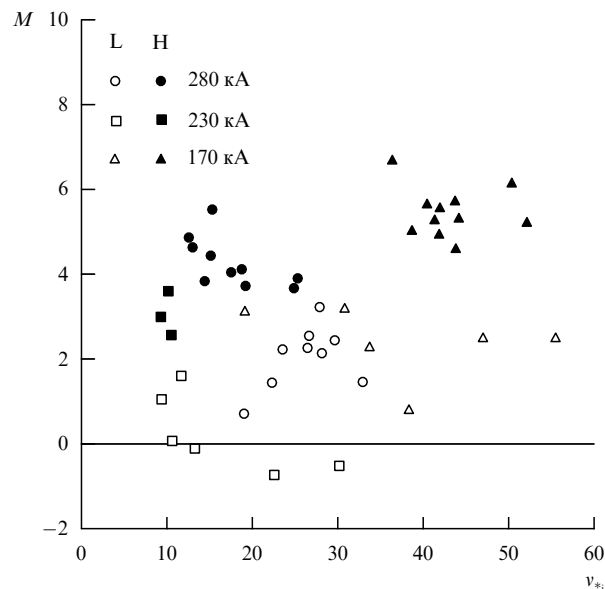


Рис. 6. Данные токамака JFT-2M [88]. Полоидальное число Маха как функция ионной столкновительности. Светлые точки соответствуют L-моды, зачерненные — Н-моды.

Н-моды. Интересно было бы измерить скорости полоидального вращения в VH-моды [90].

Существуют и другие указания на существенную роль запертых частиц в Н-моды. Например, турбулентность и транспорт в L-моды намного сильнее на внешней стороне тора, там, где сосредоточены запертые частицы. Подавление транспорта в (L–H)-переходе влияет, в основном, на внешнюю часть тора [91].

Мы не обсуждаем причин вращения плазмы, этому посвящен обзор [82]. Это может быть потеря ионов на границе плазмы [85, 92, 93], как предполагалось уже в [17]. Другой механизм рассмотрен в [94]. Плазму можно закрутить, прилагая силу $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ с помощью дополнительных электродов [95]; измеренное сопротивление дает дополнительную информацию [82]. Следует иметь в виду, что порог $M \sim 1$ возникает во многих теориях, так как полоидальное трение (вполне аналогичное затуханию Ландау магнитной волны, как указывалось Галеевым и Сагдеевым еще в самом начале разработки неоклассической теории) имеет максимум вблизи $M \sim 1$. Для больших M доля запертых ионов и трение убывают [82, 84].

Гидродинамический критерий $M \sim 1$ утрачивает точность, если толщина транспортного барьера сравнима с ионным бананом. К некоторому уширению транспортного барьера ведет турбулентный транспорт углового момента [96].

Напомним, что в традиционных моделях Н-моды основное внимание уделяется шире вращения и изменению радиального электрического поля, определяемому из уравнения

$$E_r = \frac{dp}{dr} \frac{1}{nZe} - v_\theta B_\phi + v_\phi B_\theta, \quad (28)$$

где θ — полоидальный угол, ϕ — тороидальный. Следует иметь в виду, что две компоненты скорости не могут быть однозначно определены из электрического поля

даже при нулевом градиенте давления, поле же однозначно определяется через скорость.

Разница между традиционным механизмом и предсказанным Берком, Галеевым, Сагдеевым и Вонгом существенна для перспектив термоядерного реактора, поскольку последний не требует увеличения скорости вращения при уширении барьера. Возможности уширения демонстрируют VH-мода и барьер на рациональной поверхности $q = 3$ [97].

4.4. Резюме для токамаков

Для исследования турбулентных равнораспределений в токамаках был использован относительно новый инструмент — замороженность в уравнении Власова. Три результата представляются прозрачными и строгими и еще три выглядят правдоподобными.

1. Если турбулентность сохраняет инварианты, зависящие от магнитного поля, может возникнуть аттрактор, также зависящий от поля и потому неоднородный в пространстве.

2. Традиционная структура транспортной матрицы слишком упрощена. Если задан некоторый уровень турбулентности, появляются потоки даже в отсутствие градиентов термодинамических величин.

3. Из замороженности в дрейфовом уравнении Власова следует пинчевание запертых частиц, зависящее от профиля q .

Были даны нестрогие аргументы, согласно которым в столкновительной плазме токамаков тензорные силы теплового давления разрушают замороженность плазмы в тороидальное магнитное поле и сохраняют единственный инвариант $nr/B_\theta = \text{const}$. Три режима удержания (аттрактор и две границы области притяжения) следуют из этого инварианта и пределов его применимости, и все три находятся в приличном согласии с экспериментом.

4. Турбулентный аттрактор (TRP) $nq = \text{const}$ предсказывается для токамаков с положительным магнитным широм.

5. Подавление транспорта следует для инвертированного шира.

6. Полоидальное вращение способно устранить запертые ионы, восстановить полную замороженность и подавить турбулентный транспорт при скоростях вращения, наблюдаемых в H-моде.

Эти вместе взятые результаты возвращают нас к позиции первого обзора по турбулентным переносам в токамаках [5]. Конечно, в то время ничего не было известно про аттракторы, а главное, не было впечатляющих экспериментов, проливающих свет на физику удержания.

Мелкомасштабная турбулентность имеет богатую теорию, не слишком совпадающую с экспериментом, особенно в объяснении радиальной зависимости переносов, а теперь и в связи с подавлением транспорта магнитным широм. По моему мнению, вполне возможно, что наблюдаемая в экспериментах мелкомасштабная турбулентность обусловлена резкими градиентами, вызванными крупномасштабной конвекцией на запертых частицах. В этом случае она всего лишь вторичное явление, подобное мелкомасштабным вихрям атмосферы, которые возникают из-за крупномасштабной конвекции. Простейший пример такой теории дает возбуждение корабельных волн [98].

Аттракторы и пинчевание можно пытаться исследовать и без помощи инвариантов, на языке уравнений [77, 99].

Согласие эксперимента [9–11, 80, 81], моделирования [15, 31] и аналитической теории предполагает важную роль отрицательного шира в будущих токамаках. Отрицательный шир способен обеспечить большую долю бутстреп-тока, а также стабилизирует баллонные моды и благоприятен для достижения больших значений β [14]. К сожалению, большие токи около границы, неизбежные при обращенном шире, дестабилизируют кинк-моды [100], хотя кинк-моды можно стабилизировать вращением плазмы [101, 102]. Обзор физики будущих токамаков дан в [103].

К сожалению, в токамаке трудно инвертировать шир глобально из-за низкой проводимости граничной плазмы и кинк-мод, но подобного эффекта можно пытаться добиться в квазисимметричном стеллараторе [104, 105]. Вместо шира следует рассматривать радиальную производную величины $-B/r$, где B — компонента магнитного поля, перпендикулярная направлению квазисимметрии, аналог полоидального поля токамака.

Существует и менее революционный путь. Можно не подавлять турбулентность, а увеличивать пикированность турбулентного аттрактора пикированностью q подобно супершотам в TFTR или повышением q около сепаратрисы, как в JET, DIII-D и особенно сферомаках (почти сферических токамаках).

5. История турбулентных равнораспределений

В учебнике по термодинамике, изданном в 1937 г., Ферми проиллюстрировал закон адиабаты релаксацией атмосферы к изоэнтропическому аттрактору и тем объяснил понижение температуры с высотой [21]. Закон адиабаты и экспериментальный факт были известны задолго до этого, так что история изоэнтропического аттрактора в атмосфере скрывается в глубине веков. В двадцатом веке, как только стало исследоваться горение в звездах, изоэнтропический аттрактор стал обычным приближением для конвективной зоны.

В плазме идея турбулентного равнораспределения возникла первоначально в виде одномерного плато при квазилинейной релаксации [26]. Первое пространственно-неоднородное TRP в весьма совершенной форме рассмотрел Пастухов применительно к магнитоэлектростатической ловушке [33]. Сасоров рассмотрел TRP в z -пинче [37], которое весьма близко к TRP в токамаках.

Хорошо известна теория релаксации Тейлора в пинчах с обращенным полем, основанная на инварианте спиральности [38]. Этот инвариант не лагранжев, поэтому и аттрактор отличается по типу от TRP, это более простой минимум энергии. Теория Тейлора не пересказывается в обзоре лишь по причине ее широкой известности.

Стоит отметить близкую к TRP идею пограничной устойчивости в z -пинчах (Кадоццев [36]) и токамаках (Манхеймер и Антонсен [28, 106]).

Применительно к токамаку идею канонических профилей выдвинул Коппи в 1980 г. [55], причина явления оставалась не вполне ясной. Мощной поддержкой гипотезе Коппи стало экспериментальное наблюдение Есипчука и Разумовой [56] и Мураками и др. [57]: пикирован-

ность профилей плазмы растет с пикированностью профиля запаса устойчивости, т.е. профили плазмы определяются геометрией магнитного поля. Модели канонических профилей в токамаках были предложены Кадомцевым [39] и Тейлором [107]. Модель Кадомцева содержала довольно произвольное предположение о профиле давления, $p \propto q^{-2}$. Это предположение было основано на экспериментальных данных, а позднее подобный профиль последовал и из теории турбулентных равнораспределений. Потоки тепла и частиц при отсутствии градиентов термодинамических величин — неотъемлемая черта TRP — неоднократно использовались при феноменологическом моделировании в группе Днестровского (см., например, [58]). Появление потоков тепла при превышении критических градиентов электронной температуры предлагалось в [108]. В аналитической теории токамака потоки, не пропорциональные градиентам, обнаружили Вейланд и Нордман [29]. Открытие Н-моды [19] и других мод удержания, профили которых отличны от канонических, сначала уменьшило доверие к каноническим профилям, но современная теория показывает, что Н-мода и подавление транспорта обращенным широм возникают как раз при выходе за границы применимости турбулентных равнораспределений. Совпадение пределов применимости в теории и эксперименте дополнительно подтверждает физическую картину возникновения канонических профилей.

Описание TRP базируется на понятии вмерозженности. Важнейшее наблюдение — захваченные частицы вмерозжены в полоидальное магнитное поле и практически не чувствуют тороидального — было сделано Кадомцевым и Погуце в 1967 г. Конвекция запертых частиц была предложена ими как главная причина турбулентного транспорта. Почти сразу Берк и Галеев [17], Галеев, Сагдеев и Вонг [18] предложили устранение захваченных ионов вращением плазмы, тем самым предсказав восстановление полной вмерозженности в поверхностном слое и Н-моду. Бузер фактически предложил полуидеальную гидродинамику для описания экспериментально наблюдаемого транспорта и указал на сосуществование резонансных и нерезонансных частиц как на причину полуидеальности [51].

6. Заключение

Читатель, конечно, обратил внимание на краткость формул, связанных с методом инвариантов и аттракторов. Платой за простоту турбулентных равнораспределений является описание лишь профилей, но не потоков. Аттракторам свойственна высокая помехоустойчивость, особенно если описывающие аттрактор инварианты получены не из уравнений движения, а из общих принципов. Поэтому естественно, что предсказания теории оказываются близки к экспериментальным результатам.

Вмерозженность в уравнении Власова, наличие ион-ион-частиц и последствия для закона вмерозженности в бесстолкновительной плазме представляют интерес не только применительно к токамакам и магнитному удержанию. Исследование бесстолкновительного перезамыкания или иной динамики неполно без обращения к этим инвариантам.

Не следует думать, что существует общепринятое мнение по обсуждавшимся вопросам. Если в науке есть

глас народа, то это, конечно, голос анонимных рецензентов, и потому он заслуживает пристального внимания. Замечания рецензентов обычно сформулированы на языке линейных мод и неустойчивостей, что явно указывает на некоторое недоверие к инвариантам и аттракторам. Можно сказать, что большинство исследователей стремится обсуждать интегрируемые явления, а более общий неинтегрируемый случай трудно исследуется и потому его как бы нет. Неинтегрируемому случаю свойственна невысокая строгость результатов, но не следует переоценивать и строгости линейных методов.

Большинство моих работ по аттракторам в токамаках, без которых трудно представить этот обзор, выполнено совместно с И. Никандером (J. Nysander), которому я выражаю искреннюю благодарность. Мне приятно поблагодарить за чтение рукописи и устранение многих неточностей К.В. Чукбара и Ю.Н. Днестровского.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Российской программы "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики", а также Королевской академии наук и Фонда исследований Швеции.

Список литературы

1. Lorenz E N *J. Atmosph. Sci.* **20** 130 (1963)
2. Монин А С *УФН* **125** 97 (1978)
3. Рабинович М И *УФН* **125** 123 (1978)
4. Harvey J *Physics Today* **48** (10) 32 (1995)
5. Кадомцев Б Б, Погуце О Н, в сб. *Вопросы теории плазмы* (Под ред. М А Леонтовича) Вып. 5 (М.: Госатомиздат, 1967)
6. Liewer P C *Nucl. Fusion* **25** 543 (1985)
7. Wagner F, Stroth U *Plasma Phys. Contr. Fusion* **35** 1321 (1993)
8. Connor J W, Wilson H R *Plasma Phys. Contr. Fusion* **36** 719 (1994)
9. Strait E J et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 4421 (1995)
10. Levinton F M et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 4417 (1995)
11. Hogewij G M D et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 632 (1996)
12. Соловьев Л С, Шафранов В Д, в сб. *Вопросы теории плазмы* (Под ред. М А Леонтовича) Вып. 5 (М.: Госатомиздат, 1967) с. 5
13. Соловьев Л С, в сб. *Вопросы теории плазмы* (Под ред. М А Леонтовича) Вып. 6 (М.: Госатомиздат, 1972) с. 210
14. Strait E J *Phys. Plasmas* **1** 1415 (1994)
15. Kessel C et al. *Phys. Rev. Lett.* **72** 1212 (1994)
16. Янков В В *Физика плазмы* **21** 759 (1995)
17. Berk H L, Galeev A A *Phys. Fluids* **10** 441 (1967)
18. Galeev A A, Sagdeev R Z, Wong H V *Phys. Fluids* **10** 1535 (1967)
19. Wagner F et al. *Phys. Rev. Lett.* **49** 1408 (1982)
20. Zakharov V, Lvov V, Falkovich G *Kolmogorov Spectra of Turbulence* (Heidelberg: Springer-Verlag, 1992)
21. Fermi E *Thermodynamics* (New York: Prentice-Hall, 1937)
22. Галеев А А, Сагдеев Р З *ЖЭТФ* **53** 438 (1967)
23. Hinton F L, Hazeltine R D *Rev. Mod. Phys.* **48** 239 (1976)
24. Onsager L *Phys. Rev.* **37** 405 (1931); **38** 2265 (1931)
25. Krommes J A, Genze H *Phys. Fluids B* **5** 3908 (1993)
26. Galeev A A, Sagdeev R Z, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 6 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1973)
27. Kadomtsev B B *Comm. Plasma Phys. Contr. Fusion* **16** 231 (1995)
28. Manheimer W M, Antonsen T M *Phys. Fluids* **22** 957 (1979)
29. Weiland J, Nordman H *Phys. Fluids B* **5** 1669 (1993)
30. Kotschenreuther M et al. *Phys. Plasmas* **2** 2381 (1995)
31. Parker S E et al. *Phys. Plasmas* **3** 1959 (1996)
32. Днестровский Ю Н, Костомаров Д П *Математическое моделирование плазмы* (М.: Наука, 1993)
33. Пастухов В П *Физика плазмы* **6** 1003 (1980)
34. Isichenko M B, Petviashvili N V *Phys. Plasmas* **2** 3650 (1995)
35. Ивонин И А *Физика плазмы* **23** (1997) (в печати)
36. Кадомцев Б Б, в сб. *Вопросы теории плазмы* (Под ред. М А Леонтовича) Вып. 2 (М.: Госатомиздат, 1963) с. 132
37. Сасоров П В *Физика плазмы* **16** 490 (1990)
38. Taylor J B *Phys. Rev. Lett.* **33** 1139 (1974)

39. Кадомцев Б Б, в сб. *Итоги науки и техники* Сер. Физика плазмы. Т. 10. Ч. 1 (Под ред. В Д Шафранова) (М.: ВИНТИ, 1991); Kadomtsev B B, in *Tokamak Plasma: A Complex Physical System* (Ed. E W Laing) (Bristol, Philadelphia: Inst. of Phys. Pub., 1992)
40. Дьяченко А И и др. *ЖЭТФ* **96** 2026 (1989)
41. Yankov V V, in *Transport, Chaos and Plasma Physics* (Eds S Benkadda, F Doveil, I Elskens) (Singapore: World Scientific, 1994) p. 58
42. Гордеев А В, Гречиха А *Письма в ЖЭТФ* **61** 193 (1995)
43. Яньков В В *ЖЭТФ* **107** 414 (1995)
44. Molvig K, Hizanidis K *Phys. Fluids* **27** 2847 (1984)
45. Balescu R *Phys. Fluids B* **3** 564 (1991)
46. Dirac P A M *Proc. Roy. Soc. A* **212** 330 (1952)
47. Sudan R N *Phys. Rev. Lett.* **42** 1277 (1979)
48. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1974)
49. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И, в сб. *Итоги науки и техники* Сер. Современные проблемы математики. Т. 3 (М.: ВИНТИ, 1985)
50. Nycander J, Yankov V V *Phys. Scripta* **63** 174 (1996)
51. Boozer A H *Phys. Fluids B* **2** 2300 (1990)
52. Pereverzev G V, Shafranov V D, Zakharov L E *Theoretical and Computational Plasma Physics* (IAEA-SMR-32/13, Vienna, 1978) p. 469
53. Яньков В В *Письма в ЖЭТФ* **58** 516 (1993)
54. Isichenko M B, Diamond P H *Phys. Plasmas* **2** 2007 (1995)
55. Coppi B *Comm. Plasma Phys. Contr. Fusion* **5** 261 (1980)
56. Esipchuk Yu V, Razumova K A *Plasma Phys. Contr. Fusion* **28** 1253 (1986)
57. Murakami M et al. *Plasma Phys. Contr. Fusion* **28** 17 (1986)
58. Днестровский Ю Н, Неудачин С В, Переверзев Г В *Физика плазмы* **10** 236 (1984)
59. Васин Н Л и др. *Физика плазмы* **13** 109 (1987)
60. Dnestrovskij Yu N, Lysenko S E, Tarasyan K N *Nucl. Fusion* **35** 1047 (1995)
61. Gentle K W, Richards B, Waelbroeck F *Plasma Phys. Contr. Fusion* **29** 1077 (1987)
62. Ware A A *Phys. Rev. Lett.* **25** 916 (1970)
63. Яньков В В *Письма в ЖЭТФ* **60** 169 (1994)
64. Nycander J, Yankov V V *Phys. Plasmas* **2** 2874 (1995)
65. Nycander J, Yankov V V *Phys. Plasmas* **4** (1997) (in press)
66. Boucher D, Rebut P-H, Watkins M *Acad. C.R. Sci. Paris II* **315** 273 (1992)
67. Wiley J C, Miner W H, Ross D W, Preprint FRCR-411 (1992)
68. Levinton F M et al. *Phys. Rev. Lett.* **72** 2895 (1994)
69. Budny R V et al. Report PPPL-3039 (1995)
70. Yankov V V, Nycander J *Phys. Rev. Lett.* **75** 3582 (1995)
71. Luce T C, Petty C C, de Haas J C M *Phys. Rev. Lett.* **68** 52 (1992)
72. Schulz M, Lanzerotti L J *Particle Diffusion in Radiation Belts* (Springer-Verlag, 1974)
73. Hasegawa A *Comm. Plasma Phys. Contr. Fusion* **11** 147 (1987)
74. Hasegawa A, Chen L, Mauel M E *Nucl. Fusion* **30** 2405 (1990)
75. Hazeltine R D, Mahajan S M, Hitchcock D A *Phys. Fluids* **24** 1164 (1981)
76. Морозов Д Х и др. *Физика плазмы* **14** 259 (1988)
77. Isichenko M B et al. *Phys. Plasmas* **3** 1916 (1996)
78. Tynan G R et al. *Phys. Rev. Lett.* **68** 3032 (1992)
79. Taylor J B *Phys. Fluids* **7** 767 (1964)
80. Hugon M et al. *Nucl. Fusion* **32** 33 (1992)
81. Lazarus E A et al. *Phys. Fluids B* **4** 3644 (1992)
82. Rozhansky V, Tendler M, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 19 (Ed. B B Kadomtsev) (New York: Consultants Bureau, 1995)
83. Groebner R J *Phys. Fluids B* **5** 2343 (1993)
84. Itoh K, Itoh S-I *Plasma Phys. Contr. Fusion* **38** 1 (1996)
85. Shaing K C, Crume E C *Phys. Rev. Lett.* **63** 2369 (1989)
86. Biglari H, Diamond P H, Terry P W *Phys. Fluids B* **2** 1 (1990)
87. Nycander J, Yankov V V *Письма в ЖЭТФ* **63** 427 (1996)
88. Ida K et al. and the JFT-2M Group *Phys. Fluids B* **4** 2552 (1992)
89. Burrell K H et al. *Plasma Phys. Contr. Fusion* **34** 1859 (1992)
90. Burrell K H et al. *Phys. Plasmas* **1** 1536 (1994)
91. Rhodes T L et al. *Nucl. Fusion* **33** 1787 (1993)
92. Shaing K C *Phys. Fluids B* **4** 171 (1992)
93. Hinton F L, Kim Y-B *Phys. Plasmas* **2** 159 (1995)
94. Stringer T E *Phys. Rev. Lett.* **22** 770 (1969)
95. Taylor R J et al. *Phys. Rev. Lett.* **63** 2365 (1989)
96. Rozhansky V, Tendler M *Phys. Fluids B* **4** 1877 (1992)
97. Koide Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **72** 3662 (1994)
98. Pavlenko V P, Yankov V V, Bondeson A *Phys. Plasmas* **2** 3341 (1995)
99. Hazeltine R D, Mahajan S M, Hitchcock D A *Phys. Fluids* **24** 1164 (1981)
100. Eriksson G, Wahlberg C *Phys. Rev. Lett.* **72** 2713 (1994)
101. Bondeson A, Ward D J *Phys. Rev. Lett.* **72** 2709 (1994)
102. Mikhailovskii A B, Kuvshinov B N *Plasma Phys. Rep.* **21** 802 (1995)
103. Goldston R J *Phys. Plasmas* **3** 1794 (1996)
104. Boozer A H *Plasma Phys. Contr. Fusion* **37** A103 (1995)
105. Исаев М Ю, Михайлов М И, Шафранов В Д *Физика плазмы* **20** 357 (1994)
106. Diamond P H, Hahm T S *Phys. Plasmas* **2** 3640 (1995)
107. Taylor J B *IAEA Meeting on Tokamak Transport* (PPPL, USA, 8–10 Oct. 1990)
108. Lallia P P, Rebut P H, Watkins M L, Preprint JET-P(88)05

Attractors and frozen-in invariants in turbulent plasmas

V.V. Yan'kov

Russian Research Center "Kurchatov Institute",

pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 196-73 45

Uppsala University, Box 534, S-751 21 Uppsala, Sweden

Tel. + 46-18-183 097

Fax + 46-18-554 917

E-mail: yankov@snobben.teknikum.uu.se

Work on turbulent equipartitions in a plasma (i. e., attractors characterised by Lagrangian invariants) is reviewed. Although such attractors also exist in the convective zone of the Sun and in atmospheres, the primary emphasis is on turbulent transport in tokamaks. By extending the hydrodynamic concept of freezing to Vlasov's equation, it is explained why the magnetic field topology in a collisionless plasma is conserved even though the conventional hydrodynamic description breaks down. Arguments are presented to support the conjecture that the canonical profiles of tokamak plasma are due to an attractor with a plasma frozen into the poloidal magnetic field. In fact, the exclusion from the conventional set of freezing integrals of the one for the toroidal field is all what is needed. The reason for the violation of this invariant is the poloidal non-invariance of the magnetic field, an effect to which trapped particles are particularly sensitive. The predictions of the attractor and of two attraction basin boundaries (H mode and transport suppression by the reversed shear) are confirmed experimentally to a reasonable accuracy.

PACS numbers: **52.30.-q**, **52.35.Ra**, **52.55.Fa**

Bibliography — 108 references

Received 15 September 1996, revised 3 December 1996