

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля

Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев

Рассматриваются эффекты нелинейности в классической теории поля для неинтегрируемых систем, а именно, рассеяние и связанные состояния солитонов, фрактальный характер образования резонансных структур, рассеяние кинков на неоднородностях, схлопывание доменных пузырей. Представлены результаты как в $(1+1)$ -измерении, так и в больших размерностях. Рассмотрены как нейтральные, так и заряженные скалярные поля. Обсуждаются области применения рассматриваемых явлений.

PACS numbers: 03.50.-z, 03.50.Kk, 52.35.Py, 52.35.Sb

Содержание

1. Введение (377).
2. Резонансное взаимодействие солитонов для скалярного поля Хиггса (одномерный случай) (379).
 - 2.1. Кинк теории $\lambda\phi_2^4$. 2.2. Нетопологические решения с малой амплитудой. 2.3. Квантование биона малой амплитуды. 2.4. Обнаружение биона большой амплитуды в $\lambda\phi_2^4$ -теории поля. 2.5. Поиски других решений для уравнения Гинзбурга–Ландау–Хиггса. 2.6. Потенциальное приближение. 2.7. Обнаружение несоответствия с потенциальным описанием. 2.8. "Окна" разлета и механизм резонансной передачи энергии. 2.9. Проверка следствий механизма резонансной передачи энергии. 2.10. Обнаружение многократных "окон" столкновения. Квазифракталы. 2.11. Эффективный лагранжиан для биона.
3. Некоторые примеры задач со взаимодействием кинков (387).
 - 3.1. Взаимодействие кинка и антикинка в модифицированном уравнении синус-Гордона. 3.2. Кинк–антикинк взаимодействие для двойного синус-Гордон уравнения.
4. Резонансное взаимодействие солитонов и кинков с примесью (390).
 - 4.1. Потенциальное приближение. 4.2. Адиабатическая теория возмущений. 4.3. Неустойчивость возмущений вокруг солитона, локализованного на неоднородности. 4.4. Поведение кинка теории $\lambda\phi_2^4$ вблизи неоднородности. 4.5. Дискретная мода примеси. 4.6. Критическая скорость захвата солитона примесью. 4.7. Рассеяние солитонов на примеси для синус-Гордон уравнения. 4.8. Поведение кинка теории $\lambda\phi_2^4$ вблизи неоднородности. Взаимодействие двух дискретных мод.
5. Зависящие от времени многомерные решения (395).
 - 5.1. Доменные стенки, пузыри и т.д. 5.2. Обнаружение пульсирующих решений. 5.3. Зависящие от времени цилиндрически симметричные решения. 5.4. Приближение Косевича–Ковалева для сферически симметричных "пульсонов" и проблема устойчи-

чивости. 5.5. Интерпретация решений типа пульсирующего пузыря. Резонансные структуры.

6. Зависящие от времени нетопологические решения уравнений заряженных полей (399).
 - 6.1. Q-боллы — солитонные решения уравнений комплексных скалярных полей. 6.2. Устойчивость Q-боллов относительно больших возмущений. 6.3. Устойчивость Q-боллов относительно малых деформаций. 6.4. Перенормируемость теории и Q-боллы. 6.5. Q-лампы. 6.6. Взаимодействие солитонов типа Q-боллов.
7. Заключение (403).
- Словарь терминов (404).
- Список сокращений (404).
- Список литературы (404).

Памяти Игоря Юрьевича Кобзарева

1. Введение

В обзоре изложены известные на сегодняшний день результаты взаимодействия уединенных волн в неинтегрируемых полевых системах. Большинство работ, которые легли в основу данного обзора, были инициированы идеями спонтанного нарушения симметрии, механизмом Хиггса [1] и электрослабой теорией Вайнберга–Салама [2, 3]. Читатель сможет найти подробное изложение этих вопросов и все необходимые литературные ссылки в [4].

В обзоре не обсуждаются вопросы, связанные со взаимодействием монополей, скирмионов и инстантонов для различных полевых моделей. Данные вопросы, представляющие несомненный интерес, широко освещались в других обзорных и оригинальных статьях [4–8].

Огромный интерес к теории нелинейных точно интегрируемых уравнений, несущих конкретное физическое содержание, таких как уравнение Кортевега–де Вриза (KdV), нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), синус-Гордон уравнение (sG) и других, был связан с развитием метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) (см., например, [9–11]) в конце 60-х и начале 70-х годов. Наличие релятивистски-инвариантного sG-уравнения в этом списке усилило интерес к данной проблематике с точки

Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев. Институт теоретической и экспериментальной физики,
117259 Москва, ул. Б. Черемушkinsкая 25, Россия
Тел. (095) 125-91-68, 125-97-04

Статья поступила 11 декабря 1996 г.

зрения теории поля. Используя каноническое преобразование, основанное на МОЗР, гамильтониан, порождающий sG-уравнение, удалось преобразовать к переменным типа действие–угол [12]. При этом гамильтониан в новых переменных выглядел как сумма вкладов от первоначальных частиц, а также солитонов и их связанных состояний — бризеров. Таким образом, без введения дополнительных полей теория оказалась достаточно богатой: наряду с точечными частицами в нем присутствовали и протяженные объекты — солитоны.

Однако S-матрица рассеяния частиц в sG-уравнении достаточно специфична — в ней отсутствует рождение новых частиц [13]. В то же время в реальной физике элементарных частиц рождение новых частиц при столкновениях всегда присутствует. В связи с этим начиная с середины 70-х годов большое внимание уделяется исследованиям свойств решений классических теорий поля, не являющихся вполне интегрируемыми [14, 15]. При этом предполагалось, что информация, полученная при решении классических нелинейных уравнений движения, может быть использована и в квантовом случае, например, в приближении слабой связи [16].

К сожалению, существование трехмерных не зависящих от времени стабильных солитонов запрещено теоремой Хоббарда–Деррика (ХД) [17, 18] (см. также [19, 20]). Здесь следует упомянуть основные способы, позволяющие обойти запрет Хоббарда–Деррика.

Первая возможность состоит в том, что ищутся стационарные топологически-нетривиальные решения теории поля типа "ежа" или монополя [21]. Сохранение топологических квантовых чисел при этом гарантирует отделение сектора решений с заданным топологическим числом от решений в вакуумном секторе. Однако в секторе с заданной нетривиальной топологией найденные решения могут оказаться все равно нестабильными. В этом случае для стабилизации можно вводить в лагранжиан члены с высшими производными типа скирмовских [22]. Такие члены при масштабных преобразованиях (дилатациях) имеют другой, чем кинетический и потенциальный члены, закон преобразования и поэтому запрет Хоббарда–Деррика обходится.

Другой способ состоит в рассмотрении классических решений для полей со связями типа σ -поля. В этом случае, если представлено стационарное решение уравнений движения в терминах σ -полей, буквальное применение дилатационного преобразования к решению может быть неосуществимо без выхода из класса функций, удовлетворяющих связям. В случае реального разрешения связей лагранжиан в терминах преобразованных полей имеют более сложный вид и буквально теореме ХД не подчиняются [23].

Обход теоремы ХД для стационарных решений может быть осуществлен и для полей, рассмотренных на компактифицированных многообразиях или в пространствах с непростой метрикой [24].

Если для стационарных решений теорема ХД приводит к серьезным ограничениям на теории, в которых возможны солитоны, то такие ограничения отсутствуют в случае зависящих от времени решений. Среди этих решений выделенными оказываются два основных класса.

Во-первых, это решения типа бризеров, которые представляют собой стационарные, или квазистационарные периодические решения для действительных полей. В

пионерской работе Я.Б. Зельдовича, И.Ю. Кобзарева, Л.Б. Окуня [25] исследовалась эволюция схлопывающегося доменного пузыря. Эта работа (см. также [26, 27]) породила целую серию исследований, в которых были обнаружены бризерные решения как в одномерном, так и в трехмерном случаях.

Во-вторых, это решения для комплексных полей с зависящей от времени фазой:

$$\psi(x, t) = \exp(i\omega t)\psi(x, 0). \quad (1)$$

Решения (1) впервые обсуждались в [28], где было показано, что существование дополнительных (помимо закона сохранения энергии – импульса) законов сохранения (типа сохранения заряда) может приводить к устойчивым солитоноподобным решениям.

В настоящем обзоре подробно обсуждаются зависящие от времени солитоноподобные решения для различных лоренц-инвариантных классических теорий поля. Разделы 2–4 посвящены поиску и свойствам зависящих от времени решений в $(1+1)$ -мерных теориях поля. Разделы 5 и 6 — зависящим от времени решениям в $(2+1)$ - и $(3+1)$ -мерном случаях.

Второй раздел посвящается одномерным пульсирующим солитонам уравнения Гинзбурга–Ландау–Хиггса (ГЛХ). Показано, что утилитарная задача поиска новых решений с помощью численного интегрирования уравнений движения привела к открытию абсолютно нового явления в физике солитонов, который получил название механизма резонансного перераспределения энергии (РПЭ).

В третьем разделе рассмотрены другие уравнения, в которых обнаружены долгоживущие решения типа бризеров, и тоже найден эффект РПЭ.

Поведение солитонов при прохождении их вблизи неоднородности также имеет резонансный характер. В частности, при рассеянии солитона на притягивающей примеси возможно его отражение назад, что не представляется возможным в потенциальных моделях. Эти вопросы обсуждаются в четвертом разделе.

В пятом разделе рассмотрены пульсирующие трехмерные и двумерные решения типа бризеров, возникающие при рассмотрении задачи о схлопывании пузыря.

Наконец, в шестом разделе обсуждаются решения типа Q-болов для заряженных полей и области их устойчивости.

Несмотря на первоначальную направленность исследований в сторону теории поля и физики элементарных частиц, возможные приложения полученных результатов выходят далеко за рамки указанных областей физики и находят применение в космологии, астрофизике, физике твердого тела, физике низких температур и т.д.

В заключение подробно перечислены основные возможности применений обсуждаемых в обзоре явлений, и приведен словарь терминов, используемых в оригинальных работах по данной тематике и в данном обзоре.

В отличие от имеющихся обзоров по данной тематике [6, 7, 15, 16, 29, 30], в настоящей работе впервые подробно обсуждается механизм РПЭ при столкновениях солитонов, фрактальный характер захвата и отражения солитонов при их столкновениях, резонансный механизм отражения солитона от примеси. Впервые подробно обсуждены свойства двумерных пульсирующих решений и

резонансный механизм пульсирующих решений в трехмерном случае.

2. Резонансное взаимодействие солитонов для скалярного поля Хиггса (одномерный случай)

Идеи спонтанно-нарушенной симметрии в теории поля, а также требование на перенормируемость теории привлекли внимание к действительному скалярному полю Хиггса [1]. Впервые такая модель теории поля (в статическом пределе) обсуждалась еще в работе В.Л. Гинзбурга и Л.Д. Ландау [31], посвященной феноменологической теории фазовых переходов второго рода. В настоящем разделе исследуются в основном классические решения уравнений движения, полученные из лагранжиана $\lambda\phi^4$ теории.

2.1. Кинк теории $\lambda\phi^4$

Удобно начать рассмотрение классических решений теории $\lambda\phi^4$ в двумерном пространстве–времени. Для этого случая принято в дальнейшем обозначение $\lambda\phi^4$. Плотность лагранжиана рассматриваемой теории имеет вид

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2)$$

(Обратим внимание на знак перед членом с m^2 в (2).) Такую модель часто используют как прототип модели спонтанно-нарушенной симметрии. Следует заметить, что в квантовых системах осмысленные результаты, связанные с классическими решениями, обсуждаемыми ниже, будут справедливы лишь в пределе слабой связи $\lambda/m^2 \rightarrow 0$.

Уравнение движения для поля $\phi(x, t)$ (далее ГЛХ) имеет следующий вид:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0, \quad (3)$$

а гамильтониан системы $H[\phi]$:

$$H[\phi] = \frac{1}{2} \int dx \left\{ \pi^2 + \phi_x^2 - m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4 \right\}, \quad \pi \equiv \phi_t. \quad (4)$$

Постоянные решения уравнения (3)

$$\phi_{\pm} = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (5)$$

реализуют вырожденные абсолютные минимумы гамильтониана $H[\phi]$, а решение $\phi_0 \equiv 0$ отвечает неустойчивому состоянию с ненарушенной симметрией. Более широкий перечень известных решений уравнения (3) можно найти, например, в [32–34]. С точки зрения теории поля наиболее интересны классические решения с конечной энергией. К таким решениям относятся прежде всего вакуумные решения. Малые отклонения от вакуумных решений $\phi = \phi_{\pm} + \eta$, $|\eta| \ll |\phi_{\pm}|$, описываются линеаризованным уравнением

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} + 2m^2\eta = 0. \quad (6)$$

Решения (6) представляют собой плоские волны с законом дисперсии $\omega^2 = k^2 + 2m^2$, т.е. возбуждениям над вакуумами отвечают частицы массой $\mu = m\sqrt{2}$.

Статическим решением уравнения (3) с конечной энергией является также и решение в виде уединенной

волны, называемое далее кинком (антикинком) $K(\bar{K})$:

$$\phi_{K(\bar{K})} = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Здесь x_0 — положение центра кинка. В трехмерном пространстве такое решение выглядит как стенка, разделяющая пространство на две области с различными значениями вакуума $\phi_{\pm}$ [25]. Плотность энергии для решения (7) лишь локально, вблизи $x = x_0$, отличается от вакуумной, а полная энергия превышает вакуумную на величину

$$M_K = E[\phi_K] - E[\phi_{\pm}] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}. \quad (8)$$

M_K удобно назвать массой кинка, она становится большой по сравнению с массой μ частиц, возбуждаемых над вакуумом, в пределе слабой связи $\lambda/m^2 \rightarrow 0$.

Решение

$$\phi_{K(\bar{K})} = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left\{ m(x - x_0 - Vt) [2(1 - V^2)]^{-1/2} \right\}, \quad (9)$$

очевидно, отвечает движущемуся со скоростью V кинку. При этом импульс поля

$$P_K = - \int \phi_t \phi_x dx = M_K V \gamma, \quad \gamma \equiv (1 - V^2)^{-1/2} \quad (10)$$

и его энергия (за вычетом энергии вакуума)

$$E_K = M_K \gamma \quad (11)$$

связаны обычным релятивистским соотношением между энергией и импульсом:

$$E_K^2 = M_K^2 + P_K^2. \quad (12)$$

Это соотношение является аргументом для использования решений типа кинка (7) в качестве основы для построения тяжелой составной частицы в двумерной теории поля [21, 35–38].

Кинк (7) реализует локальный экстремум гамильтониана $H[\phi]$. Действительно, рассмотрим, что происходит с энергией системы при добавлении малых возмущений к кинку (7) [6]. Будем искать решения для малых отклонений от ϕ_K в виде

$$\phi(x, t) = \phi_K(x) + \eta(x, t), \quad |\eta| \ll |\phi|. \quad (13)$$

Тогда в линейном по η приближении из (13) получим следующее уравнение для функции $\eta(x, t)$:

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - m^2\eta + 3m^2 \tanh^2 \left(\frac{mx}{\sqrt{2}} \right) \eta = 0. \quad (14)$$

Делая подстановку

$$\eta = \exp(-i\omega t) \chi(x),$$

для $\chi(x)$ получаем уравнение, совпадающее со стационарным уравнением Шрёдингера:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3m^2 \cosh^{-2} \frac{mx}{\sqrt{2}} \right) \chi(x) = (\omega^2 - 2m^2) \chi(x). \quad (15)$$

Среди решений уравнения (15) имеются два, отвечающие связанным состояниям:

$$\chi_0(x) = \left(\frac{3m}{4\sqrt{2}}\right)^{1/2} \operatorname{sech}^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

— это основное состояние системы с $\omega_0 = 0$ (нулевая или трансляционная мода) — и

$$\chi_1(x) = \left(\frac{3m}{2\sqrt{2}}\right)^{1/2} \tanh \frac{mx}{\sqrt{2}} \cosh^{-1} \frac{mx}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

— первое возбужденное состояние. Ему отвечает $\omega_1^2 = (3/2)m^2$. Решение уравнения (14)

$$\eta_1(x, t) = \exp(-i\omega_1 t) \chi_1(x)$$

есть дискретная мода возбуждения кинка. Такое решение локализовано на кинке и играет большую роль в динамике кинков, обсуждаемой далее. Кроме решений (16) и (17), уравнение (15) имеет решения, отвечающие континууму с $\omega_k^2 \geq 2m^2$.

Заметим, что все $\omega_i^2 \geq 0$; это значит, что решение (7) является устойчивым — малые отклонения от этого решения не растут со временем. При этом добавка малых возмущений к кинку приводит к увеличению энергии системы. Единственным исключением является нулевая мода $\chi_0(x)$. Заметим, что $\chi_0(x)$ (16) является производной от кинка (17). Вследствие этого добавка к кинку малого возмущения, пропорционального $\chi_0(x)$, приводит к новому кинку, сдвинутому относительно старого. Таким образом, рельеф функционала энергии в малой окрестности вокруг кинка следующий: энергия растет по всем направлениям в функциональном пространстве за исключением одного — вдоль $\chi_0(x)$ энергия системы не меняется.

2.2. Нетопологические решения с малой амплитудой

Причиной устойчивости кинка (7) является также нетривиальная топология кинка в силу граничных условий

$$\begin{aligned} \phi_K &\rightarrow \phi_{\pm}, \\ x &\rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Эти же граничные условия не позволяют разложить решение для кинка в ряд Фурье с конечными коэффициентами по возбуждениям над вакуумными решениями [39]. Другими словами, можно сказать, что число обычных частиц в кинке бесконечно. Отсюда возникает задача о поиске решений уравнения (3) с одинаковыми граничными условиями на $\pm\infty$ по x . Решение такого вида для sG-уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (19)$$

было найдено еще в [40] и широко обсуждалось впоследствии [41–44]. Оно носит название бризера и имеет вид

$$u = 4 \arctan \left\{ (\tau^2 - 1)^{1/2} \cos \frac{t}{\tau} \operatorname{sech} \left[(\tau^2 - 1)^{1/2} \frac{x}{\tau} \right] \right\}. \quad (20)$$

Выражение (20) представляет собой периодическое (с периодом $T = 2\pi\tau$), локализованное в пространстве решение. В зависимости от параметра τ амплитуда (20) меняется от 2π до 0.

Последовательный метод нахождения локализованных решений с малыми амплитудами типа бризера для одномерных нелинейных уравнений общего вида

$$u_{tt} - u_{xx} - f(u) = 0 \quad (21)$$

был развит в [45]. В этой работе метод Боголюбова – Митропольского [46] был обобщен на системы с бесконечным числом степеней свободы. Например, для случая $f(u) = -u + \beta u^3$ решение уравнения (21) ищется в виде

$$u(x) = A(x) \cos \omega t + B(x) \cos 3\omega t + \dots \quad (22)$$

В предположении сходимости ряда, т.е. при выполнении неравенства $|A| \gg |B|$ в ведущем приближении получается последовательная система уравнений:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - (1 - \omega^2) A^2 + \frac{3}{4} \beta A^3 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + (9\omega^2 - 1) B = -\frac{1}{4} \beta A^3. \quad (24)$$

При этом для функции $A(x)$ имеется единственное локализованное решение:

$$A(x) = \left(\frac{8}{3\beta}\right)^{1/2} \varepsilon \cosh^{-1} \varepsilon x, \quad \varepsilon \equiv (1 - \omega^2)^{1/2}, \quad (25)$$

а все остальные функции $B, C, \dots$ и поправки к функции $A(x)$ могут быть найдены методом последовательных приближений по параметру $\varepsilon \ll 1$. В [43] несколько более усовершенствованная по сравнению с [45] процедура была явно реализована для уравнения ГЛХ (3). Переопределив поле

$$\phi = \left(\frac{m^2}{\lambda}\right)^{1/2} (1 + z),$$

для поля $z(x, t)$ имеем следующее разложение:

$$\begin{aligned} z(x, t) = \varepsilon^2 g_1(\xi) + \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon^{2n+1} f_{2n+1}(\xi) \sin(2n+1)\tau + \\ + \varepsilon^{2n+2} g_{2n+2}(\xi) \cos(2n+2)\tau], \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\tau = \left(\frac{2}{1 + \varepsilon^2}\right)^{1/2}, \quad \xi = \varepsilon x \left(\frac{2}{1 + \varepsilon^2}\right)^{1/2}$$

и $\varepsilon \ll 1$. Подстановка (26) в уравнение движения с приравнованием членов при одинаковых временных гармониках приводит к следующему решению задачи в низшем приближении по ε для каждого члена:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cosh^{-1} \xi, \quad g_1 = -\frac{3}{4} f_1^2, \\ g_2 &= -\frac{1}{4} f_1^2, \quad f_3 = -\frac{1}{16} f_1^3, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Удается аналитически найти и следующие по ε^2 члены для каждой из функций f_i и g_i . Таким образом, получено сильное указание в пользу существования периодиче-

ского по времени (бион) решения с малой амплитудой для уравнения ГЛХ. В приближении разложения (26) решение оказывается стабильным и его энергия равна:

$$E_{\text{бion}} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} \left(2\varepsilon + \frac{37}{27}\varepsilon^3 \right) + O(\varepsilon^5). \quad (28)$$

Заметим, что разложение (26) асимптотическое и справедливо лишь при малых амплитудах биона, $\varepsilon \ll 1$. Вскоре в [47, 48] было проведено обобщение метода Косевича [45] на трехмерный случай. Аналог уравнения (23) для ведущей функции разложения в ряд по ε в трехмерном случае имеет вид

$$\Delta A - A + \frac{3}{2}A^3 = 0. \quad (29)$$

Решение задачи (29) с граничными условиями

$$A(r) \rightarrow 0, \quad \left. \frac{dA}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

приводит, в отличие от одномерного случая, к бесконечному набору решений [49–51]. Поэтому и число возможных осциллирующих решений для уравнения ГЛХ в трехмерном случае оказывается намного больше.

В [52] было высказано несколько более общее утверждение о возможности существования локализованных решений типа бионов для многомерных уравнений типа

$$\square u = V'(u) \quad (30)$$

при условии разложения функции $V(u)$ в ряд по четным степеням поля u . Заметим, однако, что такое общее высказывание было подвергнуто конструктивной критике в [53], где были высказаны аргументы в пользу возможной потери самолокализации (т.е. неустойчивости) решений, обсуждаемых в [52].

Вопрос о стабильности бионов малой амплитуды был впервые затронут в [54], где отмечалось, что поток излучения может быть пропорционален $\exp(-c/\varepsilon)$, т.е. не принадлежать к асимптотическому ряду Косевича – Ковалева.

В [55] была доказана неустойчивость биона с малой амплитудой для уравнения ГЛХ, и явно выписана экспоненциально малая по полю добавка к решению (26), имеющая вид

$$\delta\phi_{\text{rad}} = 4v_2 \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{6}}{2\varepsilon}\right) [\sin(\sqrt{6}x + 2\omega t) + O(\varepsilon)], \quad (31)$$

где коэффициент $v_2 \cong -(4,5 \pm 1,0) \times 10^{-3}$ был определен численно. Как следствие, было получено, что при больших временах $t \rightarrow \infty$ полная энергия локализованного решения медленно падает:

$$E \sim \frac{\text{const}}{\ln t}. \quad (32)$$

Это означает, что, с одной стороны, стабильное решение — бризер — с математической точки зрения не существует. С другой стороны, долгоживущее квазистабильное решение — бion — для теории $\lambda\phi_2^4$ существует. В силу малости радиационной поправки использованное в [43] приближенное описание классического решения (26) для квантования биона, по-видимому, справедливо.

2.3. Квантование биона малой амплитуды

В [41, 43, 56–59] была проведена процедура квазиклассического квантования бризера sG-уравнения. В [60] было получено точное уравнение для квантовой $\hat{S}$ -матрицы солитон–антисолитонного рассеяния и было показано, что формулы для спектра масс бризера, полученные в квазиклассическом приближении, верны.

Кроме того, в [43] была проделана процедура квазиклассического квантования биона $\lambda\phi_2^4$ -теории. Полученный спектр квантовых бионов малой амплитуды имеет вид

$$E_n = nm\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\lambda^2 \frac{n^3}{32m^3} + O(\lambda^4). \quad (33)$$

Таким образом, в области слабой связи для не слишком больших n возбужденное состояние квантового биона можно рассматривать как связанное состояние n нерелятивистских частиц. Подробное изложение метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (WKB) в теории поля можно найти в [6]. Квантование биона обсуждалось также в [61].

2.4. Обнаружение биона большой амплитуды в $\lambda\phi_2^4$ -теории поля

Таким образом, в одномерном случае для уравнения ГЛХ в классическом приближении были найдены и изучены бионы малой амплитуды. В [62] было обнаружено локализованное осциллирующее решение большой амплитуды. Это решение найдено численным интегрированием уравнения (3). Начальное условие выбрано в виде двух стенок (система типа кинк – антикинк). Такая постановка задачи — одномерный аналог задачи о схлопывании пузыря, обсуждавшейся для трехмерного случая в [25]. Найденное решение оказалось долгоживущим, т.е. излучение из области локализации для решения с большой амплитудой оказалось малым. Аналогичные зависимости от времени решения в (2+1)- и (3+1)-мерных пространствах обсуждаются в разделе 5.

Фактически в [62] решалась задача Коши для уравнения ГЛХ (3) с начальными условиями:

$$\phi(x, 0) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \tanh[m(x + x_0)(2(1 - V^2))^{-1/2}] + \tanh[m(-x + x_0)(2(1 - V^2))^{-1/2}] - 1 \right\} \quad (34)$$

и производной по времени $\phi_t(x, 0)$, отвечающей движению кинков навстречу друг другу со скоростью V . Функция $\phi(x, 0)$ изображена на рис. 1. Заметим, что

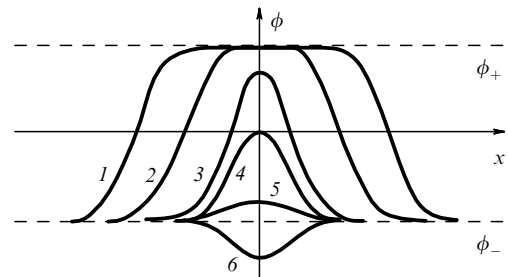


Рис. 1. Зависимость полевого решения $\phi(x, t_i)$ от x для выделенных последовательных моментов времени t_i ($i = 1, \dots, 6$).

начальное условие для функции $\phi(x, 0)$ совпадает с вакуумом ϕ_- при $|x| \rightarrow \infty$. Вследствие этого можно было ожидать, что при столкновении кинков такое состояние быстро аннигилирует, т.е. переходит в малые колебания вокруг вакуума ϕ_- (см., например, [6]).

Ситуация оказалась не такой, как ожидали. При $V = 0,1$ (скорость света $c = 1$) было обнаружено, что в процессе КК-столкновения образуется долгоживущее связанное состояние. Решения $\phi(x, t)$ для нескольких выделенных характерных значений времени t_i приводятся на рис. 1. На рисунке 2 изображена зависимость от времени полевой функции в нуле $\phi(0, t)$. Период колебаний с большой амплитудой оказался порядка m^{-1} . Было также замечено, что при больших скоростях столкновения кинков происходит их отражение с небольшой потерей энергии, и связанное состояние не образуется. Следует заметить, что само явление отражения кинков, которое отсутствовало в случае sG-уравнения, еще не означает отсутствие полной интегрируемости в системе. Примером такого решения является полностью упругое отражение в системе солитон – антисолитон для интегрируемой классической модели Гросса – Невью [63].

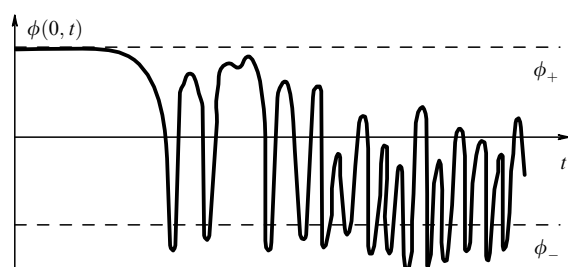


Рис. 2. Зависимость от времени поля $\phi(0, t)$ в точке $x = 0$.

Образование биона было вскоре обнаружено также в [32]. Более детальный численный анализ картины КК-столкновений был проведен в [64, 65]. Было замечено, что после довольно нерегулярных пульсаций на первоначальном этапе временная зависимость решения стабилизируется. При этом все же обнаруживаются слабые модуляции основной гармоники. В то же время потери энергии на излучение оказались крайне малыми — экстраполируя энергию биона для больших времен экспоненциальной зависимостью, Гетманов [65] обнаружил, что энергия локализованных колебаний уменьшалась вдвое за период $T \approx 1750m^{-1}$.

Впоследствии затухание биона за большие промежутки времени было изучено более тщательно [66]. Было обнаружено, что скорость затухания амплитуды колебаний зависит от самой амплитуды и уменьшается при уменьшении амплитуды. В отличие от вывода работы [65], было указано на фактически более медленную, чем экспонента, потерю энергии системой.

Таким образом, обнаруженное локализованное осциллирующее слабозатухающее решение с большой амплитудой — бион — для теории $\lambda\phi_2^4$ является аналогом бризера теории синус-Гордона и в пределе малых амплитуд, по-видимому, совпадает с решением (27). Обнаруженное численно слабое затухание такого решения также находится в качественном согласии с выводом работы [55].

2.5. Поиски других решений

для уравнения Гинзбурга – Ландау – Хиггса

Обнаружение биона вызвало интерес к поиску других относительно устойчивых решений уравнения ГЛХ. Вскоре было обнаружено относительно долгоживущее возбужденное осциллирующее состояние кинка [65]. Так как оно было найдено в столкновении КК в поле покоящегося кинка, то было названо "тритоном". Для этого решения используется иногда также термин "wobbling-кинк". Время жизни этого решения, однако, оказалось меньше, чем у биона. Зависимость его энергии от времени можно аппроксимировать формулой

$$E(t) = M_K [1 + 2 \exp(-\delta_1 t)], \quad (35)$$

где $\delta_1 = (3,0 \pm 0,1) \times 10^{-2}m$.

Потенциальное описание решения для тритона в симметричной конфигурации обсуждалось в [67].

Разложение Косевича – Ковалева [45] применительно к "wobbling-кинку" обсуждалось в [68]. Очевидно, что в пределе малых амплитуд колебаний такое решение переходит в кинк с возбужденной над ним первой вибрационной модой (17).

Рождение дополнительной пары КК в столкновениях кинка и антикинка при энергиях вблизи порога обнаружить не удалось. Заметим, что в квантовом приближении удается обнаружить рождение пары КК уравнения ГЛХ достаточно интенсивным внешним полем [69].

2.6. Потенциальное приближение

Первая попытка объяснить наблюдаемое в численном опыте явление формирования биона была предпринята уже в [62]. Было сделано предположение, что при низких энергиях можно ввести эффективный потенциал взаимодействия кинка и антикинка $U(X)$. Он определяется как энергия статической конфигурации КК, которые находятся на расстоянии X друг от друга:

$$U(X) = \frac{1}{2} \int dx \left(\phi_x^2 - m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4 \right). \quad (36)$$

В качестве такой конфигурации бралась функция (34) с $X = 2x_0$. Полученный при этом потенциал взаимодействия имел вид, изображенный на рис. 3. На бесконечно больших расстояниях потенциальная энергия постоянна и равна сумме масс двух кинков. Потенциал равен нулю при $X = 0$. При отрицательных X в системе КК возникает сильное отталкивание, линейно растущее с увеличением $|X|$.

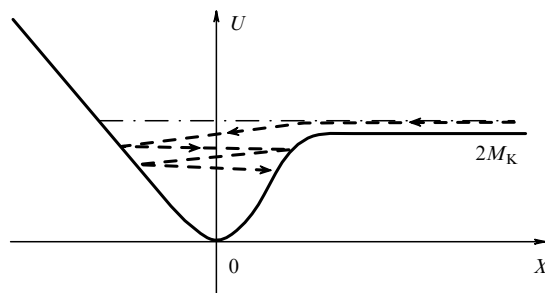


Рис. 3. Потенциал взаимодействия солитона и антисолитона теории ГЛХ.

Интересно, что аналогичное потенциальное описание для двухсолитонных решений уравнения sG использовалось еще в [40]. Развитию метода коллективных координат в теориях поля с протяженными объектами, например, с кинками теории $\lambda\phi^4$, были посвящены также работы [70–73]. Для системы синус-Гордон в [74] предлагался несколько другой способ введения потенциала между двумя солитонами на основе когерентного состояния. Более последовательная процедура введения нерелятивистского потенциала, приводящая к правильному поведению S-матрицы солитон-солитонного рассеяния для sG-уравнения, обсуждалась в [75].

Отметим, однако, что для качественного описания характера движения кинков определения потенциала (36) вполне достаточно. Действительно, если предположить, что поведение КК-системы сводится к нерелятивистской задаче двух точечных частиц с массами M_K , взаимодействующих с потенциалом $U(X)$, то прежде всего следует отметить, что в такой задаче имеется два типа движения: финитное движение в яме — аналог биона — при $E < 2M_K$ и инфинитное движение при $E > 2M_K$, отвечающее задаче рассеяния. Как было предложено в [62], наличие трения в системе, т.е. излучение волн малой амплитуды, может приводить к захвату кинка потенциалом, что и наблюдалось в численном эксперименте. Заметим, что КК-потенциал позднее вычислялся более детально в ряде работ [61, 76–78].

Стоит подчеркнуть еще раз, что в случае КК-взаимодействий потенциальное приближение с учетом возможности потери энергии системой в результате трения вполне удовлетворительно в целом описывало наблюдаемую в численном эксперименте картину.

Заметим также, что делались и другие попытки объяснить наблюдаемые долгоживущие состояния. Так, в [79] общая причина существования долгоживущих пульсирующих объектов в теориях поля объяснялась их достаточной протяженностью в пространстве. В этом случае импульсное распределение частиц в объекте оказывается мягким, и система близка по свойствам к нерелятивистской. В системе появляется дополнительный приближенный интеграл движения — число частиц в системе. Как следует, например, из рис. 2, характерные скорости изменения поля в бионе вполне релятивистские. Поэтому буквально к биону уравнения ГЛХ замечание работы [79] не относится. Удобная приближенная параметризация биона уравнения ГЛХ, применимая и к бионам с большой амплитудой, была предложена в [80].

2.7. Обнаружение несоответствия с потенциальным описанием

Не все явления, обнаруженные в первых численных расчетах, можно было объяснить в рамках предложенного потенциального подхода. Действительно, при наличии лишь трения в системе трудно объяснить нерегулярности колебаний биона, легко различимые на рис. 2.

Кроме того, уже на первоначальном этапе возникли разногласия по поводу того, чему равна критическая скорость захвата. В [62] она считалась равной 0,25. В [65] она была определена как $V_{cr} = 0,2 \pm 0,01$. Можно было предположить, что такие разногласия в значении V_{cr} были связаны с какими-либо неточностями счета уравнений. Однако оказалось, что ситуация намного сложнее.

Уже в [32] было отмечено, что захват имеет место не при всех начальных скоростях сталкивающихся кинков ниже некоторого V_{cr} . В частности, в [32] наблюдался захват при $V = 0,25$, в то время как при $V = 0,22$ и $V = 0,26$ наблюдался разлет кинков.

В [81] было обращено внимание на другую особенность поведения кинков вблизи порога захвата. В частности отмечалось, что при начальной скорости кинков $V_{in} = 0,3$ после столкновения наблюдается их разлет с конечной скоростью $V_f = 0,135$. При $V_{in} = 0,25$ наблюдается захват кинка и образование биона. При $V_{in} = 0,2$ опять наблюдается разлет кинков со скоростью $V_f = 0,155$. Таким образом, упругость столкновения в "окне" разлета вблизи $V_{in} = 0,2$ оказалась выше, чем при $V_{in} = 0,3$! Такое явление, имеющее характер резонанса, указывало на наличие нетривиального механизма захвата, отличающегося от первоначально предположенного захвата за счет потери энергии на излучение (трение).

2.8. "Окна" разлета и механизм резонансной передачи энергии

Обнаружение "окон" разлета [32, 81] оказалось лишь вершиной айсберга и повлекло за собой открытие сложной структуры переходного слоя между непрерывным спектром с $V_{in} > V_{cr} \cong 0,2598$, в котором всегда наблюдается разлет кинков и $V_{in} < 0,192575$ — в этой области всегда наблюдается захват кинка и образование биона.

Последовавшие за [81] работы приводили как к увеличению обнаруживаемого числа "окон" разлета, так и к уточнению их положения [77, 82, 83] в переходной области начальных скоростей.

В [77, 82] было также отмечено необычное поведение кинков в области "окон" разлета. Если для $V > V_{cr}$ столкновение кинков носило однократный характер, то в "окнах" разлета, столкнувшись раз, кинки расходились на значительное расстояние, останавливались и сталкивались второй раз, после чего происходил их разлет на бесконечность. Зависимости координаты центра кинка от времени в "окне" разлета и в столкновении при $V > V_{cr}$ представлены на рис. 4а, б. Области, где разлет кинков осуществляется путем двойных столкновений, мы будем называть "окном" двойного столкновения (two-bounce "window").

Тщательное исследование "окон" разлета, приведшее к расшифровке причин их образования в переходной области, было проведено в [84] (см. также [85]). В [84] было обнаружено 9 "окон" двойных столкновений. В "окнах" разлета после первого столкновения кинки расходятся на значительные расстояния, однако, покинуть область взаимодействия не могут. В то же время после второго столкновения разлет кинков оказывается возможным. Таким образом, требовалось найти механизм, при котором кинетическая энергия кинков могла быть отнята в первом столкновении и возвращена в момент второго столкновения.

В [84] такой механизм перераспределения и сохранения энергии был найден. Было предложено следующее объяснение: после первого столкновения у расходящихся кинков может оказаться возбужденной дискретная мода (17). Эта мода связана с кинком, т.е. является локализованным решением, сохраняющим энергию вблизи центра кинка. Частота осцилляций этого решения фиксирована, $\omega_1^2 = 3/2$. В случае, если в результате второго

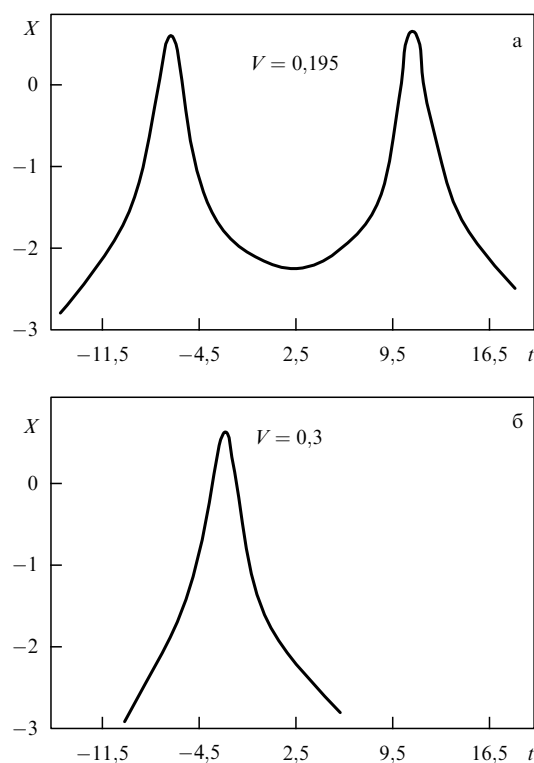


Рис. 4. Зависимость координаты центра кинка от времени в столкновении при начальной скорости, отвечающей: (а) "окну" разлета, (б) для $V > V_{cr}$.

столкновения фазы дискретной моды и взаимного движения кинков будут подобраны надлежащим образом, возможно возвращение части энергии осцилляционной моды в кинетическую энергию кинков и их разлет. Если предложенное объяснение верно, то передача энергии осуществляется в основном в дискретную моду кинка. На рисунке 5 изображена функция $\phi(0, t)$ в области первых восьми "окон" двойных столкновений. Отличие между решениями для различных начальных скоростей V_{in} на рис. 5 заключается в разном числе периодов малых колебаний между столкновениями самих кинков, которым отвечают колебания большой амплитуды. В случае справедливости гипотезы период колебаний малой амплитуды должен быть близок к периоду первого дискретного уровня кинка. Численное значение периода малых колебаний оказалось равным $T_{exp} \cong 5.2$, что очень близко к $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 5.13$! Таким образом, предложенный механизм сохранения энергии в дискретной моде возбуждения кинка был подтвержден в численном эксперименте.

2.9. Проверка следствий механизма резонансной передачи энергии

Следует прежде всего отметить, что важность роли дискретной моды возбуждения кинка в процессе КК-столкновений отмечалась ранее еще в [78]. Там же, используя гипотезу о доминантности дискретной моды возбуждения кинка, была вычислена критическая скорость захвата $V_{cr} \cong 0.25$, что близко к точному значению $V_{cr} = 0.2598 \dots$

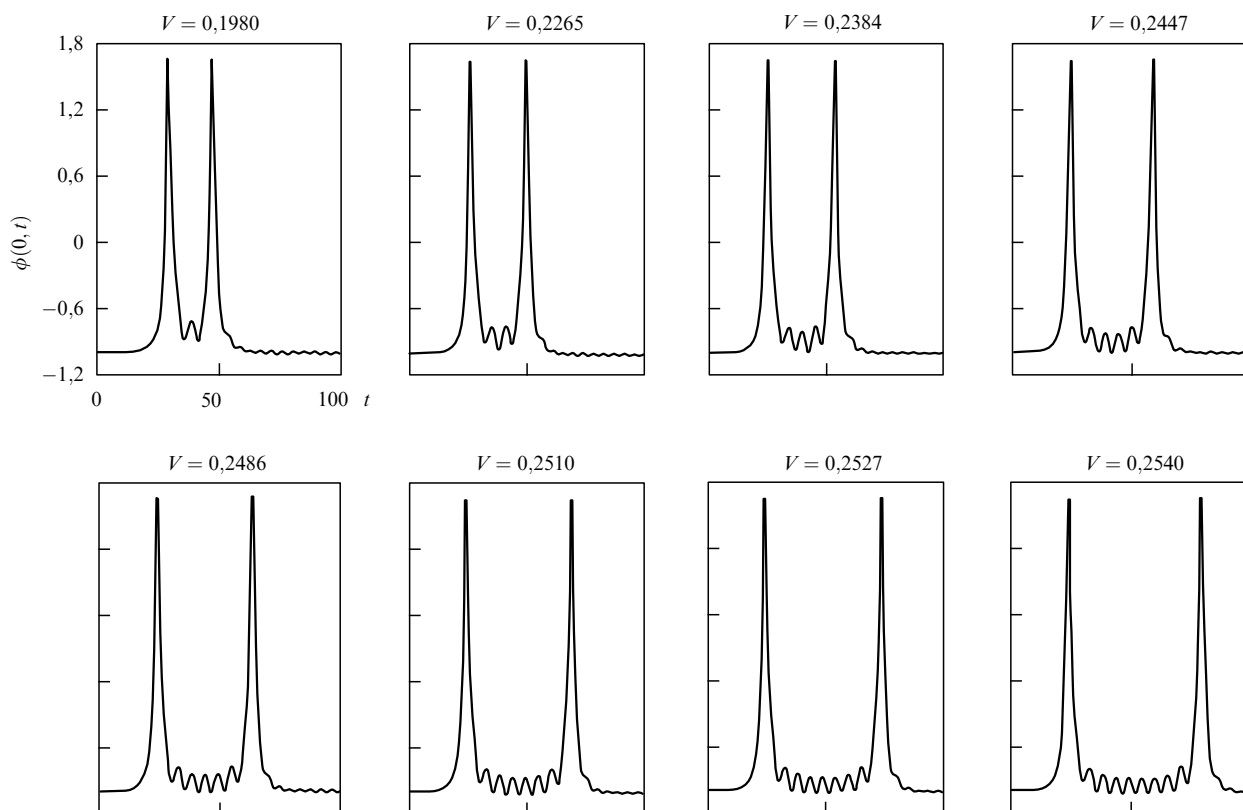


Рис. 5. Функция $\phi(0, t)$ в области двойных "окон" разлета (представлены первые 8 "окон").

Как следствие предложенного механизма в [84] было выписано феноменологическое условие для возможности возвращения энергии в кинетическую энергию КК-системы:

$$\omega_1 T_{12}(V_n) = \delta + 2\pi n, \quad (37)$$

где n — целое число, а $T_{12}(V_n)$ — время между двумя столкновениями кинков. Это соотношение было проверено путем численного счета и благодаря этой процедуре было определено экспериментальное значение $T_{12}^{\text{эксп}} \cong 5,2$, отмеченное в разделе 2.8.

Далее, исходя из асимптотического выражения для потенциала КК-взаимодействия [6, 78], в [84] были получены феноменологические соотношения между начальной скоростью столкновения в n -м окне и критической скоростью:

$$V_n^2 = V_{\text{cr}}^2 - 1,37(2n+1)^{-2}. \quad (38)$$

Было обнаружено, что экспериментально соотношение (38) с хорошей точностью выполняется для всех "окон". Было также показано, что ширина "окон" разлета хорошо подчиняется условию

$$\Delta V_n = \vartheta(2n+1)^{-3}, \quad (39)$$

следующему также из потенциального приближения (здесь ϑ — числовая константа).

Отметим также важность численного подтверждения малости потери энергии на излучение. До очень больших начальных скоростей $V_{\text{in}} \sim 0,7-0,8$ энергия, заключенная в дискретной моде возбуждения кинка, является доминирующей. При скоростях $V_{\text{in}} \leq 0,4$ она на порядок превосходит энергию излучения.

2.10. Обнаружение многократных "окон" столкновения. Квазифракталы

В [86, 87] было продолжено изучение "окон" разлета. Так, в [86] было обнаружено 35 "окон" двойных столкновений. Их положения и ширины как функция числа малых осцилляций n между столкновениями кинков изображены на рис. 6. Из рисунка 6 следует, что V_{cr} выглядит как точка сгущения резонансов. Кроме того, в [86] были

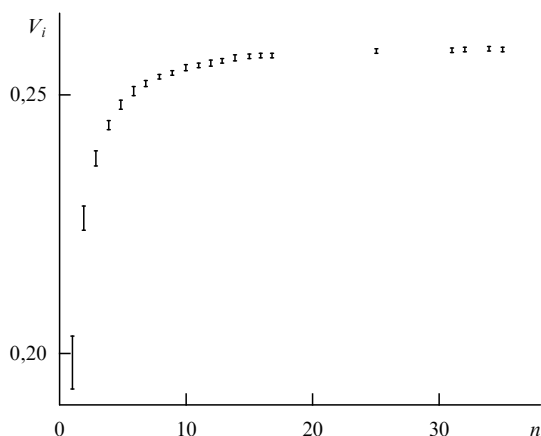


Рис. 6. Положения и ширины интервалов двойных "окон" разлета кинков как функция n .

найжены "окна" многократных КК-столкновений (мульти-боунс), возможность существования которых обсуждалась в [84]. Решения, отвечающие "окнам" разлета, были названы, согласно [86], квазизамкнутыми орбитами. Поведение поля в этих решениях резко отличалось от хаотического поведения поля в бие. Было отмечено, что три-боунс "окна" расположены вблизи двойных "окон", т.е. наблюдается своего рода иерархия расположений "окон" разлета. Типичное три-боунс "окно" изображено на рис. 7.

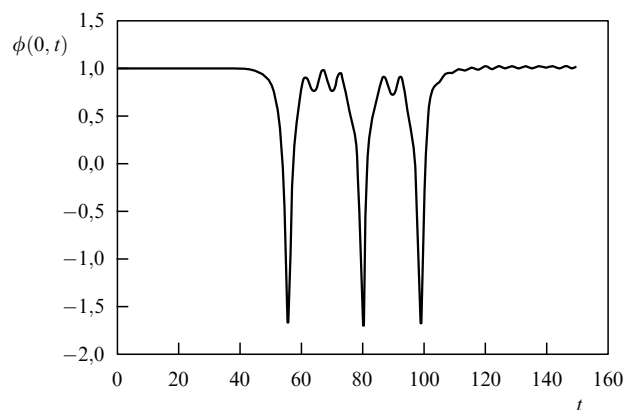


Рис. 7. Зависимость от времени поля $\phi(0, t)$ в типичном тройном "окне" разлета.

В [87] изучение мульти-боунс "окон" было продолжено и было подмечено, что их расположение подчиняется вполне определенной закономерности: вблизи каждого дважды-боунс "окна" разлета имеется примыкающая серия из три-боунс "окон", для каждого из три-боунс "окна" имеется примыкающая серия из четыре-боунс "окон" и т.д. Таким образом, в расположении мульти-боунс "окон" разлета явно прослеживается фрактальная структура. Схематическое изменение масштаба при переходах

$$n\text{-боунс} \rightarrow (n+1)\text{-боунс} \rightarrow (n+2)\text{-боунс} \rightarrow \dots$$

представлено на рис. 8. На рисунке 8а изображены черные "окна" двойных столкновений (дважды-боунс) с непрерывной черной полосой справа, отвечающей континууму однобоунсовых столкновений с $V_{\text{in}} > V_{\text{cr}}$. В рамке изображена область, перемасштабированная на рис. 8б. Слева черным отмечена область дважды-боунс "окна", а черные полосы правее отвечают расположению

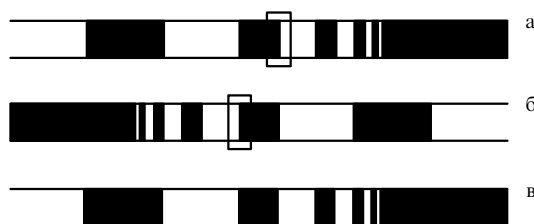


Рис. 8. Фрактальная структура положений и ширин "окон" разлета и областей захвата.

три-боунс "окон". Перемасштабированная рамка рис. 8б изображена на рис. 8в, где показано расположение четыре-боунс "окон" разлета. В связи с обнаруженной фрактальной структурой мульти-боунс "окон" в [87] была предложена некоторая универсальная формула для вычисления ширины "окон" разлета в зависимости от числа n малых осцилляций между столкновениями кинков:

$$\Delta V_n \propto n^{-\beta}, \quad (40)$$

где β — некоторая универсальная постоянная, не зависящая от n и кратности боунса. При нормировке на наименьшее n в каждой серии, в соответствии с (40), удалось с одним значением β получить хорошее описание ширины "окон" разлета для изученных дважды- и трижды-боунс серий.

Кроме того, в [87] обсуждался вопрос, является ли движение в областях формации биона, т.е. вне "окон" разлета, хаотичным. Было изучено решение для $V_{in} = 0,18$, где не обнаружено "окон" разлета, а формируется бийон. Для наблюдений использовалась временная зависимость функции $\phi(0, t)$. На ее основе строились, согласно [88–90] серии d -мерных векторов V_i

$$V_i = \{V_1(t_i), V_2(t_i), \dots, V_d(t_i)\},$$

где d — предполагаемая размерность аттрактора, $V_k(t_i) = V[t_i + (k-1)\tau]$ и τ — задержка по времени. Фактически изучалась временная зависимость расстояния между парами векторов V_0 и V'_0 , взятых с условием

$$\|V_0 - V'_0\| < \delta_0, \quad (41)$$

где $\delta_0 < 10^{-6}$. На каждом шаге по времени строилась величина

$$\lambda_j = \log_2 \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}. \quad (42)$$

Наибольший показатель Ляпунова λ_1 вычислялся как среднее от λ_j по интервалу времени Δt :

$$\lambda_1 = \frac{dt}{\Delta t} \sum_j \lambda_j. \quad (43)$$

На больших временах λ_1 приближается к $\lambda_1 \cong 0,31$. Это указывает на то, что осцилляции в бийоне носят хаотический характер, так как положительность максимального показателя Ляпунова λ_1 означает экспоненциальное расхождение во времени любых двух близко расположенных в данный момент времени точек в фазовом пространстве динамической системы.

Дальнейшие исследования вопроса квазифрактального поведения "окон" разлета при КК-рассеянии позволяют сделать вывод, что точные фракталы были бы возможны лишь при отсутствии излучения [91].

2.11. Эффективный лагранжиан для биона

Метод коллективных координат [70–73] применительно к системе КК в расширенном по сравнению с потенциальным [62, 76, 61, 77] приближении обсуждался впервые в [78]. В пренебрежении возбуждениями континуума полевая конфигурация для любых времен предпола-

гается в виде

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \phi_K[x + X(t)] - \phi_K[x - X(t)] - 1 + A(t) \times \\ & \times \{\chi_1[x + X(t)] - \chi_1[x - X(t)]\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\chi_1(x)$ — решение (17), отвечающее дискретной моде возбуждения кинка. Переменная $X(t)$ — коллективная координата, соответствующая трансляционной моде, т.е. половина расстояния между кинком и антикинком. Переменная $A(t)$ характеризует возбуждение дискретной моды кинка. Эффективный лагранжиан определяется как

$$L_{\text{eff}} = \int dx \mathcal{L}(x, t, X, A), \quad (45)$$

где $\mathcal{L}(x, t, X, A)$ определяется выражением (2) с $\phi(x, t)$ в виде (44) [78, 86]. Интегрирование по x в (45) приводит к следующему виду для L_{eff} :

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}}(X, \dot{X}, A, \dot{A}) = & [M_K + I(X)] \dot{X}^2 - U(X) + \dot{A}^2 - \\ & - \omega_1^2 A^2 + 2F(X)A + 2C(X)\dot{A}\dot{X}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $\omega_1^2 = 3/2$ — частота дискретной моды возбуждения кинка, а функции $I(X)$, $U(X)$, $F(X)$ и $C(X)$ выписаны явно (см., например, [78]). Такой лагранжиан является естественным обобщением потенциального приближения, предложенного в [62] и обсуждавшегося в разделе 2.6. Заметим, что в (46) отброшены высшие по A и X члены.

Лагранжиан (46) был использован в [78] для оценки критической скорости захвата кинка. При этом движение по переменной X считалось классическим, в то время, как возбуждение осциллятора $A(t)$ рассматривалось как квантовая задача при заданном движении кинков (адиабатическое приближение). Таким образом, в [78] не учитывалась возможность возврата энергии из дискретной моды $A(t)$ в моду $X(t)$, вследствие чего не были обнаружены "окна" отражения.

Впервые важность точного решения классических уравнений движения, определяемых лагранжианом (46), была высказана в [92]. Успешная реализация этой идеи была осуществлена в [86]. Оказалось, что даже упрощенная по сравнению с (46) система ($C = 0$) прекрасно воспроизводит все режимы решения — зону однократных столкновений кинков выше критической скорости, двойные и тройные "окна" разлета ниже V_{cr} и образование биона. Поведение функции $\phi(0, t)$ в (44), восстановленной при помощи решения уравнений движения для $X(t)$ и $A(t)$, изображено для разных начальных скоростей модельной задачи на рис. 9 и мало отличается от аналогичных решений для точной задачи.

В [87] было проверено, что иерархия в расположении "окон" разлета, обнаруженная для точной полевой задачи, в точности повторяется для редуцированной задачи (46), причем извлекаемый при этом параметр β (40) оказывается довольно близок к параметру β для точной задачи.

При этом в [87] отмечалось, что в редуцированной задаче из-за отсутствия трения в переходной области бийон не образуется: при любой начальной скорости найдется такое время, после которого кинки вылетят. В этом проявляется существенное отличие от точной полевой задачи, где бийон может образоваться и в

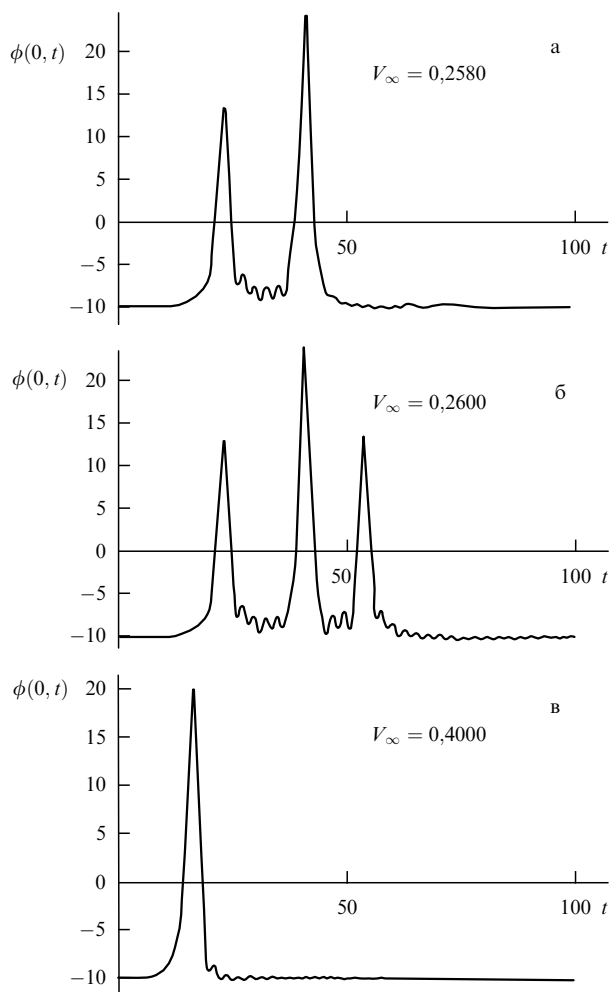


Рис. 9. Поведение функции $\phi(0, t)$, восстановленной при решении уравнений движения для эффективного лагранжиана: (а) "окно" двойного разлета, (б) "окно" тройного разлета, (в) рассеяние кинков в континууме.

переходной области. В то же время при малых скоростях столкновения ниже области "окон" разлета для редуцированной системы (46) поведение решений до очень больших времен оказывается близким к хаотическому. Это подтверждается всюду плотным отображением Пуанкаре в плоскости $(A, \dot{A})$ для начальной скорости $V_{in} = 0,02$. Одновременно для редуцированной системы был вычислен максимальный показатель Ляпунова $\sigma_1 \cong 0,32$, который оказался близок к значению $\lambda_1 \cong 0,31$ для точной системы.

Таким образом, изучение КК-взаимодействия привело к открытию нового ряда явлений в классической теории поля: обнаружению долгоживущих решений — бионов, обнаружению "окон" разлета и их иерархического фрактального характера, хаотического характера движения в бионе и возможности редукции точной задачи теории поля к описанию в рамках эффективного лагранжиана с конечным числом степеней свободы. Важную роль в формировании необычных свойств системы КК для $\lambda\phi_2^4$ -теории играет наличие дискретной моды 2 возбуждения кинка. Далее мы убедимся в том, что при наличии дискретной моды возбуждения во многих других системах наблюдается картина, подобная обнаруженной в $\lambda\phi_2^4$ теории ГЛХ.

3. Некоторые примеры задач со взаимодействием кинков

3.1. Взаимодействие кинка и антикинка в модифицированном уравнении синус-Гордона

Рассмотрим систему, определяемую лагранжианом

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_t) = \int dx \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 - \frac{1}{2} \phi_x^2 - U(\phi) \right] \quad (47)$$

с потенциалом $U(\phi)$:

$$U(\phi, r) = (1 - r^2)(1 - \cos \phi)[1 + r^2 + 2r \cos \phi]^{-1},$$

где параметр $r \in (-1, 1)$. Такая система впервые обсуждалась в [93]. В [94] были найдены аналитические решения для кинков. При любом r $\phi_K(x, r) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\phi_K(x, r) \rightarrow 2\pi$ при $x \rightarrow +\infty$. В [95] были численно изучены некоторые случаи взаимодействия в системе КК, и получены указания на образование биона при $r = 0,5$. Обсуждаемая система более детально была изучена в [96].

Прежде всего в [96] был исследован спектр малых возбуждений вблизи $\phi_K(x, r)$. (Аналогичная задача для уравнения ГЛХ обсуждалась в разделе 2.) Оказалось, что спектр возбуждений в системе существенно зависит от параметра r . При положительных r спектр имеет один дискретный уровень, отвечающий трансляционной моде с $\omega_0 = 0$, и континуум. В области отрицательных r число дискретных мод N возмущений кинков начинает увеличиваться, причем $N \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow -1$. Спектр возбуждений кинка, полученный численно, изображен на рис. 10.

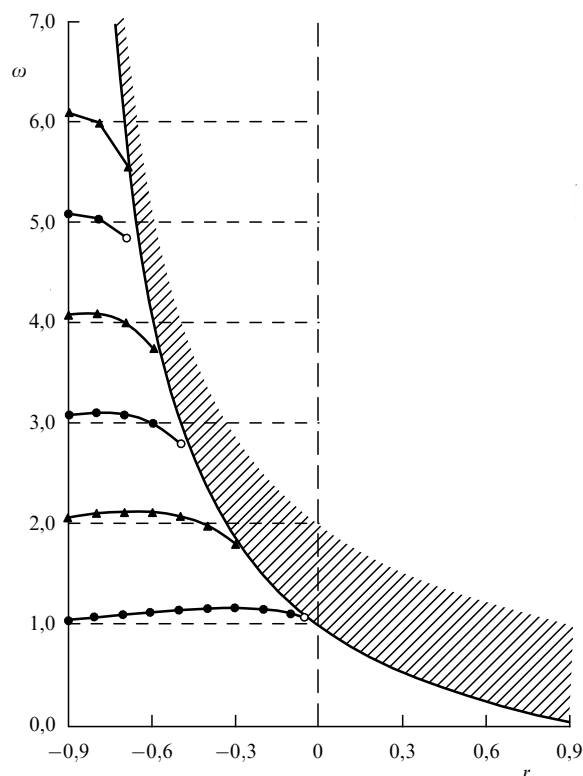


Рис. 10. Спектр возбуждений над кинком теории модифицированного синус-Гордон уравнения (52) как функция параметра r .

Таким образом, изучая взаимодействия в системе КК при различных r , можно получать информацию о роли дискретных мод возбуждений. Заметим, что случай $r = 0$ отвечает системе, описываемой точно интегрируемым sG-уравнением, для которого солитон-антисолитонное решение известно аналитически.

3.1.1. Случай малых отрицательных r . Был рассмотрен случай $r = -0,1$. В этом случае система близка к системе, описываемой sG-уравнением. В то же время в спектре возбуждения кинка уже имеется один дискретный возбужденный уровень с $\omega_1 = 1,1205$ (см. рис. 10). Континуум начинается с $\omega_{\text{cont}} = 1,2222$. Так же, как и в случае теории $\lambda\phi_2^4$ при рассеянии КК имеется критическая скорость, выше которой кинки проходят, потеряв часть энергии. Кроме того, при $V < V_{\text{cr}}$ были обнаружены "окна" отражения и "окно" пролета. В "окнах" отражения поведение кинков аналогично дважды-боунс столкновениям в $\lambda\phi_2^4$ -теории. Кинки сталкиваются, проходят друг через друга на значительное расстояние, останавливаются и сталкиваются опять. Таким образом, эти решения соответствуют рассеянию кинков назад. В обнаруженном "окне" прохождения кинки сталкиваются трижды, и поэтому результат соответствует прохождению кинка вперед.

3.1.2. Случай малых положительных r . В случае $r = 0,1$ континуум начинается с $\omega_{\text{cont}} = 0,8182$, и имеется лишь одна тривиальная дискретная мода с $\omega_0 = 0$. При этом имеется так же, как и при $r = -0,1$, критическая скорость $V_{\text{cr}} = 0,234$, ниже которой происходит захват, а выше — разлет кинков. Однако "окна" пролета и отражения уже не наблюдаются. Что же касается области захвата, то в отличие от $\lambda\phi_2^4$ -теории, система КК здесь не образует долгоживущего состояния и быстро распадается в нелокализованные расходящиеся волны.

В случае $r = 0,05$ из-за малости коэффициента r система по свойствам должна быть близка к интегрируемой. Как следствие, критическая скорость мала, $V_{\text{cr}} = 0,112$. Ниже V_{cr} реализуется захват кинков. Выше V_{cr} никаких "окон" разлета и отражения не обнаружено. Следует заметить, что в отличие от случая $r = 0,1$ при $r = 0,05$ бион оказывается довольно стабильным. Кроме того, авторы [96] заметили, что при некоторых скоростях ниже V_{cr} периоды нескольких первых колебаний в бионе оказываются заметно больше, чем для других значений V . Так как при этом разлет кинков не наблюдается, то выделенная при некоторых начальных скоростях картина формирования биона была названа квазирезонансом. Выражение для скоростей формирования квазирезонансов описывается простой феноменологической формулой:

$$V_n = V_{\text{cr}} - A(2n + 1)^{-2}, \quad (48)$$

где $A = 5,84$ и $n = 4, \dots, 15$ — индекс обнаруженного квазирезонанса. Вследствие отсутствия дискретной моды возбуждения кинка можно высказать лишь гипотезу, что причиной появления квазирезонансов является взаимодействие трансляционной моды кинков с определенной выделенной частотой возбуждения континуума $\tilde{\omega}_{\text{cont}}$. В рассматриваемом случае $r = 0,05$, $\tilde{\omega}_{\text{cont}} = 1,159$, что выше границы континуума, $\tilde{\omega}_{\text{cont}}^{\text{min}} = 0,9048$. Для больших положительных коэффициентов r картина КК-

взаимодействий качественно не меняется: ниже V_{cr} "окна" отражения и прохождения не обнаруживаются.

3.1.3. Случай больших отрицательных r . Случай $r = -0,5$ приводит к значительно более сложной картине КК-взаимодействий. Она представлена на рис. 11. Ниже $V_{\text{cr}} \cong 0,34$ наблюдается два "окна" отражения с $V_i = 0,315$ и $V_i = 0,317$. Но, кроме того, обнаруживается полоса прохождения в области $0,176 < V_i < 0,278$, соответствующая три-боунс взаимодействию. Стоит отметить, что при $r = -0,5$ в спектре возбуждений кинка имеется 3 дискретных уровня, и поэтому картина взаимодействия этих уровней может быть достаточно сложна.

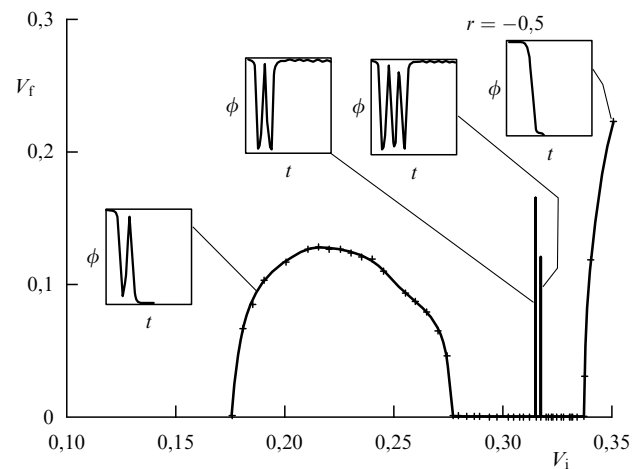


Рис. 11. Сложная картина зон и "окон" пролета в случае больших отрицательных r .

Таким образом, в целом для модифицированного синус-Гордона (MsG) уравнения образование "окон" отражения и пролета находится в согласии с наличием или отсутствием дискретных мод возбуждения кинка. Несомненно, что новым элементом является обнаружение квазирезонансов в случае малых положительных r , соответствующих возбуждению выделенной частоты континуума. Природа этого явления пока не вполне ясна.

3.2. Кинк – антикинк взаимодействия для двойного синус-Гордона уравнения

В [97] было проведено изучение взаимодействия системы кинк – антикинк в так называемом двойном синус-Гордон (DsG) уравнении:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + 2(1 + |4\eta|)^{-1} \left(-\sin \frac{\phi}{2} + 2\eta \sin \phi \right) = 0, \quad (49)$$

где параметр η пробегает произвольные действительные значения ($-\infty < \eta < +\infty$). Такому уравнению отвечает потенциал полевого самодействия в форме

$$U[\phi] = -4(1 + |4\eta|)^{-1} \left(-\cos \frac{\phi}{2} + \eta \cos \phi \right). \quad (50)$$

В случае $\eta \rightarrow \pm\infty$ $U[\phi]$ переходит в потенциал sG-уравнения так же, как и в случае $\eta = 0$. В области $\eta < -1/4$ в потенциале имеется вырожденная структура

минимумов, разделенных неэквивалентными барьерами. В соответствии с этим имеется два типа кинков — "большой" и "малый". Спектр малых возбуждений кинков содержит трансляционные моды с $\omega_0 = 0$ и одну дискретную моду для "малого" кинка. В силу того, что модель $U[\phi]$ с $\eta < -1/4$ использовалась в приложениях к сверхтекучему ^3He в фазе В, взаимодействия КК в этом случае изучались довольно широко [98–103]. В частности, в [103] была получена критическая скорость захвата "малой" пары КК в бион (для $-3,6 \leq \eta \leq -0,31$). Кроме того, наблюдалась конверсия "малой" пары в большую при больших скоростях $V \geq 0,92$ ($\eta = -1$) [100], а также конверсия большой пары в малую при любых скоростях [100, 103]. Структуры решения для столкновения "малой" пары КК при $\eta = -0,50$ прекрасно согласуются с рассмотренной для $\lambda\phi_2^4$ моделью резонансного перераспределения энергии в дискретную моду. Здесь имеется критическая скорость, выше которой кинки испытывают однократные отражения. Ниже V_{cr} найдено двадцать "окон" двукратного отражения, положение которых хорошо согласуется с феноменологическим описанием. Вблизи этих "окон" группируются три-боунс "окна" (рис. 12). Иерархию состояний удастся проследить и на следующем шаге: вблизи три-боунс "окон" наблюдается скопление четыре-боунс "окон". Ситуация не меняется существенно и при переходе к другим отрицательным η .

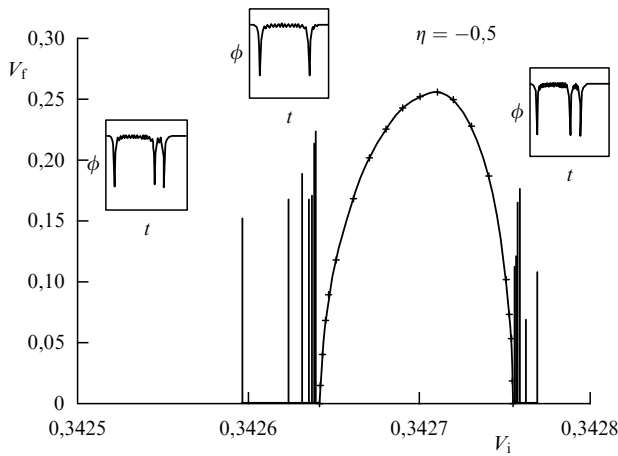


Рис. 12. Структура три-боунс "окон" вблизи два-боунс "окна" $\lambda\phi_2^4$ -теории при $\eta = -0,5$.

Рассмотрим кинк–антикинк рассеяние для $-1/4 < \eta < 0$. В этой области потенциал DsG-модели топологически похож на потенциал sG-модели, и имеется лишь один вид кинка, соединяющий вакуумные решения. В спектре возбуждения кинка в этой области нет дискретных нетривиальных уровней. Проведенные в этой области расчеты показывают, что, как и следовало ожидать, "окна" разлета ниже критических скоростей захвата не наблюдаются.

В то же время, как и для MsG-уравнения, время жизни биона увеличивается с уменьшением $|\eta|$, т.е. с приближением к точно решаемому случаю sG-уравнения. Повидимому, при $\eta \rightarrow 0$ на поведение биона оказывает сильное влияние существование бризера sG-уравнения ($\eta = 0$).

В случае положительных $\eta > 0$ у кинка имеется один дискретный уровень возбуждения. При этом, если для $0 < \eta < 1/4$ потенциал остается топологически схожим с потенциалом sG-уравнения, то при $\eta > 1/4$ в максимумах в точках $\phi = 4\pi l$ появляются локальные минимумы (см. более подробно о решениях DsG-уравнения при различных значениях η в [104]). Для $\eta > 0$ удобно использовать вместо η другую переменную R :

$$\eta = \frac{1}{4} \sinh^2 R. \quad (51)$$

В терминах R солитон DsG-уравнения имеет очень простой вид:

$$\phi_{\text{K}(\bar{\text{K}})} = 2n(2\pi) \pm 4 \arctan \frac{\sinh x}{\cosh R}. \quad (52)$$

В случае $R = 1,2$ картина очень близка к стандартному случаю с рассеянием кинков при наличии дискретной моды возбуждения кинка. Выше $V_{\text{cr}} = 0,2305$ имеется непрерывный спектр проходящих кинков. Ниже V_{cr} наблюдаются зоны отражения, связанные с двукратными столкновениями (*two-bounce*).

В случае $R = 0,5$, формально ничем не отличающемся от случая $R = 1,2$, не обнаружены "окна" разлета ниже критической скорости $V_{\text{cr}} = 0,117$. Таким образом, несмотря на наличие дискретной моды в этом примере, механизм передачи энергии в дискретную моду не работает! Здесь следует заметить, однако, что частота дискретной моды $\omega_1 = 0,96692$ в данном случае очень близка к континууму с $\omega_{\text{cont}} \geq 1$. В то же время можно утверждать, что некий механизм обмена энергией существует, так как образование биона не ведет себя монотонно при изменении V_{in} . Это иллюстрирует рис. 13, где показано, что периоды между вторым и третьим столкновениями кинка в бионе являются отнюдь не монотонной функцией начальной скорости. Таким образом, наблюдаемое явление напоминает квазирезонансы, обсуждавшиеся уже в разделе 3.1.2 для MsG-уравнения.

В случае больших $R > 2,4$ критическая скорость захвата становится малой, и "окна" разлета перестают наблюдаться. Однако здесь в КК-столкновениях проявляются те же самые квазирезонансы, что и в случае $R = 0,5$. В то же время стандартная попытка описать

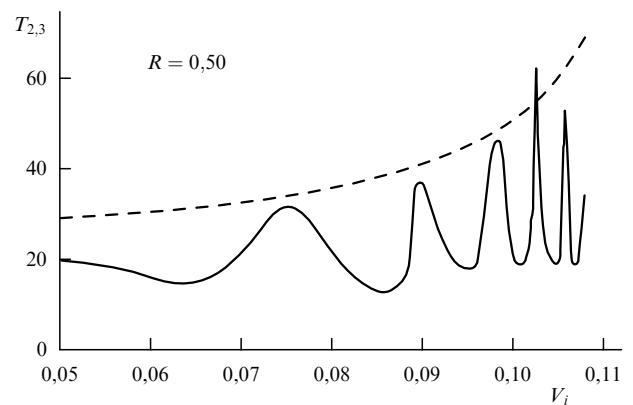


Рис. 13. Зависимость периода $T_{2,3}$ между вторым и третьим столкновениями кинка в бионе от начальной скорости для случая $R = 0,5$. Пунктиром обозначен период $T_{1,2}$.

квазирезонансы формулой

$$\tilde{\omega}_1 T = 2\pi n + \delta \quad (53)$$

приводит к успешному описанию серии квазирезонансов, только с $\tilde{\omega}_1 = 1,0456$, в то время как частота дискретной моды возбуждения кинка в данном случае совсем другая, $\omega_1 = 0,24822$. Образование резонансов при больших R связано, по-видимому, с возбуждением группы уровней континуума. Пока не существует разумного объяснения этого эффекта.

Изучение взаимодействия кинка и антикинка в DsG-уравнении, подтвердив в целом сформировавшееся представление о механизме передачи и сохранения энергии в дискретной моде возбуждения, указало также на наличие неких новых свойств задачи. Это наличие долгоживущих бионов при малых отрицательных η и все более четкие указания на появление квазирезонансов, наблюдавшихся в случае MsG-уравнения и отвечающих возбуждению уровней континуума.

4. Резонансное взаимодействие солитонов и кинков с примесью

Интересно отметить, что, кроме задачи о взаимодействии кинков друг с другом, дискретная мода возбуждения кинка может проявляться и в однокинковом секторе при наличии неоднородности в задаче. Кроме того, для некоторых видов неоднородностей могут существовать специфические дискретные моды возбуждения в системе (моды примеси), которые также оказывают влияние на взаимодействие кинка или солитона и примеси.

Задача о взаимодействии солитона или кинка с примесью имеет свою предысторию. Остановимся на ней коротко.

4.1. Потенциальное приближение

В [105] обсуждалась динамика поведения солитона sG-уравнения в присутствии возмущающего взаимодействия поля с неоднородностью. Такая задача имеет широкие области применимости.

Практически в [105] обсуждалось поведение солитона для неоднородного sG-уравнения вида:

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 \sin u = \lambda [\delta(x + x_0) - \delta(x - x_0)]. \quad (54)$$

При этом предполагалась малость константы λ . Напомним, что спектр малых отклонений от солитонного решения для однородного sG-уравнения имеет лишь один дискретный уровень с частотой $\omega_0 = 0$ (нулевая мода) и непрерывный спектр с $\omega^2 \geq m^2$. Решалась задача об эволюции во времени солитонного решения $u_S(x - vt)$ под действием возмущения, описываемого правой частью уравнения (54). Оказалось, что в пренебрежении возбуждениями континуума примесь действует на солитон как потенциал. Действительно, для задачи (54) энергия статического солитона начинает зависеть от его расстояния до примеси ξ . Полученный в [105] потенциал взаимодействия солитона и примеси имел вид

$$U(\xi) = 4\lambda \arctan \frac{\sinh z_0}{\cosh \xi}, \quad (55)$$

где $z_0 = mx_0$ и $\xi = mX$. В зависимости от знака λ получается притягивающий или отталкивающий потенциал.

При высоких скоростях солитона потенциал $U(\xi)$ (55) можно рассматривать как возмущение, а независимо вычисляемые потери энергии на возбуждение мод континуума считать малыми. Однако при низких энергиях потери энергии на возбуждение мод континуума оказываются уже существенными, и поэтому теория предсказывает возможность захвата движущегося солитона неоднородностью. В [105] предсказывалось, что солитон может захватиться потенциалом примеси при условии, что кинетическая энергия солитона на бесконечном расстоянии от примеси, $E_{\text{kin}}(\infty)$, удовлетворяет условию:

$$E_{\text{kin}}(\infty) < |U(\xi)|, \quad \text{при} \quad U(\xi) = 0. \quad (56)$$

Заметим, что критическая скорость захвата солитона примесью на ранних этапах обсуждалась также в [106–108].

В [105] обсуждалось также поведение солитона, захваченного примесью. В этом случае центр солитона совершает колебательные движения, имеющие гармонический характер для малых амплитуд. При больших амплитудах эти колебания описываются в эллиптических функциях.

4.2. Адиабатическая теория возмущений

Дальнейшее исследование данного вопроса было направлено в основном на более аккуратное вычисление критической скорости захвата солитона примесью. Фундаментальную роль здесь сыграла работа [109]. В этой работе был развит общий формализм адиабатической теории возмущений для нахождения решений уравнений эволюции вида

$$u_t = S[u] + \varepsilon R[u], \quad \varepsilon \ll 1, \quad (57)$$

которые в случае $\varepsilon = 0$ являются точно интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния. В рамках теории возмущений по параметру ε были сформулированы уравнения для коэффициентов прохождения и отражения и вычетов в полюсах S -матрицы обратной задачи, что позволяло последовательно находить поправки к решениям невозмущенных уравнений. В частности, были исследованы поправки к односолитонным решениям для уравнения KdV и НУШ. Кроме того, в [109] были сформулированы эволюционные уравнения для полиномиальных интегралов движения $I_n[u, u^*]$, невозмущенных уравнений под действием возмущения, в виде

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta I_n}{\delta u} R[u(x)] + \frac{\delta I_n}{\delta u^*} R^*[u(x)] \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (58)$$

в той или иной форме позднее активно использовавшиеся в прикладных целях.

Следует заметить, что более простой способ вычисления потерь энергии солитонов основывается на анализе уравнений эволюции для интегралов движения типа (58). Так, для sG-уравнения интеграл импульса поля для солитонного решения равен

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_t dx = 8V(1 - V^2)^{-1/2}, \quad (59)$$

где V — скорость невозмущенного солитона. С другой стороны, можно учесть несохранение импульса солитона за счет возмущения:

$$\frac{dP}{dt} = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx u_x P[u]. \quad (60)$$

В пересчете на скорость уравнение (60) восстанавливает закон изменения скорости центра солитона (см., например, [110, 111]). Таким образом, развитие формализма адиабатической теории возмущений, основанной на близости системы к интегрируемой, позволило более точно вычислять, например, критические скорости захвата, т.е. феноменологическое трение в солитонном секторе. Так, в [112] была представлена формула для критической скорости захвата солитона sG-уравнения δ -образной примесью (см. раздел 4.6). Однако, как выяснилось при численном моделировании полевой задачи, в случае наличия у примесей собственных дискретных мод, обсуждаемых ниже, предсказания адиабатической теории возмущений имеют очень малую область применимости.

4.3. Неустойчивость возмущений вокруг солитона, локализованного на неоднородности

Обсуждаемая выше теория возмущений использовалась в связи с тем, что исследуемая лагранжева система мало отличается от вполне интегрируемой. Однако границы применимости такой теории возмущений не были исследованы. В то же время появился ряд независимых работ, в которых устойчивость решений классических нелинейных уравнений с источниками обсуждалась с точки зрения теории бифуркаций и теории катастроф (см., например, [113, 34, 114]). В [115–117] изучался вопрос стабильности локализованного солитона для уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \left[1 - \sum_i \mu_i \delta(x - x_i) \right] \sin \phi = \alpha \phi_t, \quad (61)$$

которое описывает поведение флюксонов для длинных джозефсоновских контактов. Изучалось поведение спектра малых колебаний вокруг точек стабильности такого уравнения в пространстве решений

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \phi_{\text{stab}}(x) + \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) \times \\ & \times \sum_n \chi_n(x) [a_n \exp(-i\bar{\omega}_n t) + a_n^* \exp(i\bar{\omega}_n t)]. \end{aligned} \quad (62)$$

При этом рассмотрение велось в духе разложения по собственным функциям $\chi_n(x)$ вокруг стабильного решения, или флюксона, локализованного на микронеоднородности. Отмечалось, что при изменении внешних параметров задачи (например, коэффициентов μ_i), некоторые коэффициенты разложения a_n в (62) могут резко возрасти при некоторых значениях параметров μ_i . Это может быть связано с возможностью обращения в нуль собственных частот, например, частоты ω_0 :

$$\omega_0^2 = \bar{\omega}_0^2 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (63)$$

Численные наблюдения отклонения точных решений от потенциального колебательного режима, обсуждавшие-

гося в [105], были обнаружены в [118–120]. Так, в [118] обсуждался вопрос об изменении формы солитона при прохождении его над примесью и было выяснено, что с ростом константы взаимодействия наблюдается увеличение отклонений от стационарной формы солитона.

В [119, 120] решалась задача о захвате медленно движущегося солитона одиночной примесью для уравнения (61) с граничными условиями $\phi_x(\pm l) = 0$, $2l$ — длина переходного слоя. Оказалось, что при малых μ , как и ожидалось, солитон притягивается к микронеоднородности и медленно осциллирует около нее, очень слабо деформируясь. Однако с ростом μ ($\mu = 0,5–0,6$) наблюдались значительные пульсации формы солитона. Характер пульсаций позволял выделить несколько гармоник, кратных гармонике основной частоты колебания центра солитона в потенциале, образованном примесью. В дальнейшем в [121] обсуждались возможные проявления обнаруженной неустойчивости солитона в системе с большим количеством неоднородностей (решетка Джозефсона).

Таким образом, модель потенциального приближения с трением, обсуждавшаяся в разделах 4.1 и 4.2, применима лишь для качественного объяснения некоторых вопросов взаимодействия солитона и примеси. В то же время отклонения потенциальной модели от численного эксперимента [119, 120] были обнаружены для задачи со специально поставленными граничными условиями, что само по себе могло несколько усилить эффект. Одновременно частота пульсаций не вполне соответствовала предлагаемой в [117] частоте

$$\omega_0^2 \cong \frac{\mu}{2} \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{16} \right)^{1/2} - \frac{\mu}{2} \right]. \quad (64)$$

Вследствие этого требовались дальнейшие усилия для выяснения причины появления отклонения от потенциального приближения и выяснения других возможных наблюдаемых фактов, являющихся следствием непотенциальности задачи.

4.4. Поведение кинка теории $\lambda\phi_2^4$ вблизи неоднородности

Проблема взаимодействия кинка теории $\lambda\phi_2^4$ с неоднородностью впервые обсуждалась в [122] (см. также [123]). В отличие от не вполне ясной причины сильных пульсаций формы солитона в теориях sG-уравнения с неоднородностями в $\lambda\phi_2^4$ -теории имеется дискретный уровень возбуждения кинка. Наличие такой степени свободы является причиной резонансного перераспределения энергии так же, как в случае с КК-взаимодействием, обсуждавшимся в разделе 2.

В [122] рассматривалась задача о рассеянии первоначально неискаженного кинка на неоднородности, т.е. решалась задача Коши для уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + (\phi^3 - \phi)[1 - \mu\delta(x - x_0)] = 0 \quad (65)$$

с начальными условиями

$$\phi(x, 0) = \tanh\left\{ (x - x_0)[2(1 - V^2)]^{-1/2} \right\}, \quad (66a)$$

$$\begin{aligned} \phi_t(x, 0) = & -V[2(1 - V^2)]^{-1/2} \times \\ & \times \cosh^{-2}\left\{ (x - x_0)[2(1 - V^2)]^{-1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (66b)$$

где V — начальная скорость неискаженного кинка и x_0 — первоначальное расстояние между кинком и примесью. Задача может быть решена как непосредственно интегрированием уравнения (65) численно, так и приближенно, используя метод коллективных координат, обсуждавшийся в разделе 2.10 и в [86] для КК-взаимодействий. Предполагается, что в любой момент времени решение задачи (65), (66) имеет вид

$$\phi(x, t) = \tanh\left[\frac{(x - X)}{\sqrt{2}}\right] + A\chi_1\left[\frac{(x - X)}{\sqrt{2}}\right], \quad (67)$$

где $X(t)$ и $A(t)$ — коллективные координаты и $\chi_1(x)$ — решение (17) уравнения (14) для дискретной моды кинка. В результате процедуры, аналогичной проведенной в разделе 2.10, получается следующий нерелятивистский эффективный лагранжиан:

$$\mathcal{L}(X, \dot{X}, A, \dot{A}) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (68)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = M_K \left(\frac{\dot{X}^2}{2} - 1 \right) - V(X), \quad V(X) = -\left(\frac{\mu}{4}\right) \cosh^{-4}(\alpha X),$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\dot{A}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 A^2}{2},$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\mu A \sqrt{3/2}}{\sqrt{2}} \tanh^2(\alpha X) \cosh^{-3}(\alpha X) + \frac{\mu A^2 (3/4)}{\sqrt{2}} \tanh^2(\alpha X) \cosh^{-2}(\alpha X) [3 \tanh^2(\alpha X) - 1],$$

где M_K — масса кинка. Стандартная вариационная процедура для лагранжиана (68) приводит к динамическим уравнениям для $X(t)$ и $A(t)$ по аналогии с процедурой, использованной ранее для КК-взаимодействий.

Если учесть лишь член с $\mathcal{L}_0$ в (68), то получим потенциальную модель для взаимодействия кинка с примесью. В этом приближении кинк либо проходит над примесью, либо совершает финитное движение в области примеси. Выражение $\mathcal{L}_1$ представляет лагранжиан, описывающий свободное колебание первой дискретной моды возбуждения кинка с $\omega_1^2 = 3/2m^2$. Член $\mathcal{L}_{\text{int}}$ описывает взаимодействие нулевой и первой мод за счет наличия примеси. Изучалось развитие во времени функций $X(t)$ и $A(t)$, отвечающих начальным условиям:

$$X(0) = 1,5, \quad \dot{X}(0) = V, \quad A(0) = \dot{A}(0) = 0, \quad (69)$$

здесь $\dot{X}(0)$ — начальная скорость кинка. Решение уравнений движения для $X(t)$ и $A(t)$ исследовалось при различных значениях константы взаимодействия с примесью μ ($\mu = 0,3; 0,5; 1,0; 2,0$). Наиболее тщательно был исследован случай $\mu = 0,3$, где диапазон начальных скоростей $0,025 \leq V \leq 0,075$ был просчитан с шагом $\Delta V = 2,0 \times 10^{-4}$. При этом относительная погрешность в энергии составляла примерно 10^{-6} .

Как оказалось, для модельной задачи (68), (69) в отличие от потенциального приближения возможен захват кинка примесью, а также отражение его от примеси.

Таким образом, несмотря на притягивающий характер примеси, кинк от нее может отразиться.

В зависимости от начальной скорости кинка в модельной задаче реализуются:

а) прохождение кинка над примесью при скорости $V > V_{\text{cr}}(\mu)$;

б) "окна" пролета и отражения от примеси и зоны захвата при $V < V_{\text{cr}}(\mu)$.

Поведение координаты центра тяжести кинка для точной полевой задачи (65), (66) в зависимости от начальной скорости кинка V изображено на рис. 14. Разница в зонах захвата и отражения становится более очевидной, если рассмотреть отображения Пуанкаре. Случай захвата отвечает значительно более равномерному заполнению плоскости отображений, что говорит о близости системы к хаотической.

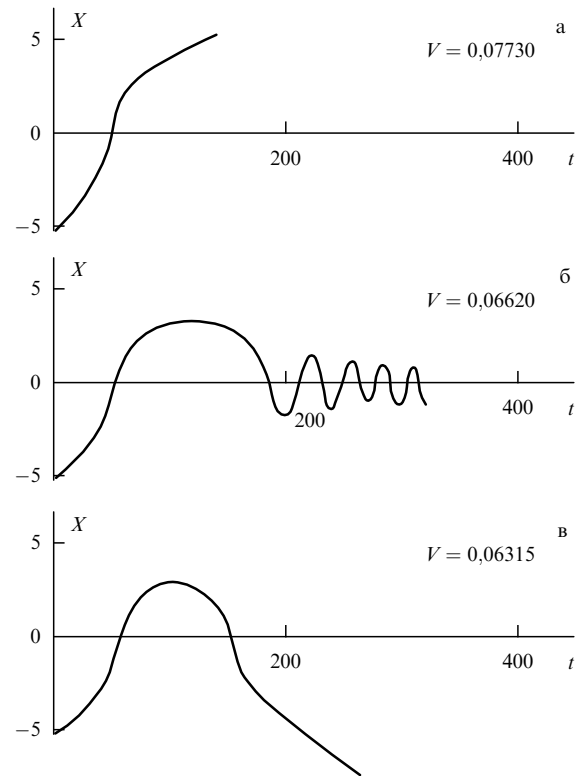


Рис. 14. Траектории центра тяжести кинка для случаев: (а) прохождение над примесью; (б) захват кинка примесью; (в) отражение от примеси. Точный полевой расчет; $\mu = 0,3$.

Как уже отмечалось в [120], решение точной полевой задачи (65), (66) является весьма непростой численной задачей. Так же, как и в [120], в [122] для точной полевой задачи δ -функция заменялась ее аппроксимацией гауссианом. При этом расчеты делались при различных значениях параметра гауссиана α , и проверялась устойчивость получаемых результатов в зависимости от α . Было получено качественное подтверждение модельных расчетов (68), (69) для точной полевой задачи. Для части наблюдаемых, например, для V_{cr} , было получено хорошее количественное соответствие между модельной задачей и точными расчетами. Так, для $\mu = 0,3$ $V_{\text{cr}} = 0,0686$ для модели и $V_{\text{cr}} = 0,0690$ для точной задачи при $\alpha = 5$. В то же время в полевой задаче было обнаружено лишь по одному "окну" отражения при $\mu = 0,3$ и $\mu = 0,5$ при шаге по начальной скорости $\Delta V_{\text{in}} = 2 \times 10^{-3}$. При этом наблюдались "окна" пролета

ниже V_{cr} . Следует также отметить, что в найденных "окнах" отражений и пролетов, согласно наблюдениям по модельной задаче, период колебаний дискретной моды возбуждения кинка оказывался во много раз меньше периода колебаний кинка около примеси. Вследствие этого в точной задаче за счет трения, т.е. излучения, часть "окон" отражения и прохождения могла реально исчезнуть, превратившись в зоны захвата.

Таким образом, примесь, оказывающая в среднем притягивающее воздействие на кинк, за счет механизма резонансного перераспределения энергии между кинетической энергией кинка и его дискретной модой возбуждения может иногда отражать кинк назад. Это явление, предсказываемое для модельного эффективного лагранжиана, было подтверждено и в расчетах точной полевой задачи. Оно абсолютно не согласуется с представлением о потенциальном характере взаимодействия кинка и примеси с учетом диссипации энергии из-за трения в системе.

В то же время наблюдаемые сильные пульсации формы солитона для неоднородного sG-уравнения с диссипационным членом (61) не укладывались в обсуждаемый выше механизм передачи энергии в силу отсутствия дискретной моды возбуждения у солитона. Оказалось, однако, что в спектре возбуждений системы, описываемой уравнением (61), так же как и для (65), имеется дополнительный дискретный уровень, связанный с примесью.

4.5. Дискретная мода примеси

Как известно, солитоны обсуждались не только для непрерывных теорий типа уравнений sG и KdV, но и в решеточном приближении. Примером тому является решеточная модель Тода [124], где известны точные солитонные решения. В решетках, моделирующих твердотельную ситуацию, вопрос о роли примеси возникает вполне естественно. Так, могут существовать дефекты, связанные с внедрением в решетку, или цепочку, атома другой массы, а также с существованием дефектов решетки на границе. Возможны и более сложные дислокации. В периодических решетках существование примесных вибрационных мод широко известно. В то же время в нелинейных системах существование таких мод зависит от выполнения ряда условий (см., например, [125]). Однако с течением времени дискретные примесные моды были найдены во многих дискретных моделях. Кроме того, было обнаружено, что в ряде теорий взаимодействие солитонов с примесью нетривиально. Так, в [126] была численно исследована задача взаимодействия солитона и примеси для решетки Тода [124]. Было обнаружено, что солитон теряет часть энергии, и после прохождения солитона вибрационная мода примеси оказывается сильно возбужденной. При этом обнаруживается как прохождение солитона над примесью, так и его отражение.

Вопрос о влиянии примесной моды на движение кинка решеточной теории $\lambda\phi_2^4$ был поставлен и исследован в [127]. Рассматривая рассеяние кинка на примеси, авторы [127] обнаружили, что в зависимости от массы внедренного атома примеси кинк может либо проходить над примесью, либо отражаться от нее. Дискретная мода примеси оказывается после прохождения кинка сильно возбужденной. При этом зависимость амплитуды возбуждения дискретной примесной моды от скорости

налетающего кинка имеет немонотонный характер. Таким образом, дискретная мода примеси возбуждается при прохождении кинка, т.е. может забирать часть его энергии.

Заметим, что дискретная примесная мода не связана буквально с кинком или солитоном и может существовать в его отсутствие. Рассмотрим решение для нее в случае $\lambda\phi_2^4$ -теории ГЛХ с примесью (см. (65)). Будем искать решение уравнения в виде малых отклонений от вакуумного решения ϕ_+ , т.е.

$$\phi(x, t) = \phi_+ + \delta\phi(x, t), \quad \text{где} \quad |\delta\phi| \ll \phi_+. \quad (70)$$

Линеаризуя уравнение (65), получаем

$$\delta\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + 2\delta\phi = 2\mu\delta\phi\delta(x) \quad (71)$$

(принято, что примесь находится в точке $x = 0$). Если искать решение уравнения (71) в виде $\delta\phi(x, t) = \exp(-i\omega t)\chi(x)$, то для функции $\chi(x)$ получается стационарное уравнение Шрёдингера с δ -функциональным потенциалом:

$$-\chi_{xx} - 2\mu\delta(x)\chi = (\tilde{\omega}^2 - 2)\chi. \quad (72)$$

Уравнение (72) имеет единственное дискретное нормируемое решение: $\chi(x) = A \exp(-\mu|x|)$, причем частота $\tilde{\omega}^2 = 2 - \mu^2$. Заметим, что имеются также и решения уравнения (72), отвечающие континууму с $\tilde{\omega}^2 \geq 2$. Однако эти решения не локализованы на примеси и поэтому не ответственны за сохранение энергии в системе кинк – примесь.

Дискретная мода примеси может существовать и вне линеаризованного приближения, использованного выше. Это было впервые исследовано в [128] и обсуждалось также в рамках нерелятивистского приближения в [129]. В отличие от линеаризованного в нелинейном приближении частота $\tilde{\omega}$ оказывается зависящей от амплитуды колебаний.

Таким образом, в спектре возбуждения системы ГЛХ с примесью, так же как и для системы sG с примесью, имеется характерная мода возбуждения с дискретной частотой, локализованная в пространстве. Она может играть такую же роль, как и дискретная мода возбуждения кинка для $\lambda\phi_2^4$ -теории.

4.6. Критическая скорость захвата солитона примесью

В [130] изучался вопрос о влиянии дискретной примесной моды на взаимодействие солитона уравнения sG с примесью:

$$u_{tt} - u_{xx} + [1 - \varepsilon\delta(x)] \sin u = 0. \quad (73)$$

Как известно, при $\varepsilon = 0$ солитон уравнения (73) имеет вид

$$u_S(x, t) = 4 \arctan[(x - x_0 - Vt)(1 - V^2)^{-1/2}]. \quad (74)$$

Как мы уже обсуждали в разделах 4.1 и 4.2, в рамках адиабатической теории возмущений предсказывалась критическая скорость захвата солитона притягивающей примесью ($\varepsilon > 0$). Для уравнения (73) критическая скорость в рамках такого подхода была вычислена в [112] и указывала на экспоненциально малое значение:

$$V_{\text{cr}} = 2^{21/8} \pi^{1/4} \varepsilon^{3/8} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right). \quad (75)$$

Как было выяснено в [130], истинное значение критической скорости абсолютно не соответствует расчету в рамках адиабатического подхода. Основная причина несоответствия, по-видимому, состоит в том, что подсчет потерь энергии в рамках адиабатического приближения полностью игнорировал возможность передачи части энергии в дискретную моду примеси. Однако оказывается, что при низких энергиях этот механизм играет наиболее существенную роль при подсчете потери энергии солитоном. Дискретная примесная мода для уравнения (73) имеет вид

$$u_{\text{disc}}(x, t) = a_0 \cos(\Omega t + \theta_0) \exp\left(-\frac{\varepsilon|x|}{2}\right), \quad (76)$$

где $\Omega = (1 - \varepsilon^2/4)^{1/2}$. Энергия, заключенная в этой моде, равна

$$E_{\text{disc}} = \frac{\Omega^2 a_0^2}{\varepsilon}. \quad (77)$$

Прямой эксперимент по рассеянию солитона на примеси выше критической скорости продемонстрировал, что дискретная мода примеси действительно возбуждается (рис. 15).

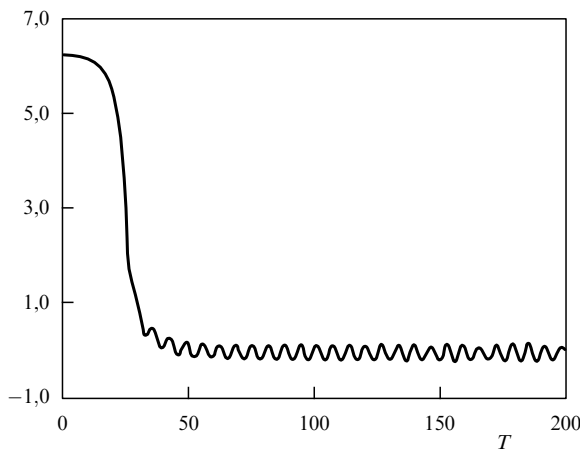


Рис. 15. Изменение координаты примеси после прохождения солитона при $V > V_{\text{cr}}$.

Для расчета критической скорости использовался метод коллективных координат, обсуждавшийся ранее в задаче о взаимодействии кинка с примесью в теории $\lambda\phi_2^4$ [122, 123]. При подстановке реальной полевой функции

$$u(x, t) = u_S(x, t) + u_{\text{disc}} = 4 \arctan[x - X(t)] + a(t) \exp\left(-\frac{\varepsilon|x|}{2}\right) \quad (78)$$

в лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - [1 - \varepsilon\delta(x)](1 - \cos u) \right\} \quad (79)$$

был получен следующий эффективный лагранжиан

$$L_{\text{eff}} = 4\dot{X}^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\dot{a}^2 - \Omega^2 a^2) - U(X) - aF(X), \quad (80)$$

где $U(X) = -2\varepsilon/\cosh^2 X$, что совпадает со [118], а $F(X) = -2\varepsilon \tanh X/\cosh X$. Вычисляя потери энергии солитона, налетающего с больших расстояний ($X(0) = -7$, $\dot{X}(0) = V_{\text{in}} > 0$) на примесь, при возбуждении осциллятора $a(t)$, авторы [130] получили для критической скорости зависимость от ε , кардинально отличающуюся от предсказания по формуле (75) и качественно совпадающую с численным счетом уравнения (73). Таким образом, дискретная мода примеси определяет с высокой точностью потери энергии солитоном.

4.7. Рассеяние солитонов на примеси для синус-Гордон уравнения

Выше критической скорости, как обсуждалось ранее, солитон проходит над примесью, потеряв часть энергии на возбуждение дискретной моды. Ниже V_{cr} картина более сложная [131]. При некоторых скоростях реализуются "окна" отражения назад в полном соответствии с тем, что было обнаружено ранее для $\lambda\phi_2^4$ -теории в [122, 123] и обсуждалось в разделе 4.4. Однако в отличие от уравнения ГЛХ в случае sG-теории роль дискретной моды возбуждения солитона играет дискретная мода примеси. Так, в случае $\varepsilon = 0,7$ в уравнении (73) было наблюдеено 11 "окон" отражения, которые можно квалифицировать как дважды-боунс соударения: солитон сталкивается с примесью, проходит мимо нее, возбуждая колебания дискретной моды в точке $x = 0$, останавливается и возвращается вновь к примеси. При этом в "окнах" разлета часть энергии, отнятая в первом столкновении, возвращается вновь в поступательное движение солитона, и он уходит на минус бесконечность. Основной механизм резонансного обмена энергией связан, несомненно, с дискретной модой примеси. Это удалось показать, заметив, что, как и в случае КК-взаимодействия, для теории $\lambda\phi_2^4$ имеется эмпирическая, с хорошей точностью выполняющаяся формула, связывающая периоды T_{12} между двумя боунсами в "окнах" отражения с числом n периодов малых колебаний:

$$T_{12}(V) = nT_{\text{discr}} + \tau, \quad (81)$$

где $T_{\text{discr}} = 2\pi/\Omega$ и τ — постоянная для данного ε фаза. Более подробное изложение численных результатов работ [130, 131] можно найти в [132], где также обсуждалось взаимодействие солитона с примесью, дискретная мода которой была заранее возбуждена. Важность сделанных в [130–132] наблюдений неоспорима. В то же время следует отметить, что численный счет уравнения (73) проводился с использованием замены δ -функции на прямоугольную яму $\delta(x) \rightarrow 1/\Delta x$ на интервале Δx около $x = 0$. Зависимость результатов численного счета от процедуры такой замены не обсуждалось. Поэтому следует с известной долей осторожности относиться к абсолютным значениям цифр для критической скорости и положений "окон" разлета.

Заметим также, что "окна" прохождения для sG-уравнения обнаружены не были. Также имеет смысл обратить внимание, что для $\varepsilon = 0,7$ не были найдены "окна" отражения с $n < 6$. В то же время при значениях скоростей, где ожидалось появление "окон" отражения с $n < 6$, были обнаружены квазирезонансы. Это явление заключалось в том, что при втором взаимодействии солитона с примесью последний уходил на значительное расстояние от нее, хотя и не покидал совсем зону

притяжения примеси. Таким образом, в квазирезонансах возвращаемой солитону энергии оказалось недостаточно для ухода из зоны притяжения примеси.

Можно сказать, что вслед за уравнением ГЛХ с примесью в sG-уравнении с примесью (73) было обнаружено очень красивое явление резонансного отражения солитона от притягивающей примеси.

4.8. Поведение кинка теории $\lambda\phi^4$ вблизи неоднородности.

Взаимодействие двух дискретных мод

В [133], в продолжение [122], детально обсуждалась задача о рассеянии кинка на примеси для уравнения (65). Были рассмотрены случаи $\mu = 0,5$ и $\mu = 0,7$. К сожалению, более детально обсуждавшийся в [122] случай $\mu = 0,3$ в [133] не рассматривался. Вследствие этого не удается количественно сопоставить результаты численных расчетов работ [133] и [122]. В [133] были подтверждены основные закономерности взаимодействия кинка и примеси, обнаруженные ранее в [122]: наличие критической скорости, "оконов" отражения и "оконов" прохождения (тройных боунсов). Бóльшее внимание было сосредоточено на изучении вопроса о том, куда практически перераспределяется кинетическая энергия кинка при взаимодействии его с примесью. Если в [122] возбуждение дискретной моды примеси не обсуждалось, то в [133] было проведено количественное сравнение, какая дискретная мода возбуждается сильнее. Оказалось, что как для $V > V_{cr}$, так и в "окнах" отражения, энергия, передаваемая в дискретную моду возбуждения кинка, больше энергии, идущей на возбуждение дискретной моды примеси.

В отличие от sG-уравнения с примесью (73), в рассматриваемом случае линейное соотношение (81) для периода между двумя боунсами и периода T высокочастотных колебаний поля в точке примеси хотя и выполнялось приближенно, но отнюдь не восстанавливало величину T как период дискретной моды примеси. Так, для $\mu = 0,5$ эмпирически найдено значение $T = 5,30$, что ближе к периоду $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 5,13$ дискретной моды возбуждения кинка и даже превышает его. В то же время период примесной моды $T_{imp} = 2\pi/\tilde{\omega} = 4,75$, т.е. значительно меньше. Вследствие этого авторы работы [133] отмечали, что для теории $\lambda\phi^4$ внутренняя дискретная мода кинка более важна в механизме резонансного перераспределения энергии, чем дискретная мода примеси. К сожалению, возможная причина превышения наблюдаемого периода колебаний T над T_1 в [133] не обсуждалась.

В то же время полученные численные данные явно указывали на то, что в ряде случаев возбуждение дискретной моды примеси существенно сказывается на поведении решений в области "оконов" отражения. В качестве иллюстрации обратим внимание на рис. 16, где явно прослеживается модуляция высокочастотных колебаний амплитуды поля в точке $x = 0$ между двумя боунсами. Однако, по-видимому, наиболее ярким следствием наличия двух дискретных мод является обнаруженное в спектре "оконов" отражения отсутствие части "оконов", отвечающих некоторым значениям n . Так, для $\mu = 0,5$ не были обнаружены "окна" отражения вблизи предполагаемых скоростей V_7 и V_8 . Вместо этого наблюдались квазирезонансы с большим периодом T_{23} между вторым и третьим боунсами, после чего следовал захват

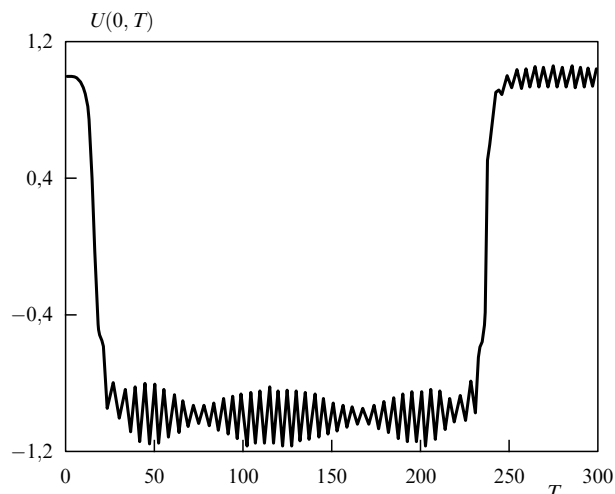


Рис. 16. Модуляция амплитуды смещения примеси в резонансе высокого порядка: $V_i = 0,3111$ и $\varepsilon = 0,7$.

кинка примесью. Кроме того, было обнаружено, что конечная скорость в "окнах" разлета уменьшается с приближением к области квазирезонансов.

Обнаруженное явление можно трактовать в пользу механизма резонансной передачи энергии в обе дискретные моды. В то же время возврат энергии в кинетическую моду кинка во втором боунсе не является софазным для обеих дискретных мод, что может приводить для некоторых начальных скоростей к ситуации, когда полученной кинком во втором боунсе энергии еще недостаточно для вылета из зоны действия притягивающего потенциала. Заметим, однако, что обнаруженные биения следует лишь условно сопоставлять с наложением двух дискретных мод, так как спектральный анализ задачи не проводился.

Интересно также отметить, что в рассмотренном в [133] случае $\varepsilon = 0,7$ частота дискретной моды $\tilde{\omega}_{disc} = 1,2288$ довольно близка к частоте $\omega_1 = 1,2247$ дискретной моды возбуждения кинка. К сожалению, наиболее интересный случай совпадающих частот не был обсужден в существующей литературе.

Наконец, отметим, что в [133] был проделан анализ решений в рамках эффективного лагранжиана, учитывающего возможность возбуждения обеих дискретных мод в дополнение к потенциальному взаимодействию кинка с примесью. Были качественно воспроизведены основные характеристики полевой задачи. В частности были получены квазирезонансы, обсуждавшиеся для точной задачи, т.е. отсутствие резонансных "оконов" отражения для некоторых n .

5. Зависящие от времени многомерные решения

5.1. Доменные стенки, пузыри и т.д.

Теоретико-полевые модели со спонтанным нарушением симметрии, как известно, использовались для построения единой теории слабых и электромагнитных процессов [2, 3]. Космологические проблемы спонтанного нарушения симметрии рассматривались многими авторами (см. [134]).

В [25] обсуждалась возможная доменная структура вакуума и космологические следствия такой модели. Рассматривалась теория для действительного поля Хиггса [1] и обсуждалось, что происходит с решениями при наличии областей, принадлежащих к различным вакуумам ϕ_+ и ϕ_- . Как известно, в одномерном случае имеется топологически стабильное решение — кинк, соединяющее вакуумы ϕ_+ и ϕ_- . Аналогичное решение в трехмерном случае, не зависящее от y и z , представляет собой доменную стенку. Дополнительная энергия, связанная с переходом из одного вакуума в другой, локализована на стенке. Однако, если одно из вакуумных решений сосредоточено в ограниченном домене, устойчивые стационарные решения не реализуются. Действительно, энергия доменной конфигурации оказывается пропорциональна площади поверхности домена:

$$E = \mu S. \quad (82)$$

Следствие этого: системе выгодно уменьшить свой объем, и решение становится нестационарным. В [25] была исследована эволюция спонтанно образованного сферически симметричного домена. В предположении узости стенки l по сравнению с размером домена было предложено уравнение движения для радиуса домена $R(t)$:

$$\ddot{R} = -\frac{2(1 - \dot{R}^2)}{R}, \quad (83)$$

следующее из эффективного лагранжиана :

$$\mathcal{L}(R) = -4\pi\mu R^2(1 - \dot{R}^2)^{-1/2} \quad (84)$$

(см. также работу [26], в которой это рассмотрение применено к случаю, когда один из вакуумов метастабилен). Из анализа уравнения (83) следует, что вакуумный пузырь, образованный с начальным радиусом R_0 , начинает схлопываться. Время схлопывания $t \cong 1,3R_0$, т.е. стенки пузыря двигаются почти со скоростью света. Однако дальнейшая судьба пузыря была неясна, так как при $R \sim l$ (толщина стенки) уравнение (83) становится неприменимо.

5.2. Обнаружение пульсирующих решений

Дальнейшая судьба пузыря была исследована первоначально в [135]. Прежде всего в этой работе было обращено внимание на то, что решение уравнения (83) для схлопывающегося пузыря продолжается на большие времена и приводит к периодическому для радиуса пузыря $R(t)$ решению:

$$R(t) = R_0 \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{2}t}{R_0}, \frac{1}{2}\right), \quad (85)$$

где $\operatorname{cn}(z, 1/2)$ — эллиптический косинус по модулю $1/2$. Таким образом, если уравнение (83) хотя бы приближенно описывает решение точной полевой задачи, то можно надеяться, что стадия сжатия пузыря может смениться стадией расширения. Для проверки этой гипотезы в [135] исследовалась задача Коши для уравнения

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = -4u(u^2 - 1) \quad (86)$$

с начальными условиями

$$u(r, 0) = \tanh[\sqrt{2}(r - R_0)], \quad u_t(r, 0) = 0. \quad (87)$$

Было обнаружено, что при начальном радиусе $R_0 = 5$ после схлопывания пузыря наступает стадия его расширения, что соответствовало указаниям, следующим из решения (85). Однако результаты расчетов работы [135] не могли рассматриваться как точное доказательство наличия пульсаций, так как в процессе счета уравнения плохо сохранялся интеграл энергии.

Вскоре задача в такой же постановке была решена численно с большей точностью [136]. Сам факт отражения пузыря, наблюдаемый в [135], был подтвержден. Вследствие хорошей точности удалось исследовать как более длительное временное развитие картины, так и некоторые существенные подробности эволюции решения. Оказалось, что ожидаемая картина отражений реализуется отнюдь не для всех значений начального радиуса пузыря R_0 . Наиболее регулярная картина отражений наблюдалась для $R_0 = 3,875$ (мы приводим результаты в единицах работы [135]). При этом значении R_0 было наблюдалось пять периодов почти упругих колебаний, однако после шестого колебания решение быстро начинало разваливаться на отдельные сферические слои. При других начальных R_0 потери энергии на излучение после первого расширения оказывались значительно выше. На рисунке 17 изображена зависимость от времени энергии, сосредоточенной в пузыре, для радиуса наибольшего раздувания пузыря. В случаях $R_0 = 2,5; 3,5$ и $7,5$ стабильно пульсирующих несколько раз пузырей замечено не было.

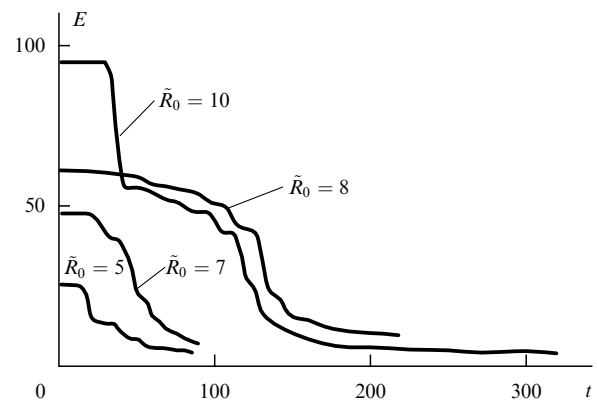


Рис. 17. Зависимость энергии пузыря от времени для различных начальных значений $\tilde{R}_0$ ($\tilde{R}_0 = 2R_0$).

В то же время в [136] было обнаружено, что после коллапса пузыря большого радиуса в центре пузыря начинает формироваться пульсирующее решение с амплитудой колебания поля порядка единицы и временем жизни примерно в 100 раз превышающим период колебаний.

В [54] были продолжены исследования решений большого радиуса, начатые в [135, 136]. Была тщательно изучена область начальных значений радиуса пузыря, где могли наблюдаться многократные его пульсации, т.е. интервал $3 \leq R_0 \leq 5$. Оказалось, что упругость отражения существенно зависит от начального радиуса R_0 ,

причем наименьшие потери оказываются вблизи $R_0 \cong 3,8$. Здесь R_1/R_0 оказывается близким к единице, а именно, равно 0,98. Пульсирующие решения большого радиуса $R \cong 4$ изучались также в [137].

Наконец, в [138] были представлены результаты детальных исследований полевой функции в области наибольшей упругости, при $R_0 = 3,875$. Зависимость решения от времени указывает явно на то, что, кроме пульсаций пузыря большого радиуса и большого периода, решение также содержит осцилляции вблизи $r = 0$ с амплитудой примерно равной 0,7 вокруг нижнего вакуума $u_- = -1$, частота которых в несколько раз превышает частоту пульсаций пузыря. Это подтверждает и зависимость от времени поведения поля в нуле для $R_0 = 3,875$, изображенная на рис. 18. В [138] несколько раз схлопывающиеся пузыри рассматриваются как распадающаяся резонансная структура. Похожее поведение пульсирующих решений большой амплитуды было обнаружено также и для сферически симметричного sG-уравнения [48, 137].

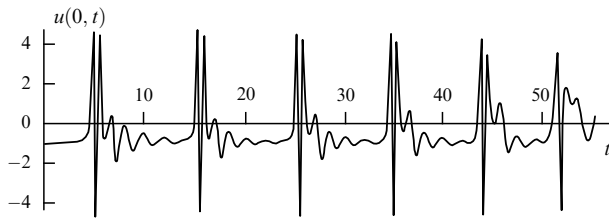


Рис. 18. Зависимость функции $u(0, t)$ от времени при $R_0 = 3,875$.

В [139] основное внимание было обращено на дальнейшее изучение свойств "пульсонов", найденных при образовании схлопывающихся пузырей для ГЛХ- и sG-уравнений. В отличие от предыдущей постановки задачи начальное условие для sG-уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0 \quad (88)$$

имело вид сферического биона

$$u(r, 0) = 4 \arctan \frac{\varepsilon}{\omega \cosh \varepsilon r}, \quad \omega = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}, \quad (89)$$

причем было выбрано $\varepsilon/\omega = 10$. Отмечалось, что в случае sG-уравнения можно выделить три основные характерные стадии развития решения во времени. На первой стадии ($t \cong 0-200$) формируется "пульсон", при этом половина энергии уходит в излучение. Профиль функции меняется квазипериодически, с периодом $T \cong 7,4$. На втором этапе ($t \cong 200-630$) амплитуда "пульсона" явно модулирована с периодом $T_{\text{mod}} \cong 10T$ и медленно уменьшается от 2π до $4\pi/3$. Эволюция сформировавшегося "пульсона" практически не зависит от выбора начальных условий. После $T \cong 630$ относительно быстро, за $\Delta t \sim 80$, "пульсон" с большой амплитудой переходит, излучив большую часть энергии в форме сферических волн, в другой, амплитуда которого становится малой по сравнению с единицей.

Динамика "пульсона" уравнения ГЛХ похожа на динамику "пульсона" sG-уравнения, хотя на второй стадии развития решения форма "пульсона" ГЛХ-уравнения несимметрична и более заметны модуляции решений. На третьем этапе амплитуда резко уменьшается с 1 до 0,2 за время $\Delta t \sim 300$.

Заметим, наконец, что в [140] для sG-уравнения были обнаружены численно "тяжелые пульсоны". В отличие от "пульсонов" sG-уравнения с амплитудой примерно равной 2π , обсуждавшихся ранее, "тяжелые пульсоны" обладают областью устойчивости вблизи амплитуды 4π . После продолжительного времени осцилляции $t \sim 740$ амплитуда их резко уменьшается, и при $t \sim 850$ они превращаются в "пульсоны" с амплитудой приблизительно равной 2π . Подобного явления нет в теории ГЛХ, где вакуум лишь двукратно вырожден.

5.3. Зависящие от времени цилиндрически симметричные решения

В [137, 141] изучалось развитие во времени симметричных по отношению к вращениям пузырей для sG-уравнения в двух- и трехмерном случаях. В качестве начального условия был выбран солитон sG-уравнения

$$u(r, 0) = 4 \arctan \exp[\gamma(V)(r - R)], \quad (90)$$

которому придавалась начальная скорость, отвечающая расширению. Был обнаружен так называемый эффект отражения — начальное расширение продолжалось до некоторого радиуса, затем начинался процесс схлопывания до $R \sim 1$. В [142] подобное явление было объяснено в рамках эффективного уравнения движения для радиуса пузыря $R(t)$, которое в трехмерном случае совпадало с уравнением (83) для радиуса. "Пульсон" для двумерного случая впервые был обнаружен в [143]. Он образовывался в результате эволюции 2π -солитона sG-уравнения при начальном радиусе $R_0 = 3$. В [144] было обнаружено образование двумерных "пульсонов" в более широком интервале начальных условий. Наиболее полное исследование вращательно-симметричных двумерных "пульсонов" было проведено в [145]. Исследовались "пульсоны" как уравнения ГЛХ, так и sG-уравнения. Для уравнения ГЛХ

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r - \phi_{tt} = \phi^3 - \phi, \quad r \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (91)$$

изучались решения, отвечающие начальным условиям:

$$\phi(r, 0) = \tanh \frac{\gamma(r - R_0)}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = (1 - V^2)^{1/2} \quad (92a)$$

и

$$\phi_t(r, 0) = -\frac{\gamma V}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{\gamma(r - R_0)}{\sqrt{2}} \quad (92b)$$

для различных начальных значений R_0 и V .

Для случая $V = 0$ эволюция решения рассматривалась в широкой области значений R_0 : $2 \leq R_0 \leq 93$. Образование "пульсонов" хорошо прослеживается для малых начальных радиусов $R_0 = 2$ и $R_0 = 3$. При этих значениях R_0 образуются "пульсоны" большой амплитуды и с малой модуляцией. Уже для $R_0 = 3,7$ образование "пульсона" сопровождается большими потерями энергии на излучение и значительными модуляциями амплитуды "пульсона". Для промежуточных рассмотренных значений $4 \leq R_0 \leq 33$ после схлопывания пузыря образование "пульсонов" не наблюдалось, а вся начальная энергия уходила в излучение. В то же время для начального радиуса $R_0 = 40$ опять наблюдалось форми-

рование "пульсона" большой амплитуды. Для $R_0 = 54$ и $R_0 = 93$ наблюдалось отражение стенки после схлопывания до радиусов $R_1^s \cong 8$ и $R_1^s \cong 39$, соответственно. Наблюдения показывают, что при меньших R_0 в случае $R_0 = 54$ вторичное схлопывание с $R_1^s \cong 8$ приводило к образованию волн, в то время, как для $R_0 = 93$ после вторичного схлопывания в центре образовывался "пульсон" большой амплитуды. Таким образом, в области радиусов $R_0 \geq 54$ были обнаружены двукратные пульсации пузырей макроскопического характера, аналогичные пульсациям при $3 < R_0 < 4$ в трехмерном случае.

"Пульсон" уравнения (91) изучался также при формации, отвечающей начальным условиям

$$\phi(r, 0) = \tanh \frac{r - R_0}{\sqrt{2}} - \tanh \frac{r + R_0}{\sqrt{2}} + 1 \quad \text{и} \quad \phi_t(r, 0) = 0. \quad (93)$$

При $R_0 = 2$ регулярная область "пульсона" образуется практически с начального момента счета уравнения. Была прослежена эволюция решений до времени $t = 6000$. За это время амплитуда колебаний "пульсона" уменьшилась лишь на 20 %. Было обнаружено, что с течением времени наблюдается уменьшение скорости падения амплитуды. Основной период пульсаций слабо менялся с $T = 6,4$ в начале счета до $T = 5,2$ при $t = 6000$. В то же время наблюдаемый период модуляции амплитуды возрастал от $T_{\text{mod}} \cong 12$ на начальном этапе до $T_{\text{mod}} \cong 34$ при $t = 6000$.

Аналогичное поведение со слабым затуханием было обнаружено также и для sG-уравнения.

Таким образом, в цилиндрическом случае для обоих уравнений обнаруживаются долгоживущие "пульсоны", аналогичные трехмерным "пульсонам" и бионам одномерного уравнения ГЛХ. Что касается макроскопических пульсаций пузыря, то в исследованных случаях $R_0 = 54$ и $R_0 = 93$ для ГЛХ-уравнения наблюдались лишь однократные отражения схлопывающихся пузырей с заметной потерей энергии.

5.4. Приближение Косевича – Ковалева для сферически симметричных "пульсонов" и проблема устойчивости

В двумерном и трехмерном случаях были обнаружены цилиндрически и сферически симметричные решения для уравнений sG и ГЛХ. Они могут быть классифицированы как "пульсоны" — локализованные на малых расстояниях высокочастотные колебания поля с большой амплитудой. Второй тип решений — многократные отражения коллапсирующего пузыря. Эти решения реализуются лишь для некоторых начальных условий. Стоит также отметить, что сферически симметричные квазистабильные "пульсоны" были обнаружены и исследованы численно и для нелинейного уравнения Клейна – Гордона (НКГ) [48]:

$$u_{tt} - \Delta u + u - u^3 = 0. \quad (94)$$

Они представляют собой локализованные слабозатухающие решения амплитуды $|u| < 1$. Несмотря на отсутствие вырожденного вакуума в рассматриваемой теории, такие классические решения могут иметь отношение, например, к проблемам рождения пузырей из возбужденного метастабильного вакуума. Возможность объяс-

нения отражения пузыря после схлопывания на потенциальном языке обсуждалась в [54]. Как отмечалось, сильная деформация стенок в момент схлопывания и сильное излучение не позволяют применить потенциальную модель описания, пригодную в одномерном случае (см. раздел 2).

Что касается трехмерных "пульсонов", то вскоре после их обнаружения для уравнения ГЛХ, в [47] был развит формализм нахождения "пульсонов" малых амплитуд. Этот формализм представляет собой обобщение метода асимптотического разложения Косевича – Ковалева [63] на трехмерный случай. Уравнение для основной гармоники разложения полевой функции в ряд (см. раздел 2) в трехмерном случае имеет вид

$$\Delta_\rho f_1^{(0)} - f_1^{(0)} + \frac{3}{2} [f_1^{(0)}]^3 = 0 \quad (95)$$

с граничными условиями

$$f_1^{(0)}(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \left. \frac{df_1^{(0)}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

Такое уравнение, в отличие от одномерного случая, имеет счетное число решений [50], отличающихся числом узлов $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, в [47] предсказывалось наличие и возбужденных "пульсонов". Практически одновременно с [47] в [48] подобная процедура описания "пульсонов" малых амплитуд была применена к "пульсонам" НКГ-уравнения (94). В [48] было продемонстрировано численно, что "пульсоны" с узлами действительно являются квазистабильными решениями уравнения (94). Вскоре в [139] было проведено исследование методом асимптотического разложения "пульсонов" уравнения ГЛХ и было показано, что соотношение масс "пульсонов" одинаковых амплитуд с различным числом узлов n есть

$$m_0 : m_1 : m_2 : \dots = 1 : 2 : 3 : 4 : 9 \dots \quad (96)$$

Заметим, что вопрос о стабильности "пульсонов" обсуждался в [146, 147, 138] в рамках экспоненциальной устойчивости решений для асимптотического ряда функций в разложении Косевича – Ковалева.

В [138] при анализе ситуации в трехмерном случае были обнаружены зоны экспоненциальной неустойчивости, которые, однако, трудно интерпретировать в терминах амплитудной зависимости "пульсона".

В [54] было отмечено, что ряд Косевича – Ковалева не включает, по определению, в себя члены, экспоненциально подавленные по амплитуде ε , типа

$$\delta u \sim \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right), \quad (97)$$

где c — некая константа. Такие члены могли бы быть ответственны за излучение волн из "пульсона". Как известно, в одномерном случае [55] неэкспоненциальные поправки к рядам Косевича – Ковалева для биона уравнения ГЛХ были действительно найдены (см. раздел 2). Вскоре в [148] найденная экспоненциально подавленная зависимость излучения была подтверждена оценками в рамках теории возмущений по отклонению биона от бризера sG-уравнения. Насколько известно авторам,

потери энергии "пульсоном" в трехмерном случае не обсуждались.

5.5. Интерпретация решений типа

пульсирующего пузыря. Резонансные структуры

Напомним, что в одномерном случае решения большой амплитуды, найденные в "окнах" разлета, существенно отличавшиеся от биона, получили вполне определенное объяснение. В трехмерном и двумерном случаях ситуация с резонансным отражением пузыря после схлопывания не столь очевидна. В [149] была предпринята попытка вычисления радиационных потерь схлопывающегося пузыря для sG-уравнения, при этом член $(2/r)\phi_r$ рассматривался как возмущение. Естественно, что такое приближение, справедливое на первоначальных стадиях схлопывания, неприменимо в ситуации, когда размер пузыря сравним с размером стенки. Напомним, что в численных экспериментах излучение в момент схлопывания оказывается наиболее существенным.

В [150] делалась попытка решить задачу о коллапсе пузыря теории ГЛХ в рамках линеаризованного по ψ приближения, характеризующего отклонение точного решения от кинка:

$$\phi(x, t) = \tanh z + \psi(x, t),$$

где $|\psi| \ll 1$. Основное внимание было обращено на то, что в спектре возбуждений кинка в $(1+1)$ -мерном случае присутствует дискретная мода. Энергия, идущая на возбуждение этой моды, не переходит в излучение. Поэтому схлопывание пузыря $\lambda\phi^4$ -теории на стадиях больших размеров должно идти медленнее, чем при схлопывании пузыря sG-уравнения. К сожалению, это утверждение не было подкреплено сравнением скоростей схлопывания пузырей в обоих уравнениях.

В [54] при изучении поведения решения $(3+1)$ -мерного уравнения ГЛХ в области кратного отражения пузыря ($R_0 = 3,875$) было замечено, что после его отражения в области малых $r \sim 1-2$ образуется пульсирующее решение. По аналогии с "окнами" кратных резонансов (см. [86]) в [138] было сделано предположение о существовании резонансного соотношения между периодом колебаний пузыря радиуса R_0 и периодом "пульсона" малой амплитуды ε . Оценка времени жизни такого состояния приведена в [151]. По-видимому, и в двумерном случае для ГЛХ-уравнения формирование зоны отражения пузыря связано с образованием "пульсона", как отмечалось в [145]. Одновременно резонансное отражение схлопывающегося пузыря имеет место для сферически симметричного sG-уравнения [139], что говорит о том, что возбуждения дискретной моды квазикинка $\lambda\phi^4$ -теории играют второстепенную роль.

Ситуация с многомерными пульсирующими решениями не кажется столь ясной, как в одномерном случае. Что касается "пульсона" малой амплитуды порядка единицы, то его формирование и большое время жизни не вызывают сомнений. По всей видимости сферически симметричный "пульсон" является аналогом биона уравнения ГЛХ в одномерном случае (см. раздел 2). В то же время наблюдаемые особенности излучения "пульсона" на разных стадиях его эволюции не вполне ясны. Развита методика нахождения асимптотических решений малой амплитуды пока не может объяснить довольно быструю последнюю стадию исчезновения

"пульсонов", наблюдаемую в численных экспериментах. Прояснение проблемы больших резонансных колебаний пузыря с рожденным им "пульсоном" требует дальнейших исследований.

6. Зависящие от времени нетопологические решения уравнений заряженных полей

6.1. Q-боллы — солитонные решения

уравнений комплексных скалярных полей

Как уже упоминалось ранее, при наличии дополнительных к энергии и моменту законов сохранения запрет на существование устойчивых солитонов, связанный с теоремой ХД, отсутствует [17, 18]. Впервые попытка найти устойчивые трехмерные солитоны в классе комплексных скалярных полей с самодействием была предпринята в [28]. Для этого рассматривался лагранжиан для комплексного массивного скалярного поля с четырехбозонным притяжением:

$$\mathcal{L} = \Psi_t \Psi_t^* - \nabla \Psi \nabla \Psi^* - m^2 |\Psi|^2 + \frac{\lambda^2}{2} |\Psi|^4. \quad (98)$$

Решения уравнения движения для поля Ψ искали в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (99)$$

где ω — некоторая фиксированная частота глобальной фазы поля. В силу инвариантности лагранжиана относительно $U(1)$ -преобразования $\Psi \rightarrow \exp(-i\theta)\Psi$ уравнения движения сохраняют интеграл движения — заряд:

$$Q = -i \int d^3x (\Psi \Psi_t^* - \Psi^* \Psi_t). \quad (100)$$

Поэтому буквально теорема ХД к таким полям неприменима, и, следовательно, решения могут быть устойчивы по отношению к вариациям полей, сохраняющим заряд. Однако трехмерные устойчивые решения для лагранжиана (98) в [28] приведены не были. Вскоре в [152] устойчивые солитонные решения для комплексных полей были найдены для измененного по сравнению с (98) лагранжиана, в который добавлено шестибозонное отталкивание:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\mu}{3} |\Psi \Psi^*|^3. \quad (101)$$

Было обнаружено, что в случае значений параметра $B = \mu m^2 (1 - \tilde{\omega}^2) / \lambda^2$, попадающих в интервал

$$0 < B < \frac{3}{16} \quad (102)$$

($\tilde{\omega} = \omega/m$), соответствующие уравнения движения обладают устойчивыми солитонными решениями. Таким образом, устойчивость солитонных решений для заряженных полей не обязательно реализуется при всех значениях параметров солитонов: для одних значений зарядов и энергий солитоны могут быть устойчивы, для других — нет.

Существенный вклад в исследование вопроса о солитонах в системах с заряженными полями был внесен работами [153–156]. Так как этим проблемам посвящен целый ряд обзоров (см., например, [29, 15, 157, 158]), то

мы ограничимся лишь кратким перечислением основных результатов этих исследований, более детально обсуждая те аспекты данного вопроса, которые не вошли в перечисленные обзоры.

В общем случае заряд Q из (100) связан с частотой ω соотношением

$$Q = 2\omega \int \phi^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (103)$$

Будем рассматривать для определенности теории с потенциалом самодействия $U(|\Psi|)$, обладающие свойством

$$U \rightarrow m^2 \Psi \Psi^* \quad \text{при} \quad |\Psi| \rightarrow 0, \quad (104)$$

где $m^2 > 0$. В терминах поля $\phi(\mathbf{r})$ уравнение движения приобретает вид

$$\nabla^2 \phi + \omega^2 \phi - \phi \frac{dU(\phi^2)}{d\phi^2} = 0, \quad (105)$$

что может быть проинтерпретировано как уравнение для скалярного поля ϕ с потенциалом

$$V(\phi) = \frac{1}{2} U(\phi^2) - \frac{1}{2} \omega^2 \phi^2. \quad (106)$$

Можно сформулировать условие существования солитона в такой задаче следующим образом: если в пространстве любой размерности существует область значений поля ϕ такая, что в ней выражение $U(\phi^2) - m^2 \phi^2 < 0$, то нетопологические солитонные решения существуют для значений ω в области

$$\omega_{\min}^2 \leq \omega^2 \leq m^2, \quad (107)$$

где $\omega_{\min}$ определяется из условия касания функций $U(\phi)$ и $\omega_{\min}^2 \phi^2$ в точке ϕ_0 . При этом солитон является сферически симметричным решением с максимумом в центре и экспоненциально спадает на больших расстояниях:

$$\phi \sim (m^2 - \omega^2)^{1/2} \exp[-(m^2 - \omega^2)^{1/2} r]. \quad (108)$$

Конкретные решения на всех расстояниях зависят от вида потенциала и в трехмерных случаях находятся численно. Лишь в одномерном случае известны аналитические решения для ряда потенциалов. Так, для потенциала

$$U(|\Psi|^2) = m^2 |\Psi|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Psi|^4 + \frac{\mu}{3} |\Psi|^6 \quad (109)$$

функция $\phi(x)$ имеет вид [29, 159, 160]

$$\phi(x) = \frac{m}{\lambda} (1 - \tilde{\omega}^2)^{1/2} \phi_0(\xi), \quad (110)$$

где $\tilde{\omega} = \omega/m$, $0 \leq \tilde{\omega} \leq 1$, $\xi = kx(1 - \tilde{\omega}^2)^{1/2}$ и

$$\phi_0(\xi) = 2\sqrt{3} (a \cosh^2 \xi - b \sinh^2 \xi)^{-1/2}, \quad (111)$$

$$a = 3 + (9 - 48B)^{1/2}, \quad b = 3 - (9 - 48B)^{1/2},$$

$$B = \frac{\mu m^2}{\lambda} (1 - \tilde{\omega}^2)^{1/2}, \quad B < \frac{3}{16}.$$

Заметим, что при частотах $\omega^2 \rightarrow \omega_{\min}^2$ форма солитона становится тривиальной и слабо зависит от модели потенциала. Действительно, quadriруя уравнение движения в стационарном случае для поля ϕ , получаем уравнение

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi) \right] = -\frac{D-1}{r} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2. \quad (112)$$

Это уравнение в случае $D=1$ можно трактовать как движение точки с координатой ϕ во времени r в потенциале $-V(\phi)$. При $D>1$ правую часть (112) можно рассматривать как трение. Так как при $\omega^2 \rightarrow \omega_{\min}^2$ "потенциал" $V(\phi)$ в точке ϕ_0 касается абсциссы, то точка, посаженная в $\phi(0) \cong \phi_0$, будет очень долго находиться вблизи своего первоначального положения. Это означает, что внутри солитона поле $\phi \cong \phi_0$ постоянно, а его размер R становится большим. Так как отличному от нуля $\phi = \phi_0$ внутри шара соответствует постоянная плотность заряда $2\omega_{\min} \phi^2$, то такое решение можно трактовать как "заряженный" шар — Q-болл, по терминологии Коулмана [156]. Возможность существования решения типа такой заряженной макроскопической капли имеет широкие области применения, о которых будет упомянуто ниже.

6.2. Устойчивость Q-боллов относительно больших возмущений

Заряженные солитоны — не единственный тип решения в рассматриваемом классе полей. Решения типа плоских волн для таких теорий также несут заряд. В связи с этим интересно выяснить, какое из решений с данным зарядом обладает меньшей энергией, т.е. устойчиво. В одномерном случае нормированное на заряд Q решение в области размером L имеет вид

$$\Psi = \left(\frac{Q}{2\omega L} \right)^{1/2} \exp(ikx - i\omega t). \quad (113)$$

При $L \rightarrow \infty$ нелинейные эффекты оказываются несущественными, и в этом приближении закон дисперсии для решения (113) имеет вид

$$\omega^2 = k^2 + m^2. \quad (114)$$

Интересно отметить, что $\omega^2 > m^2$ для плосковолновых решений, но $\omega^2 < m^2$ — для солитонов. Заметим, что для солитонного решения имеет место соотношение

$$\frac{dE}{dQ} = \omega. \quad (115)$$

При $\omega^2 \rightarrow m^2$ заряд Q солитона в одномерном случае стремится к нулю в силу асимптотики (108):

$$Q = 2\omega \int \phi^2(x) dx \sim (m^2 - \omega^2)^{1/2}. \quad (116)$$

Наоборот, при $\omega^2 \rightarrow \omega_{\min}^2$ заряд системы растет и с точностью до членов порядка $O(1)$ имеет место соотношение:

$$E = \omega_{\min} Q, \quad (117)$$

которое определяет предельный наклон графика функции $E(Q)$ для солитона в области больших Q .

Таким образом, в одномерном случае, если в теории есть солитон, то он существует при любых зарядах Q . При этом его энергия оказывается ниже энергии плоской волны с тем же зарядом Q . В этом смысле солитонное решение можно считать устойчивым относительно распада на решения типа волн.

Ситуация оказывается не столь простой в случае задачи в большей размерности. В случае $\omega^2 \rightarrow m^2$ заряд системы, в отличие от (116), равен

$$Q \sim \begin{cases} \text{const} & \text{при } D = 2, \\ \infty & \text{при } D \geq 3. \end{cases} \quad (118)$$

Самая сложная ситуация имеет место в размерности $D = 3$. В этом случае энергия системы — двузначная функция заряда Q . При $\omega^2 \rightarrow m^2$ заряд $Q \rightarrow \infty$, а энергия $E \approx Qm$. При этом разность $E - Qm$ положительна, что говорит о том, что верхняя ветвь решения для солитона приближается к плосковолновому пределу $E = Qm$ сверху. С уменьшением ω график функции $E(Q)$ приходит в точку С, лежащую выше плосковолновой прямой $E = Qm$ в силу соотношения (115). При дальнейшем уменьшении ω энергия и заряд растут в соответствии с нижней ветвью. При $\omega^2 \rightarrow \omega_{\min}^2$ заряд Q опять становится бесконечным. При этом предельный наклон функции $E(Q)$ определяется соотношением (115) с $\omega = \omega_{\min}$. Функция $E(Q)$ имеет две критические точки: касповая особенность (точка С) и точка "абсолютной" стабильности S. Для $Q < Q_S$ солитонные решения не существуют. Для $Q > Q_S$ нижнее состояние по энергии — всегда солитон. Это состояние не может распасться на волны и в этом смысле абсолютно стабильно. Оно также не может распасться на два солитона меньших зарядов (деление) в силу того, что кривизна решения $\partial^2 E / \partial Q^2 < 0$. В то же время отрезок CS нижней ветви неустойчив относительно распада на плоские волны.

Представленный анализ устойчивости является не вполне последовательным. С одной стороны, проведенное исследование показывает, что если плосковолновое решение имеет большую энергию, то распад солитона на плоские волны невозможен. Однако в обратном случае не вполне ясно, разделены или не разделены барьером в пространстве полевых конфигураций солитон и плоская волна. Заметим также, что в принципе возможны и другие конфигурации полей, несущие заряд, например, стягивающиеся в точку сингулярное решение. Устойчивость по отношению к распадам на такие конфигурации не обсуждалась. В этом смысле более последовательным является изучение устойчивости относительно малых деформаций.

6.3. Устойчивость Q-болов относительно малых деформаций

Рассмотрим сначала проблему устойчивости солитонного решения в одномерном случае на примере потенциала самодействия (109), для которого известны солитонные решения в аналитическом виде [28, 152, 159, 160]. Устойчивость решений определяется зависимостью от времени малого отклонения $\delta\Psi(x, t)$ для солитонного решения $\Psi_0(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \delta\Psi(x, t). \quad (119)$$

При этом предполагается, что $\delta\Psi(x, t)$ мало, во всяком случае, на начальном этапе эволюции решений, а функ-

ция $\Psi_0(x, t) = \exp(-i\omega t)\phi_0(x)$ определяется соотношениями (110), (111). Удобно представить функцию $\delta\Psi(x, t)$ в виде

$$\delta\Psi(x, t) = \eta(x) \exp[-i(\Omega + \omega)t] + \chi^*(x) \exp[i(\Omega^* - \omega)t], \quad (120)$$

где $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$ — комплексный параметр, подлежащий определению. Линеаризуя уравнение движения по $\delta\Psi$ и $\delta\Psi^*$, получаем систему линейных дифференциальных уравнений на функции $\eta(x)$ и $\chi(x)$, которую удобно представить в матричном виде:

$$[v^2 I - 2vD - H(\xi)]\zeta(\xi) = 0, \quad (121)$$

где $v = \tilde{\Omega}(1 - \tilde{\omega}^2)^{1/2}$, $\tilde{\Omega} = \Omega/m$, I и D — диагональная и антидиагональная матрицы дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} H_{11}(\xi) &= -\frac{d^2}{d\xi^2} + 1 - 3\phi_0^2(\xi) + 5B\phi_0^4(\xi), \\ H_{22}(\xi) &= -\frac{d^2}{d\xi^2} + 1 - \phi_0^2(\xi) + B\phi_0^4(\xi). \end{aligned} \quad (122)$$

Собственные функции имеют вид

$$\zeta = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & +\tilde{\chi} \\ \tilde{\eta} & -\tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (123)$$

где функции $\tilde{\eta}$, $\tilde{\chi}$ отличаются от η , χ заменой аргумента. При этом, если $\tilde{\Omega}_i \neq 0$, то $\delta\Psi(x, t)$ будет экспоненциально расти по времени и разрушать решение $\Psi(x, t)$, так что $\tilde{\Omega}_i^{-1}$ является мерой "времени развала" солитона. Как выяснено в [160], если искать решения $\zeta(\xi)$ на классе непрерывных и ограниченных функций, таких, что $\int \zeta^* \zeta d\xi < \infty$, то поведение $\tilde{\Omega}_i$ и $\tilde{\Omega}_r$ как функций $\tilde{\omega}$ в интервале $0 < \tilde{\omega} < 1$ оказывается вполне определенным. При любых значениях параметра B в интервале (102) существует значение частоты $\tilde{\omega}_{\text{cr}}$, $0 < \tilde{\omega}_{\text{cr}} < 1$, такое, что при $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_{\text{cr}}$ собственные значения $\tilde{\Omega}$ чисто действительны, т.е. соответствующие солитоны устойчивы, а при $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_{\text{cr}}$ — чисто мнимые. Зависимость $\tilde{\Omega}_i$, $\tilde{\Omega}_r$ от $\tilde{\omega}$ приведена на рис. 19. При $\tilde{\omega} \rightarrow 1$ вещественные значения

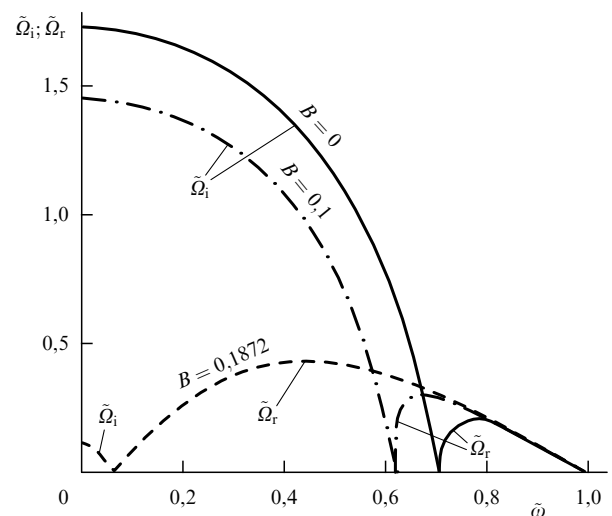


Рис. 19. Мнимые и действительные собственные значения задачи (121) как функции $\tilde{\omega}$ при разных значениях B .

убывают, при этом $\tilde{\Omega}_r \cong 1 - \tilde{\omega}$. Наличие действительной частоты $\tilde{\Omega}_r$ говорит о присутствии дискретной моды в спектре возбуждения солитона. По-видимому, в случае $\tilde{\omega} \rightarrow 1$, который отвечает нерелятивистскому пределу, такая дискретная мода отвечает известному связанному двусолитонному состоянию для НУШ, найденному в [161] при определенном соотношении между параметрами задачи $\eta_1^2 \gg \eta_2^2$ (в обозначениях работы [161]). Соответствующее замечание содержится также в [162].

Наличие критической частоты $\tilde{\omega}_{cr}$ явно демонстрирует важность инфинитезимального анализа на устойчивость. Действительно, при глобальном анализе в одномерном случае солитон оказывается стабильным относительно распада на плоские волны. Как мы видим, при $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_{cr}$ солитон экспоненциально неустойчив.

Как следует из [29], в трехмерном случае вся нижняя ветвь решения для солитона является устойчивой относительно малых возмущений. Некоторые вопросы устойчивости заряженных солитонов в трехмерных случаях обсуждались также в [163, 164].

6.4. Перенормируемость теории и Q-боллы

Найденные стабильные солитоны в трехмерных случаях существуют в значительно более широких классах теорий, чем обсуждалось выше. Действительно, условие отрицательности потенциала $V(\phi)$ из (106) приводило к необходимости рассмотрения теорий, как минимум, с шестой степенью самодействия. Такие теории в $D = 3$ перенормируемы. Однако можно привести примеры и перенормируемых теорий, обладающих решениями типа Q-боллов. Один такой пример обсуждался в [153]. В этой работе рассматривалась система взаимодействующих скалярных полей χ и ϕ , одно из которых (поле χ) действительное, а второе, ϕ , — комплексное. Лагранжиан рассматриваемой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \chi^\mu \chi_\mu - f^2 \chi^2 \phi^+ \phi - U(\chi), \quad (124)$$

где самодействие поля χ имеет вид самодействия Хиггса:

$$U(\chi) = \frac{1}{8} g^2 (\chi^2 - \chi_{vac}^2)^2. \quad (125)$$

В вакуумном состоянии поле χ создает массу $m = f\chi_{vac}$ полю ϕ . Поиск решений типа солитона связан с постановкой

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \chi_{vac} A(\mathbf{r}),$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{vac} B(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (126)$$

где $\mathbf{r} \equiv g\chi_{vac}\mathbf{r}$. После чего для функций A и B получается система зацепляющихся дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \nabla^2 A - \kappa^2 B^2 A - \frac{1}{2}(A^2 - 1)A = 0, \\ \nabla^2 B - \kappa^2 A^2 B + v^2 B = 0 \end{cases} \quad (127)$$

с граничными условиями $dA/d\rho = dB/d\rho = 0$ при $\rho = 0$, $A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$. В уравнениях (127) было определено $v = (\omega/g)\chi_{vac}$, $\kappa = (m/g)\chi_{vac}$. Численный анализ показывает, что решения с искомыми граничными условиями существуют, причем энергия системы как функция заряда ведет себя как $E(Q)$ в трехмерном случае.

6.5. Q-лампы

Интересной модификацией Q-боллов, несущей в себе черты топологических солитонов, являются так называемые Q-лампы, обсуждаемые в [165]. Они существуют для модифицированной σ -модели в $(2+1)$ -измерении.

Рассмотрим триплет $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, $\Phi^2 = 1$, т.е. поле Φ принимает значения на сфере единичного радиуса. Лагранжиан, описывающий такие поля, имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{4} \alpha^2 (1 - \phi_3^2). \quad (128)$$

Решения с конечной энергией должны иметь асимптотику на больших расстояниях $\phi_3 \rightarrow 1$. Таким образом, точка с координатами (x, y) отображается в пространство полей $S_{space}^2 \rightarrow S_{fields}^2$.

Решения характеризуются степенью отображения N сферы в сферу (т.е. топологическим зарядом N). Вводя комплексную функцию $u = (\phi_1 + i\phi_2)/(1 - \phi_3)$, в терминах ее имеем лагранжиан

$$\mathcal{L} = [\partial_\mu u \partial^\mu \bar{u} + \alpha^2 u \bar{u}] (1 + u \bar{u})^{-2}, \quad (129)$$

и уравнения движения следуют из этого лагранжиана. В терминах поля u топологический заряд N и заряд Q имеют вид

$$N = \frac{i}{2\pi} \int [\partial_x u \partial_y \bar{u} - \partial_y u \partial_x \bar{u}] (1 + u \bar{u})^{-2} d^2 x, \quad (130a)$$

$$Q = i \int [\bar{u} \partial_t u - u \partial_t \bar{u}] (1 + u \bar{u})^{-2} d^2 x. \quad (130b)$$

Используя явный вид для энергии, N и Q , можно показать, что имеет место неравенство

$$E \geq 2\pi|N| + |\alpha Q|.$$

При заданных N и Q нижнее значение энергии достигается при следующих условиях на функцию u :

$$\partial_i u \pm i\epsilon_{ij} \partial_j u = 0, \quad (131a)$$

$$\partial_t u \pm i\alpha u = 0 \quad (131b)$$

($i = x, y$). Первое условие, как и в случае чистой $O(3)$ -симметрии, дает зависимость u только от $z = x + iy$ или $\bar{z} = x - iy$, т.е. u является аналитической функцией. При этом уравнение обеспечивает временную зависимость решения:

$$u(z, t) = u_0(z) \exp(\pm i\alpha t). \quad (132)$$

Выражение (132) является общим решением. Простейшее решение с заданным топологическим зарядом N имеет вид

$$u(z, t) = \left(\frac{\lambda}{z}\right)^N \exp(i\alpha t). \quad (133)$$

Энергия такого решения

$$E = 2\pi N + \frac{2\pi^2 \alpha^2 \lambda^2}{N^2 \sin N\pi}. \quad (134)$$

Заметим, что энергия конечна лишь при $N \geq 2$.

6.6. Взаимодействие солитонов типа Q-боллов

Проблемы взаимодействия солитонов типа Q-боллов в одномерном случае обсуждались в [166, 30, 162, 151, 67]. В [162] рассматривалась одномерная версия теории $\lambda|\phi|^n$, $n = 4$, определяемой лагранжианом (98). В этом случае в теории имеется односолитонное решение

$$\Psi_S = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} (m^2 - \omega^2)^{1/2} \exp(-i\omega t) \cosh^{-1} [x(m^2 - \omega^2)^{1/2}], \quad (135)$$

являющееся устойчивым при

$$\omega_{cr} \leq \omega \leq m, \quad \omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (136)$$

При ω , близких к m , $m - \omega \ll m$, рассеяние двух солитонов, исследованное численно, носит почти упругий характер. Причина такой упругости связана с тем, что при $\omega \rightarrow m$ ситуация становится близкой к нерелятивистской, а уравнение движения для поля Ψ может быть редуцировано к НУШ, интегрируемому методом обратной задачи рассеяния. Для НУШ процесс рассеяния солитонов носит упругий характер [12]. Интересно отметить, что в случае, когда рассматривалось взаимодействие солитонов противоположного знака заряда, т.е. солитон (S) и антисолитон (A), то оно также носило почти упругий характер при скоростях столкновения $V \sim 0,3-0,4$. Как показано в [162], упругий характер взаимодействия солитонов должен нарушаться при малых скоростях, когда время столкновения солитонов t_{int} удовлетворяет условию:

$$t_{int} \sim m(m^2 - \omega^2)^{-1/2} \equiv t_{char}. \quad (137)$$

При $t \ll t_{char}$ взаимодействием солитонов можно пренебречь. В предельном случае нулевой скорости в [166] было найдено квазистабильное связанное состояние S и A. Что касается SS-столкновений, то почти упругие столкновения при больших скоростях сменяются развитием неустойчивости и неупругим характером столкновений при малых скоростях. Численный эксперимент показывает, что существует некоторая критическая скорость V_{cr} , ниже которой решение резко меняется. При столкновении солитонов (в случае SS-столкновений [162], для SSS-взаимодействия [67]), у функции $|\Psi(x, t)|$ вблизи $x = 0$ возникает большой пик с малой шириной. В силу отсутствия положительной определенности потенциала самодействия в рассматриваемом случае дальнейшее увеличение амплитуды поля при $x = 0$ становится энергетически выгодным, и двусолитонное (или трехсолитонное) решение становится сингулярным.

Однако в узкой области скоростей, вблизи V_{cr} , в [162] было обнаружено образование связанного долгоживущего состояния двух солитонов. В [67] подобное явление наблюдалось и в SSS-системе. В случае SS-системы при $\omega = 0,95$ критическое значение $V_{cr} \cong 0,240$. При SS-столкновениях с $V \cong 0,255$ наблюдалось обычное рассеяние солитонов. При исследовании процесса с $V = 0,250$ было обнаружено, что солитоны не проходят друг сквозь друга, а слипаются. Поведение поля $|\Psi(0, t)|$ в этом случае изображено на рис. 20. По-видимому, наличие большого периода колебаний связано с наличием дискретной степени свободы возбуждения у солитона в области его экспоненциальной устойчивости [160].

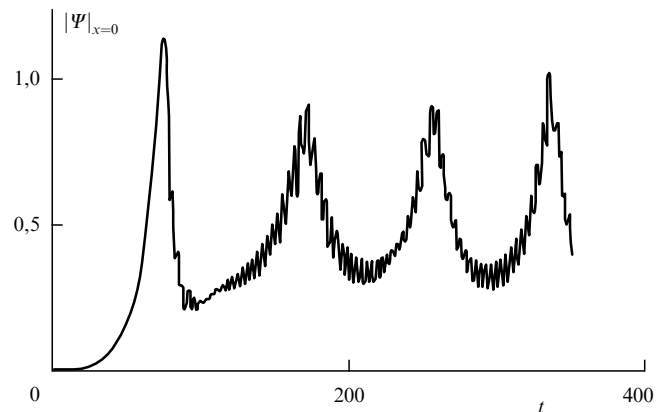


Рис. 20. Функция $|\Psi(0, t)|$ в режиме осцилляций: $\omega_1 = \omega_2 = 0,95$; $V_1 = V_2 = 0,250$.

7. Заключение

Что касается использования описанных в обзоре явлений, то прежде всего отметим космологические проблемы. Здесь следует упомянуть работы [25–27, 135, 54], в которых рассматривались доменные структуры в вырожденном вакууме, их взаимодействия, образование пузырей как в плоском, так и в искривленном пространстве [167]. Как было отмечено в [168], поведение таких вакуумных пузырей в теории взаимодействующих комплексного скалярного поля $\lambda|\phi|^6$ и электромагнитного с учетом гравитации приводит к образованию черных дыр. В [169] отмечалось, что взаимодействие широких доменных стенок с учетом гравитации приводит к их коллапсу и рождению черных дыр. Поведение уединенных волн типа солитонов для скалярных, или систем скалярных и комплексных заряженных полей, рассматривалось в инфляционных космологических моделях [170–172].

В астрофизике решения типа Q-боллов широко используются для описания бозонных звезд [173, 174]. В [162] была отмечена возможность необычной аннигиляции таких протяженных объектов при столкновениях.

Одной из областей физики, где встречаются явления, обсуждавшиеся в настоящем обзоре, является, несомненно, физика твердого тела. Здесь появление доменных структур и их взаимодействие возникают вполне естественно [92]. Подробности взаимодействия уединенных волн в динамических системах, моделирующих твердотельные ситуации, можно найти в [175]. В качестве примера обратим внимание на § 42, гл. VIII из [175], где рассмотрены солитонные волны в пайерловских системах и эффект пиннинга кинка в $\lambda\phi^4$ -теории. В теории сверхпроводимости в ^3He также возможна реализация нетривиальных топологических объектов (см. гл. V из [176]).

В качестве других применений отметим, что обсуждаемые явления сами по себе представляют прекрасный пример существования фрактальных структур (см. также обзор [177]).

Некоторые математические аспекты обсуждаемых явлений рассмотрены в [178]. Связь нелинейности процесса с динамикой и проблемами информации обсуждалась в обзоре [179].

Вопрос о возможной доменной структуре вакуума впервые был поставлен в работе Я.Б. Зельдовича, И.Ю. Кобзарева и Л.Б. Окуня [25] и широко обсуждался на семинарах теоретического отдела ИТЭФ. В этой же работе впервые был поднят вопрос об эволюции доменного пузыря. Дальнейшему изучению вопроса об эволюции доменного пузыря посвящены последующие работы И.Ю. Кобзарева и его коллег. Данный обзор является данью памяти И.Ю. Кобзарева.

Благодарности. Авторы благодарят за плодотворные обсуждения на различных этапах работы Н.А. Воронова, И.Л. Боголюбовского, В. Закржевского, Н.Б. Конюхову, Л.Б. Окуня, А.В. Смильгу, Ю.П. Рыбакова, Г. Лейтвиллера, В.Г. Маханькова, М.И. Монастырского, И.С. Шапиро, а также В.В. Окунькова — за техническую помощь в подготовке рисунков.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ), грант 95-02-04681-А и частично (А.Е.К.) грантом INTAS -93 -633 .

Словарь терминов

Кинк (kink — изгиб, петля) — в значении петли — термин, исторически определявший специальное решение для кругового маятника; в значении изгиба — поведение фазы этого решения как функция времени определяет профиль односолитонного решения для уравнения sG. В дальнейшем все стационарные решения нелинейных уравнений подобного профиля (с изгибом) было принято называть кинком. Исключением является как раз уравнение sG, где чаще используется термин солитон.

Q-болл (Q-ball) — сферически симметричное решение для заряженных скалярных полей. Термин введен Коулменом [156]. Решение выглядит как шар радиуса R с зарядом Q . Это определение в дальнейшем использовалось для широкого класса солитонных решений с дополнительно сохраняющимся интегралом движения типа $U(1)$ -заряда.

Q-лампа (lump — кусок) — топологически нетривиальное решение типа Q-болла. Несет одновременно сохраняющиеся топологический (N) и обычный $U(1)$ -заряды.

Цепочка То́да [125] — модель одномерной дискретной цепочки атомов с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями. Первоначально модель использовалась для исследования распространения ударной волны.

Показатель Ляпунова — это функционал, определенный на множестве функций $\{f(t)\}$ и задаваемый формулой:

$$\lambda[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t} \ln |f(t)| \right].$$

Положительность показателя Ляпунова для $\{f(t)\} = \{\exp \lambda t\}$ означает экспоненциальное расхождение во времени любых двух близко расположенных в данный момент точек в фазовом пространстве динамической системы.

Бризер (to breathe — дышать) — общее название локализованных решений дифференциальных уравнений с периодически зависящей от времени амплитудой. Впервые использовался для классификации специального решения уравнения sG.

Бион — бризер в $(1+1)$ -мерной задаче, возникающий как связанное состояние в системе кинк — антикинк.

Тритон (или "wobbling кинк") — колеблющийся кинк — локализованное возбужденное состояние кинка, впервые обнаруженное при столкновении трех кинков.

"Окно" разлета или отскока (bounce "window") — термин, определяющий решение в области резонансных "окон" отражения. "Окна" разлета отличаются по количеству отражений, например, two-bounce "window" — "окно" двойного разлета и т.д.

Пиннинг кинка — процесс захвата (закрепления) кинка (дислокации) неоднородностью в твердом теле.

Квазизамкнутые орбиты — представление в фазовом пространстве решения уравнений движения для эффективного лагранжиана (случай "окон" разлета).

Пульсоны — сферически симметричный бризер в $D \geq 2$.

Резонансная структура — связанное состояние пузыря и рожденного им в первом схлопывании "пульсона" в $D = 2, 3$ при определенных начальных радиусах пузыря ($R \geq l$).

Флюксон — квант магнитного потока, описываемый солитонном уравнением sG.

Список сокращений

KdV — Кортевега — де Вриза уравнение;
НУШ — нелинейное уравнение Шрёдингера;
sG — синус-Гордон уравнение;
ГЛХ — Гинзбурга — Ландау — Хиггса уравнение;
MsG — модифицированное синус-Гордон уравнение;
DsG — двойное синус-Гордон уравнение;
МОЗР — метод обратной задачи рассеяния;
ХД — Хоббарда — Деррика теорема;
КК — кинк — антикинк взаимодействие;
SS — солитон-солитонное столкновение;
SA — солитон-антисолитонное столкновение;
SSS — столкновение трех солитонов.

Список литературы

1. Higgs P W *Phys. Rev.* **145** 1156 (1966)
2. Weinberg S *Phys. Rev. Lett.* **19** 1264 (1967); **31** 494 (1973)
3. Salam A "Elementary particle theory", in *Proc. of the 8th Nobel Symposium* (Stockholm, 1968)
4. Окунь Л Б *Лептоны и кварки* (М.: Наука, 1990)
5. Manton N S *Commun. Math. Phys.* **111** 469 (1987)
6. Rajaraman R *Phys. Rep. C* **21** 227 (1975)
7. Маханьков В Г, Рыбаков Ю П, Санюк В И *УФН* **164** 121 (1994)
8. Kudryavtsev A, Piette B, Zakrzewski W J *Z. Phys. C* **60** 731 (1993)
9. *Солитоны в действии. Сборник статей* (Под ред. К Лонгрена, Э Скотта) (М.: Мир, 1981)
10. Захаров В Е и др. *Теория солитонов: Метод обратной задачи рассеяния* (М.: Наука, 1980)
11. Абловитц М, Сигур Х *Солитоны и метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987)
12. Захаров В Е, Тахтаджан Л А, Фаддеев Л Д *ДАН СССР* **219** 1334 (1974)
13. Вергелис С Н, Гряник В М *ЯФ* **23** (6) 1324 (1976)
14. Додд Р и др. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (М.: Мир, 1988)
15. Makhankov V G *Phys. Rep.* **35** 1 (1978)
16. Раджараман Р *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля* (М.: Мир, 1985)
17. Hobart R H *Proc. Phys. Soc.* **82** 201 (1963)
18. Derrick G H J *Math. Phys.* **5** 1252 (1964)
19. Заставенко Л Г *Физ. мет. металловед.* **29** 430 (1965)

20. Morawetz C S *Proc. R. Soc. London Ser. A* **306** 291 (1968)
21. Поляков А М *Письма в ЖЭТФ* **20** 430 (1974)
22. Skyrme T H R *Proc. R. Soc. London Ser. A* **260** 127 (1961)
23. Piette B M A G, Shroers B J, Zakrzewski W J *Nucl. Phys. B* **439** 205 (1995)
24. Smilga A V *Nucl. Phys. B* **459** 263 (1996)
25. Зельдович Я Б, Кобзарев И Ю, Окунь Л Б *ЖЭТФ* **67** 3 (1974)
26. Волошин М Б, Кобзарев И Ю, Окунь Л Б *ЯФ* **20** 1229 (1974)
27. Кобзарев И Ю "Спонтанно нарушенная симметрия и космология", в сб. *Элементарные частицы. Вторая Школа физики ИТЭФ* Вып. 3 (М.: Атомиздат, 1975); Coleman S *Phys. Rev. D* **15** 2929 (1977); Callan C G, Coleman S *Phys. Rev. D* **16** 1762 (1977)
28. Anderson D L T, Derrick G H J *Math. Phys.* **11** 1336 (1970)
29. Lee T D, Pang Y *Phys. Rep.* **221** 251 (1992)
30. Маханьков В Г *УЧАЯ* **14** 123 (1983)
31. Гинзбург В Л, Ландау Л Д *ЖЭТФ* **20** 1064 (1950)
32. Aubry S J *Chem. Phys.* **64** 3392 (1976)
33. Krumhansl J A, Schrieffer J R *Phys. Rev. B* **11** 3535 (1975)
34. Расизаде О Ш *ТМФ* **48** 197 (1981)
35. Cahill K *Phys. Lett. B* **53** 174 (1974)
36. Шапиро И С *Письма в ЖЭТФ* **21** 624 (1975)
37. Dashen R F, Hasslacher B, Neveu A *Phys. Rev. D* **10** 4130 (1974)
38. Goldstone J, Jackiw R *Phys. Rev. D* **11** 1486 (1975)
39. Шапиро И С *ЖЭТФ* **70** 2050 (1976)
40. Perring J K, Skyrme T H R *Nucl. Phys.* **31** 550 (1962)
41. Фаддеев Л Д, Тактаян Л А *ТМФ* **21** 160 (1974)
42. Gaudrey P J, Eilbeck J C, Gibbon J D *Nuovo Cimento B* **25** 497 (1975)
43. Dashen R F, Hasslacher B, Neveu A *Phys. Rev. D* **11** 3424 (1975)
44. Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H *Phys. Rev. Lett.* **30** 1262 (1973)
45. Косевич А М, Ковалев А С *ЖЭТФ* **67** 1793 (1974)
46. Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: Физматгиз, 1963)
47. Воронов Н А, Кобзарев И Ю *Письма в ЖЭТФ* **24** 576 (1976)
48. Боголюбовский И Л *Письма в ЖЭТФ* **24** 579 (1976)
49. Гласко В Б и др. *ЖЭТФ* **35** 452 (1958)
50. Ryder G *Pacific J. Math.* **22** 477 (1967)
51. Жидков Е П, Шириков В П *ЖВМ и МФ* **4** 804 (1964)
52. Буслаев В С *ТМФ* **31** 23 (1977)
53. Елонский В М и др. *ТМФ* **60** 395 (1984)
54. Белова Т И и др. *ЖЭТФ* **73** 1611 (1977)
55. Segur H, Kruskal M D *Phys. Rev. Lett.* **58** 747 (1987)
56. Арсфьева И Я, Корепин В Е *Письма в ЖЭТФ* **20** 680 (1974)
57. Корепин В Е, Килиш П П, Фаддеев Л Д *Письма в ЖЭТФ* **21** 302 (1975)
58. Фаддеев Л Д *Письма в ЖЭТФ* **21** 141 (1975)
59. Dashen R F, Hasslacher B, Neveu A *Phys. Rev. D* **10** 4114 (1974)
60. Замолодчиков А Б *Письма в ЖЭТФ* **25** 499 (1977)
61. Коноплич Р В *ЯФ* **32** 1132 (1980)
62. Кудрявцев А Е *Письма в ЖЭТФ* **22** 178 (1975)
63. Neveu A, Rapanicolaou N *Commun. Math. Phys.* **58** 31 (1978)
64. Белова Т И, Воронов Н А, Кобзарев И Ю, Конюхова Н Б, Препринт ИТЭФ-170 (Москва, 1976)
65. Гетманов Б С *Письма в ЖЭТФ* **24** 323 (1976)
66. Geicke J *Phys. Lett. B* **133** 337 (1983)
67. Белова Т И *ЖЭТФ* **109** 1090 (1996); Preprint ИТЭФ-65 (Moscow, 1992)
68. Segur H J *Math. Phys.* **24** 1439 (1983)
69. Коноплич Р В *ЯФ* **51** 1514 (1990)
70. Gervais J-L, Sakita B *Phys. Rev. D* **11** 2943 (1975)
71. Gervais J-L, Jevicki A, Sakita B *Phys. Rev. D* **12** 1038 (1975)
72. Christ N H, Lee T D *Phys. Rev. D* **12** 1606 (1975)
73. Hosoya A, Kikkawa K *Nucl. Phys. B* **101** 271 (1975)
74. Vinciarelli P *Phys. Lett. B* **61** 80 (1976)
75. Корепин В Е *Письма в ЖЭТФ* **23** 224 (1976)
76. Rajaraman R *Phys. Rev. D* **15** 2866 (1977)
77. Moshir M *Nucl. Phys. B* **185** 318 (1981)
78. Sugiyama T *Prog. Theor. Phys.* **61** 1550 (1979)
79. Манаков С В *Письма в ЖЭТФ* **25** 589 (1977)
80. Getmanov B S *Phys. Lett. B* **66** 39 (1977)
81. Ablowitz M J, Kruskal M D, Ladik J F *SIAM J. Appl. Math.* **36** 428 (1979)
82. Wingate C A, Ph. D. Thesis (Univ. of Illinois, 1978); *SIAM J. Appl. Math.* **43** 120 (1983)
83. Klein R et al. *Ferroelectrics* **26** 721 (1980)
84. Campbell D K, Schonfeld J F, Wingate C A *Physica D* **9** 1 (1983)
85. Campbell D, Peyrard M *Physica D* **18** 47 (1986)
86. Belova T I, Kudryavtsev A E, Preprint ИТЭФ-94 (Moscow, 1985); *Physica D* **32** 18 (1988)
87. Anninos P, Oliveira S, Matzner R A *Phys. Rev. D* **44** 1147 (1991)
88. Wolf A et al. *Physica D* **16** 285 (1985)
89. Benettin G et al. *Mechanica* **15** 9 (1980)
90. Shimada I, Nagashima T *Prog. Theor. Phys.* **61** 1605 (1979)
91. Белова Т И *ЯФ* **58** 130 (1995)
92. Jedyadev S, Schrieffer J R *Syn. Metals* **9** 451 (1984)
93. Remoissenet M, Peyrard M *Solid State Commun.* **31** 229 (1979)
94. Remoissenet M, Peyrard M J *Phys. C: Solid State Phys.* **14** L481 (1981)
95. Peyrard M, Remoissenet M *Phys. Rev. B* **26** 2886 (1982)
96. Peyrard M, Campbell D K *Physica D* **9** 33 (1983)
97. Campbell D, Peyrard M, Sodano P *Physica D* **9** 165 (1986)
98. Maki K, Kumar P *Phys. Rev. B* **14** 118 (1976); 3920
99. Maki K *Physica B* **90** 84 (1977)
100. Kitchenside P W, Bullough R K, Caudrey P J, in *Solitons in Condensed Matter Physics* (Eds A R Bishop, T Schneider) p. 291 (Berlin: Springer, 1978)
101. Bullough R K, Caudrey P J, Gibbs H M, in *Solitons* (Eds R K Bullough, P J Caudrey) p. 107 (Berlin: Springer, 1980)
102. Shiefman J, Kumar P *Physica Scripta* **20** 435 (1979)
103. Kumar P, Holland R R, in *Nonlinear Problems: Present and Future* (Eds A R Bishop, D K Campbell, B Nikolaenko) (Amsterdam: North-Holland, 1982) p. 229
104. Condat C A, Guyer R A, Miller M D *Phys. Rev. B* **27** 474 (1983)
105. Fogel M B et al. *Phys. Rev. B* **15** 1578 (1977)
106. Nakajima K, Yamashita T, Onodera Y J. *Appl. Phys.* **45** 3141 (1974)
107. Nakajima K et al. *J. Appl. Phys.* **45** 4095 (1974)
108. Nakajima K, Sawada Y, Onodera Y J. *Appl. Phys.* **46** 5272 (1975)
109. Карпман В И, Маслов Е М *ЖЭТФ* **73** 537 (1977)
110. Bergman D J et al. *Phys. Rev. A* **27** 3345 (1983)
111. Olsen O H, Samuelsen M R *Phys. Rev. B* **28** 210 (1983)
112. Malomed B A *Physica D* **15** 385 (1985)
113. Jackiw R, Rossi P *Phys. Rev. D* **21** 426 (1980)
114. Расизаде О Ш *ТМФ* **49** 36 (1981)
115. Галперн Ю С, Филиппов А Т *Письма в ЖЭТФ* **35** 470 (1982)
116. Filippov A T, Galpern Yu S *Solid State Commun.* **48** 665 (1983)
117. Галперн Ю С, Филиппов А Т *ЖЭТФ* **86** 1527 (1984)
118. Currie J F et al. *Phys. Rev. B* **15** 5567 (1977)
119. Казача Г С, Сердюкова С И, Филиппов А Т, Препринт ОИЯИ R11-84-76 (Дубна, 1984)
120. Казача Г С, Сердюкова С И, Филиппов А Т, Препринт ОИЯИ R11-85-60 (Дубна, 1985)
121. Filippov A T, Galpern Yu S *Phys. Lett. A* **172** 471 (1993)
122. Belova T I, Kudryavtsev A E, Preprint ИТЭФ-170 (Moscow, 1986)
123. Белова Т И, Кудрявцев А Е *ЖЭТФ* **108** 1489 (1995); Kudryavtsev A E, Preprint INS-Rep. 912, Jan. (Tokio, 1992)
124. Toda M J. *Phys. Soc. Japan* **23** 501 (1967)
125. Toda M *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **59** 1 (1976)
126. Nakamura A, Takeno S *Prog. Theor. Phys.* **58** 1074 (1977)
127. Fraggis T, Pnevmatikos St, Economou E N *Phys. Lett. A* **142** 361 (1989)
128. Косевич А М, Ковалев А С *Физ. низк. темп.* **1** 1544 (1975)
129. Braun O M, Kivshar Yu *Phys. Rev. B* **43** 1060 (1991)
130. Fei Z et al. *Phys. Lett. A* **159** 318 (1991)
131. Kivshar Yu, Vazquez L *Phys. Rev. Lett.* **67** 1177 (1991)
132. Fei Z, Kivshar Yu, Vazquez L *Phys. Rev. A* **45** 6019 (1992)
133. Fei Z, Kivshar Yu, Vazquez L *Phys. Rev. A* **46** 5214 (1992)
134. Гриб А А, Дамаскинский Е В, Максимов В М *УФН* **102** 587 (1970)
135. Воронов Н А, Кобзарев И Ю, Конюхова Н Б *Письма в ЖЭТФ* **22** 590 (1975)
136. Боголюбовский И Л, Маханьков В Г *Письма в ЖЭТФ* **24** 15 (1976)
137. Christiansen P L, Olsen O H *Physica Scripta* **20** 531 (1979)
138. Белова Т И *ЯФ* **56** 234 (1993)
139. Боголюбовский И Л, Маханьков В Г *Письма в ЖЭТФ* **25** 120 (1977)

140. Bogolubsky I L *Phys. Lett. A* **61** 205 (1977)
141. Christiansen P L, Olsen O H *Phys. Lett. A* **68** 185 (1978)
142. Samuelsen M R *Phys. Lett. A* **74** 21 (1979)
143. Christiansen P L, Lomdahl P S *Physica D* **2** 482 (1981)
144. Geicke J *Phys. Lett. A* **98** 147 (1983)
145. Geicke J *Physica Scripta* **29** 431 (1984)
146. Voronov N A, Preprint ITEP-127 (Moscow, 1978)
147. Voronov N A, Konyukhova N B, Preprint ITEP-26 (Moscow, 1978)
148. Kivshar Yu, Malomed B A *Phys. Rev. Lett.* **60** 164 (1988)
149. Malomed B A *Physica D* **24** 155 (1987)
150. Malomed B A, Maslov E M *Phys. Lett. A* **160** 233 (1991)
151. Белова Т И и др. *ЖБМ и МФ* **21** 89 (1981)
152. Anderson D L T *J. Math. Phys.* **12** 945 (1971)
153. Friedberg R, Lee T D, Sirlin A *Phys. Rev. D* **13** 2739 (1976)
154. Friedberg R, Lee T D, Sirlin A *Nucl. Phys. B* **115** 1 (1976)
155. Friedberg R, Lee T D, Sirlin A *Nucl. Phys. B* **115** 32 (1976)
156. Coleman S *Nucl. Phys. B* **262** 263 (1985)
157. Willets N *Nontopological Solitons, Lecture Notes in Physics 24* (Singapore: World Scientific, 1989)
158. Birse M *Soliton Models for Nuclear Physics* Manchester Univ. Preprint (Manchester, 1980)
159. Tomboulis E *Phys. Rev. D* **12** 1678 (1975)
160. Белова Т И и др. *ЯФ* **57** 2105 (1994); Preprint ITEP-166 (Moscow, 1982)
161. Захаров В Е, Шабад А Б *ЖЭТФ* **61** 118 (1971)
162. Белова Т И, Кудрявцев А Е *ЖЭТФ* **95** 13 (1989)
163. Симонов Ю А *ЯФ* **30** 1148 (1979)
164. Симонов Ю А *ЯФ* **30** 1457 (1979)
165. Leese R A *Nucl. Phys. B* **366** 283 (1991)
166. Гетманов Б С, Препринт ОИЯИ Р2-10208 (Дубна, 1976)
167. Белова Т И, Воронов Н А *Письма в ЖЭТФ* **61** 337 (1995)
168. Hawking S W, Moss I G, Stewart J M *Phys. Rev. D* **26** 2681 (1982)
169. Widrow L M *Phys. Rev. D* **40** 1002 (1989)
170. Kolb E W, Turner M S *The Early Universe* (Redwood City, Ca: Addison-Wiley, 1990)
171. Linde A *Phys. Rev. D* **49** 748 (1994)
172. Vilenkin A *Phys. Rep.* **121** 263 (1985)
173. Colpi M, Shapiro S L, Wasserman I *Phys. Rev. Lett.* **57** 2485 (1986)
174. Jetzer P *Phys. Rep.* **220** 163 (1992)
175. Пушкарлов Д И *Дефектоны в кристаллах. Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов* (М.: Наука, 1993)
176. Монастырский М И *Топология калибровочных полей и конденсированных сред* (М.: ПАИМС, 1995)
177. Зосимов В В, Лямшев Л Н *УФН* **165** 361 (1995)
178. Лошак П *УМН* **47** 59 (1992)
179. Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994)

Solitons and their interactions in classical field theory

T.I. Belova, A.E. Kudryavtsev

*Institute for Theoretical and Experimental Physics,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117259 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 125-91 68, 125-97 04*

Effects of nonlinearity in the classical field theory for non-integrated systems are considered, such as soliton scattering, soliton bound states, the fractal nature of resonant structures, kink scattering by inhomogeneities, and domain bladder collapse. The results are presented in both (1 + 1) and higher dimensions. Both neutral and charged scalar fields are considered. Possible application areas for the nonlinearity effects are discussed.

PACS numbers: **03.50.-z**, 03.50.Kk, 52.35.Py, 52.35.Sb

Bibliography — 179 references

Received 11 December 1996