

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Магноны, магнитные поляритоны, магнитостатические волны

М.И. Каганов, Н.Б. Пустыльник, Т.И. Шалаева

Теоретически исследуются электродинамические свойства различных магнитоупорядоченных сред. Рассмотрено два типа магнетиков: ферромагнетики и антиферромагнетики, а также показано, как модифицируются свойства металла из-за наличия магнитной подсистемы. В рамках традиционной концепции квазичастиц исследованы различные типы элементарных возбуждений: магнитные поляритоны, магнитостатические волны, магноны. В широком диапазоне частот показано, как закон дисперсии квазичастиц зависит от соотношения между характерными частотами различной природы: электрической и магнитной. Большое внимание уделено вопросам статистической термодинамики и кинетике магнетиков. Рассмотрен вопрос о возможности бозе-эйнштейновской конденсации в газе магнонов. Построена кинетическая теория электронного затухания магнитостатических волн в ферромагнитном металле. Подробно исследованы законы дисперсии поверхностных поляритонов. Приведены примеры решения пространственно-неоднородных задач при учете пространственной дисперсии. Показано, что пространственная дисперсия особенно важна в случае антиферромагнетиков.

PACS numbers: 71.36.+c, 75.30.Ds, 76.50.+g

Содержание

1. Введение (191).
2. Магнитный диэлектрик: магнитные поляритоны, магнитостатические волны, спиновые волны (магноны) (195).
3. Ферродиэлектрик: магнитные поляритоны, магнитостатические волны, спиновые волны (магноны) (197).
4. Статистическая термодинамика ферромагнитных диэлектриков (199).
5. Одноосный антиферромагнетик (202).
6. Резонансные поляритоны (206).
7. Взаимодействие с фононами (кинематика) (207).
8. Времена жизни (210).
9. Поверхностные магнитные поляритоны в магнитных диэлектриках (212).
10. Поверхностные магнитостатические волны (215).
11. Ферромагнитный металл. Электронный механизм затухания волн Дэймона – Эшбаха (217).
12. Электромагнитные волны в гироанізотропной среде (220).
13. Поверхностные магнитные поляритоны в пластине, намагниченной параллельно поверхностям (223).
14. Магнитостатические волны в пластине (225).
15. Поперечно-намагниченная пластина. Магнитостатические волны. Учет неоднородного обменного взаимодействия (227).
16. Взаимодействие магнитостатических волн с фононами в пластине (кинематика) (228).

- 16.1. Испускание фонона. 16.2. Поглощение фонона.
17. Времена жизни магнитостатических волн и фононов (231).
18. Антирезонанс. Селективная прозрачность ферромагнитных металлических пластин (234).
19. Заключение (236).
- Список литературы (236).

1. Введение

Магнитоупорядоченные среды обладают особыми электродинамическими свойствами. Физическая причина особых свойств — ферро- или антиферромагнитный резонанс, означающий возможность возбуждения специфических элементарных возбуждений (спиновых волн — магнонов) электромагнитной волной.

В большинстве случаев резонансные частоты магнитной природы находятся в радиочастотном диапазоне. В пренебрежении диссипативными процессами и пространственной дисперсией магнитная проницаемость при резонансной частоте обращается в бесконечность, а благодаря этому длина электромагнитной волны — в нуль, что, казалось бы, делает неприменимыми уравнения электродинамики сплошных сред. Однако учет диссипативных процессов и пространственной дисперсии магнитной проницаемости, несущественных вдали от резонанса, приводит к тому, что длина волны остается конечной и, хотя она много меньше, чем в вакууме (при той же частоте), все же значительно превышает межатомное расстояние. Это означает, что электромагнитные свойства магнетиков можно (и нужно!) описывать уравнениями макроскопической электродинамики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

М.И. Каганов, Н.Б. Пустыльник, Т.И. Шалаева. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Воробьевы горы, Россия
Тел. (095) 939-48-11
E-mail: kaganov@kapitza.ras.ru, natasha@ljar17.jinr.dubna.su

Статья поступила 3 сентября 1996 г.

Уравнения электродинамики записаны так, чтобы они были применимы к диэлектрикам ($\mathbf{j} = 0$) и к металлам ($\mathbf{D} = 0$); обозначения обычные.

В неограниченном пространстве материальными уравнениями, делающими систему (1.1) полной, служит линейная связь¹ между полями и индукциями, записанная для их компонент Фурье:

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \quad j_i = \sigma_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega, \mathbf{k}) H_k. \quad (1.2)$$

Вместо двух уравнений (для плотности тока \mathbf{j} и индукции \mathbf{D}) можно использовать обобщенную индукцию $\tilde{\mathbf{D}}$, связанную с электрическим полем \mathbf{E} эффективной диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}^{\text{eff}}$:

$$\tilde{D}_i = \varepsilon_{ik}^{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \quad \varepsilon_{ik}^{\text{eff}} = \varepsilon_{ik}(\omega, k) + \frac{4\pi i \sigma_{ik}(\omega, k)}{\omega}. \quad (1.3)$$

Для металлов током смещения, включающим поляризуемость ионной решетки, т.е. слагаемым $(1/c)(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ с большой точностью можно пренебречь, и тогда

$$\varepsilon_{ik}^{\text{eff}} = \frac{4\pi i \sigma_{ik}(\omega, k)}{\omega}. \quad (1.4)$$

Задача микроскопической теории — вычисление на основе более или менее реалистических моделей тензоров диэлектрической проницаемости ε_{ik} , электропроводности σ_{ik} и магнитной проницаемости μ_{ik} . Существование ферро- или антиферромагнитного резонанса, естественно, проявляется в особой (резонансной) зависимости компонент тензора μ_{ik} от частоты ω .

Наше внимание в настоящем обзоре будет привлечено не столько к вычислению на основе моделей перечисленных тензоров (мы, как правило, будем пользоваться наиболее простыми и наглядными моделями), сколько к "электромагнитным последствиям" того, что магнитная проницаемость имеет резонансную зависимость от частоты. В неограниченной среде симметрия между электрическим и магнитным полями практически не нарушается, а различия в резонансных свойствах, обязанных диэлектрической и магнитной проницаемостям, сводятся, как правило, к различию в частотном диапазоне. У $\hat{\varepsilon}$ резонансные частоты находятся в оптическом диапазоне (иногда — у ионных кристаллов — в инфракрасном), а у $\hat{\mu}$ — в радиочастотном диапазоне (иногда — у антиферромагнетиков — в субмиллиметровом). Это различие, не слишком меняющее теорию явлений, совершенно изменяет экспериментальную технику и способ описания результатов (как теоретических, так и экспериментальных).

В ограниченных средах симметрия между полями нарушается. Даже в простейшем случае изотропной негиротропной среды диэлектрическая и магнитная проницаемости входят в формулы по-разному — не только в виде показателя преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Для того чтобы показать, как проявляет себя неоднородность задачи (полупространство, пластина), мы рассмотрим несколько простых примеров электродинамики

сплошных сред, считая, что

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega, k) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(\omega, k) \mathbf{H}. \quad (1.5)$$

Учет пространственной дисперсии (зависимости ε и μ от волнового вектора k) и диссипации (существование ε'' и μ'') необходим только тогда, когда пренебрежение ими может привести к потере физического смысла или к грубой (качественной) ошибке.

Итак, начнем с простейшего случая, когда $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$ — функции частоты, содержащие резонансные знаменатели и обладающие обычными свойствами: $\varepsilon(0), \mu(0) > 1$ и $\varepsilon(\infty) = \mu(\infty) = 1$. Главное различие функций $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$ в том, что резко различаются резонансные частоты: $\omega_{\text{RE}} \gg \omega_{\text{RM}}$, где $\omega_{\text{RE}}(\omega_{\text{RM}})$ — резонансная частота диэлектрической (магнитной) проницаемости (рис. 1).

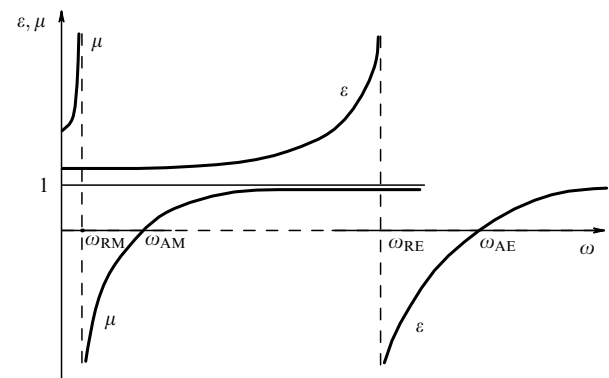


Рис. 1. Схематические зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей от частоты ω . Разрыв оси абсцисс подчеркивает, что $\omega_{\text{RM}}, \omega_{\text{AM}}$ и $\omega_{\text{RE}}, \omega_{\text{AE}}$ находятся в разных частотных диапазонах. В реальных условиях каждая из функций может иметь несколько резонансных участков.

Принято элементарное возбуждение (квазичастицу), представляющее собой фотон, взаимодействующий с колебаниями поляризации и намагниченности, называть поляритон. Закон дисперсии поляритона — решение уравнения

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (1.6)$$

в виде функций $\omega = \omega(k)$. При простейшей резонансной зависимости (по одному резонансу у каждой проницаемости) закон дисперсии имеет три ветви. Экзотический случай совпадения характерных частот проницаемостей рассмотрен в разделе 6.

Диссипация, как хорошо известно, ликвидирует бесконечный резонансный разрыв и вводит мнимую часть проницаемостей (например, $\text{Im } \varepsilon = \varepsilon''$); функция $\varepsilon'' = \varepsilon''(\omega)$ близка δ -функции (рис. 2, аналогично выглядит зависимость $\mu = \mu(\omega)$).

Пространственная дисперсия, существенная вблизи резонансных частот при малой диссипации, означает зависимость этих частот от волнового вектора:

$$\omega_{\text{RE}} = \omega_{\text{RE}}^0 + \alpha_E k^2, \quad \omega_{\text{RM}} = \omega_{\text{RM}}^0 + \alpha_M k^2. \quad (1.7)$$

Пространственная дисперсия — результат способности механических колебаний (поляризации и/или намаг-

¹ В этом обзоре мы нигде не выходим за пределы линейного приближения. Кроме того, сформулируем основное предположение: $ak \ll 1$, где a — межатомное расстояние, \mathbf{k} — волновой вектор, $2\pi/k = \lambda$ — длина волны, т.е. мы рассматриваем макроскопические колебания и волны.

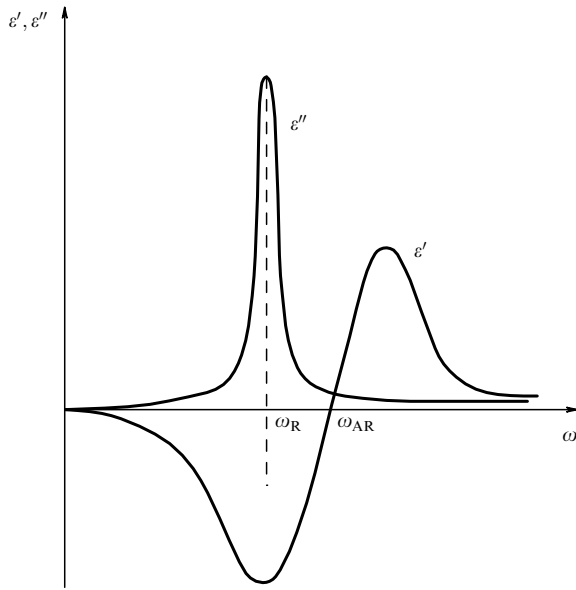


Рис. 2. Резонансная зависимость (схематическая) диэлектрической проницаемости при учете диссипации ($\varepsilon' = \text{Re } \varepsilon$, $\varepsilon'' = \text{Im } \varepsilon$).

ниченности) распространяться по кристаллу за счет внутренних сил взаимодействия. Коэффициенты α_E и α_M обязательно в виде множителя содержат a^2 — квадрат межатомного расстояния, т.е. $\alpha_E = \tilde{\omega}_E a^2$, $\alpha_M = \omega_{ex} a^2$, причем $|\tilde{\omega}_E| \sim \omega_{RE}^0$, а ω_{ex} благодаря обменно-взаимодействию между моментами атомов², значительно превышает ω_{RM}^0 ($\omega_{ex} \gg \omega_{RM}^0$).

Итак,

$$\omega_{RE} = \omega_{RE}^0 + \tilde{\omega}_E (ak)^2, \quad \omega_{RM} = \omega_{RM}^0 + \omega_{ex} (ak)^2. \quad (1.8)$$

Слагаемое $\omega_{ex} (ak)^2$ может превысить ω_{RM}^0 даже при $ak \ll 1$. Используя формулы (1.6)–(1.8), легко модифицировать закон дисперсии поляритона, превращая квазистатический предел ($kc \rightarrow \infty$, $\omega \not\rightarrow \infty$) в квазистатическую волну. В случае (1.6) есть два квазистатических предела (один обязан ε , другой — μ). При учете пространственной дисперсии они "превращаются" в законы дисперсии механических экситонов (такая терминология принята в оптике). Важность модификации, обязанной учету пространственной дисперсии, в том, что если пренебречь пространственной дисперсией, то при $\omega \rightarrow \omega_{RE}^0$, ω_{RM}^0 групповая скорость поляритона стремится к нулю (следовательно, он не переносит энергии). Пространственная дисперсия делает поляритон в квазистатическом пределе ($c = \infty$) переносчиком энергии — естественный факт, если учесть, что пространственная дисперсия — следствие существования квазичастиц, а поляритон — результат связи квазичастиц с электромагнитными колебаниями.

Обратим внимание еще на то, что пространственная дисперсия увеличивает степень уравнения (1.6), если

неизвестным считать волновой вектор k . Это обстоятельство важно при решении неоднородных задач.

Уравнений таких, как (1.6), два: для двух поперечных поляризаций. Кроме того, в среде с изотропными проницаемостями могут распространяться два продольных экситона: электрический — с законом дисперсии, определяемым уравнениями

$$\varepsilon(\omega, k) = 0, \quad (1.9)$$

и магнитный — с законом дисперсии, определяемым уравнением

$$\mu(\omega, k) = 0. \quad (1.10)$$

Как мы увидим (см. раздел 5), бывают реальные ситуации, когда магнитный экситон, определяемый уравнением (1.10), может (должен) существовать.

Перейдем к полупространству (пространственной дисперсией пренебрегаем). Важной характеристикой электродинамических (в частности, отражательных) свойств тела служит поверхностный импеданс. У полупространства с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной μ импеданс для волны, падающей нормально на поверхность тела, равен

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \text{Re } \zeta > 0. \quad (1.11)$$

Это первая формула, из которой видно, что ε и μ входят в зависимость по-разному. При электрическом резонансе ($\varepsilon \rightarrow \infty$) импеданс обращается в нуль, а при магнитном ($\mu \rightarrow \infty$) — в бесконечность. Коэффициент отражения R — отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей — связан с импедансом следующим образом:

$$R = -\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}. \quad (1.12)$$

В обоих резонансных случаях $|R| = 1$ тело препятствует проникновению в себя резонирующей, электромагнитной волны. Проникновение осуществляется вследствие диссипации — расчет резонансных характеристик невозможен без ее учета.

Вдоль границы полупространства могут распространяться поверхностные волны. Их свойства последние годы привлекают особое внимание. В настоящем обзоре поверхностным волнам уделено много места.

Под поверхностной волной принято понимать волну, амплитуда которой экспоненциально затухает при удалении от поверхности. Так как электромагнитные волны существуют не только в теле, но и в вакууме (в случае полупространства), то речь идет о волнах, экспоненциально затухающих по обе стороны от поверхности образца, причем в вакууме логарифмический декремент затухания

$$\gamma_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (1.13)$$

где k — двумерный волновой вектор, компоненты которого k_x, k_y ; ось z направлена по нормали к поверхности; мы считаем, что магнетик занимает "положитель-

² По порядку величины $\omega_{ex} = I/\hbar$, где I — обменный интеграл. Так как обменное взаимодействие определяет спонтанное упорядочение магнитных моментов, то $T_{C(N)} \sim I$, где $T_{C(N)}$ — температура Кюри (Нееля). Оценка весьма приближенна — она не учитывает много реальных факторов (в частности, величину спина атома, число ближайших соседей и т.п.).

ное" полупространство $z > 0$, так что в вакууме амплитуда волны пропорциональна $\exp(\gamma_0 z)$, а в теле — $\exp(-\gamma z)$, где

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu}. \quad (1.14)$$

Здесь и везде значение корней положительно. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае есть две поверхностных волны: в одной отличны от нуля компоненты³ E_x, E_z, H_y ; во второй — E_y, H_x, H_z . Первая — волна электрического типа (E -волна), вторая — магнитного (H -волна). Их дисперсионные уравнения — следствия граничных условий (непрерывности тангенциальных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H}):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k^2 - \varepsilon \mu \omega^2 / c^2}{k^2 - \omega^2 / c^2}} + \varepsilon &= 0 \quad (E\text{-волна}), \\ \sqrt{\frac{k^2 - \varepsilon \mu \omega^2 / c^2}{k^2 - \omega^2 / c^2}} + \mu &= 0 \quad (H\text{-волна}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

В квазистатическом пределе ($kc \rightarrow \infty$) дисперсионные уравнения существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) + 1 &= 0 \quad (E\text{-волна}), \\ \mu(\omega) + 1 &= 0 \quad (H\text{-волна}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

В немагнитных средах поверхностной H -волны нет. Область существования поверхностных волн ограничена естественными неравенствами

$$k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega). \quad (1.17)$$

Какое из неравенств сильнее, зависит от величины и знака квадрата показателя преломления $n^2 = \varepsilon(\omega) \mu(\omega)$. При $n^2 > 1$ область частот и волновых векторов ограничивает второе из двух неравенств (1.17).

Рассмотрим теперь электромагнитные волны в пластине. Волна распространяется вдоль пластины и экспоненциально затухает в обе стороны от пластины с логарифмическим декрементом затухания (1.13). Если начало координат (по оси z) поместить в середину пластины, занимающей полосу $|z| < 2d$, задача обладает симметрией при замене $z \rightarrow -z$, что позволяет разделить решения на симметричные (s) и несимметричные (a) (табл. 1).

Таблица 1

E -волна	H -волна	s, a
$H_y(-z) = H_y(z)$ $E_z(-z) = H_y(z)$ $E_x(-z) = -E_x(z)$	$E_y(-z) = E_y(z)$ $H_x(-z) = -E_y(z)$ $H_z(-z) = -H_z(z)$	s
$H_y(-z) = -H_y(z)$ $E_z(-z) = -H_y(z)$ $E_x(-z) = E_x(z)$	$E_y(-z) = -E_y(z)$ $H_x(-z) = H_x(z)$ $H_z(-z) = -H_z(z)$	a

Дисперсионные уравнения для всех четырех типов волн получаются из граничных условий при $z = \pm d$.

Для E -волны

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \tanh(\gamma d) + \varepsilon = 0, \quad (s)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \coth(\gamma d) + \varepsilon = 0. \quad (a)$$

Для H -волны

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \tanh(\gamma d) + \mu = 0, \quad (s)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} \coth(\gamma d) + \mu = 0. \quad (a)$$

В случае волн, распространяющихся вдоль пластины, естественно нет ограничения $k^2 > \varepsilon \mu \omega^2 / c^2$, хотя сохраняется условие $k^2 > \omega^2 / c^2$. При

$$k^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega)$$

поля в пластине описываются тригонометрическими функциями (подробнее см. в разделах 13, 14). Больше внимание мы будем уделять решениям, описываемым гиперболическими функциями ($k^2 > \varepsilon \mu \omega^2 / c^2$). При $\gamma d \gg 1$ — это настоящие поверхностные волны: амплитуды этих волн велики вблизи поверхностей пластины.

До сих пор мы считали, что магнетик по своим электрическим свойствам — диэлектрик. В обзоре рассмотрен ряд свойств магнетиков-металлов. Во введении мы только упомянем, каким образом осуществляется влияние проводимости на магнитные свойства и обратно: как влияет дисперсия магнитной восприимчивости на электрические свойства проводников.

Прежде всего электромагнитная волна из-за скин-эффекта существенно неоднородна. Естественно, это обстоятельство сказывается на свойствах магнетиков в условиях резонанса. Не менее интересно влияние магнитной проницаемости на скин-эффект. Нетрудно убедиться, что если магнитная проницаемость μ и проводимость металла σ — действительные величины, то глубина скин-слоя

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu(\omega)\omega}}. \quad (1.18)$$

Возрастание $\mu(\omega)$ — близость к резонансу — уменьшает глубину скин-слоя, увеличивает неоднородность переменного магнитного поля, возбуждающего спиновую подсистему, а убывание $\mu(\omega)$ делает электромагнитное поле в металле более однородным. Согласно рис. 1, существует значение частоты $\omega = \omega_{AM}$, называемой антирезонансной, при которой глубина скин-слоя обращается в бесконечность. Это явление (ФМАР — ферромагнитный антирезонанс) описано в разделе 18. Главное его проявление — селективная прозрачность ферромагнитных металлических пластин на частоте антирезонанса ω_{AM} ($\mu(\omega_{AM}) = 0$).

Все рассмотрение проведено для двух типов магнетиков: для ферромагнетиков и для двухподрешеточного антиферромагнетика типа "легкая ось" (ЛО). В обоих случаях тензор магнитной проницаемости имеет следую-

³ Ось x направлена вдоль вектора \mathbf{k} ($k_x = k, k_y = k_z = 0$).

щую структуру:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu' & 0 \\ -i\mu' & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Для ферромагнетика, когда постоянное магнитное поле \mathbf{H} направлено вдоль оси анизотропии, имеем

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1 + \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu' = \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_3 = 1. \quad (1.20)$$

Ось 3 совпадает с выделенной осью (вдоль нее направлен равновесный магнитный момент \mathbf{M}),

$$\omega_0 = gH_{\text{eff}}, \quad \omega_M = 4\pi gM, \quad (1.21)$$

g — магнитомеханическое отношение; $H_{\text{eff}} = H + \beta M$, где β — константа анизотропии. Часто индекс eff мы будем опускать.

В случае антиферромагнетиков дело обстоит сложнее даже для того простейшего случая, когда магнитное поле направлено вдоль оси анизотропии, так как положение магнитных моментов и значение компонент проницаемости зависят от величины магнитного поля.

Мы выписали значения компонент тензора проницаемости, опустив пространственную дисперсию и диссипацию, и будем их "вводить" лишь по мере необходимости.

Содержание нескольких разделов выходит за рамки макроскопической электродинамики. Они посвящены вопросам статистической термодинамики и кинетики. Названия этих разделов отмечены звездочкой.

Концепция квазичастиц в магнитоупорядоченных средах за последние десятилетия не претерпела существенных изменений. Наши основные представления о природе элементарных возбуждений спиновой системы (спиновых волн, магнонов) остались прежними. Спиновые волны — колебания магнитных моментов магнитных подрешеток, которые в хорошем приближении описываются уравнениями Ландау — Лифшица. Ими мы и будем в дальнейшем пользоваться, не останавливаясь (как мы уже упоминали) на вычислении значений параметров, входящих в уравнения Ландау — Лифшица. В этом смысле наша идеология близка книге Ахиезера, Барьяхтара и Пелетминского [1]. Сравнительно недавно вышла книга Гуревича и Мелкова [2], которая посвящена электродинамике магнетиков. Как сказано в предисловии к [2], "в этой книге рассматриваются электромагнитные колебания и волны в магнитоупорядоченных веществах: ферро-, антиферро- и ферримагнетиках". Если убрать упоминание ферримагнетиков, этими же словами мы могли бы начать свой обзор. И все же нам представляется, что совпадений (пересечений) между нашим обзором и книгой [2] не так много. Это нетрудно установить даже из сопоставления оглавлений.

Надо еще отметить книгу Вашковского, Стельмаха и Шараевского "Магнитостатические волны в электродинамике сверхвысоких частот" [3], а также обзор Бланка и Каганова [4], посвященные электродинамике металла в условиях ферромагнитного резонанса. Перечисленные литературные источники содержат подробную библиографию. Думаем, нередко читателям придется обращаться к этим монографиям, а также к отдельным томам "Курса теоретической физики" Ландау и Лиф-

шица [5–8]. В большой мере обзор основан на статьях авторов, опубликованных в последние годы. Ссылки на другие работы делались только в тех случаях, когда они казались нам необходимыми для понимания смысла. Мы не преследовали цели утверждения приоритетов и заранее просим простить неупоминание: при принятом подходе это неизбежно.

2. Магнитный диэлектрик: магнитные поляритоны, магнитостатические волны, спиновые волны (магноны)

В этом разделе мы не уточняем частотную зависимость компонент тензора магнитной проницаемости μ_{ik} и диэлектрической проницаемости ε , а ограничиваемся предположением, что тензор μ_{ik} имеет структуру (1.19) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, а диэлектрическая проницаемость изотропна (в кубическом кристалле $\varepsilon_{ik} \equiv \varepsilon \delta_{ik}$).

Будем искать решение системы уравнений Максвелла (1.1) в виде плоской монохроматической волны. Нетрудно получить дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и волновой вектор \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right)^2 (\mu'^2 - \mu^2) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \left[k_{\perp}^2 (\mu(\mu + 1) - \mu'^2) + 2k_z^2 \mu \right] - \\ - k^2 (\mu k_{\perp}^2 + k_z^2) = 0, \\ k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Как сказано во введении, мы будем интересоваться только длинноволновыми колебаниями, считая

$$ak \ll 1. \quad (2.2)$$

Это неравенство — условие макроскопического подхода. Кроме того, пусть $\omega \ll \omega_E$, где ω_E — характерная частота дисперсии диэлектрической проницаемости (например, $\omega_E = \omega_{\text{RE}}$). Как правило, частота ω_E расположена в оптическом диапазоне. Это позволяет при рассмотрении магнитных колебаний вовсе не учитывать дисперсии диэлектрической проницаемости, считая ε константой, равной ее значению при $\omega = 0$.

Не выходя за рамки макроскопического рассмотрения, можно учесть пространственную дисперсию компонент тензора μ_{ik} , т.е. считать, что μ и μ' — функции не только частоты ω , но и волнового вектора \mathbf{k} . Естественно, такое предположение весьма усложняет уравнение (2.1), хотя его вид сохраняется.

В различных предельных случаях элементарные возбуждения, описываемые уравнением (2.1), принято называть по-разному. Если пренебречь пространственной дисперсией, то решения уравнения (2.1) (при $\varepsilon \equiv \text{const}$) называют магнитными поляритонами; квазистатический предел уравнения (2.1) без учета пространственной дисперсии ($kc \rightarrow \infty$, частота ω остается конечной величиной, μ, μ' — функции частоты, но не волнового вектора) описывает магнитостатические волны (МСВ); введением пространственной дисперсии МСВ "превращается" в спиновую волну (магнон). Все эти названия мы будем использовать.

Пока не определена дисперсия компонент тензора магнитной проницаемости, уравнение (2.1) носит чисто формальный характер. И все же ряд выводов можно сделать. Прежде всего, "забыв", что μ и μ' — функции ω

и \mathbf{k} , воспользуемся тем, что при постоянных ε , μ и μ' и заданном значении \mathbf{k} , уравнение (2.1) — квадратное уравнение относительно $\mu^{\text{eff}} = k^2 c^2 / \omega^2 \varepsilon$:

$$(\mu^{\text{eff}})^2 - \frac{\sin^2 \theta (\mu^2 - \mu'^2 + \mu) + 2\mu \cos^2 \theta}{\mu \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \mu^{\text{eff}} + \frac{\mu^2 - \mu'^2}{\mu \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 0, \quad (2.3)$$

где θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и осью z .

Отсюда

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\pm}^{\text{eff}},$$

$$\mu_{\pm}^{\text{eff}} = \left[\mu^2 (1 + \cos^2 \theta) + (\mu^2 - \mu'^2) \sin^2 \theta \pm \sqrt{(\mu^2 - \mu'^2 - \mu)^2 \sin^4 \theta + 4\mu'^4} \right] \times$$

$$\times [2(\mu \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)]^{-1}. \quad (2.4)$$

Так как мы выясняем законы дисперсии квазичастиц (магнитных поляритонов, магнонов), то нас интересуют действительные решения уравнений (2.4).

С ростом частоты $\mu \rightarrow 1$, $\mu' \rightarrow 0$, а $\mu_{\pm}^{\text{eff}} \rightarrow 1$. Поэтому для обоих типов волн

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \quad \omega_E \gg \omega \gg \omega_M, \quad (2.5)$$

где ω_M — характерная частота магнитной подсистемы (например, $\omega_M = \omega_{\text{RM}}$). Поправки к формуле (2.5) можно получить из весьма общих соображений. Диагональный элемент матрицы μ_{ik} — четная функция частоты, а ее гиротропный элемент — нечетная функция. Поэтому, введя два параметра размерности частоты, имеем

$$\mu(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_{\infty}^2}{\omega^2}, \quad \mu' \simeq \frac{\tilde{\omega}_{\infty}}{\omega}, \quad (2.6)$$

$$\omega \simeq \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 \mp \frac{|\tilde{\omega}_{\infty} \cos \theta| \sqrt{\varepsilon}}{2kc} \right) = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}} \mp \frac{1}{2} |\tilde{\omega}_{\infty} \cos \theta|. \quad (2.7)$$

Для $\theta = \pi/2$ надо сделать отдельное разложение "+"-ветви. При $\theta \neq \pi/2$ отклонение от формулы (2.5) определяется гиротропией.

При произвольном значении угла θ уравнения (2.4) очень громоздки, хотя допускают анализ. В двух предельных случаях они существенно упрощаются:

$$\text{при } \theta = 0 \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\pm}, \quad \mu_{\pm} = \mu \pm |\mu'|, \quad (2.8)$$

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} \quad k_{+}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \frac{\mu^2 - \mu'^2}{\mu}, \quad k_{-}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon. \quad (2.9)$$

Обозначение ветвей при $\theta = \pi/2$ условно. Совпадение знаков в (2.4) и (2.9) имеет место, только если $(\mu^2 - \mu'^2)/\mu - 1 > 0$. При $(\mu^2 - \mu'^2)/\mu - 1 < 0$ "+"-волна в (2.9) — это "-"-волна в (2.4).

Неравенство $(\mu^2 - \mu'^2)/\mu - 1 < 0$ не означает невозможность распространения волны. При

$0 < (\mu^2 - \mu'^2)/\mu < 1$ "+"-ветвь — истинная волна в том диапазоне значений параметров, где первое из уравнений (2.9) имеет действительное решение для частоты ω при действительном волновом векторе k (напомним, что (2.9), как и (2.4), — уравнение, а не решение).

На примере случая $\theta = \pi/2$ видно, какую важную роль играет поляризация волны: одна из волн вовсе не зависит от магнитных характеристик.

Вернемся к формуле (2.7). Используя асимптотические значения (2.6) и первую из формул (2.9), имеем

$$\omega \simeq \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\omega_{\infty}^2 + \tilde{\omega}_{\infty}^2) \sqrt{\varepsilon}}{2kc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.7')$$

Одно из значений μ_{\pm}^{eff} при $\mu^2 = \mu'^2$ обращается в нуль. При этом, естественно, согласно (2.4) обращается в нуль волновой вектор k одной из волн. Число нулей уравнения

$$\mu^2(\omega, k = 0) = \mu'^2(\omega, k = 0) \quad (2.10)$$

определяется конкретной дисперсионной зависимостью компонент магнитной проницаемости. Корни уравнения (2.10) называют частотами антирезонанса (мы их обозначаем ω_{AM}). Подчеркнем: значения частот ω_{AM} не зависят от направления распространения волны (это их существенная особенность). Вблизи частоты ω_{AM} дисперсия квадратична:

$$\omega - \omega_{\text{AM}}^v \simeq \beta_{\text{AM}}^v k^2, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

причем коэффициенты β_{AM}^v суть суммы двух слагаемых: одно порядка $c^2/\omega_{\text{AM}}\varepsilon$, а второе $\sim \omega_{\text{ex}} a^2$. Как правило, $c^2/\omega_{\text{AM}}\varepsilon \gg \omega_{\text{ex}} a^2$, и дисперсия волны при $\omega \simeq \omega_{\text{AM}}$ определяется эффектом запаздывания (электродинамикой).

Из формул (2.4) видно, что если пренебречь пространственной дисперсией μ , то при

$$\mu(\omega) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 0, \quad \mu(\omega) = \mu(\omega, k = 0) \quad (2.12)$$

волновой вектор k по крайней мере одной из волн обращается в бесконечность. Уравнение (2.12) определяет частоты магнитного резонанса ω_{RM} или спектр МСВ.

К выводу уравнения (2.12) можно подойти иначе, не предполагая отсутствия пространственной дисперсии. Можно считать, что оно получено путем предельного перехода $kc \rightarrow \infty$, т.е. перехода к квазистатике. Тогда уравнение

$$\mu(\omega, k) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 0 \quad (2.13)$$

определяет спектр магнонов (в пренебрежении запаздыванием).

Уравнение (2.13) может быть получено непосредственно из уравнений магнитостатики⁴

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad b_i = \mu_{ik}(\omega, \mathbf{k}) h_k. \quad (2.14)$$

При $\theta = \pi/2$ уравнение (2.13) принимает вид

$$\mu(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.15)$$

⁴ Малыми латинскими буквами обозначены переменные части магнитного поля \mathbf{h} и магнитной индукции \mathbf{b} .

и определяет закон дисперсии продольного ($\mathbf{h} \parallel \mathbf{k}$) магнитного (механического) экситона. При $\mu' \equiv 0$ (2.15) — точное уравнение. Отсутствие гиротропии в магнитной системе возможно только в антиферромагнетиках (см. раздел 5).

В рамках магнитостатики уравнение (2.13) — точное уравнение, однако оно приводит к неаналитической зависимости частоты ω от компонент волнового вектора k , что легко увидеть, выразив $\cos^2 \theta$ через k_z^2/k^2 , а $\sin^2 \theta$ — через k_{\perp}^2/k^2 ($k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$). Физическая причина этого в дальнедействии магнитного взаимодействия, которое проявляется в виде влияния колебаний магнитного поля, вызванных колебаниями намагниченности. Зависимость частоты ω от угла θ (даже при $k \rightarrow 0$) можно рассматривать как неоднозначность: при $k \rightarrow 0$ вместо одной определенной частоты имеется полоса частот. Неоднозначность ликвидируется учетом граничных условий при рассмотрении ограниченных магнетиков. Мы будем иметь возможность в этом убедиться. Учет конечности скорости света (запаздывания) также ликвидирует неоднозначность (см. формулы (2.16)).

При стремлении к нулю одновременно и волнового вектора k , и частоты ω для определения того, как "начинаются" кривые (2.4), естественно положить μ равным μ_0 — статическому пределу магнитной проницаемости ($\mu_0 > 1$), а $\mu' = 0$ ⁵.

Из (2.4) нетрудно получить

$$\omega_{\pm} = \begin{cases} \frac{kc}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\mu_0} + \sin^2 \theta \right)^{1/2}, \\ \frac{kc}{\sqrt{\epsilon\mu_0}}. \end{cases} \quad (2.16)$$

С ростом волнового вектора учет пространственной дисперсии компонент тензора магнитной проницаемости становится необходимым, а при выходе за пределы используемого здесь приближения (при $k \sim 1/a$) должна проявиться геометрическая структура кристалла в периодической зависимости закона дисперсии элементарных возбуждений от \mathbf{k} . Наше рассмотрение ограничено небольшой областью \mathbf{k} -пространства, окружающего начало координат — центр первой зоны Бриллюэна.

При использовании уравнений макроскопической электродинамики нельзя найти все ветви низкочастотных элементарных возбуждений. Например, вне рассмотрения фоновые ветви, для нахождения которых необходимо использовать уравнения теории упругости (в случае сложных многоатомных кристаллов, обобщенные на случай учета длинноволновых оптических колебаний). Но даже если ограничиться малыми колебаниями магнитных моментов подрешеток, то нет уверенности, что уравнение (2.4) описывает все ветви магнитных колебаний, так как возможны колебания, при которых магнитный момент единицы объема тела не изменяется. Можно сказать иначе: могут существовать колебания магнитных моментов, которые не возбуждают колебаний электромагнитного поля — такие колебания не описываются уравнениями макроскопической электродинамики.

При обсуждении выведенных здесь формул для законов дисперсии элементарных возбуждений необходимо подчеркнуть, что законы дисперсии имеют специфический для магнитных систем характер в области частот $\omega \sim \omega_{\text{RM}}, \omega_{\text{AM}}$. В других частотных диапазонах поляритон мало отличается от фотона в немагнитной среде. Однако из-за присутствия в формулах (2.4) магнитной проницаемости, частота элементарного возбуждения (даже напоминающего фотон) зависит от магнитного поля. Следовательно, квазичастица, соответствующая такому элементарному возбуждению, обладает моментом.

Согласно общим законам квантовой механики, магнитный момент системы равен производной с обратным знаком от энергии системы по магнитному полю. Поэтому магнитный момент квазичастицы есть

$$\beta = -\hbar \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{H}}. \quad (2.17)$$

Эту формулу можно использовать как для поляритонов, так и для магновов. Надеемся, что использование буквы β для магнитного момента квазичастицы и для константы анизотропии не приведет к путанице.

3. Ферродиелектрик: магнитные поляритоны, магнитостатические волны, спиновые волны (магноны)

Этот раздел иллюстрирует и дополняет на простейшем примере одноподрешеточного ферромагнетика, намагниченного вдоль оси анизотропии, формулы и выводы предыдущего раздела. Именно к такому магнетизму относятся формулы (1.20), (1.21).

Начнем с вычисления частоты антирезонанса ω_{AM} (в данном случае она одна). Согласно (1.20), (1.21) и (2.10),

$$\omega_{\text{AM}} = \omega_0 + \omega_{\text{M}}, \quad (3.1)$$

или

$$\omega_{\text{AM}} = gB_{\text{eff}}, \quad B_{\text{eff}} = H_{\text{eff}} + 4\pi M, \quad (3.2)$$

а H_{eff} отличается от H слагаемым βM (см. введение).

Уравнения (2.4) переписывать, подставив в них выражения (1.20), нет смысла — они остаются весьма громоздкими. А формулы (2.8) и (2.9) приобретают вполне обозримый вид:

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \frac{\omega_{\text{AM}} \pm \omega}{\omega_{\text{RM}} \pm \omega}, \quad \omega_{\text{RM}} = \omega_0, \quad \theta = 0; \quad (3.3)$$

$$k_{-}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \frac{\omega_{\text{AM}}^2 - \omega^2}{\omega_{\text{RM}}^2 - \omega^2}, \quad k_{+}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon; \quad (3.4)$$

$$\omega_{\text{RM}} = \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}})}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Магнитостатические волны (МСВ) и отличающиеся от них учетом пространственной дисперсии (заменой ω_0 на $\omega_0 + \omega_{\text{ex}}(ak)^2$) спиновые волны (магноны) описываются следующей формулой (см. (2.13) и (2.20)):

$$\omega = \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}} \sin^2 \theta)}. \quad (3.5)$$

⁵ Следствием условия эрмитовости тензора μ_{ik} является соотношение $\mu'(-\omega) = -\mu'(\omega)$, так что $\mu'(0) = 0$.

Наконец, наиболее низкочастотный участок спектра можно описать формулами (2.16), если вместо статической магнитной проницаемости μ_0 поставить ее значение в этой модели:

$$\mu_0 = 1 + \frac{\omega_M}{\omega_0}. \quad (3.6)$$

Формула (3.3) удобна для демонстрации влияния намагниченности на немагнитную (фотонную) ветвь спектра. Ее закон дисперсии — решение относительно частоты уравнения (3.3). Пространственной дисперсией мы пренебрегаем. Мерой влияния намагниченности может служить нелинейность в зависимости $\omega = \omega(k)$, проявляющаяся в отличие от единицы отношения групповой скорости $v_{gr} = d\omega/dk$ к фазовой $v_{ph} = \omega/k$. Согласно (3.3),

$$\frac{v_{gr}}{v_{ph}} = \frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 + \omega_M + \omega)}{(\omega_0 + \omega)^2 + \omega_M(\omega_0 + \omega/2)}.$$

Оно имеет максимум при $\omega = \sqrt{5}\omega_0$, равный

$$\left(\frac{v_{gr}}{v_{ph}}\right)_{\max} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}+1)\omega_M/\omega_0}{(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}+1/2)\omega_M/\omega_0}$$

и увеличивающийся с ростом отношения ω_M/ω_0 . При $\omega_M/\omega_0 \gg 1$

$$\left(\frac{v_{gr}}{v_{ph}}\right)_{\max} \simeq \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1/2} \simeq 1,25.$$

Отклонение от единицы невелико, но несомненно, — вполне заметный эффект.

Обычно специфическими элементарными возбуждениями ферромагнетика считают спиновые волны, причем в большинстве случаев используют не формулу (3.5), а формулу, в которой опущено слагаемое $\omega_M \sin^2 \theta$ (что означает пренебрежение магнитодипольным взаимодействием):

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega_{ex}(ak)^2. \quad (3.7)$$

При $\omega_{ex}(ak)^2 \gg \omega_0$ закон дисперсии особенно прост и напоминает закон дисперсии нерелятивистской свободной частицы:

$$\omega = \omega_{ex}(ak)^2, \quad E = \frac{p^2}{2m^*}, \quad \frac{1}{m^*} = \frac{2\omega_{ex}a^2}{\hbar}, \quad (3.7')$$

m^* — эффективная масса магнона.

В термодинамике и кинетике газа магнонов при низких температурах важную роль играет структура спектра вблизи дна энергетической зоны ($p = 0$; $\theta = 0$ и $\theta = \pi$). Согласно (3.5), наименьшая энергия, которую может иметь магнон (если пренебречь запаздыванием), равна $E_0 = \hbar\omega_0$, а при $E \geq E_0$ и $E - E_0 \ll \hbar\omega_M$

$$E = E_0 + \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{2} \hbar\omega_M \theta^2. \quad (3.8)$$

Здесь θ отсчитывается от нуля и/или от π .

Наличие наряду с квадратичной формой (слагаемое, содержащее $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$) члена $\hbar\omega_M \theta^2/2$ — резуль-

тат магнитодипольного взаимодействия — представляет несомненный интерес и может быть описано как возрастание эффективной размерности импульсного пространства магнонов D_{eff} , если последнюю определить формулой, связывающей объем $\Omega(E)$ изоэнергетической поверхности квазичастицы с ее энергией E . Обычно в D -мерном пространстве, если элемент объема есть $d^D p_i$ ($i = 1, 2, \dots, D$),

$$E - E_0 = \sum_{i=1}^D \frac{p_i^2}{2m_i^*}$$

(анизотропия \mathbf{p} -пространства проявляется в различии главных значений тензора эффективных масс), то

$$\Omega(E) \sim (E - E_0)^{D/2}. \quad (3.9)$$

В нашем случае, когда применима формула (3.10), элемент объема содержит множитель $\sin \theta d\theta \simeq \theta d\theta$, поэтому $E \rightarrow E_0$,

$$\Omega(E) \sim (E - E_0)^{5/2}, \quad D_{\text{eff}} = 5. \quad (3.10)$$

Возрастание эффективной размерности, естественно, проявляется в свойствах газа магнонов (см. раздел 4). Влияние возрастания эффективной размерности, обязанного диполь-дипольному взаимодействию, на фазовый переход из парамагнитного в ферромагнитное состояние рассматривалось Ларкиным и Хмельницким. Естественно, оно проявляется и в свойствах газа магнонов.

Вернемся еще раз к формуле (3.5). Пренебрегая границами, можно считать, что формула (3.5) задает закон дисперсии магнитостатических волн:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_0 \left(\omega_0 + \omega_M \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} \right)}, \quad (3.11)$$

где $k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2$, а k_{\parallel} — проекция волнового вектора \mathbf{k} на направление магнитного поля \mathbf{H} (намагниченности $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$). Подчеркнем, что зависимость $\omega = \omega(\mathbf{k})$ в этом случае очень необычна: вдоль магнитного поля (намагниченности) она описывает аномальную дисперсию, а в плоскости перпендикулярной магнитному полю (намагниченности) — нормальную.

Имея явную зависимость энергии квазичастиц, т.е. частоты ω_0 от магнитного поля \mathbf{H} , можно, воспользовавшись определением (2.17), вычислить магнитный момент магнона, МСВ, магнитного поляритона. Так как мы рассмотрели только магнитное поле, параллельное оси анизотропии (оси легкого намагничивания), то имеем возможность вычислить лишь z -проекцию магнитного момента магнона β_z (индекс z в дальнейшем опускаем).

При микроскопическом рассмотрении, учитывающем только обменную и зеемановскую энергии, "элементарный беспорядок" есть волна минимального (разрешенного пространственным квантованием) отклонения спина атома от положения равновесия. Магнитный момент такой волны естественным образом совпадает с $g\hbar$ ($\beta = g\hbar$). При учете запаздывания, а также диполь-дипольного взаимодействия положение усложняется: волна описывает движение не только отклоненного спина, но и сопровождающую магнитную или электромагнитную волну. Нам кажется невозможным

"на пальцах" объяснить, чему "должен" быть равен магнитный момент магнона при любом значении волнового вектора \mathbf{k} . При вычислениях по формуле (2.17), когда справедлива формула (3.7), имеем "обычное" значение

$$\beta = -g\hbar, \quad (3.12)$$

когда справедливы формулы (2.16), дополненные выражением (3.6),

$$\begin{aligned} \beta_+ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_+(\mathbf{k})\omega_M}{(\omega_0 + \omega_M)^2} \frac{\cos^2 \theta}{[(\cos^2 \theta)/\mu_0 + \sin^2 \theta]^2} g\hbar, \\ \beta_- &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_-(\mathbf{k})\omega_M}{(\omega_0 + \omega_M)\omega_0} g\hbar. \end{aligned} \quad (3.13)$$

И, наконец, когда справедлива формула (3.5),

$$\beta = -\frac{1 + (\omega_M/2\omega_0) \sin^2 \theta}{1 + (\omega_M/\omega_0) \sin^2 \theta} g\hbar. \quad (3.14)$$

Переход к "обычной" формуле (3.11) осуществляется при $\theta = 0$, а также, если значение угла θ произвольно, при $\omega_0 \gg \omega_M$. Если $\omega_M \gg \omega_0$, то в широком диапазоне углов $\sin \theta \gg (2\omega_0/\omega_M)^{1/2}$

$$\beta = -\frac{1}{2} g\hbar. \quad (3.15)$$

4. Статистическая термодинамика ферромагнитных диэлектриков*

Основная особенность статистической термодинамики магнитных диэлектриков [9] состоит в том, что в таких телах, кроме фононов, есть низкочастотные квазичастицы — магны, осуществляющие магнитный беспорядок в кристалле. При температурах значительно меньших, чем температура Кюри (Нееля) T_C , магны представляют собой почти идеальный газ бозонов и, следовательно, свободная энергия магнетика имеет дополнительное (магнитное) слагаемое F_M :

$$F_M = T \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_v \int \ln \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\hbar\omega_v(\mathbf{k})}{T} \right] \right\} d^3k. \quad (4.1)$$

Здесь v — номер ветви магнитных колебаний (решений уравнения (2.1) или уравнения (2.4)), V — объем магнетика, температура в формулах — всегда в энергетических единицах, а при оценках — в кельвинах; условие $T \ll T_C$ позволяет распространить интегрирование на все \mathbf{k} -пространство и считать, что справедливы формулы, полученные в предыдущих разделах ($ak \ll 1$). Это оправдано тем, что вклад магнонов с $ak \gg 1$ при $T \ll T_C$ экспоненциально мал. В согласии с формулой (2.17) магнитный момент газа магнонов, определяющий температурную зависимость магнитного момента единицы объема тела, есть (естественно, речь идет о z -проекции магнитного момента \mathbf{M})

$$\Delta M(T) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_v \int \beta_v(\mathbf{k}) \left\{ \exp \left[\frac{\hbar\omega_v(\mathbf{k})}{T} \right] - 1 \right\}^{-1} d^3k. \quad (4.2)$$

Эта формула, пожалуй, одна из важнейших формул теории низкотемпературного магнетизма. Чаще всего

ограничиваются рассмотрением случая⁶ $T \gg \hbar\omega_0$, что позволяет использовать формулу (3.7'). При этом с большой точностью $\Delta M \propto T^{3/2}$, так как $\beta = -g\hbar$ (соответствующие формулы приведены в любом учебнике по теории магнитных явлений).

Мы вернемся к формуле (4.2) после замечания, относящегося к полному числу квазичастиц — магнонов — в единице объема $n_v = \sum_v n_v$,

$$n_v = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ \exp \left[\frac{\hbar\omega_v(\mathbf{k})}{T} \right] - 1 \right\}^{-1} d^3k. \quad (4.3)$$

При $T \ll T_C$ во многих случаях процессы взаимодействия магнонов друг с другом, во-первых, более вероятны, чем с другими квазичастицами (например, с фононами), а во-вторых, обладают тем свойством, что процессы с сохранением числа магнонов (они определяются обменным взаимодействием) более вероятны, чем процессы, в которых число магнонов изменяется (они определяются релятивистскими взаимодействиями, см. [4]). Если процессами с несохраняющимся числом частиц пренебречь, то газ магнонов (правда, если справедлив закон дисперсии (3.7')) очень напоминает газ обычных частиц. Однако есть одно очень существенное отличие: в равновесии химический потенциал газа магнонов $\zeta_M = 0$, в то время как химический потенциал газа настоящих частиц $\zeta_p \neq 0$ и однозначно определяется плотностью частиц и температурой. Для вырожденного бозе-газа частиц существует температура T_0 , при которой ζ_p обращается в нуль ($\zeta_0(T_0) = 0$) и ниже которой $\zeta_p \equiv 0$. Это явление называется конденсацией Бозе–Эйнштейна. При $T = T_0$ в системе должен произойти фазовый переход третьего рода. Он никогда не наблюдался, так как обычные газы конденсируются при $T > T_0$.

Многokrato возникал вопрос, возможна ли конденсация Бозе–Эйнштейна в газе магнонов. Как нам кажется, окончательного ответа на этот вопрос нет. И мы не предполагаем получить окончательный ответ. Мы хотим обратить внимание на два обстоятельства:

1. Речь может идти только об искусственно созданной неравновесной ситуации: при очень низкой температуре в системе создается неравновесный газ магнонов с плотностью n , в котором благодаря внутренним обменным взаимодействиям устанавливается равновесие, описываемое функцией Бозе с химическим потенциалом $\zeta_M \neq 0$.

2. Сходство конденсации Бозе–Эйнштейна в газе магнонов с аналогичным явлением в обычных частицах должно иметь место только в том случае, если справедлива формула (3.7'), а она, как мы знаем, имеет ограниченную область применимости.

Пусть в искусственно созданном газе магнонов при температуре значительно ниже $E_0 = \hbar\omega_0$ квазичастицы имеют энергии очень близкие к пороговой энергии⁷ E_0 , так что

$$E \geq E_0, \quad E - E_0 \ll \hbar\omega_M. \quad (4.4)$$

Это означает, что если можно пренебречь процессами, в которых число квазичастиц не сохраняется, то в резуль-

⁶ Напомним, что $\hbar\omega_0 \sim 1$ К при $H_{\text{эфф}} \sim 10^4$ Э.

⁷ Мы пренебрегаем запаздыванием ($c \rightarrow \infty$). В этом приближении $E_0 = \hbar\omega_0$ — пороговая энергия.

тате взаимодействия между магнонами возникнет квазиравновесный газ с плотностью $n = N/V$ и с температурой T , отличающейся от температуры тела. Закон дисперсии магнонов в этом случае описывается формулой (3.8). Возникает вопрос, может ли в такой системе произойти конденсация Бозе–Эйнштейна и какой характер она будет иметь?

Прежде всего надо отметить, что оба макроскопических параметра, описывающих газ магнонов (n и T), зависят от условий эксперимента, и, произнося, например слова "изменение температуры", мы предполагаем изменение условия возбуждения спиновых волн (магнонов).

Возможность конденсации Бозе–Эйнштейна определяется существованием решения уравнения для температуры конденсации T_0 :

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \left\{ \exp \left[\frac{E(\mathbf{p})}{T_0} \right] - 1 \right\}^{-1} d^3p,$$

т.е.

$$\zeta = \zeta(T_0) - E_0 = 0. \quad (4.5)$$

Химический потенциал газа магнонов ζ не может быть больше E_0 , так как в противном случае нормировочный интеграл расходится.

Используя выражение (3.8), нетрудно получить

$$T_0 = T_{\text{tr}}^{3/5} \left(\frac{\hbar\omega_M}{\gamma} \right)^{2/5}, \quad (4.6)$$

$$T_{\text{tr}} = \frac{(2\pi\hbar)^2 n^{2/3}}{2m^*}, \quad (4.7)$$

$$\gamma = \int_0^\infty \sqrt{u} \exp(-u) |\ln[1 - \exp(-u)]| du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Параметр T_{tr} по порядку величины совпадает с обычной (тривиальной) температурой конденсации Бозе–Эйнштейна.

Переход описывается выведенными здесь формулами, если его температура T_0 удовлетворяет предположению $T_0 \ll \hbar\omega_M$. Отсюда легко получить условие для плотности газа магнонов (см. (3.7)):

$$na \ll \frac{\sqrt{\pi}}{2^{7/2}} \left(\frac{\omega_M}{\omega_{\text{ex}}} \right)^{3/2}. \quad (4.8)$$

Осталось выяснить, по какому закону $\zeta = \zeta(T)$ обращается в нуль при $T \rightarrow T_0$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} n - n_0(T) &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty p^2 dp \times \\ &\times \int_0^\pi \theta d\theta \left\{ \left[\exp \left(\frac{E(p, \theta) + |\zeta|}{T} \right) - 1 \right]^{-1} - \right. \\ &\left. - \left[\exp \left(\frac{E(p, \theta)}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$n_0 = n \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \quad (4.10)$$

— плотность "движущихся" магнонов.

Так как при $T \rightarrow T_0$ химический потенциал $\zeta \rightarrow 0$, то можно воспользоваться разложением правой части по $|\zeta|$ и получить

$$n - n_0(T) \simeq 2\pi \frac{(2m^* T_0)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\zeta}{\hbar\omega_M}, \quad (4.11)$$

откуда

$$\zeta \simeq - \frac{5}{4\pi\Gamma(3/2)\zeta(3/2)} \frac{\hbar\omega_M}{T_0} \left(\frac{T_{\text{tr}}}{T_0} \right)^{3/2} (T - T_0), \quad T \geq T_0. \quad (4.12)$$

В данном случае, как видно, конденсация Бозе–Эйнштейна — фазовый переход не третьего, а второго рода (напомним, что химический потенциал ζ — первая производная от термодинамического потенциала Φ по числу частиц, а, согласно (4.11), первая производная от ζ по температуре T имеет скачок, т.е. вторая (смешанная) производная термодинамического потенциала имеет скачок (!)). Обычно фазовый переход третьего рода иллюстрируют существованием скачка у производной теплоемкости. В данном случае в согласии с общей теорией фазовых переходов второго рода скачок имеет сама теплоемкость. Надо только помнить, что речь идет о магнонной ("искусственной") температуре, которая не совпадает с решеточной (фононной) температурой образца.

Наиболее иллюстративная характеристика газа магнонов — его магнитный момент. В данном случае вместо формулы (4.2) надо использовать формулу, содержащую химический потенциал ζ (мы несколько изменили обозначения):

$$\Delta\tilde{M} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \left[\exp \left(\frac{E + |\zeta|}{T} \right) - 1 \right]^{-1} \beta(\mathbf{p}) d^3p, \quad (4.13)$$

причем, согласно (3.13),

$$\beta(\mathbf{p}) = -g\hbar \frac{1 + (\hbar\omega_M/2E_0) \sin^2 \theta}{1 + (\hbar\omega_M/E_0) \sin^2 \theta} \simeq -g\hbar \left(1 - \frac{\hbar\omega_M}{2E_0} \theta^2 \right). \quad (4.14)$$

Отсюда⁸, утя существование двух значений угла ($\theta = 0$, $\theta = \pi$), при которых $E = E_0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Delta\tilde{M}(T)}{V} \right) &= \frac{\beta}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar\omega_M}{E_0} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty \int_0^\pi \left\{ \exp \left[\left(\frac{p^2}{2m^*} + \hbar\omega_M \theta^2 + |\zeta| \right) \frac{1}{T} \right] - 1 \right\}^{-1} \times \\ &\times \theta^3 p^2 dp d\theta, \quad \beta = g\hbar. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Скачок производной $\partial(\Delta\tilde{M}/V)/\partial T$ — результат обращения в нуль химического потенциала ζ по линейному

⁸ Заметим, что если не учитывать зависимость магнитного момента от угла θ , то магнитный момент газа магнонов в данном случае вовсе не зависит от температуры: он определяется числом магнонов, которое, по предположению, является сохраняющейся величиной.

закону (см. (4.12)):

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial T} \frac{1}{\tilde{M}} = \frac{-5}{12} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{E_0} \simeq -\frac{0,3}{E_0}. \quad (4.16)$$

Скачок положителен, так как $\tilde{M} < 0$ за счет магнитного момента $\beta(\mathbf{p})$.

Мы трактовали формулу (3.8) как увеличение эффективной размерности \mathbf{p} -пространства. Проверим, соответствует ли характер перехода значению $D_{\text{eff}} = 5$. В изотропном D -мерном пространстве при

$$E = \sum_{i=1}^D \frac{p_i^2}{2m^*}, \quad i = 1, \dots, D$$

температура перехода есть

$$T_D = \frac{n_D^{2/D} (2\pi\hbar)^2}{A(D) \Gamma(3/2) \zeta(3/2) \cdot 2^{(D-1)/2} m^*}, \quad (4.17)$$

где

$$A(D) = \frac{(2\pi)^{D/2}}{\Gamma(D/2 - 2)}$$

— площадь единичной сферы в D -мерном пространстве, а плотность частиц n_D имеет размерность см^{-D} . Видно, что формула для T_D при $D = 5$ очень похожа на формулу (4.6): подставив в (4.6) значение T_{tr} , получим с точностью до численного множителя

$$T_0 = \left(n^{2/5} \frac{\hbar^2}{m^*} \right) \left(\frac{\omega_M m^*}{\hbar} \right)^{2/5}.$$

Множитель $(\omega_M m^* / \hbar)^{2/5}$ обеспечивает правильность размерности. Выясним теперь, каков характер перехода. Поступая аналогично предыдущему рассмотрению (см. (4.9)), найдем

$$n_D - n_{D0}(T) = \frac{A(D)}{(2\pi\hbar)^D} \int p^{D-1} dp \left\{ \left[\exp\left(\frac{E(p) + |\zeta|}{T}\right) - 1 \right]^{-1} - \left[\exp\left(\frac{E(p)}{T}\right) - 1 \right]^{-1} \right\}. \quad (4.18)$$

Это выражение показывает, что начиная с $D = 5$ (при $D \geq 5$) химический потенциал ζ линейно зависит от $T - T_D$ при $T \rightarrow T_D$ и, следовательно, конденсация Бозе–Эйнштейна — фазовый переход второго рода.

Сравнение описания конденсации Бозе–Эйнштейна в пятимерном пространстве с описанием конденсации магнонов показывает, что введение эффективной размерности $D_{\text{eff}} = 5$ для магнонов с законом дисперсии (3.8) оправданно.

Вернемся теперь к формуле (4.2), естественно, дополненной значением магнитного момента магнона $\beta_v(\mathbf{k})$ (см. формулы (3.11)–(3.14)). Опустив традиционную область температур ($E_0 \ll T \ll T_C$), вычислим температурную зависимость намагниченности при $T \ll E_0$. Результаты раздела 3 показывают, что интервал температур от нуля до E_0 разбивается на два. В одном справедливы формулы (3.5), а в другом (в непосредственной близости к абсолютному нулю) — формулы (2.16), (3.4) и (3.12). Границу интервалов T_{lim} мы определим ниже (см. (4.25)).

При $T_{\text{lim}} \ll T \ll E_0$ можно воспользоваться приближенной зависимостью энергии магнона от его импульса (3.8) и приближенным значением магнитного момента ($\beta = -g\hbar$). Поэтому здесь, как и при более высокой температуре, температурная часть намагниченности пропорциональна плотности магнонов:

$$\Delta \tilde{M} = -g\hbar n(T), \quad (4.19)$$

$$n(T) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \left\{ \exp\left[\frac{E(\mathbf{p})}{T}\right] - 1 \right\}^{-1} d^3 p,$$

$$E(\mathbf{p}) = E_0 + \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{2} \hbar \omega_M \theta^2,$$

причем множитель 2 введен, чтобы учесть то обстоятельство, что энергия имеет минимальное значение по углу при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Отсюда

$$\Delta \tilde{M}(T) = -\frac{g\hbar}{8\pi^2 \hbar^3} \frac{T}{\hbar \omega_M} (2m^* T)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_0}{T}\right) \gamma,$$

$$\gamma = \int_0^\infty \sqrt{z} \exp(-z) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.20)$$

"Лишняя" степень температуры в этом выражении — свидетельство 5-мерного характера поведения магнонов в этом пределе.

В непосредственной близости к абсолютному нулю, согласно сказанному выше,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{M} = & -\frac{g\hbar}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int \frac{\omega_+(\mathbf{k}) \omega_M}{(\omega_0 + \omega_M)^2} \frac{\cos^2 \theta}{[(\cos^2 \theta)/\mu_0 + \sin^2 \theta]^2} \times \right. \\ & \times \left[\exp\left(\frac{\hbar \omega_+(\mathbf{k})}{T}\right) - 1 \right]^{-1} d^3 k + \\ & \left. + \int \frac{\omega_-(\mathbf{k}) \omega_M}{(\omega_0 + \omega_M) \omega_0} \left[\exp\left(\frac{\hbar \omega_-(\mathbf{k})}{T}\right) - 1 \right]^{-1} d^3 k \right\}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Напомним: законы дисперсии $\omega = \omega_\pm(k)$ заданы формулами (2.16), а статическая магнитная восприимчивость — формулой (3.6). Результат интегрирования удобно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{M}(T)}{M_0} & \simeq -\frac{T}{\hbar \omega_0} \left(\frac{T}{T_M} \right)^3 I(\mu_0), \quad M_0 = \frac{g\hbar}{a^3}, \\ T_M & = \frac{2\pi\hbar\tilde{c}}{a}, \quad \tilde{c} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (4.22) \end{aligned}$$

Введен параметр a порядка размера ячейки, так что момент M_0 равен магнитному моменту насыщения, а

$$\begin{aligned} I & = \frac{(2\pi)^5}{480} \frac{(\mu_0 - 1)^2}{\mu_0^2} \times \\ & \times \int_0^\pi \left[\cos^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{\mu_0} + \sin^2 \theta \right)^{-7/2} + \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \right] \sin^2 \theta d\theta. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Температурная зависимость ($\Delta \tilde{M} \propto T^4$) стандартна: она определяется плотностью состояний и тем, что при $k \rightarrow \infty$ магнитный момент поляритона стремится к

нулю пропорционально k . Интересна зависимость от магнитного поля. Для ее выяснения, согласно последней формуле, надо определить прежде всего зависимость $I = I(\mu_0)$:

$$I(\mu_0) \simeq \begin{cases} \frac{8\pi^5}{45} (\mu_0 - 1)^2, & \mu_0 \geq 1, \\ \frac{2\pi^5}{75} \mu_0^{5/2}, & \mu_0 \ll 1, \end{cases}$$

или (см. (3.6))

$$I(H_0) = \begin{cases} \frac{2\pi^5}{75} \left(\frac{4\pi M}{H_0} \right)^{5/2}, & H_0 \ll 4\pi M, \\ \frac{8\pi^5}{45} \left(\frac{4\pi M}{H_0} \right)^2, & H_0 \gg 4\pi M. \end{cases}$$

Формулы (4.22) и (4.20) дают возможность оценить граничную температуру T_{lim} . Правда, для этого надо переписать формулу (4.20), введя температуру $T_C \gg E_0$ по формуле $T_C = \hbar\omega_{\text{ex}}$ и, воспользовавшись определением эффективной массы (3.7'):

$$\frac{\Delta \tilde{M}}{M_0} = -\frac{1}{8\pi^{3/2}} \frac{T}{\hbar\omega_M} \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_0}{T}\right). \quad (4.24)$$

Отсюда и из (4.23) имеем (при $\mu_0 \sim 1$, т.е. при $\omega_0 \sim \omega_M$)

$$T_{\text{lim}} \simeq E_0 \left| \ln \frac{T_M^3}{(\hbar\omega_{\text{ex}})^{3/2} E_0^{3/2}} \right|^{-1} \ll E_0, \quad (4.25)$$

так как по оценке $T_M \sim 4 \times 10^7$ К, $\hbar\omega_{\text{ex}} \sim 10^2 - 10^3$ К, а $E_0 \sim 1$ К.

Последние формулы важны с двух точек зрения: во-первых, освоение низкотемпературного диапазона идет столь быстрыми темпами, что есть надежда на тщательные измерения температурной зависимости намагниченности, когда учет приведенных формул необходим. Во-вторых, они демонстрируют общее положение: резонансное взаимодействие магнона с квазичастицей, закон дисперсии которой обладает свойствами голдстоуна (фотон, фонон), приводит к "ликвидации" щели в спектре магнона, а вследствие этого к "выходу" при $T \rightarrow 0$ на степенную зависимость термодинамических характеристик от температуры (даже таких специфически магнитных, как магнитный момент тела), так как в результате взаимодействия с магном энергия голдстоуна зависит от магнитного поля — голдстоун приобретает магнитный момент.

5. Одноосный антиферромагнетик

Задача этого раздела — продемонстрировать, как магнитная природа и структура основного состояния тела проявляется в свойствах низкочастотных возбуждений. Подробнее об этом можно прочитать в [10, 11].

Тензор магнитных проницаемостей μ_{ik} одноосного (двухподрешеточного) антиферромагнетика имеет структуру (1.19), если постоянное магнитное поле \mathbf{H} направлено вдоль избранной оси. Для рассматриваемого здесь двухподрешеточного антиферромагнетика типа "легкая ось" (ЛО) избранной осью служит то направление, вдоль которого выстраиваются антипараллельно магнитные моменты подрешеток при $H < H_{\text{SF}}$; при $H = H_{\text{SF}}$ происходит переориентационный фазовый

переход первого рода (spin-flor): магнитные моменты подрешеток опрокидываются и занимают симметричное положение под углом ψ к оси, причем $\cos \psi = H/H_E$. При $H = H_E$ (как правило, $H_E \gg H_{\text{SF}}$) магнитные моменты подрешеток схлопываются — происходит фазовый переход второго рода (spin-flip). Мы несколько упростили картину переориентационного перехода. При этом магнитные поля H_{SF} и H_E вместе с абсолютным значением намагниченности подрешеток при $T = 0$ могут служить полным набором величин, характеризующих антиферромагнетик. Поля H_{SF} и H_E можно выразить через обменную константу δ и константы анизотропии β, β' . Равновесные конфигурации магнитных моментов ЛО-антиферромагнетика изображены на рис. 3, а в табл. 2 выписаны значения компонент тензора μ_{ik} и эффективных магнитных проницаемостей, причем

$$\begin{aligned} H_{\text{SF}} &= M\sqrt{2\delta(\beta - \beta')}, & H_E &= 2\delta M, & \Omega_{\text{SF}} &= gH_{\text{SF}}, \\ \Omega &= gH, & \Omega_M &= 8\pi gM, \\ \Omega_\psi^2 &= (gM)^2 [4\delta^2 \cos^2 \psi - 2\delta(\beta - \beta') \sin^2 \psi], \\ \cos \psi &= \frac{H}{H_E}, & \mu_0 &= 1 + \frac{4\pi}{\delta} \delta \gg \beta, \\ \beta' &\sim 1, & \beta - \beta' &> 0. \end{aligned}$$

Прежде всего отметим, что согласно табл. 2, при переходе к нулевому магнитному полю изменяется число резонансных частот магнитной проницаемости: при $H \neq 0$ их две, а при $H = 0$ — одна. При $H = H_E$ компоненты тензора μ_{ik} непрерывны. Если считать, что $H_{\text{SF}} \ll H_E$, то при $H_{\text{SF}} \leq H < H_E$ анизотропия тензора μ_{ik} в базисной плоскости заметна только в непосредственной близости к переходу спин-флор. Так как

$$\Omega_\psi = g\sqrt{H^2 \left(1 + \frac{H_{\text{SF}}^2}{H_E^2} \right) - H_{\text{SF}}^2}$$

(см. табл. 2), то при $H = H_{\text{SF}}$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{\Omega_M}{\Omega_E} \frac{\Omega_{\text{SF}}^2}{\Omega_{\text{SF}}^4/\Omega_E^2 - \omega^2}, \\ \mu_2 &= 1 + \frac{\Omega_M}{\Omega_E} \frac{\Omega_{\text{SF}}^2}{\Omega_E^2} \frac{\Omega_{\text{SF}}^2}{\Omega_{\text{SF}}^4/\Omega_E^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

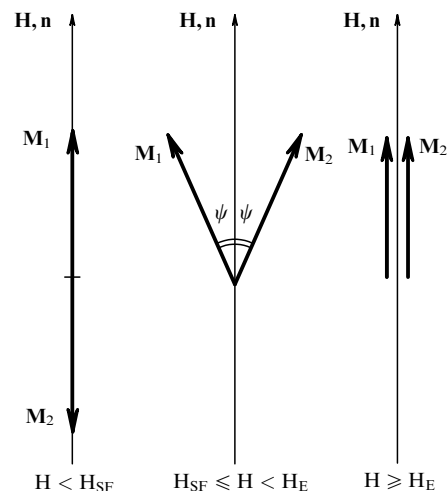


Рис. 3. Равновесные состояния АФМ типа ЛО.

Таблица 2

$H = 0$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1 + \frac{4\pi}{\delta} \frac{\Omega_{\text{SF}}^2}{\Omega_{\text{SF}}^2 - \omega^2},$ $\mu' \equiv 0$	$\mu_{\text{eff}} = 1 + \frac{4\pi}{\delta} \frac{\Omega_{\text{SF}}^2}{\Omega_{\text{SF}}^2 - \omega^2}$
$0 < H < H_{\text{SF}}$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1 + \frac{2\pi}{\delta} \Omega_{\text{SF}}^2 \left[\frac{1}{\Omega_{\text{SF}}^2 - (\Omega - \omega)^2} + \frac{1}{\Omega_{\text{SF}}^2 - (\Omega + \omega)^2} \right],$ $\mu' = \frac{2\pi}{\delta} \Omega_{\text{SF}}^2 \left[\frac{1}{\Omega_{\text{SF}}^2 - (\Omega - \omega)^2} - \frac{1}{\Omega_{\text{SF}}^2 - (\Omega + \omega)^2} \right]$	$\mu_{\text{eff}} = \frac{[(1 + 4\pi/\delta)\Omega_{\text{SF}}^2 - \Omega^2 - \omega^2]^2 - 4\Omega^2\omega^2}{(\Omega_{\text{SF}}^2 - \Omega^2 - \omega^2)[\Omega_{\text{SF}}^2(1 + 4\pi/\delta) - \Omega^2 - \omega^2] - 4\omega^2\Omega^2}$
$H_{\text{SF}} \leq H < H_{\text{E}}$	$\mu_1 = 1 + \frac{\delta}{4\pi} \frac{\Omega_{\text{M}}^2 \cos^2 \psi}{\Omega_{\psi}^2 - \omega^2},$ $\mu_2 = 1 + \frac{4\pi}{\delta} \frac{\Omega_{\psi}^2}{\Omega_{\psi}^2 - \omega^2},$ $\mu' = \frac{\Omega_{\text{M}}\omega \cos \psi}{\Omega_{\psi}^2 - \omega^2}$	$\mu_{\text{eff}} = \frac{\Omega_{\psi}^2(1 + 4\pi/\delta) + \Omega_{\text{M}}^2 \cos^2 \psi(1 + 4\pi/\delta) - \omega^2}{\Omega_{\psi}^2 + (4\pi/\delta)\Omega_{\text{M}}^2 \cos^2 \psi - \omega^2}$
$H \geq H_{\text{E}}$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1 + \frac{\Omega_{\text{M}}\Omega}{\Omega^2 - \omega^2},$ $\mu' = \frac{\Omega_{\text{M}}\omega}{\Omega^2 - \omega^2}$	$\mu_{\text{eff}} = \frac{(\Omega + \Omega_{\text{M}})^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \Omega\Omega_{\text{M}} - \omega^2}$

Это означает, что поляризуемости по разным направлениям в плоскости перпендикулярной легкой оси различаются во много раз:

$$\frac{\mu_1 - 1}{\mu_2 - 1} = \left(\frac{H_{\text{E}}}{H_{\text{SF}}} \right)^2, \quad (5.2)$$

но при $H_{\text{E}} > H \gg H_{\text{SF}}$ частота $\Omega_{\psi} \simeq \Omega$ и анизотропия в базисной плоскости мала,

$$\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq 1 + \frac{\Omega_{\text{M}}}{\Omega_{\text{E}}} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}. \quad (5.3)$$

Значение тензора магнитной проницаемости позволяет, как ясно из предыдущих разделов, вычислить закон дисперсии объемного магнитного поляритона.

Начнем с $H = 0$ (первая строка табл. 2). Этот случай интересен тем, что при существовании низко расположенной резонансной частоты магнитного происхождения у немагнитного антиферромагнетика отсутствует гиротропия. Есть еще одно важное обстоятельство. Обе характерные частоты — частота резонанса, в которой $\mu = \infty$, и частота антирезонанса ($\mu = 0$) — имеют близкие значения в меру малости отношения $\Omega_{\text{M}}/\Omega_{\text{E}} = 4\pi/\delta$.

При распространении перпендикулярно избранной оси ($\theta = \pi/2$) закон дисперсии одной из двух электромагнитных волн содержит магнитную проницаемость:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \frac{\Omega_{\text{SF}}^2(1 + \Omega_{\text{M}}/\Omega_{\text{E}}) - \omega^2}{\Omega_{\text{SF}}^2 - \omega^2}. \quad (5.4)$$

Это и есть закон дисперсии магнитного поляритона. Зависимость частоты ω от волнового вектора k схематически изображена на рис. 4. Близость частот резонанса и антирезонанса проявляется, в частности, в том, что скорость света \tilde{c} при $\omega \ll \Omega_{\text{SF}}$ близка к скорости света при $\omega \gg \Omega_{\text{SF}}$:

$$\tilde{c} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\Omega_{\text{M}}}{\Omega_{\text{E}}} \right) \simeq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (5.5)$$

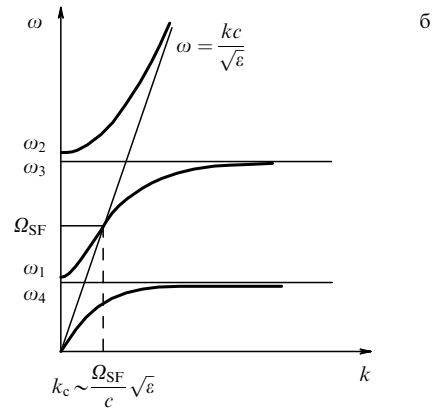
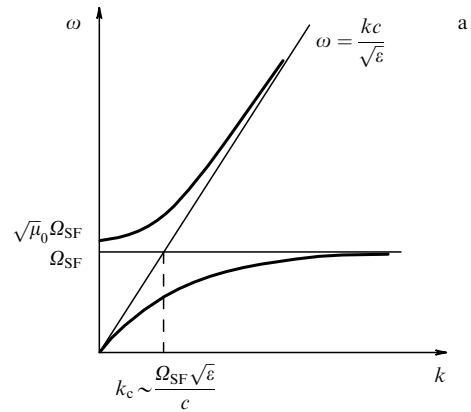


Рис. 4. Закон дисперсии магнитного поляритона в ЛО-антиферромагнетике при $H = 0$ (а) и при $0 < H < H_{\text{SF}}$ (б). Характерные частоты: $\omega_{1,2} = \Omega_{\text{SF}}(1 + 2\pi/\delta) \pm \Omega$, $\omega_{3,4} = \Omega_{\text{SF}}(1 + \pi/\delta) \pm \Omega$, $\Omega = gH$, $\Omega_{\text{SF}} = gH_{\text{SF}}$.

Квазистатистический предел ($k \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \text{const}$) соответствует $\mu = \infty$, т.е.

$$\omega = \Omega_{\text{SF}}. \quad (5.6)$$

Однако в данном случае ($\mu' \equiv 0$), согласно сказанному во введении, квазистатический предел, полученный из уравнений Максвелла, не совпадает с решением магнитостатической задачи, из чего следует, что при $\theta = \pi/2$ существует строго продольное колебание, его частота — корень уравнения $\mu(\omega) = 0$, т.е.

$$\omega = \Omega_{\text{SF}} \left(1 + \frac{\Omega_{\text{M}}}{\Omega_{\text{E}}} \right). \quad (5.7)$$

В [10] показано, что строго продольная ветвь колебаний существует исключительно при распространении волны перпендикулярно легкой оси (напомним: $\mu_3 = 1$, кристалл анизотропен!). Действительно, если волна распространяется под углом θ к ЛО, то существуют два магнитных поляритона различной поляризации с законами дисперсии

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \frac{\mu}{\mu \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}, \quad (5.8)$$

а из уравнений магнитостатики следует

$$\mu \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 0. \quad (5.9)$$

При $\theta \neq \pi/2$ закон дисперсии магнитостатической волны совпадает с предельным ($k \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$) законом дисперсии одного из магнитных поляритонов, но при $\theta = \pi/2$ существует только один магнитный поляритон (первое из уравнений (5.8)), а магнитостатическая волна "отщепляется" от фотона — уравнение (5.9) превращается в точное:

$$\mu = 0. \quad (5.10)$$

Мы выписали (см. (5.6) и (5.7)) лишь резонансную и антирезонансную частоты. "Превращения" соответствующих выражений в законы дисперсии спиновых волн — магнонов, естественно, требуют учета пространственной дисперсии магнитной проницаемости, или (эквивалентное утверждение) неоднородного обменного взаимодействия.

В таблице 2 приведены выражения для μ_{eff} , полученные на основании следующей записи закона дисперсии магнитного поляритона:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\text{eff}}(\omega). \quad (5.11)$$

Вместе со значениями μ_1 , μ_2 и μ' они дают возможность определить частотную зависимость и, тем самым, закон дисперсии магнитного поляритона. Отметим, что только при $0 \neq H < H_{\text{SF}}$ закон дисперсии магнитного поляритона в антиферромагнетике качественно (числом ветвей) отличается от закона дисперсии в ферромагнетике. При $H = H_{\text{E}}$ антиферромагнетик по сути "превращается" в ферромагнетик с намагниченностью равной $2M$; поэтому его высокочастотные свойства неотличимы от свойств ферромагнетика. При $H_{\text{SF}} < H < H_{\text{E}}$ выписанные формулы не описывают вращения магнитных моментов вокруг ЛО и, тем самым, одной ветви колебаний. Этот вопрос на простейшем примере проанализирован ниже в этом разделе.

Пространственную дисперсию магнитной проницаемости, которую мы проанализируем при $H < H_{\text{SF}}$, характеризуют два тензора неоднородного обменного

взаимодействия: α_{ik} и α'_{ik} (ср. с разделом 3). Первый описывает обменное взаимодействие внутри каждой подрешетки, второй — между подрешетками. В кубическом кристалле оба тензора вырождаются в скаляры ($\alpha_{ik} \rightarrow \alpha \delta_{ik}$; $\alpha'_{ik} \rightarrow \alpha' \delta_{ik}$). Используя уравнения Ландау–Лифшица, можно показать, что учет пространственной дисперсии приводит к перенормировке констант анизотропии

$$\beta - \beta' \rightarrow \beta_{\text{eff}} = \beta - \beta' + (\alpha_{ik} - \alpha'_{ik}) k_i k_k \quad (5.12)$$

и обменной константы

$$\delta \rightarrow \delta + \alpha'_{ik} k_i k_k. \quad (5.13)$$

Матрица $\alpha_{ik} - \alpha'_{ik}$ должна быть положительно определенной для устойчивости антиферромагнитного состояния [3]. Порядок величины обменной константы, как и в ферромагнетиках, может быть оценен по температуре фазового перехода (по температуре Нееля). Если считать, что $\delta \sim \Theta_{\text{N}}/\mu M$ ($\mu = g\hbar$ — магнетон Бора), то $\alpha, \alpha' \sim a^2 \Theta_{\text{N}}/\mu M$. Отсюда ясно, что при $ak \ll 1$ перенормировку обменной константы можно не учитывать, а перенормировку константы анизотропии учитывать необходимо: она может привести к качественному изменению характера спектра. Например, в отсутствие магнитного поля ($H = 0$) при $(ak)^2 \gg (\beta - \beta')\mu M/\Theta_{\text{N}}$ квазистатический предел (5.6) "превращается" в спиновую волну с линейным законом дисперсии. Этот предельный случай наиболее подробно изучен в литературе. Мы в дальнейшем примем, что зависимость от волнового вектора \mathbf{k} содержит только H_{SF} :

$$H_{\text{SF}} = \sqrt{(H_{\text{SF}}^0)^2 + \tilde{H}_{\text{E}}^2 (ak)^2}, \quad (5.14)$$

где H_{SF}^0 — поле перехода без учета пространственной дисперсии.

Решая уравнения магнитостатики (2.14), нетрудно найти закон дисперсии спиновых волн:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \Omega_{\text{SF}}^2 \left(1 + \frac{2\pi \sin^2 \theta}{\delta} \right) + \Omega^2 \pm \\ & \pm \sqrt{4\Omega^2 \Omega_{\text{SF}}^2 + \frac{8\pi \sin^2 \theta}{\delta} \Omega^2 \Omega_{\text{SF}}^2 + \Omega_{\text{SF}}^4 \left(\frac{2\pi \sin^2 \theta}{\delta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

При $H = 0$ из (5.15) мы получаем два решения:

$$\omega_-^2 = \Omega_{\text{SF}}^2, \quad \omega_+^2 = \Omega_{\text{SF}}^2 \left(1 + \frac{4\pi \sin^2 \theta}{\delta} \right). \quad (5.16)$$

При использовании выражения для μ , содержащегося в первой строке табл. 2, первого решения (ω_-) нет. Сообщение непрерывности подсказывает, что его не следует отбрасывать. Второе решение (ω_+) содержит зависимость от направления волнового вектора. Соответствующую энергию спиновой волны ($E = \hbar\omega_+$) можно записать следующим образом (см. (5.16) и (5.12)):

$$E^2 = (\mu H_{\text{SF}})^2 + (\mu H_{\text{A}})^2 \sin^2 \theta + I_{\text{ex}}^2 (ak)^2, \quad (5.17)$$

$H_{\text{A}} = 4\pi M[2(\beta - \beta')]^{1/2}$ — поле анизотропии; I_{ex} — величина порядка обменного интеграла между атомами

($I_{\text{ex}} \sim \Theta_N$). Выписанная формула показывает, что диполь-дипольное взаимодействие приводит к анизотропии щели в спектре магнонов. Правда, она мала, так как $H_A^2/H_{\text{SF}}^2 \sim 1/\delta \ll 1$. Существование неаналитической зависимости от направления вектора \mathbf{k} (зависимость $E(\theta)$ при $k=0$) приводит к описанному в разделе 4 увеличению размерности \mathbf{k} -пространства магнонов.

Выясним, как проявляет себя диполь-дипольное взаимодействие при магнитном поле, равном H_{SF} (верхняя граница области существования коллинеарного режима). В используемом здесь приближении у одной из ветвей колебаний (у ω_-) при $H = H_{\text{SF}}$ отсутствует щель. В используемом приближении ширина петли гистерезиса при переходе спин-флоп равна нулю и $H = H_{\text{SF}}$ совпадает с полем лабильности (ср. с [12]). Интересно отметить, что учет диполь-дипольного взаимодействия не изменяет ситуацию — щель равна нулю при всех углах $\theta(\omega_-(k=0)=0)$, а энергия магнона такова:

$$E_- = \frac{I_{\text{ex}} a k}{2\mu H_{\text{SF}}} \sqrt{I_{\text{ex}}^2 (a k)^2 + (\mu H_A)^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.18)$$

где $\mu H_{\text{SF}} = g\hbar\Omega_{\text{SF}} \sim \mu\sqrt{H_E H_A}$.

Статистико-термодинамическим и кинетическим свойствам антиферромагнетиков в настоящем обзоре практически не будет уделено места. Однако нам хочется отметить своеобразную температурную зависимость магнонной части теплоемкости антиферромагнетика, непосредственно связанную с существованием диполь-дипольной энергии в спектре магнона (5.18).

При низких температурах ($T \rightarrow 0$) достаточно рассматривать ту ветвь спиновых волн, которая в нашем приближении не имеет щели. Поэтому речь пойдет только о "–"-ветви.

Опустив второе слагаемое под корнем в (5.18), мы приходим к закону дисперсии магнона, напоминающему закон дисперсии нерелятивистской частицы с эффективной массой

$$m^* = \frac{\hbar^2}{a^2} \frac{\mu H_{\text{SF}}}{I_{\text{ex}}^2} \sim \frac{\hbar^2}{a^2} \sqrt{\frac{H_A}{H_E}} \frac{1}{I_{\text{ex}}} \quad (5.19)$$

и, следовательно, с теплоемкостью пропорциональной $T^{3/2}$. Эффективная масса магнона в антиферромагнетике мала в меру малости отношения H_A/H_E .

Для того чтобы продемонстрировать роль "потерянной" ветви колебаний магнитных моментов, можно воспользоваться простейшей моделью антиферромагнетика. Рассмотрим вслед за [11] изотропный антиферромагнетик, в котором отсутствует анизотропия, т.е. в выражении для плотности энергии оставлены лишь обменные слагаемые и зеемановская энергия. В отличие от предыдущего рассмотрения учтено обменное взаимодействие.

Итак,

$$W = \delta \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} \right) + \alpha' \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_i} - (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{H}. \quad (5.20)$$

Обменная константа $\delta \gg 1$, а $|\alpha|, |\alpha'| \sim \delta a^2$. Из (5.20) следует, что магнитные моменты \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 при $H < 2\delta M \equiv H_E$ расположены симметрично относи-

тельно магнитного поля \mathbf{H} (под углом ψ , см. рис. 3):

$$\cos \psi = \frac{H}{H_E}, \quad H \leq H_E = 2M\delta. \quad (5.21)$$

Рассматривая малые колебания магнитных моментов в переменном магнитном поле $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, нетрудно вычислить тензор магнитных восприимчивостей $\hat{\chi}$. Если $\mathbf{z} \parallel \mathbf{H}$, магнитные моменты \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 лежат в плоскости xz , то его компоненты равны

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{2g^2 M(H + M\alpha_+ k^2 \cos \psi) \cos \psi}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \\ \chi_{yy} &= \chi_{xx} + \frac{1}{\delta} \frac{\omega_{\parallel}^2(k)}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \\ \chi_{zz} &= \frac{1}{\delta} \frac{\omega_{\parallel}^2(k)}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \quad \chi' = \frac{2\omega g M \cos \psi}{\omega_{\perp}^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\omega_{\perp}^2(k) = g^2(H + M\alpha_+ k^2 \cos \psi)^2 + 2(gM \sin \psi)^2 \delta \alpha_- k^2,$$

$$\omega_{\parallel}^2(k) = 2(gM \sin \psi)^2 \delta \alpha_- k^2. \quad (5.23)$$

Наконец,

$$\alpha_{\pm} = \alpha \pm \alpha'. \quad (5.24)$$

Условие устойчивости модели требует положительности δ и $\alpha - \alpha'$.

Эта модель не описывает переход спин-флоп, но способна описать переход спин-флип — фазовый переход второго рода — схлопывание магнитных моментов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 при $H = H_E$. При $H = H_E$ частота продольных колебаний обращается в нуль, а частота поперечных компонент и значения поперечных компонент тензора χ_{ik} имеют обычный для ферромагнетика вид (с плотностью магнитного момента, равной $2M$):

$$\begin{aligned} \omega_{\perp}(k) &= g(H + M\alpha_+ k^2), \\ \chi_{xx} = \chi_{yy} &= \frac{2gM\omega_{\perp}(k)}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \\ \chi' &= \frac{2\omega g M}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \quad H \geq H_E. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Остановимся на случае $H < H_E$, считая, что значение H не слишком близко к H_E . Из дальнейшего будет ясно, что близость к H_E определяется параметром δ , т.е.

$$1 - \frac{H}{H_E} \gg \frac{1}{2\delta}. \quad (5.26)$$

В этом случае хорошим приближением может служить выражение, в котором за дисперсию ответствен только антиферромагнитный механизм. Тогда формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} \omega_{\perp}^2 &\simeq (gH)^2 + v_a^2(H)k^2, \quad \omega_{\parallel}^2 = v_a^2(H)k^2, \\ v_a^2 &= 2(gM)^2 \left(1 - \frac{H^2}{H_E^2} \right) \delta \alpha_-. \end{aligned} \quad (5.27)$$

В этом же приближении

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{1}{\delta} \frac{(gH)^2}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, & \chi_{yy} &= \frac{1}{\delta} \frac{\omega_{\perp}^2(k)}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \\ \chi_{zz} &= \frac{1}{\delta} \frac{\omega_{\parallel}^2(k)}{\omega_{\parallel}^2(k) - \omega^2}, & \chi' &= \frac{1}{\delta} \frac{gH\omega}{\omega_{\perp}^2(k) - \omega^2}, \quad H \leq H_E. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Наиболее важный для дальнейшего рассмотрения параметр, входящий в выражение (5.27), — скорость

$$v_a(H=0) = gM\sqrt{2\alpha_-}\delta \equiv v_0. \quad (5.29)$$

При обычных значениях величин H_E и μ ($H_E \sim 10^6$ Э, $\mu \sim 10^{-20}$ эрг Гс $^{-1}$) скорость составляет $v_0 \sim 10^5$ см с $^{-1}$, что, естественно, значительно меньше скорости света c .

Учет пространственной дисперсии "превратил" нулевую частоту колебаний в голдстоун с линейным законом дисперсии, а благодаря отличию χ_{zz} от нуля "включил" голдстоун в электродинамику магнетика.

Выясним, как проявляет себя голдстоун в высокочастотных свойствах магнетика, для чего проанализируем законы дисперсии магнитного поляритона.

Начнем со случая $H=0$. Магнитная проницаемость не имеет гиротропных членов:

$$\mu_{xx} = 1, \quad \mu_{yy} = \mu_{zz} = \tilde{\mu} = 1 + \frac{4\pi}{\delta} \frac{(v_0 k)^2}{(v_0 k)^2 - \omega^2}. \quad (5.30)$$

Пусть волновой вектор \mathbf{k} направлен под углом ψ к оси x . В магнетике существуют поляритоны разной поляризации.

При $h_z \neq 0$, $a_{h_x} = a_{h_y} = 0$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \tilde{\mu}(\omega, k). \quad (5.31)$$

При $h_z = 0$, $h_x, h_y \neq 0$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \frac{\tilde{\mu}(\omega, k)}{\tilde{\mu}(\omega, k) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}. \quad (5.32)$$

Отметим, что при $\theta = \pi/2$ поляритон (5.31) "превращается" в фотон (его закон дисперсии не зависит от магнитных свойств среды). Его мы рассматривать не будем. При $\theta = 0$ существует вырождение: законы дисперсии совпадают. При каждой поляризации есть два поляритона. Закон дисперсии каждого линеен:

$$\omega = v_{1,2} k, \quad (5.33)$$

а v_1 и v_2 — корни биквадратного уравнения

$$\frac{v_c^2}{v^2} = \frac{v_0^2(1 + 4\pi/\delta) - v^2}{v_0^2[1 + (4\pi/\delta) \sin^2 \theta] - v^2}, \quad v_c = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (5.34)$$

Уравнение (5.34) всегда имеет два действительных решения (рис. 5). Так как $v_c \gg v_0$, а $\delta \gg 1$, то

$$v_{1,2}^2 \simeq \begin{cases} v_c^2 \left(1 + \frac{4\pi}{\delta} \cos^2 \theta \frac{v_0^2}{v_c^2}\right), \\ v_0^2 \left(1 + \frac{4\pi}{\delta} \sin^2 \theta\right) \left(1 + \frac{4\pi}{\delta} \cos^2 \theta \frac{v_0^2}{v_c^2}\right). \end{cases} \quad (5.35)$$

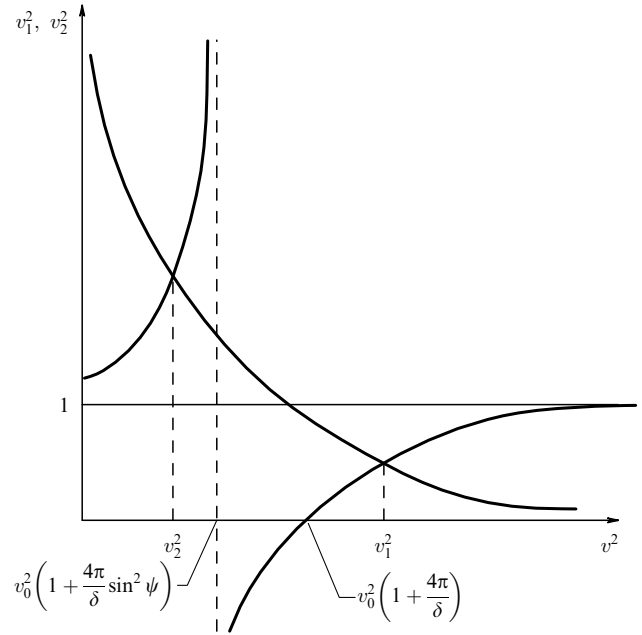


Рис. 5. Графическое решение уравнения (5.34) при $\psi \neq \pi/2$.

Заметим, что два голдстоуна (фотон и магнон), взаимодействуя, остаются голдстоунами, причем скорость медленного голдстоуна (магнона) при этом убывает, а скорость быстрого (фотона) возрастает. В [11] отмечена возникающая в теории трудность: скорость быстрого голдстоуна может, казалось бы, превысить скорость света в пустоте: в изложенной теории отсутствует соответствующее релятивистское ограничение.

Перейдем к случаю $H \neq 0$. При $h_x = h_y = 0$, $h_z \neq 0$, закон дисперсии поляритона с волновым вектором вдоль оси x (мы здесь ограничимся только этим случаем) совпадает с законом дисперсии поляритона той же поляризации при $H=0$, если v_0 заменить на $v_0(H)$ (см. (5.29)).

Закон дисперсии поляритона другой поляризации ($h_x, h_y \neq 0$, $h_z = 0$) — решение уравнения

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\text{eff}}, \quad \mu_{\text{eff}} = \mu_{yy} - \frac{\mu'^2}{\mu_{xx}}. \quad (5.36)$$

Используя (5.28), этому уравнению можно придать вид

$$[\omega^2 - (v_c k)^2][\omega^2 - \omega_{\perp}^2(k)] = \frac{4\pi}{\delta} \omega_{\perp}^2(k) \omega^2, \quad (5.37)$$

из которого ясно видно, что поляритон — результат смешивания спиновой волны с фотоном. Мы не будем останавливаться на анализе решения уравнения (5.36). Он приведен в [11].

6. Резонансные поляритоны

Хотя мы неоднократно подчеркивали, что, как правило, характерные частоты диэлектрической и магнитной проницаемостей лежат в далеко отстоящих друг от друга диапазонах, нетрудно себе представить исключения из этого правила. Кроме того, наличие больших магнитных полей, позволяющих управлять резонансными частотами магнитной (спиновой) подсистемы

твердого тела, может сделать актуальным рассмотрение совпадения характерных электрических и магнитных частот.

В этом разделе, воспользовавшись результатами работы [13], мы покажем, как модифицируется закон дисперсии поляритона в случае совпадения (резонанса) характерных частот $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Исходим мы из закона дисперсии поляритона, записанного в виде (ср. с (2.4))

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu_{\text{eff}}(\omega). \quad (6.1)$$

Конечно, когда говорится о совпадении характерных частот, то речь идет о равенстве двух частот: одной, характерной для электрической подсистемы, а другой — для магнитной. Если пренебречь затуханием, то характерными следует считать частоты, при которых ε и μ обращаются в нуль и в бесконечность. Чтобы продемонстрировать зависимость в широком частотном интервале закона дисперсии поляритона от соотношения между характерными частотами разной природы, мы воспользуемся простейшими модельными дисперсионными формулами для $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}}(\omega)$ и вовсе пренебрежем затуханием. Итак, пусть

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_{\text{AE}}^2 - \omega^2}{\omega_{\text{RE}}^2 - \omega^2}, \quad \mu_{\text{eff}}(\omega) = \frac{\omega_{\text{AM}}^2 - \omega^2}{\omega_{\text{RM}}^2 - \omega^2}. \quad (6.2)$$

Обозначения характерных частот очевидны.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Когда $\omega_{\text{RM}} < \omega_{\text{AM}} < \omega_{\text{RE}} < \omega_{\text{AE}}$, то это — нормальный случай. При $\omega_{\text{AM}} \ll \omega_{\text{RE}}$ каждый поляритон (электрический и магнитный) можно рассматривать независимо.

2. Если $\omega_{\text{AM}} = \omega_{\text{RE}}$, $\omega_{\text{RM}} < \omega_{\text{AE}}$, то поляритон похож на обычный, но резонансная и антирезонансная частоты имеют различную природу.

3. $\omega_{\text{RM}} = \omega_{\text{RE}} = \omega_{\text{R}}$, $\omega_{\text{AM}} < \omega_{\text{AE}}$.

4. $\omega_{\text{AM}} = \omega_{\text{AE}} = \omega_{\text{A}}$, $\omega_{\text{RM}} < \omega_{\text{RE}}$.

5. $\omega_{\text{RM}} = \omega_{\text{AE}}$, $\omega_{\text{RE}} < \omega_{\text{AE}} < \omega_{\text{AM}}$.

По существу, резонансными поляритонами следует считать поляритоны в третьем и четвертом случаях. Их законы дисперсии изображены на рис. 6. Следует подчеркнуть, что в обоих случаях есть три поляритонные ветви и одна из них обязательно обладает аномальной дисперсией.

Выпишем закон дисперсии резонансного поляритона вблизи особых (совпадающих) частот (на рис. 6 а, б — области внутри штриховой окружности). Вблизи общей для двух проницаемостей резонансной частоты $\omega = \omega_{\text{R}}$

$$\omega - \omega_{\text{R}} \simeq \pm \frac{\sqrt{(\omega_{\text{AE}}^2 - \omega_{\text{R}}^2)(\omega_{\text{AM}}^2 - \omega_{\text{R}}^2)}}{2kc}, \quad k \rightarrow \infty, \\ v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} \simeq \pm \frac{2c(\omega - \omega_{\text{R}})^2}{\sqrt{(\omega_{\text{AE}}^2 - \omega_{\text{R}}^2)(\omega_{\text{AM}}^2 - \omega_{\text{R}}^2)}}, \quad \omega \simeq \omega_{\text{R}}. \quad (6.3)$$

Вблизи антирезонансной частоты $\omega = \omega_{\text{A}}$

$$\omega - \omega_{\text{A}} \simeq \pm v_{\text{A}} k, \quad v_{\text{A}} = \frac{c}{2\omega_{\text{A}}^2} \sqrt{(\omega_{\text{A}}^2 - \omega_{\text{RM}}^2)(\omega_{\text{A}}^2 - \omega_{\text{RE}}^2)}. \quad (6.4)$$

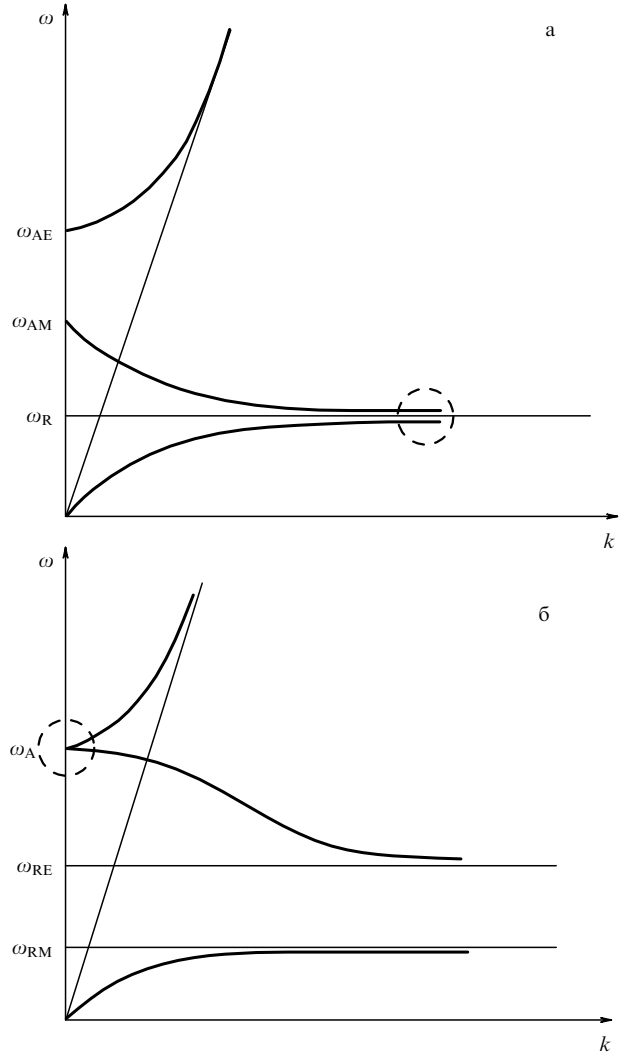


Рис. 6. Законы дисперсии резонансных поляритонов: (а) $\omega_{\text{RM}} = \omega_{\text{RE}} = \omega_{\text{R}}$, $\omega_{\text{AM}} < \omega_{\text{RE}}$, (б) $\omega_{\text{AM}} = \omega_{\text{AE}} = \omega_{\text{A}}$, $\omega_{\text{RM}} < \omega_{\text{RE}}$.

Последняя формула удовлетворяет естественному условию $v_{\text{A}} < c$. Необычность выписанных законов дисперсии заключается в линейной зависимости отклонения $\Delta\omega = \omega - \omega_{\text{R}}$ (или $\omega - \omega_{\text{A}}$) от $1/k$ (или от k). Для обычных (нерезонансных) поляритонов $\Delta\omega \sim 1/k^2$ или $\Delta\omega \sim k^2$. И еще: обычно ω_{R} и ω_{A} — границы окна непрозрачности (ω_{R} , ω_{A}); в данном случае это не так.

7. Взаимодействие с фононами (кинематика)*

В ферромагнитных диэлектриках магныны не исчерпывают всех квазичастиц. Обязательно есть фононы. Невзаимодействующие идеальные газы магнынов и фононов достаточно хорошо описывают равновесные (термодинамические) свойства этих тел при низких температурах. Кинетические свойства невозможно описать, не учитывая взаимодействия между квазичастицами.

Кинетические свойства ферромагнитных диэлектриков на основе взаимодействия присущих этим телам квазичастиц сравнительно детально изучены (см. [1, 8]).

В этом разделе мы рассмотрим кинематику⁹ магнотонных взаимодействий, ограничившись случаем однофотонных процессов. Таких процессов два: рождение (поглощение) фотона магнотоном и распад фотона на два магнотона (слияние двух магнотов с излучением фотона). В первом процессе число магнотов сохраняется, а во втором — нет. Это означает, что первый процесс может быть результатом обменного взаимодействия, а второй — только релятивистских взаимодействий. Но в данном разделе это обстоятельство несущественно, так как здесь нас интересует исключительно кинематика процессов: возможность удовлетворить законам сохранения энергии и квазиимпульса. Считая, что как у магнотов, так и у фотонов квазиволновой вектор (квазиимпульс) мал ($ak, af \ll 1$), мы не предполагаем наличие процессов переброса, хотя существуют кинетические процессы (например, теплопроводность бездефектных образцов), которые без учета процессов переброса не могут быть описаны.

Начнем с процесса рождения фотона магнотоном. Чтобы продемонстрировать роль закона дисперсии, достаточно рассмотреть рождение длинноволнового фотона, т.е. такого, импульс которого мал по сравнению с импульсом магнотона. Тогда в равенстве

$$\varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar\omega(\mathbf{f}) = \varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{f}), \quad (7.1)$$

описывающем законы сохранения энергии и импульса, правую часть можно разложить по степеням $\hbar\mathbf{f}$. Имеем

$$\mathbf{v}\mathbf{f} = \omega(\mathbf{f}), \quad \mathbf{v} = \frac{\delta\varepsilon(\mathbf{p})}{\delta\mathbf{p}}. \quad (7.2)$$

Отсюда немедленно выводится условие излучения (поглощения) фотона:

$$v(\mathbf{p}) > s, \quad (7.3)$$

где s — скорость звука ($\omega/f = s$). По форме и по существу оно совпадает с условием черенковского излучения (конечно, звука, а не света!). Скорость магнотона существенно различна в разных областях значений квазиимпульса. Легче всего условие (7.3) выполняется, когда закон дисперсии магнотона подобен закону дисперсии фотона (это — поляритон, $v \sim c$, см. (2.16), (2.8), (2.9), (3.3) и (3.4)). Однако, когда $p \rightarrow 0$, то надо проверить, удовлетворяется ли условие $\hbar k \ll p$. Для этого необходимо, чтобы частота фотона ω_{ph} была мала: $\omega_{ph} \ll \omega_0 s/\tilde{c}$, где \tilde{c} — скорость магнитного поляритона при $p \rightarrow 0$ (см. (2.16)). Если $\tilde{c} \sim 10^{10}$ см с^{-1} , то необходимо иметь $\omega_{ph} \ll 10^{-5}\omega_0$, т.е. $\omega_{ph} \ll 10^5$ при $\omega_0 \sim 10^{10}$ с^{-1} . Если не пренебрегать величиной квазиимпульса $\hbar k$, то условия поглощения (излучения) фотона имеют следующий вид:

$$\frac{\tilde{c}}{s} > \frac{\hbar\omega\tilde{c}}{2ps^2} > 1 - \frac{\tilde{c}}{s}. \quad (7.4)$$

⁹ В 1969 г. вышла научно-популярная книга небольшого формата "Всего лишь кинематика". Автор Г. Копылов (моя рецензия в УФН [14]). Уже тогда мне хотелось собрать воедино разнообразные кинематические свойства квазичастиц, существенно отличные от свойств частиц. В какой-то мере это желание отразилось в исследовании электронных свойств металлов со сложными поверхностями Ферми. Этот раздел — тоже поздняя реакция на книгу Г. Копылова. Спектр магнотов, существенно различный в разных диапазонах значений волновых векторов, представляет много возможностей для исследования кинематики процессов взаимодействия между квазичастицами. (Примеч. М.И.К.)

Видно, что есть дополнительное условие: удвоенный импульс поляритона p должен превышать импульс фотона ($p > \hbar f/2$). Для того чтобы не выйти за пределы применимости формул (2.16), по-прежнему необходимо, чтобы частота фотона была достаточно мала ($\omega_{ph} \ll \omega_0 s/\tilde{c}$).

В предельно низкочастотной области обе ветви электромагнитных колебаний в определенном смысле равноправны. Следует выяснить, возможен ли процесс аналогичный черенковскому — излучение (поглощение) длинноволнового фотона, причем с одновременным изменением типа магнотона. Для определенности рассмотрим излучение фотона более энергичным магнотоном (заметим, что согласно (2.16), $\omega_+(\mathbf{k}) > \omega_-(\mathbf{k})$). В классическом пределе из законов сохранения

$$\varepsilon_+(\mathbf{p}) - \hbar\omega(\mathbf{f}) = \varepsilon_-(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{f}) \quad (7.5)$$

следует

$$\omega_+(\mathbf{k}) - \omega_-(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{f}) - \mathbf{v}_-(\mathbf{p})\mathbf{f}, \quad (7.6)$$

откуда вытекает условие излучения в следующем виде (если учесть, что $s \ll c/\sqrt{\varepsilon}$):

$$\frac{k}{f} [(\cos^2 \theta + \mu_0 \sin^2 \theta)^{1/2} - 1] < 1, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}. \quad (7.7)$$

В излучении принимают участие магноты ветвей "+" и "-" с малыми импульсами. При $\theta \rightarrow 0$ ограничение для величины k снимается.

Когда магнот напоминает обыкновенную нерелятивистскую частицу (см. (3.7')), то и условие черенковского излучения звука обычно:

$$\frac{p}{m^*} > s \quad \text{или} \quad E(p) > \frac{m^* s^2}{2}. \quad (7.8)$$

Своеобразие закона дисперсии магнотона особенно отчетливо проявляется при тех значениях квазиимпульса, при которых необходимо пользоваться формулой (3.7), считая, что $\omega_0 = \omega_0(k)$ включает в себя энергию неоднородного обменного взаимодействия (см. (3.10)). Выражение для скорости магнотона можно записать следующим образом:

$$\mathbf{v} = \frac{\omega_0(k)}{\omega(\mathbf{k})} \mathbf{v}^{\text{ex}} + \frac{\omega_{\text{M}}}{2\omega(\mathbf{k})} \left[\mathbf{v}^{\text{ex}} \sin^2 \theta + \omega_0(k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2} \right]. \quad (7.9)$$

Здесь частота $\omega(\mathbf{k})$ определена формулой (3.5) с заменой ω_0 на $\omega_0(k) = \omega_0 + \omega_{\text{ex}}(ak)^2$,

$$\mathbf{v}^{\text{ex}} = \frac{\partial \omega_0}{\partial \mathbf{k}} = 2\omega_{\text{ex}} a^2 \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{m^*}$$

(ср. с (3.7')). Из (7.9) при $p = \hbar k \rightarrow 0$ получается

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= \frac{\omega_0 + 0,5\omega_{\text{M}} \sin^2 \theta}{\sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}} \sin^2 \theta)}} v_{\perp}^{\text{ex}} + \frac{\omega_0 \omega_{\text{M}} \cos^2 \theta}{\sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}} \sin^2 \theta)}} \frac{k_{\perp}}{k^2}, \\ v_{\parallel} &= \frac{\omega_0 + 0,5\omega_{\text{M}} \sin^2 \theta}{\sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}} \sin^2 \theta)}} v_{\parallel}^{\text{ex}} - \frac{\omega_0 \omega_{\text{M}} \sin^2 \theta}{\sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}} \sin^2 \theta)}} \frac{k_{\parallel}}{k^2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Индексы \perp и \parallel определены по отношению к направлению намагниченности \mathbf{M} (индексом \parallel обозначена компонента, параллельная \mathbf{M} , а \perp , — перпендикулярная \mathbf{M}).

Видно, что при $p^2/m^* \ll \hbar\omega_M$ скорость магнона определяется дипольными силами. Пренебрегая обменным слагаемым ($\sim v_{\parallel}^{\text{ex}}$), имеем

$$v = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_M \sin^2 \theta}} \frac{\omega_M}{k} \sin \theta |\cos \theta|, \quad (7.11)$$

т.е. при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ магнитодипольная часть скорости обращается в нуль. При произвольном значении угла θ формула (7.11) при уменьшении k имеет ограниченную снизу область применимости: необходим учет запаздывания — конечности скорости света. Надо перейти от формулы (3.7) к формулам (2.16), (3.3) и (3.4) (см. начало этого раздела). На рисунке 7 схематически изображена зависимость скорости $v = |\partial E / \partial p|$ магнона от импульса при $\theta \neq 0, \pi/2$. Условие рождения (поглощения) магноном длинноволнового фонона при применимости формулы (7.11) таково:

$$\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_M \sin^2 \theta}} \frac{\hbar\omega_M}{s} \sin \theta |\cos \theta| > p, \quad p = \hbar k. \quad (7.12)$$

Сравнивая условия (7.8) и (7.12), убеждаемся, что если в минимуме скорость магнона

$$v_{\min} = 2a\sqrt{2\omega_M\omega_{\text{ex}}} > s,$$

то нет ограничения на величину импульса магнона, излучающего (поглощающего) длинноволновый фонон. Ограничение, как ясно из формул (7.11) и (7.12), "переносится" на углы: магноны, распространяющиеся вдоль "хороших" направлений ($\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$), для того чтобы излучить (поглотить) фонон, должны иметь импульс

$$p > m^*s = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{a} \frac{s}{\omega_{\text{ex}} a}$$

(см. (2.7')). Заметим, что $\omega_{\text{ex}} a \sim 10^6 \text{ см с}^{-1}$, если температура Кюри $\sim 10^3 \text{ К}$.

Рассмотрим теперь второй однофононный процесс: распад фонона на два магнона, или слияние двух магнонов с рождением фонона. Начнем с простейшей,

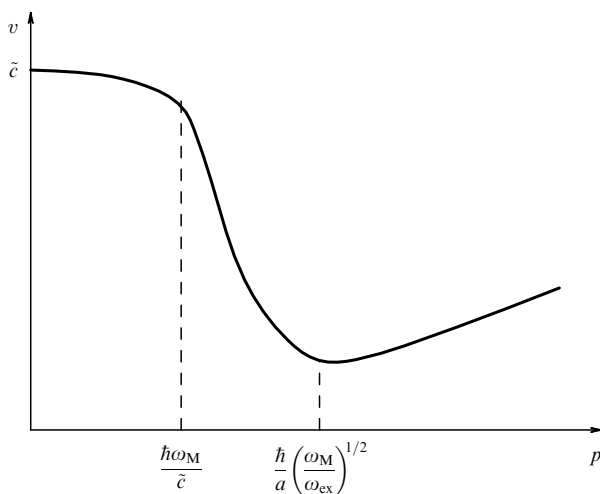


Рис. 7. Схематическая зависимость скорости магнона $v = |\partial E / \partial p|$ от импульса при $\theta \neq \pi/2, 0$; $\tilde{c} \sim c/\sqrt{\epsilon}$.

правда, несколько громоздкой ситуации: пусть для закона дисперсии магнонов можно использовать формулу (3.7). Законы сохранения энергии и импульса (перебросами мы по-прежнему пренебрегаем) приводят к следующему выражению для угла θ_f — угла между направлением распространения фонона и импульсом одного из магнонов:

$$\cos \theta_f = F(f, k), \quad F(f, k) = \frac{\omega_{\text{ex}} a^2 f^2 - s f + 2\omega(k)}{2\omega_{\text{ex}} a^2 k f},$$

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega_{\text{ex}} a^2 k^2. \quad (7.13)$$

В этом разделе нас будет интересовать только порог процесса: с какого значения квазиволнового вектора фонона возможен его распад на два магнона. Обозначим значение порога через f_{th} , пороговая частота тогда есть $\omega_{\text{th}} = s f_{\text{th}}$. Итак, каково значение f_{th} ?

Функция $F(f, k)$ при $f \rightarrow 0$ и при $f \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Естественно, только те фононы, для которых $F(f, k) \leq 1$, могут распасться на два магнона. Условие обращения $F(f, k)$ в единицу приводит к следующему значению для импульса фонона:

$$f(k) = k + k_s + \sqrt{k_s^2 - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{ex}} a^2} + 2k k_s}, \quad k_s = \frac{s}{\omega_{\text{ex}} a^2}. \quad (7.14)$$

Если $k_s^2 - \omega_0/\omega_{\text{ex}} a^2 > 0$, то при всех значениях импульсов магнонов k возможен процесс распада, а порог определяется наименьшим значением функции $f(k)$, т.е. значением при $k = 0$:

$$f_{\text{th}} = k_s + \sqrt{k_s \left(k_s - \frac{\omega_0}{s} \right)},$$

$$k_s > \frac{\omega_0}{s} \quad \text{или} \quad \sqrt{\omega_0 \omega_{\text{ex}}} < \frac{s}{a}. \quad (7.15)$$

Если $k_s^2 - \omega_0/\omega_{\text{ex}} a^2 < 0$, то в распаде могут принимать участие только те магноны, импульсы которых удовлетворяют условию

$$2k k_s \geq \frac{\omega_0}{\omega_{\text{ex}} a^2} - k_s^2,$$

а порог определяется значением k , обращающим в нуль подкоренное выражение в (7.14):

$$f_{\text{th}} = \frac{1}{2} \left(k_s + \frac{\omega_0}{s} \right),$$

$$k_s < \frac{\omega_0}{s} \quad \text{или} \quad \sqrt{\omega_0 \omega_{\text{ex}}} > \frac{s}{a}. \quad (7.16)$$

Так как частота ω_0 — функция магнитного поля H , т.е. возможность экспериментальной проверки выписанных выражений. Интересно подчеркнуть, что f_{th} как функция ω_0 , а значит и H — немонотонная функция, имеющая корневую особенность при $\omega_0 = k_s s - 0$ (рис. 8).

Как видно, порог процесса определяется законами дисперсии квазичастиц, в нем участвующих. Как правило, характер особенности соответствующей кинетической характеристики (например, времени жизни фонона) также определяется законами дисперсии (см. раздел 8).

Если законы дисперсии квазичастиц анизотропны, то расчет порогового значения импульса фонона становится трудной задачей, вряд ли допускающей точное

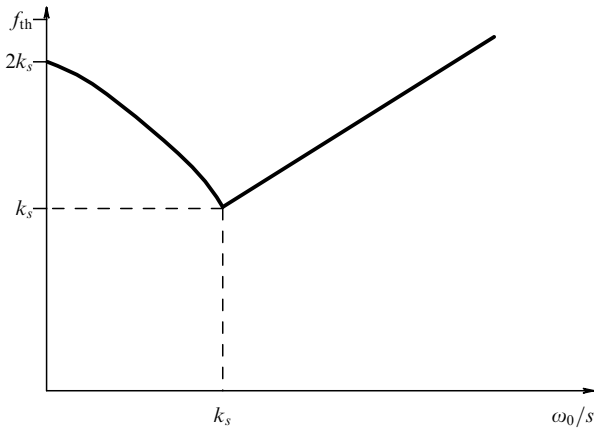


Рис. 8. Схематическая зависимость f_{th} от частоты ω_0 ; $k_s = s/(\omega_{ex}a^2)$.

решение без применения численных методов. Можно, правда, сформулировать алгоритм поиска порогового значения импульса \mathbf{f} в общем случае. Законы сохранения приводят к следующему равенству:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{f}) \equiv \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{f} - \mathbf{k}) - s(\mathbf{n})f = 0 \quad (7.17)$$

(скорость звука анизотропна: $\mathbf{n} = \mathbf{f}/f$). Существование порога означает, что с одной стороны от $f = f_{th}$ (либо при $f > f_{th}$, либо при $f < f_{th}$) функция $S = S(\mathbf{k}, \mathbf{f})$ знакоопределенна при всех \mathbf{k} , а с другой есть такие \mathbf{k} , что $S(\mathbf{k}, \mathbf{f}) = 0$. Как видно из формулировки, нас интересует пороговое значение f при заданном направлении распространения звука. Для нахождения $f_{th} = f_{th}(\mathbf{n})$ (по-видимому, в общем случае) необходимо решить следующую геометрическую задачу: найти точку в \mathbf{k} -пространстве (обозначим ее \mathbf{k}_c), в которой при определенном значении параметра $f = f_{th}(\mathbf{n})$

$$S(\mathbf{k}_c, f_{th}(\mathbf{n})) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_c} = 0. \quad (7.18)$$

Если задача (7.18) имеет решение, то вблизи $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ и $f = f_{th}$ функцию $S(\mathbf{k}, f)$ можно разложить по степеням отклонений от \mathbf{k}_c и f_{th} , и равенство (7.17) переписывается так:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial k^i \partial k^k} \right)_{\mathbf{k}_c, f_{th}} (k_c^i - k^i)(k_c^k - k^k) + \left(\frac{\partial S}{\partial f} \right)_{\mathbf{k}_c, f_{th}} (f - f_{th}) = 0. \quad (7.19)$$

Отсюда видно, что существование порога предполагает знакоопределенность квадратичной формы, входящей в (7.19): диагональный тензор $[\partial^2 S / \partial k^i \partial k^k]_{\mathbf{k}_c, f_{th}}$ должен иметь главные значения одного знака. Это — дополнительное условие при отборе решений уравнения (7.18). Даже при этом ограничении задача может иметь несколько решений. Например, если распад возможен в конечном интервале значений импульса f , то порогов два.

8. Времена жизни *

Вычислению времен жизни квазичастиц в магнетиках (как магнонов, так и фононов) посвящено столь боль-

шое число работ (см., например, [9]), что у нас нет возможности не только обсудить содержащиеся в этих работах результаты, но даже упомянуть их. Здесь нас интересуют только результаты вычислений, в которых важную роль играют особенности спектра магнонов вблизи дна магнонной зоны¹⁰, когда важна зависимость частоты спиновой волны (энергии магнона) от направления распространения (от угла θ , см. разделы 3, 7).

Существование конечной ширины ΔE энергетической зоны магнонов при импульсе магнона, равном нулю ($p = 0$, рис. 9), весьма существенно при исследовании ширины линии ферромагнитного резонанса образцов разной формы. В зависимости от формы образца возбуждается спиновая волна (магнон) различной частоты (энергии) из интервала $\Delta E/\hbar$. Из-за упругого рассеяния на примесях и особенно на шероховатостях поверхности возбужденная волна (однородное колебание) превращается в магнон с конечным импульсом (см. рис. 9), время жизни которого определяется взаимодействием магнонов друг с другом и с фононами. Последующий этап релаксации не играет существенной роли, так как время жизни магнона с $p \neq 0$ заметно меньше, чем время жизни магнона с $p = 0$ за счет упругого рассеяния.

Собственное время жизни магнона с $p = 0$ больше,

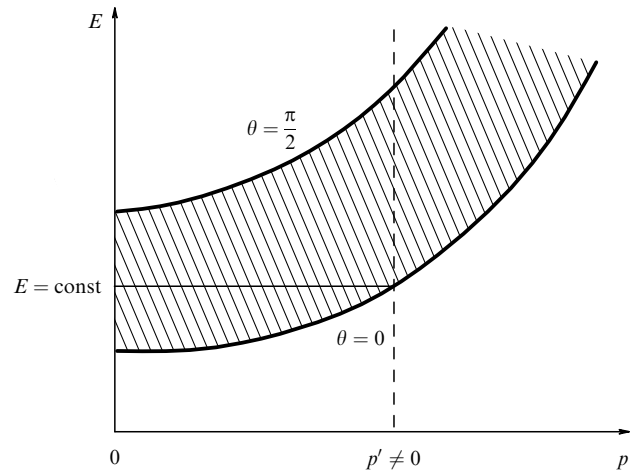


Рис. 9. Магнон с импульсом $p = 0$ и $\theta \neq 0$ может в результате упругого процесса рассеяния превратиться в магнон с $p = p' \neq 0$. Заштрихована полоса с $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

чем время жизни магнона с $p \neq 0$, но отлично от бесконечности. По-видимому, впервые на специфические особенности собственных кинетических процессов магнонов с $p = 0$ обращено внимание в работе [15].

Законы сохранения энергии и импульса запрещают спиновой волне с минимальной энергией не только участие в процессах упругого рассеяния, но и в тройных процессах, обычно играющих важную роль при расчете времени жизни. Поэтому требуется анализ других (более сложных) диссипативных процессов. Анализ гамильтониана взаимодействия магнонов показывает, что главные механизмы, приводящие к конечному времени жизни магнона таковы:

¹⁰ Здесь мы пренебрегаем эффектом запаздывания ($c \rightarrow \infty$).

1) релятивистское рассеяние в первом порядке теории возмущений (слияние магнона с $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ и $\theta = 0$ с другим магноном, приводящее к рождению двух магнов ¹¹);

2) многочастичный процесс, в котором магнон с $\mathbf{p} = 0$ сливается с магноном, импульс которого не равен нулю, порождая другой процесс с $\mathbf{p} \neq 0$. Этот процесс в своей основе — релятивистский, как мы только что сказали, запрещен законами сохранения. Снятие запрета обусловлено неопределенностью импульса и энергии магнона с $\mathbf{p} \neq 0$ за счет взаимодействия с другими магнонами. Поэтому весь процесс назван многочастичным. Относительная малость при низких температурах неопределенности энергии $\Delta\Sigma_p$ магнона, принимающего участие в столкновении ($\Delta\Sigma_p \ll \hbar\omega_0$), позволяет ограничиться вторым приближением теории возмущений, что делает расчет времени жизни не слишком затруднительным.

Впервые учет неопределенности энергии у взаимодействующих квазичастиц для снятия кинематического запрета был применен Саймонсом [16] при вычислении времени жизни длинноволновых фононов, где ситуация несколько сложнее, чем в случае магнов, так как энергия фонона стремится к нулю вместе с его импульсом (отсутствует малый параметр, используемый в [15] при расчете времени жизни магнона с $p = 0$). Заметим, что рассмотренные механизмы приводят к экспоненциальной зависимости от температуры обратного времени жизни:

$$\frac{1}{\tau_{MM}} \propto \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right), \quad T \ll \hbar\omega_0. \quad (8.1)$$

Индекс ММ указывает на то, что речь идет о времени жизни, определяемом магнон-магнонным взаимодействием. Формула (8.1) соответствует тому, что магнон при $T \ll \hbar\omega_0$ экспоненциально мало, а рассмотренные процессы требуют столкновения магнона с магном из теплового резервуара.

Экспоненциальная малость вероятности магнон-магнонных процессов "заставляет" искать диссипативные процессы, вероятности которых подобной малости не имеют. Естественно, наибольший интерес вызывают магнон-фононные процессы, а среди них — спонтанное излучение фонона (процесс типа черенковского). Кинематика процесса (см. раздел 7) показывает [9], что магнитостатическая волна — магнон с наименьшей энергией, равной $\hbar\omega_0$, т.е. с $k = 0$, излучить фонон не может. Но магнон со сколь угодно малым значением k_\perp излучает фонон, и его обратное время жизни отлично от нуля даже при $T = 0$:

$$\frac{1}{\tau_{MPh}^0} \simeq \frac{\gamma^2 \hbar \omega_M^3}{2^{10} \pi^3 \rho s^3} \frac{k_\perp^4}{k^2}, \quad k_\perp \ll \sqrt{\frac{2s}{\omega_M}} k^{3/2}, \quad (8.2)$$

¹¹ Напомним, что четверные по операторам рождения и уничтожения слагаемые, описывающие рассеяние магнона на магноне, возникают как за счет обменной (нерелятивистской) его части, так и за счет анизотропной (релятивистской) части. Амплитуда (при произведении бозевских операторов) в слагаемом, обязанном обменному взаимодействию, обычно (когда все $\mathbf{p} \neq 0$) значительно больше амплитуды в слагаемом, обязанном релятивистскому рассеянию. Однако, если импульс рассеиваемой частицы равен нулю, то обращается в нуль и амплитуда обменного рассеяния.

ρ — массовая плотность, s — скорость звука, γ — безразмерная константа магнитострикции.

Заметим, что для малых k_\perp , таких, что

$$\frac{k_\perp^2}{k^2} \simeq \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_M},$$

формулу (8.2) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\tau_{MPh}^0} \simeq \frac{\gamma^2 \hbar \omega_M}{2^8 \pi^3 \rho s^3} k^2 (\omega - \omega_0)^2. \quad (8.2')$$

Видно, что время жизни МСВ зависит не только от ее частоты, но и от волнового вектора: длинноволновые колебания имеют большую продолжительность жизни, чем коротковолновые.

Температурная зависимость времени жизни магнона, излучающего фонон, зависит от отношения T и величины $\hbar(\omega - \omega_0)$. При $T \ll \hbar(\omega - \omega_0)$ механизм релаксации МСВ есть черенковское излучение звуковых волн (при $T \rightarrow 0$ характерное значение волнового вектора излучаемых фононов стремится к нулю), и оно возможно только в МСВ со скоростью большей скорости звука. Воспользовавшись формулой (7.11) при $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$ последнее условие легко записать в следующем виде:

$$v \simeq \frac{2(\omega - \omega_0)}{k} \geq s. \quad (8.3)$$

Тогда

$$\frac{1}{\tau_{MPh}} = \frac{1}{\tau_{MPh}^{(0)}} + \frac{1}{\tau_{MPh}^{em}}, \quad \frac{1}{\tau_{MPh}^{em}} \ll \frac{1}{\tau_{MPh}^{(0)}}, \quad T \ll \frac{\hbar\omega_M}{2} \frac{k_\perp^2}{k^2},$$

$$\frac{1}{\tau_{MPh}^{em}} = \frac{\pi^2 \gamma^2 \omega_M}{2^6 \cdot 15} \frac{\beta M}{m_i s v} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3, \quad v = \left|\frac{\partial \omega(k)}{\partial \mathbf{k}}\right| \geq s, \quad (8.4)$$

m_i — масса атомов в кристаллической ячейке магнетика ($m_i = \rho a^3$).

Кроме того, при $T \neq 0$ в обратное время жизни магнона дают вклад процессы поглощения фонона и столкновения двух МСВ с испусканием фонона ($\tau_1^{-1}(\omega_0)$ и $\tau_2^{-1}(\omega_0)$, соответственно):

$$\frac{1}{\tau_1(\omega_0)} = \frac{\pi \gamma^2 \omega_M}{2^7 \cdot 15} \frac{T^4}{m_i s \Theta_D^3},$$

$$\frac{1}{\tau_2(\omega_0)} = \frac{\gamma^2 \omega_M}{2^5 \pi^3} \frac{(\hbar\omega_0)^3 T}{m_i s^2 \Theta_D^2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right). \quad (8.5)$$

Последние формулы могут объяснить природу ширины линии ферромагнитного резонанса в условиях возбуждения колебаний с наименьшей из возможных частот ($\omega = \omega_0$).

Вычислим теперь время жизни фононов. Для длинноволновых фононов ($sf < 2\hbar\omega_0$) невозможен распад фонона на два магнона. Основной диссипативный процесс с участием магнов (магнитостатических волн) — это поглощение (рождение) фонона магнитостатической волной. Обратное время жизни фонона с частотой ω за счет такого процесса экспоненциально зависит от температуры, так как для его осуществления необходим

тепловой магнон:

$$\frac{1}{\omega\tau_f} = \frac{\gamma^2\hbar\omega_M}{4\pi m_i s^2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right) \times \begin{cases} \frac{1}{2^5\pi^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{T\hbar\omega_M}}{\Theta_D}\right)^3 \sin^3 \Psi_f, & \tan \Psi_f \gg \sqrt{\frac{T}{\hbar\omega_M}}, \\ \frac{3}{16\pi^3} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \cos^3 \Psi_f, & \tan \Psi_f \ll \sqrt{\frac{T}{\hbar\omega_M}}. \end{cases} \quad (8.6)$$

Здесь Ψ_f — угол между вектором \mathbf{f} и намагниченностью \mathbf{M} . Причем $T \ll \hbar\omega_M, f < 2\omega_0\hbar/s$.

Формула (8.6) дает правильный порядок величины почти во всем интервале углов, но получить точное компактное выражение для произвольного угла Ψ_f не удастся. Однако видно, что верхняя строка выражения (8.6) справедлива при всех значениях Ψ_f , так как $T/\hbar\omega_M \ll 1$.

Кроме перечисленных условий применимости полученных формул, надо учесть, что они выведены без учета неоднородного обмена в законе дисперсии магнона, что потребовало выполнения дополнительных условий:

$$T \ll \hbar\omega_0, \hbar[\sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} - \omega_0], \quad I \ll \frac{\Theta_D^2}{2\hbar\omega_0}, \frac{\Theta_D^2}{2\hbar\omega_M}. \quad (8.7)$$

Напомним, что $I = \hbar\omega_{\text{ex}}$ — константа неоднородного обменного взаимодействия.

Обычный звук и даже ультразвук удовлетворяют условию $sf < 2\hbar\omega_0$. Поэтому τ_f^{-1} есть вклад в коэффициент затухания звука, обязанный фонон-магнонному взаимодействию. Он очень мал, но благодаря экспоненциальной зависимости от магнитного поля ($\exp(-\hbar\omega_0/T)$, $\omega_0 \sim H$) и специфической анизотропии (см. (8.6)), по нашему мнению, может быть обнаружен на фоне практически изотропного коэффициента затухания, обусловленного взаимодействием звуковой волны с тепловыми (дебаевскими) фононами.

С ростом частоты снимается запрет с процесса распада фонона на два магнона. Начиная с импульса фонона, превышающего пороговое значение

$$f_{\text{th}} = \frac{2\omega_0}{s - \sqrt{2\omega_{\text{ex}}\omega_M} a}, \quad (8.8)$$

такой процесс возможен.

Время жизни фонона за счет распада невозможно вычислить, опустив в законе дисперсии магнона слагаемое, обязанное неоднородному обменному взаимодействию. Поэтому оно учтено при вычислении f_{th} (последнее из условий (8.7) обеспечивает положительность знаменателя в выражении (8.8)).

В предположении упругой изотропии магнетика вероятность распада фонона, движущегося вдоль намагниченности ($\mathbf{f} \parallel \mathbf{M}$), равна нулю. Поэтому мы ограничимся формулой для обратного времени жизни $1/\tau_f$, определяемого процессом распада, только для фонона, движущегося перпендикулярно намагниченности ($\mathbf{f} \perp \mathbf{M}$). Импульс фонона лишь слегка превышает пороговое значение. Тогда

$$\frac{1}{\tau_f} = \begin{cases} 0, & f < f_{\text{th}}, \\ \frac{\gamma^2\hbar}{2^9\pi} \frac{\omega_M\omega_0^2}{m_i s^2 \omega_{\text{ex}}} \sqrt{\frac{2\omega_M\omega_0}{\omega_D^2}} \sqrt{\frac{f-f_{\text{th}}}{f_{\text{th}}}}, & \frac{f-f_{\text{th}}}{f_{\text{th}}} \ll 1, \end{cases} \quad \mathbf{f} \perp \mathbf{M}, \quad \omega_D = \frac{s}{a}. \quad (8.9)$$

Эта формула демонстрирует главную особенность порогового процесса — существование корневой зависимости от разности $f - f_{\text{th}}$ (или от разности частот $\omega - \omega_{\text{th}}$) при преодолении порога. Существование порога для распада фонона на два магнона — не случайное и даже не редкое явление: кинематика процесса взаимодействия квазичастиц часто накладывает ограничения на величину импульсов и энергий, участвующих в соответствующем процессе. В зависимости обратного времени жизни от импульса (энергии) существование порога в общем случае проявляется в виде характерной неаналитичности ($1/\tau \propto (f - f_{\text{th}})^{1/2}$). Корневая, неаналитическая зависимость времени жизни квазичастиц означает наличие особенности у мнимой части ее энергии, $\text{Im } E = \hbar/\tau$. Мнимая часть энергии, $\text{Im } E$, дисперсионными соотношениями типа Крамерса–Кронинга связана с действительной частью энергии, $\text{Re } E$. Особенность у $\text{Im } E$ с необходимостью приводит к особенности у $\text{Re } E$, т.е. к особенности в законе дисперсии квазичастицы. Исследование особенности $\text{Re } E$ удобно проводить, используя дисперсионное соотношение, а не непосредственно выражение для $\text{Re } E$, так как формула для $\text{Re } E$ представляет собой трудный для вычисления интеграл в смысле главного значения [17].

9. Поверхностные магнитные поляритоны в магнитных диэлектриках

Существование границы между полупространством, занятым магнетиком, и вакуумом порождает несколько типов задач. На некоторых из них мы остановимся.

Естественно рассматривать падение электромагнитной волны из вакуума на полупространство, изучать ее отражение от границы (общий случай), а в области прозрачности — преломление. Если не учитывать пространственной дисперсии проницаемостей, то этот тип задач не выходит за рамки электродинамики сплошных сред. Учет пространственной дисперсии магнитной проницаемости (т.е. существования спиновых волн — магнов) даже при решении задачи об отражении волны означает выход за пределы стандартной электродинамики сплошных сред, в частности требуется формулировка дополнительных условий на границе магнетик–вакуум.

Вдоль плоской границы полупространство–вакуум могут распространяться специфические поверхностные волны (поверхностные поляритоны), амплитуды которых экспоненциально затухают в обе стороны от границы. Отличительной чертой поверхностных поляритонов в гиротропных средах ($\mu' \neq 0$) может служить их невзаимность: $\omega(-\mathbf{k}_t) \neq \omega(\mathbf{k}_t)$, где \mathbf{k}_t — двумерный волновой вектор в плоскости границы, ω — частота поляритона. Все рассмотренные нами случаи невзаимности имеют общую природу: наличие гиротропии означает существование в задаче псевдовектора (магнитного поля \mathbf{H} , намагниченности \mathbf{M}), меняющего знак при замене t на $-t$, а граница характеризуется вектором

нормали \mathbf{n} . Таким образом, если вектор, ответственный за гиротропию (для определенности, вектор \mathbf{M}), имеет составляющую в плоскости границы, в задаче есть плоский вектор $\mathbf{n} \times \mathbf{M}_t$, ликвидирующий центр инверсии в плоскости границы. Однако отсутствия центра инверсии недостаточно для невязимости. Взаимность (центр инверсии в \mathbf{k} -пространстве) — следствие инвариантности уравнений для волн (без учета диссипации) относительно времени¹² (при замене t на $-t$). Но в нашем случае вектор меняет знак при замене t на $-t$. В совокупности с существованием вектора $\mathbf{n} \times \mathbf{M}_t$ это позволяет поверхностному поляритону быть невязимым.

На примере исследования свойств электромагнитных волн (поляритонов) было показано, что учет пространственной дисперсии магнитной проницаемости кардинально меняет их закон дисперсии. Электродинамика полупространства еще чувствительней электродинамики бесконечного пространства к пространственной дисперсии. Наиболее разительный пример — превращение поверхностной волны в вытекающую, т.е. обладающую недиссипативным затуханием: поверхностная волна возбуждает объемные спиновые волны, которые уносят часть ее энергии (раздел 10).

Существование скин-эффекта (в металлических магнетиках) существенно влияет на их волновые свойства, обусловленные магнитной проницаемостью (мы уже упоминали об этом, см. введение). Это обстоятельство будет продемонстрировано на нескольких примерах (см. разделы 11, 12).

Рассмотрим сначала ферромагнетик. Мы проанализируем закон дисперсии поверхностного магнитного поляритона в простейшем, но, пожалуй, наиболее интересном случае, когда магнитное поле \mathbf{H} и намагниченность \mathbf{M} параллельны поверхности образца, а волна распространяется перпендикулярно \mathbf{H} и \mathbf{M} . Используя кроме уравнений Максвелла в среде и в вакууме естественные граничные условия (непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей), нетрудно вывести дисперсионное уравнение [18]

$$\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \varepsilon \mu_{\text{eff}} - \frac{\mu'}{\mu} k + \mu_{\text{eff}} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 0, \quad (9.1)$$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu^2 - \mu'^2}{\mu}.$$

Значения μ и μ' см. в формуле (1.20).

Существование в уравнении (9.1) члена, содержащего волновой вектор k в первой степени, — свидетельство невязимости волны. Схематически зависимость $\omega(-k) \neq \omega(k)$ изображена на рис. 10. И при $k < 0$, и при $k > 0$ поверхностная волна существует в конечных интервалах частот. При $k > 0$ кривая $\omega = \omega(k)$ расположена в интервале $([\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}, \omega_{\text{DE}})$, где $\omega_{\text{DE}} = \omega_0 + \omega_M/2$ — частота волны Дэймона–Эшбаха [19].

Вблизи граничных частот

$$\omega \simeq \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} + \frac{\omega_M^2 \sqrt{\omega_0 + \omega_M}}{2\varepsilon \omega_0 \sqrt{\omega_0}} \frac{(k - k_{\text{gr}})^2}{k_{\text{gr}}^2},$$

$$0 < k - k_{\text{gr}} \ll k_{\text{gr}},$$

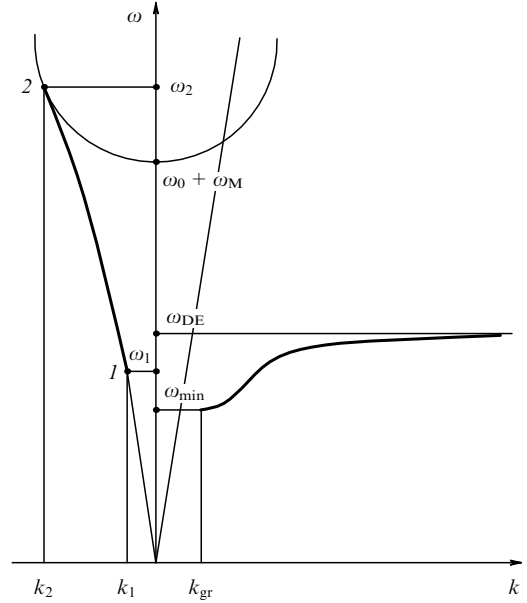


Рис. 10. Схематическая зависимость закона дисперсии поверхностного поляритона, $\omega_{\text{min}} = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$.

$$\omega \simeq \omega_{\text{DE}} - \frac{\omega_M \omega_{\text{DE}}^2 (1 + \varepsilon)}{8c^2 k^2}, \quad k \gg \frac{\omega_{\text{DE}}}{c},$$

$$ck_{\text{gr}} = (\omega_0 + \omega_M) \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_M}}. \quad (9.2)$$

При $k = k_{\text{gr}}$ частота $\omega = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$, а глубина проникновения поверхностной волны в ферромагнетик обращается в нуль. Казалось бы, это означает неприменимость макроскопического подхода. Его, однако, можно сохранить, если учесть пространственную дисперсию, как это сделано при рассмотрении магнитоэлектрических колебаний (см. раздел 10).

При $k < 0$ на граничных частотах ω_1 и ω_2 обращаются в нуль логарифмические декременты затухания γ_0 и γ соответственно в точках (k_1, ω_1) и (k_2, ω_2) :

$$\omega_1^2 = \omega_0(\omega_0 + \omega_M) + \frac{\omega_0 \omega_M}{\varepsilon - 1},$$

$$k_1 = -\frac{\omega_1}{c}, \quad k_2 = -\frac{\omega_2}{c} \sqrt{\varepsilon \mu_{\text{eff}}}. \quad (9.3)$$

Для ω_2 явное выражение удается получить в предельных случаях:

$$\omega_2 \simeq \begin{cases} \frac{\omega_M}{2} + \sqrt{(\omega_0 + \omega_M)^2 + \frac{\omega_M^2}{4}}, & \varepsilon \gg 1, \\ \sqrt{\frac{\omega_M(\omega_0 + 2\omega_M)}{\varepsilon - 1}}, & \varepsilon - 1 \ll 1. \end{cases} \quad (9.4)$$

Поверхностная магнитоэлектрическая волна (волна Дэймона–Эшбаха), которая из уравнения (9.1) получается естественным предельным переходом $kc \rightarrow \infty$, $\omega \neq \infty$ существует только при $k > 0$. Учет запаздывания приводит к существованию $v_{\text{gr}} \neq 0$ у магнитоэлектрической волны:

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = 2^{5/2} \frac{(\omega_{\text{DE}} - \omega)^{3/2} c}{\sqrt{\omega_M \omega_{\text{DE}}} \sqrt{1 + \varepsilon}} \ll c, \quad \omega \leq \omega_{\text{DE}}. \quad (9.5)$$

¹² При инвариантности относительно обращения времени, но в отсутствие центра инверсии взаимность осуществляется, как правило, парами ветвей спектра, для которых $\omega_+(-\mathbf{k}) = \omega_- (\mathbf{k})$.

При $k < 0$ групповая скорость имеет величину порядка скорости света во всем интервале частот существования магнитного поляритона.

Учет запаздывания приводит не только к зависимости частоты волны Дэймона–Эшбаха от волнового вектора и, тем самым, к отличной от нуля групповой скорости, но и к существованию дополнительного (немагнитного) механизма затухания таких волн. Если диэлектрическая проницаемость комплексна ($\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$), то из дисперсионного уравнения имеем

$$\text{Im } \omega = -\frac{\omega_M \omega_{\text{DE}}^2}{8(kc)^2} \varepsilon'', \quad \text{Re } \omega \simeq \omega_{\text{DE}}. \quad (9.6)$$

Характерной чертой электрических потерь служит зависимость $\text{Im } \omega$ от волнового вектора ($\text{Im } \omega \rightarrow 0$ при $kc \rightarrow \infty$). Собственно магнитные потери не чувствительны к величине длины волны:

$$\text{Im } \omega = -\frac{1}{2\tau_M} \frac{\omega_{\text{DE}}(4\omega_0 + \omega_M)}{\omega_M(\omega_0 + \omega_M)}, \quad (9.7)$$

где τ_M — магнитная релаксационная константа (размерности времени), возникающая при учете релаксационных членов в уравнении Ландау–Лифшица и входящая в выражения для μ и μ' . Частота релаксации $1/\tau_M$ есть сумма обратных поперечного τ_{tr} и продольного τ_l времен релаксации, т.е.

$$\frac{1}{\tau_M} = \frac{1}{\tau_{\text{tr}}} + \frac{1}{\tau_l}.$$

Анализ показывает, что при волновом векторе \mathbf{k} , параллельном $\mathbf{H}(\mathbf{M})$, поверхностной волны нет: соответствующее дисперсионное уравнение не имеет решения.

Для антиферромагнетика формально уравнение (9.1) остается справедливым. Надо лишь воспользоваться нужными значениями входящих в уравнение компонент тензора магнитной проницаемости. Характер зависимостей частоты поверхностного магнитного поляритона от волнового вектора при различных значениях магнитного поля показан на рис. 11. Важно отметить, что при $H = 0$ гиротропия отсутствует и волна взаимна; при $H < H_{\text{SF}}$ невзаимность существует, но не столь резкая, как при $H > H_E$, когда антиферромагнетик по своим высокочастотным свойствам мало отличается от ферромагнетика.

В [18] было отмечено следующее обстоятельство: наличие невзаимных волн, сосредоточенных вблизи поверхности магнетика, заставляет предположить возможность существования в равновесии (!) огибающих магнетик потоков квазичастиц \mathbf{j} и их энергии \mathbf{q} , соответствующих невзаимным волнам, ведь для них

$$\mathbf{j} = \int \frac{\mathbf{v}}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \neq 0, \quad (9.8)$$

$$\mathbf{q} = \int \frac{\mathbf{v}\hbar\omega(k)}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \neq 0,$$

где $\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$.

Это означает, что на двух сторонах толстой пластины (см. разделы 13, 14) существуют макроскопические потоки квазичастиц и энергии, направленные в противоположные стороны, а цилиндр, намагниченный вдоль оси, должен огибаться потоком квазичастиц и энергии. Неясно, как обнаружить эти потоки, а также, какую роль в явлении играют диссипативные процессы. Казалось бы, роль диссипации не может быть существенной при $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$.

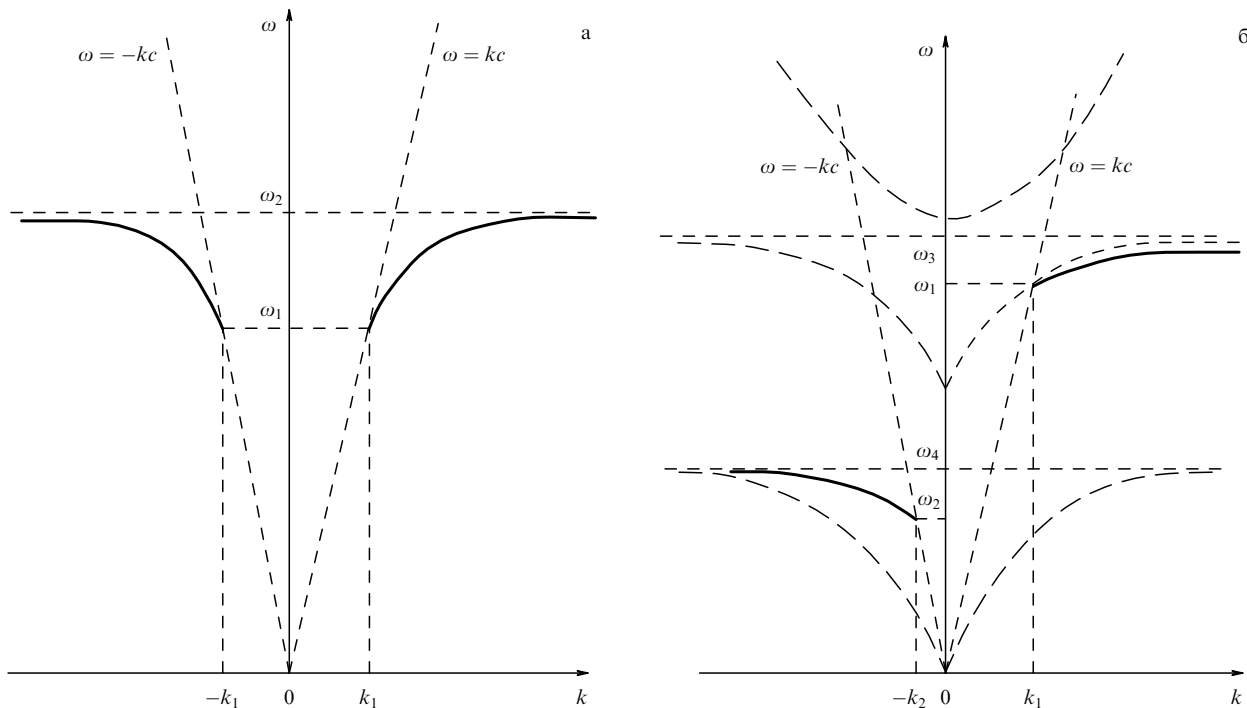


Рис. 11. Схематическая зависимость закона дисперсии поверхностного поляритона антиферромагнетика: (а) $H = 0$, (б) $0 \leq H < H_{\text{SF}}$.

10. Поверхностные магнитостатические волны

Рассмотрим сначала магнитостатическую волну, распространяющуюся вдоль границы полупространства, занятого ферромагнетиком, под углом θ к направлению магнитного поля и вектора намагниченности. Из уравнений магнитостатики, учитывая явный вид частотных зависимостей μ и μ' , нетрудно получить выражения для частоты поверхностной волны ω и ее логарифмического декремента затухания (в глубину образца) γ :

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_0 + (\omega_0 + \omega_M) \sin^2 \theta}{2 \sin \theta},$$

$$\gamma = |k| \frac{\omega_M \sin^2 \theta + \omega_0 \cos^2 \theta}{\omega_M \sin^2 \theta - \omega_0 \cos^2 \theta}. \quad (10.1)$$

Изменение знака частоты (т.е. отсутствие волны) при замене θ на $-\theta$ — следствие невязности волны.

При $\theta = \pi/2$, когда волновой вектор перпендикулярен **H**, получаем хорошо известное значение частоты волны Дэймона–Эшбаха [19]:

$$\omega\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv \omega_{\text{DE}} = \omega_0 + \frac{\omega_M}{2}.$$

Волна Дэймона–Эшбаха (DE) распространяется только в положительном направлении оси x , и для нее $\gamma = k > 0$. Отсутствие дисперсии показывает, что она не несет энергии и ее групповая скорость равна нулю. Из (10.1) получаем значение критического угла

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_M}}. \quad (10.2)$$

При $\theta = \theta_c$ глубина проникновения γ^{-1} обращается в нуль, а при $\theta < \theta_c$ она отрицательна — поверхностная волна отсутствует. Частота ω при $\theta = \theta_c$ имеет минимальное значение ($\omega = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$).

Обращение $\gamma = \gamma(\theta)$ в бесконечность при $\theta = \theta_c$ (т.е. глубины проникновения γ^{-1} в нуль) требует рассмотрения процессов, снимающих расходимость $\gamma = \gamma(\theta)$. Среди них важное место занимает пространственная дисперсия [18].

Учет пространственной дисперсии, как мы говорили, осуществляется путем формальной замены $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \omega_{\text{ex}}(ak)^2$. В результате уравнение для определения γ становится бикубическим. Отбирая решения с $\text{Re } \gamma > 0$, получим следующую структуру магнитного потенциала при $y < 0$ (в магнетике):

$$\varphi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) [A \exp(\gamma_1 y) + B \exp(\gamma_2 y) + C \exp(\gamma_3 y)],$$

$$\text{Re } \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (10.3)$$

где **r** и **k** — двумерные векторы: $\mathbf{r} \equiv (x, z)$, $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y)$.

Увеличение числа решений требует (для определения коэффициентов A , B и C) дополнительных граничных условий. Для их вывода нужно рассмотреть движение магнитного момента на границе образца, учтя отличие поверхностной энергии анизотропии от объемной, а также отсутствие при $y < 0$ магнитных атомов. Однако, так как уравнение Ландау–Лифшица, описывающее в пределе длинных волн движение магнитного момента,

является уравнением второго порядка, то можно ограничиться феноменологическим граничным условием, введя одну константу d размерности длины:

$$\mathbf{m}_{y=0} + d \left(\frac{d\mathbf{m}}{dy} \right)_{y=0} = 0. \quad (10.4)$$

Характер уравнения Ландау–Лифшица "требует" только того, чтобы граничное условие не содержало производных от компонент магнитного момента старше первой. "Константа" d может зависеть от частоты, от магнитного поля. Строго говоря, при принятой здесь записи ясный физический смысл имеют два предельных случая $d = 0$ и $d = \infty$. В двух предельных случаях условие (10.4) имеет особенно простой физический смысл: при $d \rightarrow \infty$ поверхностная анизотропия не играет роли (свободный магнитный момент на границе), а при $d \rightarrow 0$ — наоборот: поверхностная анизотропия фиксирует направление магнитного момента на границе. Анизотропия поверхности, конечно, может привести к усложнению граничного условия (10.4) — к замене скаляра d тензором второго ранга $d_{\beta, \beta'}$, где $\beta, \beta' = x, z$. Отметим, что знак d и компонент $d_{\beta, \beta'}$ не определен — он может быть и положительным, и отрицательным, а, кроме того, главные направления тензора $d_{\beta, \beta'}$ могут не совпадать с основными кристаллографическими направлениями образца.

Рассмотрим простейший случай ($\theta = \pi/2$), допускающий точное вычисление логарифмических декрементов затухания:

$$\gamma_1 = k, \quad \gamma_{2,3}^2 = k^2 + \frac{\omega_{\text{DE}}^2 \pm (\omega_M^2/4 + \omega^2)^{1/2}}{\omega_M \alpha}. \quad (10.5)$$

Согласно сказанному ранее,

$$\alpha = \frac{I}{\beta M} a^2. \quad (10.6)$$

Пренебрежение пространственной дисперсией означает, что $\alpha \rightarrow 0$. Из (10.5) видно, что $\gamma_{2,3} \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. Существенное отличие $|\gamma_2|, |\gamma_3|$ от $|\gamma_1|$ позволяет провести анализ дисперсионного уравнения и получить компактное выражение для закона дисперсии DE-волны с учетом пространственной дисперсии.

Используя непрерывность соответствующих компонент векторов **h** и **b**, а также дополнительное граничное условие (10.4), получим уравнение, определяющее закон дисперсии волны в виде равенства нулю детерминанта:

$$0 = \begin{vmatrix} 2 \frac{\omega_{\text{DE}} - \omega}{\omega_M(kd-1)} & k \left(\frac{\omega}{\omega_+} + 1 \right) & k \left(\frac{\omega}{\omega_-} + 1 \right) \\ 1 & \left(\frac{k\omega}{\omega_+} - \gamma_2 \right) (d\gamma_2 - 1) & \left(\frac{k\omega}{\omega_-} - \gamma_3 \right) (d\gamma_3 - 1) \\ 1 & \left(\frac{\gamma_2 \omega}{\omega_+} - k \right) (d\gamma_2 - 1) & \left(\frac{\gamma_3 \omega}{\omega_-} - k \right) (d\gamma_3 - 1) \end{vmatrix}. \quad (10.7)$$

Здесь $\omega_{\pm} = \omega_M/2 \pm (\omega_M^2/4 + \omega^2)^{1/2}$. Из (10.7) легко получить

$$\omega = \omega_{\text{DE}} + \frac{\omega_M^2 k(1 - dk)}{4(d\gamma_2 - 1)(d\gamma_3 - 1)} \times$$

$$\times \frac{(1 - d\gamma_2)(k - \gamma_2) - (1 - d\gamma_3)(k - \gamma_3)}{k\omega(\gamma_2 - \gamma_3) + (\omega^2 + \omega_M^2/4)^{1/2}(\gamma_2\gamma_3 - k^2)}. \quad (10.8)$$

Из формул (10.5) и (10.6) видно, что для того, чтобы поверхностная магнитная волна сохранила свой смысл макроскопического длинноволнового поверхностного возбуждения, необходимо выполнение неравенства

$$ak \ll \sqrt{\frac{\beta M}{I}} \ll 1. \quad (10.9)$$

Если $\gamma_2, \gamma_3 \gg k$ — действительные величины, то при выполнении условия (10.9) обменное взаимодействие изменяет структуру поля лишь в непосредственной близости от поверхности. Если $\text{Im } \gamma_2, \text{Im } \gamma_3 \neq 0$, то оно проявляется в осциллирующей зависимости поля от координаты с длиной волны вдоль y , которая значительно меньше длины поверхностной волны и ее глубины проникновения γ_1^{-1} .

Следует различать границы ферромагнетика с

$$d \gg \sqrt{\frac{I}{\beta M}} a \quad \text{и} \quad d \ll \sqrt{\frac{I}{\beta M}} a.$$

От соотношения между длиной волны $1/k$ и толщиной пластины d зависят затухание и дисперсия волны.

Начнем со случая

$$d \gg \sqrt{\frac{I}{\beta M}} a,$$

допускающего переход к "свободной" границе, на которой

$$\left. \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Из (10.8) имеем

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega - \omega_{\text{DE}}) &= \begin{cases} \frac{I}{\beta M} \frac{a}{d} \omega_M ak, & kd \ll 1, \\ 2 \frac{I}{\beta M} \omega_M (ak)^2, & kd \gg 1, \end{cases} \\ -\text{Im } \omega &= \begin{cases} \left(\frac{I}{\beta M} \right)^{3/2} \left(\frac{a}{d} \right)^2 \omega_M S_1 ak, & kd \ll 1, \\ \left(\frac{I}{\beta M} \right)^{3/2} \omega_M S_2 (ak)^3, & kd \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Здесь S_1 и S_2 — довольно громоздкие функции ω_0, ω_M , в предельных случаях

$$\begin{aligned} S_1 \simeq S_2 &\simeq 2 \sqrt{\frac{2\omega_0}{\omega_M}}, \quad \omega_M \ll \omega_0, \\ S_1 \simeq 1,9, \quad S_2 &\simeq 0,5, \quad \omega_M \gg \omega_0. \end{aligned} \quad (10.11)$$

При сравнительно жестком зацеплении магнитного момента на границе ($d \ll (I/\beta M)^{1/2} a$), если выполнено условие (10.9), то $kd \ll 1$ автоматически, и

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega - \omega_{\text{DE}}) &= \sqrt{\frac{I}{\beta M}} \omega_M S_- ak, \\ -\text{Im } \omega &= \sqrt{\frac{I}{\beta M}} \omega_M S_+ ak, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где

$$S_{\pm} = \frac{1}{4} \left[\frac{(\omega_{\text{DE}}/\omega_M)^2 + 1/4 \mp (\omega_{\text{DE}}/\omega_M)}{(\omega_{\text{DE}}/\omega_M)^2 + 1/4} \right]^{1/2}. \quad (10.13)$$

Обобщение граничных условий (переход от скаляра d к тензору $d_{\beta, \beta'}$) позволяет рассмотреть (как предельный случай) смешанные граничные условия:

$$\left. \frac{\partial m_y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad m_z|_{y=0} = 0, \quad (10.14)$$

или

$$\left. \frac{\partial m_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad m_y|_{y=0} = 0. \quad (10.14')$$

Анализ показывает: достаточно закрепления на границе хотя бы одной компоненты магнитного момента, чтобы $\text{Re}(\omega - \omega_{\text{DE}})$ и $\text{Im } \omega$ были величинами одного порядка и линейно зависели от волнового вектора.

Формулы для $\theta \neq \pi/2$ очень громоздки, однако качественный анализ возможен. При

$$\theta - \theta_c \gg \frac{I}{\beta M} (ak)^2$$

по-прежнему (как при $\theta = \pi/2$) два из трех значений γ велики по сравнению с одним. Это показывает, что характер волны остается прежним, а соотношение между $\text{Re}(\omega - \omega_{\text{DE}}(\theta))$ и $-\text{Im } \omega$ определяется параметром d . Как и при $\theta = \pi/2$, если $d \rightarrow \infty$, дисперсия превышает затухание, а при $d \rightarrow 0$ эти величины одного порядка. Ситуация резко меняется при приближении к критическому углу $\theta \sim \theta_c$. Как мы видели, при $\theta \rightarrow \theta_c$ логарифмический декремент затухания магнитостатической волны γ , вычисленный без учета пространственной дисперсии, стремится к бесконечности. Следовательно, теряется основное свойство поверхностной магнитостатической волны — ее большая длина затухания по сравнению с характеристиками спиновой волны. С учетом неоднородного обменного взаимодействия все три значения γ_i не стремятся к бесконечности при $\theta \rightarrow \theta_c$. Одно из значений γ_i оказывается мнимым, т.е. волна, строго говоря, является не поверхностной, а слабозатухающей.

При $d = \infty$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\omega - \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} \right] &\sim -\frac{I}{\beta M} \omega_M (ak)^2, \\ -\text{Im } \omega &\sim \left(\frac{I}{\beta M} \right)^{5/4} \omega_M (ak)^{5/2}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

При $d = 0$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\omega - \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} \right] &\sim -\sqrt{\frac{I}{\beta M}} \omega_M ak, \\ -\text{Im } \omega &\sim \left(\sqrt{\frac{I}{\beta M}} ak \right)^{3/2} \omega_M. \end{aligned} \quad (10.16)$$

В обоих случаях $|\text{Im } \omega| \ll |\text{Re}[\omega - \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)}]|$, и в обоих случаях волна обладает аномальной дисперсией. Сравнение законов дисперсии поверхностной магнито-

статической волны при $\theta \neq \theta_c$ и $\theta = \theta_c$ показывает, что в узком интервале углов

$$|\theta - \theta_c| \leq \frac{I}{\beta M} (ak)^2 \ll 1$$

(см. (10.9)) спектр существенно перестраивается: не только изменяется зависимость $\text{Re } \omega$ и $\text{Im } \omega$ от k , но и происходит смена характера дисперсии: от нормальной (вдали от θ_c) к аномальной.

В случае антиферромагнетика (см. [10]) в терминах, используемых в разделе 5, уравнение для определения частоты поверхностной магнитостатической волны, распространяющейся перпендикулярно ЛО, имеет вид

$$1 + \text{sgn}(k) \mu'(\omega) + \sqrt{\mu_1(\omega)\mu_2(\omega)} = 0, \quad (10.17)$$

а логарифмический декремент затухания

$$\gamma = |k| \sqrt{\frac{\mu_1(\omega)}{\mu_2(\omega)}} > 0. \quad (10.18)$$

Поверхностная волна может существовать в том интервале частот, где $\mu_1(\omega)/\mu_2(\omega) > 0$. В случае изотропии в базисной плоскости ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$, см. табл. 2) такого ограничения нет, так как $\gamma = |k|$, а уравнение (10.17) упрощается:

$$1 + \text{sgn}(k) \mu'(\omega) + \mu(\omega) = 0. \quad (10.19)$$

При существовании $\mu' \neq 0$ (гиротропии) волна невзаимна. Как и в случае поляритона, невзаимность возникает при $H \neq 0$. При $H = 0$ гиротропии нет ($\mu' \equiv 0$), и независимо от направления волны (знака k) ее частота (обозначим ее ω_s) равна

$$\omega_s = \sqrt{\frac{1 + \mu_0}{2}} \Omega_{\text{SF}}, \quad \mu_0 = 1 + \frac{4\pi}{\delta}. \quad (10.20)$$

При $0 \leq H \leq H_{\text{SF}}$ появляется невзаимность:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{1 + \mu_0}{2}} \Omega_{\text{SF}} \pm \Omega \text{sgn}(k). \quad (10.21)$$

Анизотропия магнитной восприимчивости усложняет задачу: при $H_{\text{SF}} < H \leq H_E$ уравнение (10.17) — кубическое относительно ω . Его анализ мы проводить не будем, заметив, что при $H_{\text{SF}} \ll H < H_E$ анизотропией можно пренебречь и

$$\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \frac{\Omega^2 \mu_0 - \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}, \quad \mu' = (\mu_0 - 1) \frac{\Omega \omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (10.22)$$

Отсюда, согласно (10.19), $\omega_s \simeq \Omega$ и, казалось бы, существует как при $k > 0$, так и при $k < 0$. Более точный анализ показывает, что при $k < 0$ у точного уравнения (10.17) нет решения. Кроме того, можно показать, что частота ω_s непрерывна в точке $H = H_E$.

Наконец, при $H \geq H_E$ поверхностная магнитостатическая волна тоже существует только при $k > 0$, и

$$\omega_s = \frac{1}{2} \Omega_M + \Omega. \quad (10.23)$$

Это обычная волна Дэймона–Эшбаха в ферромагнетике с магнитным моментом единицы объема, равным $2M$. На рисунке 12 схематически показана зависимость частоты поверхностной волны ω_s от магнитного поля H .

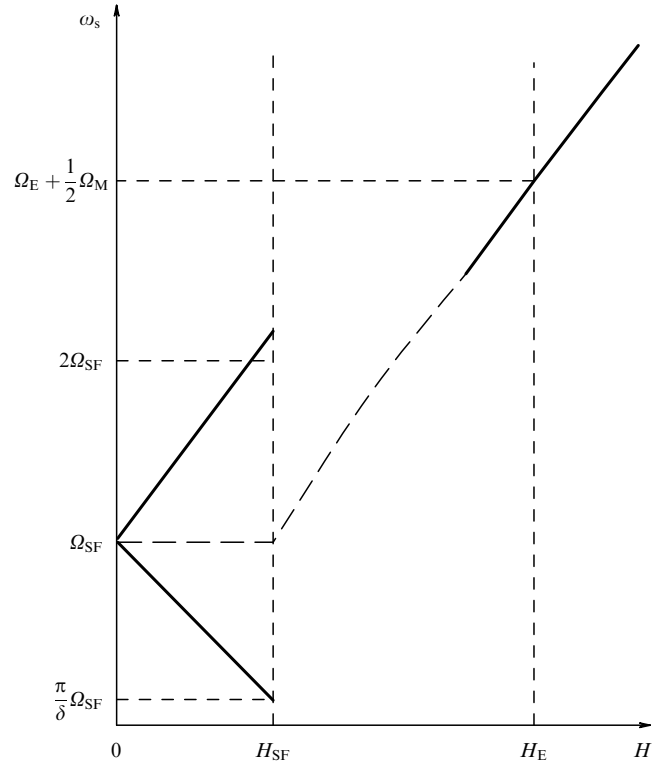


Рис. 12. Зависимость частоты поверхностной МСВ от магнитного поля.

11. Ферромагнитный металл. Электронный механизм затухания волн Дэймона–Эшбаха

Существование в магнитных проводниках электронов проводимости создает много проблем в понимании магнитных свойств металлов. Прежде всего, конечно, необходимо выяснить, какую роль играют электроны проводимости в формировании намагниченности. Электроны проводимости — один из важнейших источников диссипации для магнонов: взаимодействие магнонов с электронами проводимости наряду со взаимодействием с фононами и нерегулярностями решетки определяют время жизни магнонов. Рассеяние электронов на магнонах дает (специфический для магнетиков) вклад в среднюю вероятность рассеяния электронов проводимости, ответственную за их конечную длину свободного пробега, т.е. определяет один из механизмов сопротивления электронных проводников.

При любом (в большей или меньшей мере) модельном подходе для решения задач макроскопической электродинамики (электродинамики сплошных сред) должны быть сформулированы материальные уравнения, связывающие магнитную индукцию \mathbf{B} с магнитным полем \mathbf{H} и плотностью тока электронов проводимости \mathbf{j} с напряженностью электрического поля \mathbf{E} , в которые войдут результаты модельного (микроскопического) рассмотрения (см. уравнения (1.1)–(1.4)). Однако есть большое число задач, требующих решения после того, как материальные уравнения сформулированы и входящие в них величины определены. В давнишнем обзоре [4] рассмотрены различные проявления плазменных эффектов при ферромагнитном резонансе, обусловленные главным образом тем, что существование скин-эффекта

(нормального и/или аномального) изменяет структуру электромагнитного поля, играющую важную роль при вычислении измеряемых в эксперименте характеристик образца при исследовании ферромагнитного резонанса (в частности, поверхностного импеданса). Естественно, с середины 60-х годов имеется существенный прогресс в изучении высокочастотных свойств магнитных металлов. Более современный обзор содержится в книге Гуревича и Мелкова [2].

В этом разделе мы остановимся на одном вопросе — исследуем электронный механизм затухания волн Дэймона — Эшбаха в металлах [20], считая, что материальные уравнения известны, т.е. мы не будем заниматься, например, вычислением величин, входящих в уравнение Ландау — Лифшица, а будем считать, что они нам известны. То же относится к характеристикам электронов проводимости.

Если считать, что электроны проводимости "не ощущают" наличия намагниченности, глубина проникновения велика по сравнению с длиной пробега, а частота $\omega_{DE} \ll 1/\tau_e$, где τ_e — время релаксации электронов, то можно воспользоваться формулой (9.6), заметив, что эффективная диэлектрическая проницаемость металла в этих случаях есть $4\pi\sigma/\omega$ и она чисто мнимая величина:

$$\text{Im } \omega = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_M \omega_{DE}}{(ck)^2} \sigma, \quad \text{Re } \omega \simeq \omega_{DE} - \frac{\omega_M \omega_{DE}^2}{8(ck)^2}. \quad (11.1)$$

Условие существования слабозатухающей поверхностной волны ($\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$) требует выполнения довольно жесткого условия:

$$k\delta \gg \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_M}{\omega_{DE}} \right)^{1/2}, \quad (11.2)$$

где $\delta = c(2\pi\sigma\omega_{DE})^{-1/2}$ — глубина скин-слоя на частоте DE-волны.

При низких температурах в предельно чистых металлах электронная частота релаксации τ_e^{-1} может оказаться меньше ω_{DE} . При $\omega\tau_e \gg 1$

$$\varepsilon' \simeq -\frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon'' \simeq \frac{\omega_L^2}{\omega^3 \tau_e}, \quad (11.3)$$

ω_L^2 — квадрат плазменной частоты электронов проводимости,

$$\omega_L^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m^*}$$

(обозначения обычны: n_e — плотность электронов проводимости, m^* — их эффективная масса). Используя результаты раздела 9, имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \omega &= \omega_{DE} \left(1 + \frac{\omega_M \omega_L^2}{8c^2 k^2 \omega_{DE}} \right), \\ \text{Im } \omega'' &= -\frac{\omega_M \omega_L^2}{8c^2 k^2} \frac{1}{\omega_{DE} \tau_e}, \quad |\text{Im } \omega''| \ll \text{Re } (\omega - \omega_{DE}). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Из первой формулы находим

$$v_{gr} = -\frac{c\omega_M \omega_L^2}{4(ck)^3} = -4\sqrt{2}c \frac{(\omega - \omega_{DE})^{3/2}}{\omega_M^{1/2} \omega_L}, \quad \omega > \omega_{DE}. \quad (11.5)$$

Формулы (11.3)–(11.5) интересны тем, что описывают магнитные квазистатические волны в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью: DE-волна обладает аномальной дисперсией и переносит энергию против направления волнового вектора (напомним, что к тому же эта волна невзаимна). Формулы (11.3)–(11.5) получены без учета влияния силы Лоренца на электроны проводимости. Для этого есть основание: DE-волна в рассматриваемой геометрии возбуждает только составляющую электрического поля вдоль магнитного поля \mathbf{H} (и намагниченности \mathbf{M}). Поэтому под σ здесь следует понимать σ_{\parallel} — продольную составляющую тензора проводимости, которая, как известно [21], слабо зависит от магнитного поля (существенное изменение в магнитном поле претерпевают поперечные относительно \mathbf{H} составляющие тензора $\hat{\sigma}$).

При низких температурах в металлах сравнительно легко возникает аномальный скин-эффект, когда макроскопическое материальное уравнение, связывающее плотность тока \mathbf{j}_e и напряженность электрического поля \mathbf{E} , оказывается несправедливым из-за необходимости учета пространственной дисперсии проводимости (см. (1.2)).

Отказ от макроскопического материального уравнения означает необходимость построения кинетической теории, что и является основной задачей данного раздела.

При построении кинетической теории электронного затухания МСВ в ферромагнитном металле сначала вовсе пренебрежем влиянием магнитного поля на электроны (учитывая сказанное выше о σ_{\parallel}). Тогда полная система уравнений задачи такова:

$$\frac{d^2 e_z}{dy^2} - k^2 e_z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{\mu'^2 - \mu^2}{\mu} j_z, \quad y < 0, \quad (11.6)$$

$$\frac{d^2 e_z^v}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e_z^v = 0, \quad y > 0. \quad (11.7)$$

$$v_y \frac{df_1}{dy} + \left(ikv_x + \frac{1}{\tau_e} \right) f_1 = -e \frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} v_z e_z(y), \quad y < 0. \quad (11.8)$$

Здесь e_z (e_z^v) — напряженность электрического поля в металле (в вакууме), f_1 — линейная по электрическому полю добавка к фермиевской функции распределения f_F ,

$$j_z = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int v_z f_1 d^3 p, \quad (11.9)$$

$\mathbf{v} = \mathbf{p}/m^*$ — скорость электронов; интегрирование ведется по всему \mathbf{p} -пространству; электронный газ вырожден, так что

$$-\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F).$$

Мы записали кинетическое уравнение в τ -приближении, так как в наиболее интересном случае $kl \gg 1$ (l — длина свободного пробега электрона) время релаксации вовсе выпадает из ответа, а при $kl \ll 1$ коэффициент затухания DE-волны записывается в макроскопических терминах (см. (11.1)).

В кинетическом уравнении (11.8) мы опустили слагаемое

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -i\omega f_1,$$

так как считаем, что $\omega\tau_e \ll 1$ (случай $\omega\tau_e \gg 1$ описан выше, см. (11.3)–(11.5)). Наконец, принято, что все интересующие нас функции пропорциональны $\exp(ikx)$, где k — волновой вектор ДЕ-волны. К обычным электродинамическим граничным условиям надо добавить граничное условие для функции распределения электронов f_1 . Мы ограничимся случаем зеркального отражения электронов проводимости поверхностью:

$$f_1|_{y=0, v_y < 0} = f_1|_{y=0, v_y > 0}, \quad f_1|_{y \rightarrow -\infty, v_y > 0} = 0. \quad (11.10)$$

Второе равенство обеспечивает равновесность электронов в глубине металла. Согласно (11.9), а также (11.8) с учетом (11.10),

$$\begin{aligned} j_x(y) &= \int_{-\infty}^0 K(y, y') e_z(y') dy', \\ K(y, y') &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{v_y > 0} \left(-\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} \right) \frac{v_z^2}{v_y} \times \\ &\times \left\{ \exp \left[-\frac{|y-y'|}{v_y} \left(\frac{1}{\tau_e} + ikv_x \right) \right] + \right. \\ &\left. + \exp \left[-\frac{|y+y'|}{v_y} \left(\frac{1}{\tau_e} + ikv_x \right) \right] \right\} d^3p. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Продолжим формально $e_x(y)$ четно в область $y > 0$ для того, чтобы можно было использовать преобразование Фурье по оси y (ядро становится разностным):

$$\begin{aligned} j_z(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(y-y') e_z(y') dy', \\ K(y-y') &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{v_y > 0} \left(-\frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon} \right) \frac{v_z^2}{v_y} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(y-y')}{v_y} \left(\frac{1}{\tau_e} + ikv_x \right) \right] d^3p. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Эта запись позволяет считать уравнение (11.6) формально справедливым при $y > 0$. Применим к нему преобразование Фурье, учтя, что функция $e_z(y)$ имеет излом:

$$\left[\frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{\mu'^2 - \mu^2}{\mu} K_k(q) + k^2 + q^2 \right] e(q) = -2 \left(\frac{de_z}{dy} \right)_{y=0}. \quad (11.13)$$

Здесь

$$K_k(q) = \frac{2e^2 \tau_e}{(2\pi\hbar)^3} \oint \frac{v_z^2}{v} ds \frac{1 + ik\tau_e v_x}{(1 + ik\tau_e v_x)^2 + \tau_e^2 v_x^2 q^2} \quad (11.14)$$

— ядро оператора проводимости в (k, q) -представлении;

$$K_0(0) = \sigma = \frac{Ne^2 \tau_e}{m}$$

— статическая проводимость металла.

Из уравнений Максвелла и граничных условий имеем

$$\begin{aligned} \frac{de_z}{dy} \Big|_{y=0} &= -k_x \frac{\mu'}{\mu} e_z(0) - \frac{i\omega}{c} \frac{\mu'^2 - \mu^2}{\mu} h_x(0), \\ h_x(0) &= i \frac{c}{\omega} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e_z(0). \end{aligned} \quad (11.15)$$

С другой стороны, уравнение (11.13) позволяет определить $e(q)$, а, совершив обратное преобразование Фурье, — $e_z(y)$, что дает возможность исключить $(de_z/dy)_{y=0}$ из системы (11.15), получив систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных $h_x(0)$ и $e_z(0)$. Приравняв детерминант этой системы нулю, получаем уравнение, связывающее частоту ω и волновой вектор k , т.е. закон дисперсии ДЕ-волны:

$$\begin{aligned} \mu &= \left[\mu' k + (\mu'^2 - \mu^2) \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right] \times \\ &\times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[q^2 + k^2 + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{\mu'^2 - \mu^2}{\mu} K_k(q) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где функции $\mu(\omega)$ и $\mu'(\omega)$ заданы выражениями (1.20).

Наличие интеграла по q в правой части уравнения (11.16) — свидетельство учета пространственной дисперсии проводимости. Пространственную дисперсию магнитной проницаемости мы не учитываем, что накладывает ограничения на величину волнового вектора k :

$$k \ll \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\beta M}{I}}, \quad \omega \sim \omega_{DE}, \quad \omega_0, \quad \omega_M \quad (11.17)$$

(во всех оценках ω_0 и ω_M — величины одного порядка).

При формальном стремлении k к бесконечности (при $\omega \neq \infty$) из (11.16), естественно, следует $\omega = \omega_{DE}$. При $kl \ll 1$, когда справедлива локальная связь между \mathbf{e} и \mathbf{j} , приходим к возможности введения эффективной диэлектрической проницаемости, а с нею и формулы (11.1).

Наибольший интерес представляет противоположный случай, аналогичный аномальному скин-эффекту ($kl \gg 1$). Пусть при этом

$$k \gg \frac{\omega}{c}, \quad (k\delta_0)^2 k \gg \frac{\omega}{v_F}, \quad \delta_0 = \frac{c}{\omega_L}, \quad \omega_L^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m^*}. \quad (11.18)$$

Магнитные частоты ($\omega_0, \omega_M, \omega_{DE}$) столь низки, что

$$\frac{\omega v_F}{\omega_L c} \ll 1.$$

Второе условие важнее первого. Неравенства позволяют использовать асимптотическое значение $K_k(q)$, пропорциональное $(k^2 + q^2)^{-1/2}$ (см. (11.14)). В результате из уравнения (11.16) можно получить

$$\begin{aligned} \text{Re } \omega &\simeq \omega_{DE} - \frac{\omega_M \omega_{DE}^2}{8(ck)^2}, \\ \text{Im } \omega &\simeq -\frac{\omega_M \omega_{DE} \omega_L^2}{3\pi^2 c^2 v_F k^3} = \frac{4\pi \sigma \omega_M \omega_{DE}}{(ck)^2 kl}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Сравнение последней формулы с формулой (11.1) показывает, что в согласии с теорией аномального скин-эффекта лишь kl -я часть электронов проводимости принимает участие во взаимодействии с ДЕ-волной. Пространственная дисперсия приводит к тому, что диссипативное слагаемое (k^{-3}) стремится к нулю быстрее, чем дисперсионное (k^{-2}). При

$$k \gg \frac{8}{3\pi^2} \frac{\omega_L^2}{v_F \omega_{DE}} \quad (11.20)$$

DE-волна — слабозатухающая. Надо помнить, что условие (11.20) не должно вступать в противоречие с условием (11.17). Необходимо, чтобы

$$\frac{a}{\delta_0} \ll \sqrt{\frac{\beta M}{I}} \left(\frac{v_F}{c} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega_L}{\omega_{DE}} \right)^{1/3}. \quad (11.21)$$

Это условие не обременительно. Нелокальная связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля приводит к неэкспоненциальности зависимости компонент электромагнитного поля и намагниченности от координаты y ; появляются "медленно" затухающие слагаемые, пропорциональные $y^{3/2} \exp(-ky)$, но имеющие малую амплитуду $\sim (k\delta_0)^{-2} \omega(kv_F)^{-1}$. Проявиться они могут только на больших расстояниях от поверхности металла.

Как мы отмечали, магнитное поле не изменяет значение статической проводимости. Квантовыми эффектами типа эффекта Шубникова–де Гааза мы попросту пренебрегаем, а поверхность Ферми считаем сферой. Учет пространственной дисперсии меняет ситуацию: одновременно с зависимостью от волнового вектора появляется зависимость от магнитного поля. Поэтому формулы предыдущих разделов справедливы при дополнительных условиях для среднего магнитного поля B или для волнового вектора k :

$$kr_B \gg 1 \quad \text{или} \quad kl \ll 1, \quad (11.22)$$

где $r_B = cp_F/eB$ — радиус орбиты электрона в магнитном поле ($p_F = m^*v_F$). Последовательно влияние магнитного поля будет рассмотрено ниже в этом разделе.

Приведем оценку, справедливую в предельно сильном магнитном поле, когда $r_B \ll l$, $kr_B \ll 1$, т.е. радиус орбиты электрона — наименьший параметр размерности длины. Соотношение между l и $1/k$ может быть любым, но, как показывает анализ, продольная проводимость лишь незначительно отличается от своего макроскопического значения ($\sigma \rightarrow \sigma[1 - (1/6\pi)(kr_B)^2]$) и

$$\omega \simeq \omega_{DE} - \frac{i\pi}{2} \frac{\omega_M \omega_{DE}}{c^2 k^2} \sigma \left[1 - \frac{1}{6\pi} (kr_B)^2 \right]. \quad (11.23)$$

Видно, что влияние сильного магнитного поля сводится к небольшому уменьшению затухания DE-волны.

Наиболее интересен случай промежуточных полей в условиях предельного аномального скин-эффекта (см. [22]), когда радиус орбиты электрона r_B значительно больше длины DE-волны $\lambda = 1/k$ и значительно меньше длины свободного пробега l :

$$l \gg r_B \gg \lambda. \quad (11.24)$$

В условиях (11.24) при взаимодействии с электронами проводимости плоской волны (например, звуковой или спиновой), распространяющейся перпендикулярно магнитному полю, наблюдается своеобразный геометрический резонансный эффект, получивший название пиппардовских осцилляций по имени Пиппарда (A.V. Pipard), впервые обратившего внимание на спектроскопические возможности этого эффекта. Осцилляции (периодическая зависимость от обратного магнитного поля скорости волны и ее коэффициента затухания) имеют простую кинематическую природу: когда внутри орбиты элект-

рона в магнитном поле помещается целое число волн, ситуация повторяется. Из условия

$$\frac{cD_F}{eB} = N\lambda,$$

где $N \gg 1$ — целое число, а D_F — экстремальный диаметр поверхности Ферми (для сферы $D_F = 2p_F$), немедленно следует значение периода

$$\Delta \frac{1}{B} = \frac{2\pi e}{kcD_F}. \quad (11.25)$$

Исследуемая нами поверхностная DE-волна не плоская. Однако, как показал анализ [20], зависимость амплитуды волн от нормальной к поверхности магнетика координаты не уничтожает осцилляционную зависимость ее характеристик.

12. Электромагнитные волны в гироанизотропной среде

Магнитный кристалл — гироанизотропная среда, электродинамические свойства которой определяются двумя тензорами: тензором диэлектрической ϵ_{ik} и магнитной μ_{ik} проницаемостей. Так как оба тензора (особенно тензор магнитных проницаемостей) весьма чувствительны к воздействию внешнего магнитного поля, а благодаря резонансной зависимости от частоты компоненты тензоров могут принимать самые разнообразные значения, то нет никаких оснований утверждать, что структуры тензоров ϵ_{ik} и μ_{ik} одинаковы. Наконец, вращение магнитных моментов делает оба эти тензора гиротропными, а это означает, что поворотом декартовой системы координат тензор нельзя диагонализировать. Правда, в отличие от тензора μ_{ik} у тензора ϵ_{ik} гиротропия в общем случае очень мала. Свойства электромагнитных волн, распространяющихся в среде, определяются комбинацией тензоров ϵ_{ik} и μ_{ik} . Очевидно, что подобные среды должны проявлять бесконечное разнообразие высокочастотных свойств.

Покажем, как непривычно выглядит электромагнитное поле в гироанизотропной среде [23]. Рассмотрим простейший случай. Во-первых, предположим, что среда является недиссипативной, а значит, тензоры ϵ_{ik} и μ_{ik} — эрмитовы:

$$\epsilon_{ik}^* = \epsilon_{ki}, \quad \mu_{ik}^* = \mu_{ki}. \quad (12.1)$$

Во-вторых, предположим, что направление (в принятых в этом разделе обозначениях — ось z), по которому распространяется волна, таково, что

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{xz} = 0.$$

Тогда

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & i\epsilon' \\ -i\epsilon' & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & i\mu' \\ -i\mu' & \mu_{yy} \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

Возможно, что $|\epsilon'| \ll 1$. Выражения для μ_{xx} , μ_{yy} и μ' можно найти в предыдущих разделах, но мы не будем здесь их использовать.

Уравнения Максвелла для монохроматической волны, используя конкретный вид тензоров $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$,

можно записать в следующей форме:

$$v_{\alpha\beta} E_k = n^2 E_{\alpha}. \quad (12.3)$$

Здесь n — показатель преломления, а

$$v_{\alpha\beta} = \mu_{\gamma\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta} - \mu_{\gamma\alpha} \varepsilon_{\gamma\beta}. \quad (12.4)$$

Дисперсионное уравнение, естественно, принимает вид

$$|n^2 \delta_{\alpha\beta} - v_{\alpha\beta}| = 0. \quad (12.5)$$

Несимметричность матрицы $v_{\alpha\beta}$ относительно $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ связана с тем, что уравнение (12.4) было получено исключением магнитного поля. Если исключить электрическое поле, то дисперсионное уравнение будет содержать матрицу $\tilde{v}_{\alpha\beta}$, получающуюся из $v_{\alpha\beta}$, если $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$ поменять местами. Естественно, собственные значения матриц $\tilde{v}_{\alpha\beta}$ и $v_{\alpha\beta}$ совпадают.

В нашем случае матрица $v_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$v_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mu_{yy} \varepsilon_{xx} + \mu' \varepsilon' & i(\mu_{yy} \varepsilon' + \mu' \varepsilon_{yy}) \\ -i(\mu_{xx} \varepsilon' + \mu' \varepsilon_{xx}) & \mu_{xx} \varepsilon_{yy} + \mu' \varepsilon' \end{pmatrix}. \quad (12.6)$$

Матрица $v_{\alpha\beta}$ не эрмитова. Это следствие того, что среда одновременно обладает анизотропией и гиротропией электрических и магнитных свойств. Именно неэрмитовость матрицы $v_{\alpha\beta}$ определяет особенности распространения электромагнитных волн в таких средах.

Из уравнения (12.5) находим значения двух показателей преломления:

$$n_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[v_{xx} + v_{yy} \pm \sqrt{(v_{xx} - v_{yy})^2 + 4v_{xy}v_{yx}} \right]. \quad (12.7)$$

Собственные волны в гироанизотропной среде обладают весьма своеобразной поляризацией: в общем случае первая и вторая волна не ортогональны друг другу. Из уравнений (12.3)–(12.7) имеем

$$\gamma^E = \frac{E_x}{E_y} = \frac{n^2 - v_{yy}}{v_{yx}}, \quad \gamma^H = \frac{H_x}{H_y} = \frac{n^2 - \tilde{v}_{yy}}{\tilde{v}_{yx}},$$

$$E_z = H_z = 0. \quad (12.8)$$

Связь между компонентами электрического и магнитного полей имеет вид

$$\mathbf{H} = n\hat{\mu}^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = (0, 0, 1). \quad (12.9)$$

Мы опустили индексы 1 и 2, указывающие тип волны.

Проанализируем интересный случай вырождения — совпадение корней дисперсионного уравнения (12.5). Согласно (12.7), корни становятся кратными при выполнении равенства

$$(v_{xx} - v_{yy})^2 = -4v_{xy}v_{yx}. \quad (12.10)$$

Для эрмитовой матрицы $v_{xy} = v_{yx}$ вырождение возможно только, если $v_{xx} = v_{yy} = v_0$, $v_{xy} = v_{yx} = 0$, т.е. $v_{\alpha\beta} = v_0 \delta_{\alpha\beta}$. При выполнении этих условий анизотропия электромагнитных свойств среды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, отсутствует, и выбор базисных направлений произволен. При этом система уравнений (12.3) по-прежнему имеет два линейно незави-

симых решения, т.е. существуют две линейно независимые поляризации $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$, а показатели преломления двух волн совпадают.

Для неэрмитовой матрицы $v_{\alpha\beta}$ при совпадении корней уравнения (12.5) сливаются также и собственные векторы матрицы. Она становится "неполноосной", т.е. имеет один собственный вектор, и, следовательно, в среде могут распространяться плоские волны только с одной поляризацией:

$$\frac{E_x}{E_y} = \sqrt{-\frac{v_{xy}}{v_{yx}}}. \quad (12.11)$$

Это обстоятельство известно (см. [24]), однако обычно неэрмитовость матрицы v_{ik} связана с затуханием. Тогда совпадение корней приводит к необходимости вводить решения типа

$$(a + bz) \exp(ikz), \quad (12.12)$$

так как плоские волны сами по себе уже не образуют полную систему.

В описываемом случае среда недиссипативна, и решения типа (12.12) возникнуть не могут, так как при $z \rightarrow \infty$ напряженности полей стремятся к бесконечности (волновой вектор k действителен). Если подкоренное выражение в формуле (12.7) обращается в нуль при частоте ω_0 , то при $\omega < \omega_0$ квадрат показателя преломления комплексен.

Рассмотрим детально интервал частот вблизи ω_0 ($\omega \geq \omega_0$). Из четырех корней уравнения (12.5) для показателя преломления n выбираются два, удовлетворяющие условию обращения в нуль на бесконечности при введении бесконечно малого затухания. Для конкретизации мы предполагаем, что волна распространяется в сторону положительных z . Введем поглощение только в $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\delta, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon'_{yy} + i\delta.$$

Ввиду малости поглощения δ квадрат показателя преломления n^2 можно записать в следующей форме:

$$n^2 = s + i\delta \pm \left(\sqrt{p} + \frac{i}{2} \frac{q}{\sqrt{p}} \right),$$

Здесь p — вещественная, а q — мнимая части подкоренного выражения в (12.7):

$$p = \text{Re} \left[\frac{1}{4} (v_{xx} - v_{yy})^2 + v_{xy}v_{yx} \right],$$

$$q = \text{Im} \left[\frac{1}{4} (v_{xx} - v_{yy})^2 + v_{xy}v_{yx} \right],$$

а значение $s = (v_{xx} + v_{yy})/2$ естественно считать положительным. При $s < 0$ вблизи нуля подкоренного выражения волны вовсе не распространяются. Мнимая часть q — малая величина порядка мнимой части диэлектрической проницаемости δ , а p мало в меру близости к точке совпадения корней, $p \sim (\omega - \omega_0)/\omega_0$.

Если $\delta \ll p \ll 1$, то для мнимой части n^2 имеем

$$\text{Im } n^2 = \delta(1 + p^{-1/2}) \simeq \delta p^{-1/2},$$

и решениями, удовлетворяющими условиям на бесконечности ($\text{Im } n > 0$), являются

$$\begin{aligned} n_1 &= (s + \sqrt{p})^{1/2} \exp \left[\frac{i}{2} \arctan \frac{\delta p^{-1/2}}{s + \sqrt{p}} \right], \\ n_2 &= (s - \sqrt{p})^{1/2} \exp \left[i \left(\pi - \frac{1}{2} \arctan \frac{\delta p^{-1/2}}{s - \sqrt{p}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Устремляя δ к нулю, получим

$$n_1 = (s + \sqrt{p})^{1/2}, \quad n_2 = -(s - \sqrt{p})^{1/2}. \quad (12.14)$$

Таким образом, решение имеет вид

$$\mathbf{E}^{(1)} \exp \left(i \frac{\omega}{c} n_1 z \right) + \mathbf{E}^{(2)} \exp \left(i \frac{\omega}{c} n_2 z \right). \quad (12.15)$$

Подчеркнем: n_1 положительно, а n_2 отрицательно. Это означает, что фаза в первой волне движется в положительном направлении (нормальная дисперсия), а во второй — в отрицательном (аномальная дисперсия). Энергия, конечно, в обеих волнах распространяется в положительном направлении z .

При конкретном расчете характеристик среды вблизи частоты ω_0 надо учесть и противоположный предельный случай ($p \ll \delta \ll 1$), т.е. рассмотреть непосредственную окрестность точки $\omega = \omega_0$. При этом, как легко убедиться, действительные части показателя преломления также имеют различные знаки. Особенностью этого участка спектра является корневая зависимость мнимой части показателя преломления от малого затухания, что должно проявиться также в частотной зависимости импеданса и коэффициента отражения (в частности, оценивая величины, обращающиеся в нуль при $\delta = 0$, надо пользоваться корневым приближением).

Анализ структуры электромагнитного поля в среде показывает, что можно рассмотреть падение электромагнитной волны на полупространство, заполненное гироанізотропной средой, не вводя решений типа (12.12). Будем для простоты предполагать падение нормальным, падающую волну — линейно поляризованной вдоль оси x ($E_y^{(i)} = 0$), амплитуду падающей волны равной единице ($E_x^i = H_y^i = 1$). Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} 1 + E_x^r &= E_x^{(1)} + E_x^{(2)}, \quad 1 + H_y^r = H_y^{(1)} + H_y^{(2)}, \\ E_y^r &= E_y^{(1)} + E_y^{(2)}, \quad H_x^r = H_x^{(1)} + H_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Для отраженной волны, используя уравнения (12.8) и (12.9), а также соотношения $E_x^r = -H_y^r$, $E_y^r = H_x^r$, получим

$$\begin{aligned} E_x^r &= \frac{(1 - \beta_1 \gamma_1^H n_1)(\gamma_2^E - \beta_2 n_2) - (1 - \beta_2 \gamma_2^H n_2)(\gamma_1^E - \beta_1 n_1)}{(1 - \beta_1 \gamma_1^H n_1)(\gamma_2^E + \beta_2 n_2) - (1 - \beta_2 \gamma_2^H n_2)(\gamma_1^E + \beta_1 n_1)}, \\ E_y^r &= \frac{2(\beta_2 \gamma_2^H n_2 - \beta_1 \gamma_1^H n_1)}{(1 - \beta_1 \gamma_1^H n_1)(\gamma_2^E + \beta_2 n_2) - (1 - \beta_2 \gamma_2^H n_2)(\gamma_1^E + \beta_1 n_1)}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Здесь

$$\beta_{1,2} = -\frac{\mu_{xx} \gamma_{1,2}^E + \mu_{yx}}{|\mu_{ik}|}.$$

Коэффициент отражения $R = |E_x^r|^2 + |E_y^r|^2$ приводить не будем. В точке вырождения R обращается в единицу. Действительно, в этой точке $\gamma_1^E = \gamma_2^E = i\gamma$, $\gamma_1^H = \gamma_2^H = -i\gamma$, $\beta_1 = \beta_2 = i\beta$ и

$$|E_x^r|^2 + |E_y^r|^2 = 1. \quad (12.18)$$

Хотя коэффициент отражения равен единице, поле в среде не затухает экспоненциально, а представляет собой суперпозицию двух бегущих в противоположных направлениях волн с волновыми векторами, соответственно равными $k = \pm(\omega/c)n_0$, т.е. стоячую волну. Напряженность электрического поля параллельна напряженности магнитного поля. Естественно, что при этом поток энергии равен нулю.

При тех частотах, при которых показатель преломления имеет отрицательную мнимую часть, поле в среде — суперпозиция двух затухающих волн или стоячая волна с экспоненциально убывающей в глубь среды амплитудой. Напряженности электрического и магнитного полей параллельны друг другу.

В области, где подкоренное выражение в формуле (12.7) положительно ($\omega > \omega_0$), γ^E и γ^H — чисто мнимые, а это означает, что обе волны эллиптически поляризованы.

Интересным частным случаем гироанізотропной среды может служить металлический магнетик в сильном магнитном поле с магнитной восприимчивостью такой, как выписана в формуле (12.2), но с тензором диэлектрических проницаемостей, не содержащим диагональных элементов:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4\pi i \sigma_{xy}}{\omega} \\ -\frac{4\pi i \sigma_{xy}}{\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.19)$$

где

$$\sigma_{xy} = \frac{(n_e - n_h)ec}{B}$$

— холловская компонента проводимости, $n_{e(h)}$ — плотность электронов (дырок) в металле. Диагональные (диссипативные) элементы опущены, так как при $\omega_c \tau_e \gg 1$ они в $\omega_c \tau_e$ раз меньше (ω_c — циклотронная частота). Условие $\omega_c \tau_e \gg 1$ определяет требование к величине среднего магнитного поля B .

Из-за равенства нулю элементов ε_{xx} и ε_{yy} матрицы $v_{\alpha\beta}$ и $\tilde{v}_{\alpha\beta}$ совпадают:

$$v_{\alpha\beta} = \tilde{v}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon' \mu' & i\mu_{xx} \varepsilon' \\ -i\mu_{yy} \varepsilon' & \varepsilon' \mu' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon' = \frac{4\pi \sigma_{xy}}{\omega}. \quad (12.20)$$

Заметим, что матрица $v_{\alpha\beta}$ остается неэрмитовой. Совпадают также поляризации γ^E и γ^H :

$$\gamma^{E,H} = \pm \sqrt{\frac{\mu_{yy}}{\mu_{xx}}}.$$

Показатель преломления определяется выражением

$$n_{1,2}^2 = (\mu' \pm \sqrt{\mu_{xx} \mu_{yy}}) \frac{4\pi \sigma_{xy}}{\omega}. \quad (12.21)$$

Вырождение возможно при обращении в нуль либо μ_{xx} , либо μ_{yy} . Пусть $\mu_{yy} = 0$, а $\mu_{xx} \neq 0$; тогда

$$n^2 = \frac{4\pi\sigma_{xy}}{\omega} \mu', \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \quad (12.22)$$

Это означает, что $E_x = H_x = 0$, а E_y и H_y отличны от нуля. Собственные волны линейно поляризованы. Равенство нулю потока энергии особенно очевидно.

Рассмотренный пример интересен главным образом тем, что демонстрирует, сколь существенно электромагнитная волна в гироанизотропной среде отличается от обычной (в пустоте или в изотропном теле). Напомним: в обычной волне векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} взаимно ортогональны.

13. Поверхностные магнитные поляритоны в пластине, намагниченной параллельно поверхностям

В исследовании высокочастотных магнитных материалов, несомненно, важную роль сыграла работа Уокера [25], показавшего, что магнитодипольное взаимодействие приводит к существованию собственных неоднородных решений уравнений магнитостатики (конечно, с магнитной проницаемостью, зависящей от частоты) и к соответствующему этим решениям спектру частот неоднородного резонанса.

Сформулируем два, по нашему мнению, важных качественных результата раннего периода исследований магнитодипольных мод в пластинах:

1) Учет граничных условий ликвидирует неаналитичность в зависимости частоты ω от волнового вектора k (при $k \rightarrow 0$) у магнитодипольных мод.

2) В пластине (стержне) дискретные уокеровские моды превращаются в волны, распространяющиеся вдоль пластины (стержня), причем дисперсия (зависимость ω от k) — следствие интерференционных эффектов, если речь идет о магнитостатических колебаниях без учета неоднородного обменного взаимодействия. В этом случае характерный безразмерный параметр, определяющий зависимость $\omega = \omega(\mathbf{k}_t)$, где \mathbf{k}_t — волновой вектор, направленный вдоль пластины (стержня), есть $k_t d$ (d — полутолщина пластины или радиус стержня).

В этом разделе будет исследован закон дисперсии поверхностных магнитных поляритонов в ферромагнитной пластине толщиной $2d$, занимающей слой $|y| < d$, намагниченной параллельно своим поверхностям [26]. Роль анизотропии демонстрирует рассмотрение волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю \mathbf{H} и намагниченности \mathbf{M} (по-прежнему считаем, что $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$) и вдоль \mathbf{H} и \mathbf{M} .

Пусть магнитный поляритон распространяется перпендикулярно магнитному полю и намагниченности. Переменные поля сосредоточены внутри и вблизи пластины, экспоненциально затухая при удалении от пластины (вдоль оси y) с логарифмическим декрементом затухания

$$\gamma_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad ck > \omega, \quad k \equiv k_x. \quad (13.1)$$

Если обозначить y -компоненту волнового вектора через q , то из уравнений Максвелла следует

$$q^2 = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\text{eff}}(\omega), \quad (13.2)$$

причем μ_{eff} задается формулой (2.4) при $\theta = \pi/2$. Структура полей в пластине определяется знаком q^2 . Если $q^2 > 0$ (случай А), то переменные поля в пластине — суперпозиция тригонометрических функций, если $q^2 = -\gamma^2$ и $\gamma^2 > 0$ (случай Б), то переменные поля — суперпозиция гиперболических функций. Граничные условия приводят к следующим дисперсионным уравнениям:

$$\begin{aligned} \text{А. } 2[\omega_0(\omega_0 + \omega_M) - \omega^2] \gamma_0 q \cot(2qd) = \\ = \frac{\omega^2}{c^2} [(\omega_0 + \omega_M)^2 + \varepsilon(\omega_0 + \omega_M)\omega_0 - (1 + \varepsilon)\omega^2] - \\ - k^2 [\omega_0^2 + (\omega_0 + \omega_M)^2 - 2\omega^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Б. } 2[\omega^2 - \omega_0(\omega_0 + \omega_M)] \gamma_0 \gamma \cot(2\gamma d) = \\ = \frac{\omega^2}{c^2} [(1 + \varepsilon)\omega^2 - (\omega_0 + \omega_M)^2 - \varepsilon\omega_0(\omega_0 + \omega_M)] + \\ + k^2 [\omega_0^2 + (\omega_0 + \omega_M)^2 - 2\omega^2]. \end{aligned}$$

Мнозначность котангенса в случае А приводит к существованию бесконечного числа ветвей спектра, все они ($\omega = \omega_n(k)$) расположены вне частотного интервала $[\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$, $\omega_0 + \omega_M/2$ и начинаются на прямой $\omega = ck$. Частота самой нижней ветви $\omega = \omega_{(0)}(k)$ при $k \rightarrow 0$ обращается в нуль и стремится к

$$\omega = \omega_{\text{lim}} = \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)}$$

при $k \rightarrow \infty$. Начальные точки всех ветвей $\omega = \omega_n(k)$, $n > 0$, лежат на прямой $\omega = ck$ ($\gamma_0 = 0$). Ветви образуют две группы: одна, $\omega = \omega_n^{(-)}$, расположена ниже ω_{lim} и сгущается к ω_{lim} , вторая, $\omega = \omega_n^{(+)}$, расположена выше $\omega_0 + \omega_M/2$ и асимптотически приближается к $\omega = ck/\varepsilon^{1/2}$.

При $\varepsilon - 1 \ll 1$ начальные частоты ветвей:

$$\omega_n^{(+)} \simeq c \sqrt{\frac{[\pi(n-1)/2d]^2 + \omega_M(\omega_0 + \omega_M)/c^2}{\varepsilon - 1}},$$

$$\omega_n^{(-)} \simeq \sqrt{\frac{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)}{1 + \omega_M(\omega_0 + \omega_M)[2d/\pi(n-1)c]^2}}.$$

Интересно, что при $\varepsilon \rightarrow 1$ все верхние ветви уходят на бесконечность (при $\varepsilon = 1$ их нет вовсе!). На начальных участках дисперсионных кривых групповые скорости незначительно отличаются от c , при больших волновых векторах ($\omega \rightarrow \omega_{\text{lim}}$) групповые скорости нижних ветвей стремятся к нулю, а верхние не меняются столь значительно: при $\omega \rightarrow \infty$ они стремятся к $c/\varepsilon^{1/2}$.

В случае Б существует одна (особая) ветвь колебаний $\omega = \omega_{\text{sp}}(k)$, расположенная в интервале $\omega_{\text{lim}} < \omega < \omega_0 + \omega_M/2$. При $kd \gg 1$ и $c \rightarrow \infty$ она "превращается" в волну Дэймона–Эшбаха с частотой $\omega = \omega_{\text{ДЕ}}$.

При $\omega \rightarrow \omega_{\text{lim}}$

$$\omega_{\text{sp}}(k) - \omega_{\text{lim}} \simeq \frac{c^2 \omega_M^3}{2\varepsilon \omega_0^{5/2} (\omega_0 + \omega_M)^{3/2}} (k - k_0)^2,$$

$$k - k_0 \ll k_0, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{\omega_M} \frac{(\omega_0 + \omega_M)^2}{c^2},$$

групповая скорость особой волны при $\omega \rightarrow \omega_{\text{lim}}$ есть

$$v_{\text{sp}} = c \sqrt{\frac{2\omega_{\text{M}}^3(\omega - \omega_{\text{lim}})}{\varepsilon\omega_0\omega_{\text{lim}}^3}}.$$

При $\omega \rightarrow \omega_{\text{DE}}$

$$\frac{\omega_{\text{sp}}(k) - \omega_{\text{DE}}}{\omega_{\text{DE}}} \simeq -\frac{(1 + \varepsilon)\omega_{\text{DE}}\omega_{\text{M}}}{8c^2k^2},$$

$$v_{\text{sp}} = c \sqrt{\frac{2\omega_{\text{DE}}}{(1 + \varepsilon)\omega_{\text{M}}}} \left(\frac{\omega_{\text{DE}} - \omega}{\omega_{\text{DE}}} \right)^{3/2}.$$

На краях частотного интервала скорость особой ветви обращается в нуль, достигая в максимуме скорости, близкой к скорости света.

Отметим, что глубина проникновения при $\omega = \omega_{\text{lim}}$ равна нулю ($\gamma \rightarrow \infty$). При $\omega \rightarrow \omega_{\text{DE}}$ вместе с k и γ стремится к бесконечности. Как уже отмечалось выше, в таких случаях необходимо учитывать пространственную дисперсию магнитной проницаемости. Кроме того, определенные ограничения накладывают диссипативные процессы. Чтобы вблизи точки сгущения ветви были различимы, необходимо выполнение следующего условия (при $n \gg 1$):

$$k^2 + \left(\frac{\pi n}{2d} \right)^2 < \frac{\pi}{2d} \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega_{\text{M}} [\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}})^3]^{1/4}}{c\sqrt{\omega_{\text{DE}}}} \sqrt{\pi n}. \quad (13.3)$$

Надо помнить, что поскольку мы не учитывали неоднородного обменного взаимодействия, это не единственное условие, ограничивающее k и n :

$$ak \ll \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\text{M}}}{I}}, \quad aq \ll \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\text{M}}}{I}}.$$

Для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы пластина была достаточно толста, а номер n не слишком велик:

$$\frac{d}{n} \gg a \sqrt{\frac{I}{\hbar\omega_{\text{M}}}}.$$

На рисунке 13а приведено схематическое изображение спектра магнитных поляритонов, описанное выше.

В особой волне, представляющей, по-видимому, наибольший интерес, в случае толстой пластины электромагнитное поле сосредоточено на одной из сторон пластины (на какой — зависит от направления распространения), экспоненциально затухая к другой стороне.

Рассмотрим теперь магнитный поляритон, распространяющийся вдоль магнитного поля (см. [27]). По-прежнему речь идет о ферромагнитной пластине. В этом случае существуют два типа решения — q_1 и q_2 , определяемые формулой

$$q_{1,2}^2 = k^2 \left[\omega^2 - \omega_0 \left(\omega_0 + \frac{\omega_{\text{M}}}{2} \right) \right] -$$

$$- \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \left[\omega^2 - (\omega_0 + \omega_{\text{M}}) \left(\omega_0 + \frac{\omega_{\text{M}}}{2} \right) \right] \pm$$

$$\pm \frac{\omega_{\text{M}}}{2[\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}}) - \omega^2]} \times$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} (\omega_0 + \omega_{\text{M}}) - k^2 \omega_0 \right]^2 + 4k^2 \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \omega^2}, \quad (13.4)$$

а дисперсионное уравнение (равенство нулю детерминанта системы уравнений, описывающих граничные условия) распадается на два (по-видимому, это отражает какую-то внутреннюю, не выясненную нами, симметрию задачи):

$$\frac{\mu\omega^2\varepsilon/c^2 - k^2 - q_1^2}{\omega^2\varepsilon/c^2 - q_1^2} \left[\cos(q_1 d) + \gamma_0 \frac{\sin(q_1 d)}{q_1} \right] \times$$

$$\times \left[\cos(q_2 d) + \gamma_0 \varepsilon \frac{\sin(q_2 d)}{q_2} \right] - \frac{\mu\omega^2\varepsilon/c^2 - k^2 - q_2^2}{\omega^2\varepsilon/c^2 - q_2^2} \times$$

$$\times \left[\cos(q_1 d) + \gamma_0 \varepsilon \frac{\sin(q_1 d)}{q_1} \right] \left[\cos(q_2 d) + \gamma_0 \frac{\sin(q_2 d)}{q_2} \right] = 0, \quad (13.5)$$

$$\frac{\mu\omega^2\varepsilon/c^2 - k^2 - q_1^2}{\omega^2\varepsilon/c^2 - q_1^2} [\gamma_0 \cos(q_1 d) - q_1 \sin(q_1 d)] \times$$

$$\times [\gamma_0 \varepsilon \cos(q_2 d) - q_2 \sin(q_2 d)] -$$

$$- \frac{\mu\omega^2\varepsilon/c^2 - k^2 - q_2^2}{\omega^2\varepsilon/c^2 - q_2^2} [\gamma_0 \varepsilon \cos(q_1 d) - q_1 \sin(q_1 d)] \times$$

$$\times [\gamma_0 \cos(q_2 d) - q_2 \sin(q_2 d)] = 0. \quad (13.6)$$

Дисперсионная зависимость существенно зависит от величины параметра $\xi = \pi c / 2\sqrt{2}\omega_0 d$. При $\xi > 1$ схематический график изображен на рис. 13б. На рисунке 13в показан закон дисперсии в частном случае (при $\xi < 1$). Число ветвей, имеющих начало ниже $\omega = \omega_0$ и пересекающих другие ветви, тем больше, чем меньше ξ . Всего существует три типа волн: быстрые с нормальной дисперсией, медленные с аномальной дисперсией, входящие в пределе в известный тип МСВ, а также особые волны. В случае $\xi > 1$ особых волн две, при $k \rightarrow 0$ они очень близки друг к другу и прямой $\omega = ck$:

$$ck - \omega_0^{\leq'}(k) \simeq \frac{ck}{2} (kd)^2 \begin{cases} \left(\frac{\omega_{\text{M}}}{\omega_0 + \omega_{\text{M}}} \right)^2, \\ \left(\frac{\omega_{\text{M}}}{\omega_0} \right)^2. \end{cases} \quad (13.7)$$

При $k \rightarrow \infty$ частота одной волны стремится к своему предельному значению сверху:

$$\omega_0^{\leq'}(k) \simeq \omega_0 + \frac{\omega_{\text{M}}}{2(ck)^2} \left[\left(\frac{\pi c}{2d} \right)^2 - 2\omega_0^2 \right], \quad k \rightarrow \infty. \quad (13.8)$$

Так бывает только при $\xi > 1$. Следовательно, кривая $\omega_0^{\leq'}(k)$ пересекает прямую $\omega = \omega_0$. Ветвь $\omega_0^{\leq'}(k)$ пересекает все кривые нижней группы ветвей и при $k \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к прямой $\omega = ck/\varepsilon^{1/2}$, как все кривые верхней группы. При $\xi < 1$ (даже при сколь угодно малом ξ) количество ветвей, ведущих себя особым образом, ограничено, но бесконечное число ветвей ω_n^{\leq} и $\omega_n^{\leq'}$ подходит к ω_0 сверху и бесконечное число ветвей ω_n^{\geq} и $\omega_n^{\geq'}$ лежит выше значения $\omega = [\omega_0(\omega_0 + \omega_{\text{M}})]^{1/2}$. Они не пересекают другие ветви.

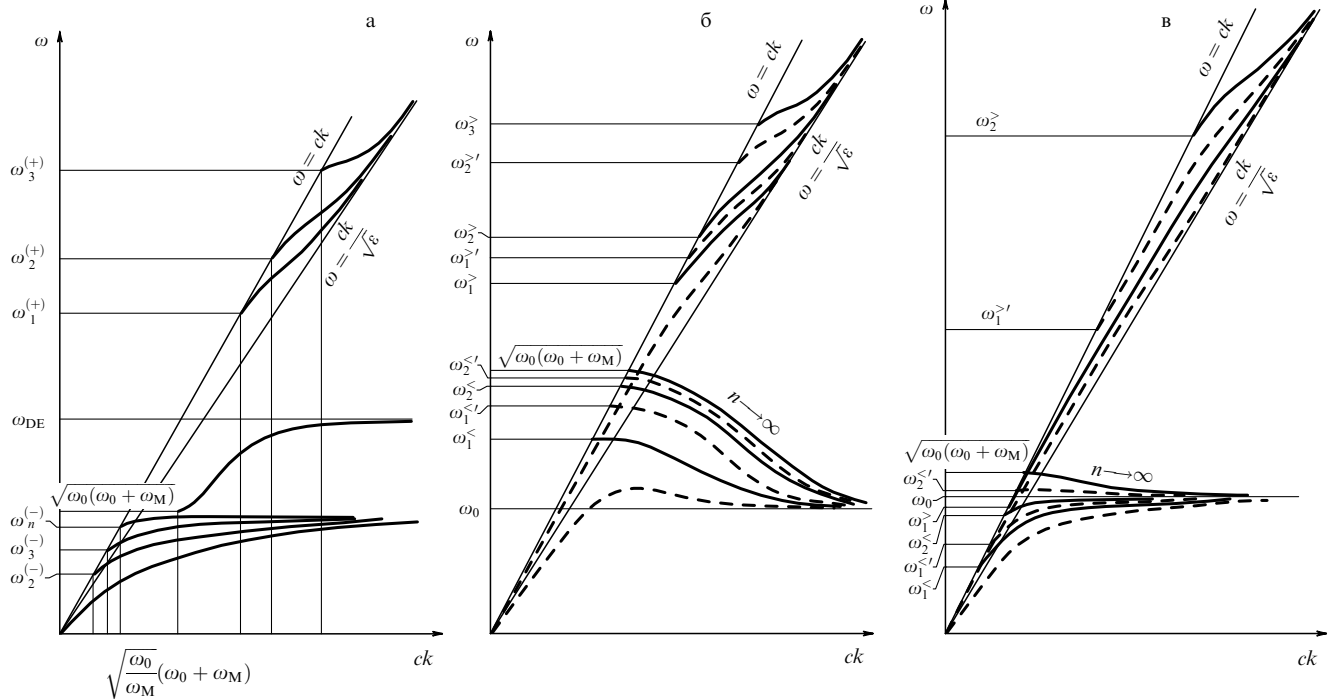


Рис. 13. Схематическое изображение закона дисперсии магнитных поляритонов в пластине. Магнитное поле \mathbf{H} и магнитный момент \mathbf{M} параллельны поверхностям пластины. (а) Волна распространяется перпендикулярно \mathbf{M} . (б) Волна распространяется параллельно \mathbf{M} ; $\zeta > 1$. (в) Волна распространяется параллельно \mathbf{M} ; $\zeta < 1$.

В волнах верхней группы при всех значениях k электрические и магнитные поля — суперпозиции тригонометрических и гиперболических функций, у остальных волн существуют конечные значения k , при которых происходит "превращение" смешанных (тригонометрических и гиперболических) волн в суперпозицию только тригонометрических.

Приведем еще некоторые значения частот при $\varepsilon = 1$ (этот случай очень упрощает вычисления). На прямой $\omega = ck$

$$(\omega^<)^2 \simeq \omega_0(\omega_0 + \omega_M) \left(1 - \frac{2\omega_0 + \omega_M}{A_n} \right),$$

$$A_n \simeq \left(\frac{\pi c n}{\omega_M d} \right)^2 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

При $\zeta > 1$

$$\omega_n^<(k) \simeq \omega_0 + \frac{\omega_M}{2k^2} \left[\left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 - \frac{2\omega_0^2}{c^2} \right], \quad n = 1, 2, \dots, k \rightarrow \infty.$$

Для $\omega_n^<(k)$ надо заменить n на $n - 1/2$.

Спектры магновнов, распространяющихся вдоль и поперек \mathbf{M} , существенно различаются. Возникает задача о переходе от одного типа волн к другому и о величине критического угла θ_c существования особой волны (рис. 13а). Аналитически рассмотреть распространение волны под произвольным углом к \mathbf{M} не удастся. Необходимо использовать численные методы. Отличительным свойством спектра волн при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{M}$ следует считать существование в широком диапазоне волновых векторов k группы волн с аномальной дисперсией, причем частотный интервал их существования

$(\omega_0, [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2})$ легко управляется магнитным полем и температурой.

14. Магнитостатические волны в пластине

Естественно, закон дисперсии МСВ можно вывести из уравнений, описывающих магнитные поляритоны, предельным переходом $k \rightarrow \infty$ при $\omega \neq \infty$. Однако формулировка дисперсионного уравнения МСВ непосредственно из уравнений магнитостатики позволяет рассмотреть более общие случаи, чем при решении задачи о магнитном поляритоне.

Если считать, что тензор магнитных проницаемостей имеет структуру (1.19), пластина занимает интервал $-d < y < d$, а ось 3 параллельна ее поверхностям, то уравнение для определения γ имеет вид (мы здесь ограничиваемся случаем "гиперболических" полей в пластине)

$$\mu_1 k_x^2 - \mu_2 \gamma^2 + \mu_3 k_z^2 = 0, \quad (14.1)$$

а из граничных условий получаем дисперсионное уравнение, позволяющее найти значение частоты МСВ при произвольном значении угла θ ($\tan \theta = k_x/k_z$), если МСВ существует:

$$-2\mu_2 k \gamma \coth(2\gamma d) = k_x^2 (\mu_1 \mu_2 - \mu'^2 + 1) + k_z^2 (\mu_2 \mu_3 + 1). \quad (14.2)$$

В случае ферромагнетика, воспользовавшись формулами (1.20), а также (14.1) и (14.2), имеем

$$\frac{\gamma^2}{k^2} = \frac{\omega_0(\omega_0 + \omega_M \sin^2 \theta) - \omega^2}{\omega_0(\omega_0 + \omega_M) - \omega^2},$$

$$\frac{\gamma^2}{k^2}(\omega_M \sin^2 \theta - \omega_0 \cos^2 \theta) - 2 \frac{\gamma}{k} \coth(2\gamma d) \omega_0 \cos^2 \theta - (\omega_M \sin^2 \theta + \omega_0 \cos^2 \theta) = 0, \quad (14.3)$$

причем $\theta \neq \pi/2$. При $\theta = \pi/2$ первое уравнение удовлетворяется автоматически (равенство $\gamma = k$ — следствие уравнения (14.1) при $\mu_1 = \mu_2$ (см. (1.20)), а из уравнения (14.2) следует

$$\omega^2 = \omega_0(\omega_0 + \omega_M) + \frac{\omega_M^2}{2[\coth(2|k|d) + 1]}. \quad (14.4)$$

Анализ [27] показывает, что второе уравнение (14.3) имеет решение при произвольной толщине пластины лишь при

$$\theta > \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_M}}, \quad (14.5)$$

а при $\theta < \theta_c$ решений нет. Таким образом, угол θ_c (14.5), как и в полупространстве (см. раздел 10), — критический угол МСВ. Замена знака у $\sin \theta$ не изменяет значения частоты — волна взаимна. При $kd \gg 1$ из первого уравнения (14.3) следует, что формально есть два решения:

$$\omega = \pm \frac{\omega_0 + (\omega_0 + \omega_M) \sin^2 \theta}{2 \sin \theta}, \quad \sin \theta \geq 0, \quad (14.6)$$

или

$$\omega = \frac{\omega_0 + (\omega_0 + \omega_M) \sin^2 \theta}{2|\sin \theta|}.$$

Волна с $\sin \theta > 0$ сосредоточена на одной стороне пластины, а с $\sin \theta < 0$ — на другой. Мы воспользовались этим обстоятельством, чтобы проанализировать природу возникновения необратимых поверхностных волн на границе полупространства и, главное, возникновения у них затухания, обусловленного существованием объемных спиновых волн (см. раздел 10).

Поле и намагниченность в пластине могут быть не только гиперболическими, но и тригонометрическими функциями. Тогда вместо (14.2) имеем

$$-2\mu_2 k q \cot(2qd) = k_x^2(\mu_1 \mu_2 - \mu'^2 + 1) + k_z^2(\mu_2 \mu_3 + 1), \quad (14.7)$$

где q — y -компонента волнового вектора, которая определяется из уравнения (14.1) при замене $-\gamma^2$ на $+q^2$.

"Гиперболические" и "тригонометрические" волны, по-видимому, обладают свойствами дополнительности по отношению друг к другу. Во всяком случае, в ферромагнетике при $\theta = \pi/2$ "тригонометрических" волн нет вовсе (действительно, $q^2 > 0$ при $k_z = 0$ только, если $\mu_3 < 0$, а в ферромагнетике $\mu_3 \equiv 1$). При $\theta = 0$ (волна распространяется параллельно магнитному полю) "тригонометрические" волны есть и

$$\tan\left(\frac{2kd}{\sqrt{|\mu|}}\right) = \frac{2\sqrt{|\mu|}}{1 - |\mu|}, \quad (14.8)$$

причем решения надо искать в том частотном интервале, где $\mu < 0$.

В предельных случаях длинных и коротких волн

$$\omega \simeq \begin{cases} \omega_0(\omega_0 + \omega_M) - \omega_0 \omega_M \left(\frac{2kd}{\pi n}\right)^2, & kd \ll 1, \\ \omega_0 + \frac{\omega_M}{2} \left(\frac{\pi n}{2kd}\right)^2, & kd \gg 1, \end{cases} \quad (14.9)$$

$n = 1, 2, \dots$

На рисунке 14а схематически изображены несколько ветвей МСВ. Штриховыми и сплошными линиями изображены ветви, которые при $kd \gg 1$ совпадают с соответствующими ветвями магнитного поляритона, рассмотренного в разделе 13 ($\omega_n^<(k)$ и $\omega_n^>(k)$).

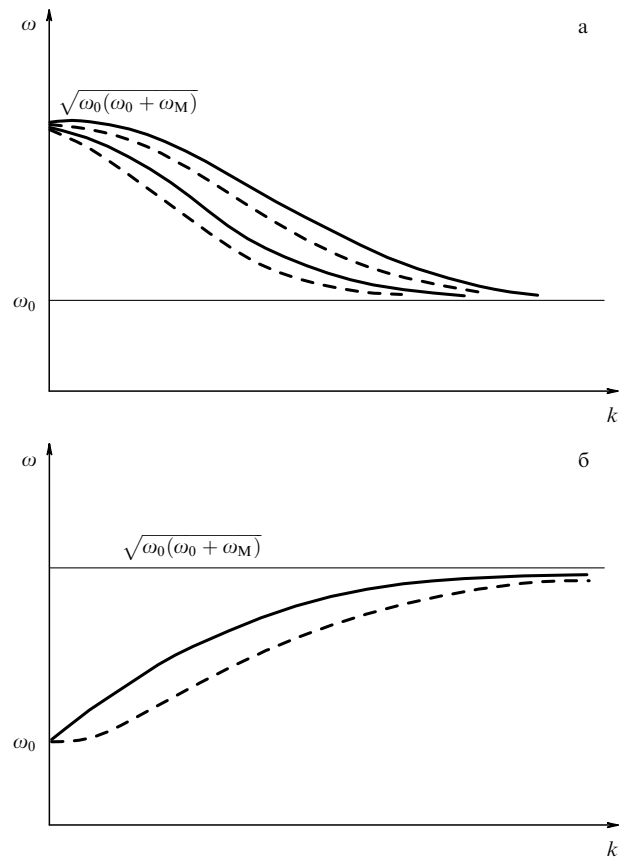


Рис. 14. Схематическое изображение закона дисперсии МСВ в ферромагнитной пластине, намагниченной параллельно поверхности (а) и перпендикулярно поверхности (б).

Важной особенностью спектра МСВ служат точки сгущения: $k = 0$, $\omega = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$ и $k \rightarrow \infty$, $\omega = \omega_0$. Заметим, что запаздывание ликвидирует точку сгущения при $\omega = [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}$ (согласно уравнениям Максвелла нет волн с конечной частотой при $k \rightarrow 0$ (ср. рис. 13б и 13в).

До сих пор мы считали, что магнитное поле \mathbf{H} и намагниченность \mathbf{M} (и в пластине, и в полупространстве) параллельны поверхности. Для демонстрации роли положения \mathbf{H} и \mathbf{M} относительно поверхности рассмотрим МСВ в ферромагнитной пластине ($|z| < 2d$), намагниченной перпендикулярно поверхности. Дисперсионное уравнение в этом случае распадается на два. Одно — для МСВ, потенциал которой симметричен относительно

плоскости $z = 0$ ($\propto \cos(q^s z)$), другое — для МСВ, потенциал которой антисимметричен ($\propto \sin(q^a z)$). Эти уравнения имеют вид

$$k = q^s \tan(q^s d), \quad (14.10)$$

$$-k = q^a \cot(q^a d), \quad (14.10')$$

$$\omega \equiv \omega_n(k) = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_0 \omega_M \frac{k^2}{k^2 + q_n^2}}. \quad (14.11)$$

Дисперсионная зависимость приведена на рис. 14б.

Как видим, и в этом случае в спектре МСВ есть две точки сгущения, а основное отличие от предыдущего случая в характере дисперсии (ср. рис. 14а и 14б): в пластине, намагниченной перпендикулярно поверхностям, МСВ имеют нормальную дисперсию, как и "гиперболическая" волна (14.4). Характер дисперсии задает направление волнового вектора \mathbf{k} относительно $\mathbf{H}(\mathbf{M})$.

Качественное отличие симметричной волны (14.10) от антисимметричной (14.10') в том, что в симметричной волне при $n = 0$ и $\omega \rightarrow \omega_0$ волна имеет конечную скорость:

$$\omega_{n=0}^s \simeq \omega_0 + \frac{\omega_M}{2} kd, \quad v_0^s = \frac{\omega_M}{2} d, \quad (14.12)$$

а при $n \neq 0$

$$\omega_n^s \simeq \omega_0 + \frac{\omega_M}{2(\pi n)^2} (kd)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14.13)$$

При $kd \gg \pi(n + 1/2)$

$$\omega_n^s \simeq \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{\omega_M}{\omega_0 + \omega_M} \left(\frac{n + 1/2}{kd} \right)^2 \right],$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad kd \gg \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (14.13')$$

Для антисимметричных ветвей

$$\omega_n^a \simeq \begin{cases} \omega_0 + \frac{\omega_M}{2} \left[\frac{kd}{\pi(n+1/2)} \right]^2, & kd \ll 1, \\ \sqrt{\omega_0(\omega_0 + \omega_M)} \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{\omega_M}{\omega_0 + \omega_M} \left(\frac{n+1}{kd} \right)^2 \right], & kd \gg \pi(n+1), \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \dots \quad (14.14)$$

Следует подчеркнуть своеобразную зависимость от номера моды. Она аномальна: чем больше номер n , тем частота меньше. Напомним, что номер моды имеет реальный физический смысл, определяя число волн, помещающихся в пластине.

Магнитостатический спектр антиферромагнитных пластин, насколько нам известно, в деталях не изучен. Для выяснения закона дисперсии спектра МСВ в одноосном антиферромагнетике, естественно, можно пользоваться формулами (14.1) и (14.2), подставив в них значения μ_1 , μ_2 и μ' из табл. 2 (раздел 5).

В заключение этого раздела приведем формулу, справедливую при $\mu_1 = \mu_2 = \mu(\omega)$, $\mu_3 = 1$ и $\mu'(\omega) \neq 0$ для "гиперболической" волны, распространяющейся перпендикулярно оси z :

$$\frac{(1 + \mu)^2 - \mu'^2}{(1 - \mu)^2 - \mu'^2} = \exp(-4|k|d). \quad (14.15)$$

Это дисперсионное уравнение описывает обратимую волну. При $|k|d \rightarrow \infty$ оно распадается на два уравнения

$$1 + \mu + \mu' = 0, \quad 1 + \mu - \mu' = 0, \quad (14.16)$$

каждое из которых описывает поверхностную волну на одной из сторон пластины. Нетрудно убедиться, что волны эти распространяются в разные стороны.

При $H = 0$, когда для антиферромагнетика $\mu' = 0$, дисперсионное уравнение особенно просто:

$$\mu(\omega) = -\sinh(|k|d), \quad (14.17)$$

откуда, согласно табл. 2 и разделу 10,

$$\omega^2 = \Omega_{\text{SF}}^2 \left[1 + \frac{4\pi}{\delta} \frac{1}{1 + \sinh(|k|d)} \right]. \quad (14.18)$$

Видно, что, как и раньше, для антиферромагнетика частота волны в пластине расположена в непосредственной близости от частоты однородного колебания магнитного момента, если $\delta \gg 1$. Волна обладает аномальной дисперсией. Ее групповая скорость мала и изменяется от $(-\pi/\delta)\Omega_{\text{SF}}d$ при $k = 0$ до нуля при $k \rightarrow \infty$. Зависимость $\omega = \omega(k)$ для этой волны изображена на рис. 15.

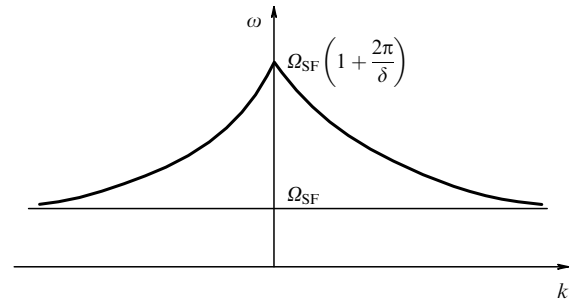


Рис. 15. Схематическая зависимость частоты $\omega = \omega(k)$ для АФМ-пластины, намагниченной параллельно поверхности, при $H < H_{\text{SF}}$.

15. Поперечно-намагниченная пластина. Магнитостатические волны. Учет неоднородного обменного взаимодействия

Задача настоящего раздела — качественный анализ результата взаимодействия двух причин, приводящих к дисперсии волн: интерференции, вызванной границами образца (см. предыдущий раздел), и неоднородного обменного взаимодействия [28].

Введем параметр обменного взаимодействия l , имеющий размерность длины. Тогда естественный безразмерный параметр задачи есть

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{I}{\mu M}} \frac{a}{d}. \quad (15.1)$$

Мы ограничимся рассмотрением наиболее простой ситуации пластины, занимающей слой $|z| < d/2$ (в этом разделе толщина пластины d , а не $2d$, как ранее) и намагниченной вдоль оси z (все условия совпадают с

теми, которые рассмотрены в конце предыдущего раздела, см. (14.10)–(14.14)). Учет неоднородного обменного взаимодействия приводит к пространственной дисперсии магнитной проницаемости, а формально (как мы уже отмечали) означает замену в формулах (1.20) частоты ω_0 функцией $\Omega = \omega_0 + \omega_{\text{ex}}$, где $\omega_{\text{ex}} = gM(kl)^2$. Возрастание степени дисперсионного уравнения требует добавления граничных условий (см. раздел 10). Мы рассмотрим случай "свободного" магнитного момента:

$$\left. \frac{d\mathbf{m}}{dz} \right|_{z=\pm d/2} = 0. \quad (15.2)$$

Как сказано в предыдущем разделе, геометрия задачи допускает поиски решения в виде симметричной (по z) и антисимметричной функций:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) \begin{cases} \cos(qz), & |z| < \frac{d}{2}, \\ \sin(qz), & |z| > \frac{d}{2}, \end{cases} \\ \varphi &\simeq \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) \exp(-kz), \quad z > \frac{d}{2}, \\ \varphi &\sim \pm \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) \exp(kz), \quad z < -\frac{d}{2}, \end{aligned} \quad (15.3)$$

φ — потенциал магнитного поля, $-\nabla\varphi = \mathbf{h}$, \mathbf{k} и \mathbf{p} — двумерные векторы, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$, $\mathbf{p} = (x, y, 0)$; q — один из корней бикубического уравнения

$$q^2 - k^2 \left(1 + \frac{\omega_M \Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \right) = 0, \quad (15.4)$$

где $\Omega = \omega_0 + \omega_{\text{ex}}(k, q)$, а $\omega_{\text{ex}}(k, q) = gMl^2(k^2 + q^2)$.

Запишем дисперсионное уравнение, удовлетворяющее перечисленным выше граничным условиям, и имеющее симметричное решение

$$\sum_{i=1}^3 F_i \left[1 - \frac{k}{q_i} \tan\left(\frac{q_i d}{2}\right) \right] = 0, \quad (15.5)$$

и антисимметричное решение

$$\sum_{i=1}^3 F_i \left[1 + \frac{k}{q_i} \cot\left(\frac{q_i d}{2}\right) \right] = 0. \quad (15.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{q_2^2 - q_3^2}{\omega_{\text{ex}}^{(1)}} (\omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(1)}), & F_2 &= \frac{q_3^2 - q_1^2}{\omega_{\text{ex}}^{(2)}} (\omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(2)}), \\ F_3 &= \frac{q_1^2 - q_2^2}{\omega_{\text{ex}}^{(3)}} (\omega_0 + \omega_{\text{ex}}^{(3)}), & \omega_{\text{ex}}^{(i)} &= \omega_{\text{ex}}(k, q_i). \end{aligned} \quad (15.7)$$

Уравнения (15.5)–(15.7) определяют спектр спиновых волн в пластине:

$$\omega = \omega_n^{s,a}(k); \quad (15.8)$$

$n = 1, 2, \dots$ — номер решения, индекс s или a указывает симметрию решения.

Пренебрежение дипольным взаимодействием приводит к предельному упрощению спектра:

$$\omega = \omega_0 + gMl^2 \left[k^2 + \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 \right]. \quad (15.9)$$

Его структура видна из рис. 16.

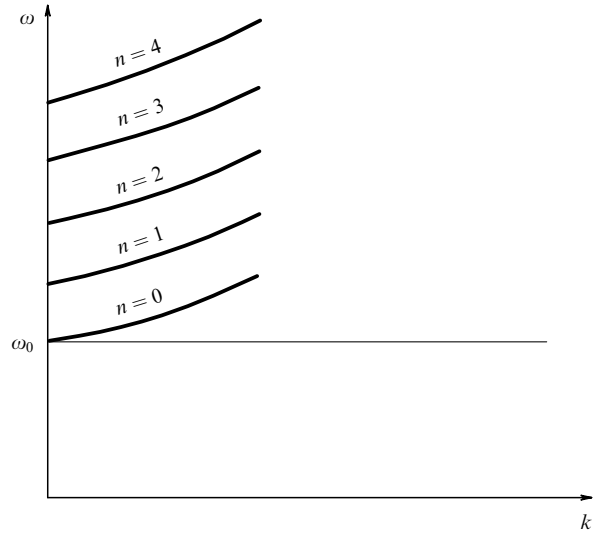


Рис. 16. Зависимость первых четырех обменных частот от волнового вектора \mathbf{k} .

Пренебрежение обменным взаимодействием ($l = 0$) позволяет получить магнитостатический спектр (см. формулы (14.10)–(14.14) и рис. 14б).

Существенное различие характера спектров (их несходство), конечно, проявляется при их взаимодействии. В работе [28] подробно проанализирован спектр на основе выписанных выше уравнений.

Когда в тонкой пластине расстояние между ветвями обменного спектра превышает ширину интервала магнитодипольных частот $([\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2} - \omega_0)$, то никакой существенной перестройки обменного спектра не происходит. Роль магнитодипольного взаимодействия сводится к уточнению минимального значения частоты в каждой подзоне. Правда, самая низшая обменная подзона представляет исключение. Из-за магнитодипольного взаимодействия волна с частотой ω , приближающейся при $k \rightarrow 0$ к ω_0 , имеет конечную скорость:

$$\omega_{n=0}^s(k) \simeq \omega_0 + \frac{1}{8} \omega_M k d \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16}{\pi} \left(\frac{l}{d} \right)^2} \right]. \quad (15.10)$$

Любопытно отметить, что это выражение допускает предельный переход к $d \rightarrow 0$:

$$\omega^s(k) \simeq \omega_0 + \frac{\omega_M}{2\sqrt{\pi}} kl, \quad d \ll l. \quad (15.11)$$

16. Взаимодействие магнитостатических волн с фононами в пластине (кинематика)*

Изучение диссипативных процессов в ферромагнитных пластинах началось лишь в последнее время. Речь идет об исследовании диссипативных процессов в той области параметров, где необходимо учитывать особенности спектра МСВ, обязанные учету граничных условий (см. раздел 14).

В этом разделе, основанном на работе [29], мы рассмотрим кинематику процессов взаимодействия МСВ с фононами, выбрав среди однофононных процессов (испускание и поглощение фонона) те, которые удовлетворяют двум условиям:

1) процесс не сопровождается изменением симметрии МСВ;

2) вектор смещения y принимающего участие в процессе фонона однороден по нормали пластины, т.е. квазиволновой вектор фонона имеет две отличные от нуля компоненты (f_x и f_y). Таким образом, закон дисперсии фонона есть

$$\Omega = sf, \quad \mathbf{f} = (f_x, f_y, 0). \quad (16.1)$$

Анализ показывает, что взаимодействие с такими фононами дает основной вклад в вероятность затухания МСВ (во всяком случае, при предельных значениях параметров). Мы обращаем здесь главное внимание на кинематику процесса взаимодействия. Идеино этот раздел близок к разделу 7.

Для того чтобы можно было ограничиться магнитодипольным приближением, т.е. не учитывать неоднородное обменное взаимодействие, мы примем, что выполняется следующее неравенство:

$$\omega_0 \sim \omega_M \ll \frac{s^2}{2\omega_{ex}a^2}. \quad (16.2)$$

Обозначения прежние.

16.1. Испускание фонона

Законы сохранения импульса и энергии таковы:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{f}, \quad \omega_n(k) = \omega_n(k') + \Omega(f). \quad (16.3)$$

Закон дисперсии МСВ задан формулой (14.11), дополненной уравнениями (14.10), (14.10').

Пусть ¹³ $n = n' = 0$ и $kd \ll 1$. Тогда закон дисперсии МСВ особенно прост (см. (14.12)), и из (16.3) имеем

$$(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \varphi)^{1/2} = \alpha(k - k'), \quad (16.4)$$

$$\alpha = \frac{\omega_M d}{2s}, \quad k > k',$$

φ — угол между двумерными векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Из (16.4) имеем

$$-1 \leq \cos \varphi = \frac{(k^2 + k'^2)(1 - \alpha^2) + 2\alpha k k'}{2k k'} \leq 1, \quad k' < k. \quad (16.5)$$

При $\alpha < 1$ решений нет, а при $\alpha > 1$ в результате излучения рождается МСВ с волновым вектором k' из интервала $((\alpha - 1)k/(\alpha + 1), k)$, причем каждому k' соответствует два значения угла: $\varphi(k')$ и $2\pi - \varphi(k')$ — согласно формуле (16.4). На рисунке 17 схематически изображены возможные значения $k' = k'(k, \varphi)$. Концы векторов \mathbf{k}' лежат на кривой K , расположенной между окружностями радиусами k и $(\alpha - 1)k/(\alpha + 1)$. При $\alpha \rightarrow 1$ кривая K стягивается к отрезку прямой $(0, k)$ на оси $\varphi = 0$, а уравнение (16.4) вырождается в равенство $\cos \varphi = 1$, т.е. $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.

Как будет видно из формул следующего раздела, при $\alpha = 1$ вероятность рождения фонона обращается в бесконечность. Это следствие своеобразного резонанса: при $\alpha = 1$ скорости МСВ и фонона равны друг другу.

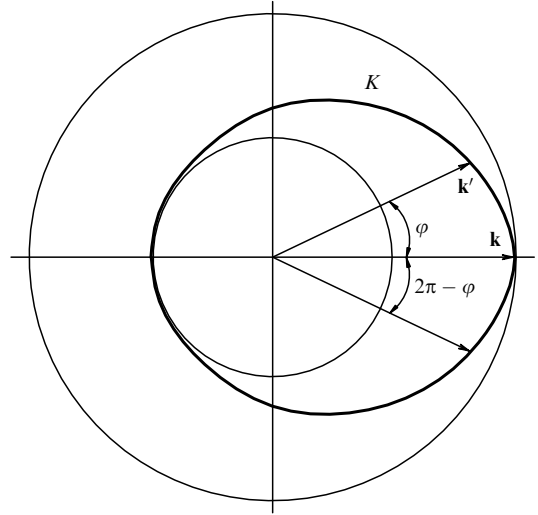


Рис. 17. Кривая K — зависимость k' от угла φ для испускания фонона. Вектор \mathbf{k} фиксирован, $n = n' = 0$, $k'(\varphi = 0) = k$, $k'(\varphi = \pi) = (\alpha - 1)k/(\alpha + 1)$, $kd \ll 1$.

Однако надо помнить, что закон дисперсии (14.12) — результат приближения. Резонансные ситуации требуют более аккуратного рассмотрения. Согласно (14.10), уточненный закон дисперсии МСВ таков:

$$\omega_{n=0} \simeq \omega_0 \left[1 + \frac{\omega_M}{2\omega_0} kd - \frac{\omega_M}{4\omega_0} \left(1 + \frac{\omega_M}{2\omega_0} \right) (kd)^2 + \dots \right]. \quad (16.6)$$

Тогда вместо уравнения (16.4) имеем

$$(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \varphi)^{1/2} - (k - k') = (\alpha - 1)(k - k') - \left(1 + \frac{\omega_M}{2\omega_0} \right) \frac{d}{2} (k^2 - k'^2). \quad (16.7)$$

Это уравнение при $0 < \alpha - 1 \ll 1$ имеет решение при выполнении следующего условия:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_0}{2\omega_M} \right) kd < \alpha - 1. \quad (16.8)$$

Оказалось, что при значении параметра $\alpha \geq 1$ рассматриваемый процесс имеет порог: необходимо, чтобы волновой вектор МСВ k был меньше k_{th} ,

$$k_{th} = \frac{2(\alpha - 1)}{d} \left(1 + \frac{\omega_0}{2\omega_M} \right)^{-1}. \quad (16.9)$$

Так как $k_{th}d \ll 1$, то справедливы используемые разложения.

Расчет вероятности процесса излучения фонона показывает, что уточнение закона дисперсии МСВ приводит к тому, что обратное время жизни, не обращаясь в бесконечность, имеет пик в зависимости от волнового вектора k (см. раздел 17).

Существование порога при $kd \ll 1$ ставит вопрос: существует ли пороговое значение k при параметре α , существенно отличающемся от единицы. Для этого надо проанализировать законы сохранения, не прибегая к разложению закона дисперсии $\omega_{n=0}(k) \equiv \omega_0(k)$ по степеням kd . Из (16.3) нетрудно получить

$$\cos \varphi = \frac{k^2 + k'^2 - [\omega_0(k) - \omega_0(k')]^2/s^2}{2kk'}, \quad (16.10)$$

¹³ Этот случай, пожалуй, наиболее интересен, так как магнитодипольный характер спектра проявляется особенно отчетливо в линейной зависимости ω от $|\mathbf{k}|$ при $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$.

откуда условию существования решения можно придать вид

$$s(k - k') < \omega_0(k) - \omega_0(k'). \quad (16.11)$$

Графический анализ показывает, что условие (16.11) выполняется, если $k < k_{\text{th}}$; k_{th} при $\alpha \simeq 1$ имеет, естественно, прежнее значение (16.9), а при $\alpha \gg 1$

$$k_{\text{th}} \simeq \frac{\omega_0 \omega_M}{s \{ \omega_0 + [\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2} \}}. \quad (16.12)$$

(Неравенство $\alpha \gg 1$ не противоречит неравенству (16.2), если выполнено необременительное условие $d \gg a\theta_C/\theta_D$, $\theta_D = \pi s/a$.) При произвольном значении α получить аналитическое выражение не удастся. Записав выражение (16.12) через α и считая, что ω_0 и ω_M — величины одного порядка, убеждаемся, что в данном случае $k_{\text{th}} d \sim \alpha \gg 1$ (что, конечно, не противоречит условию $ka \ll 1$).

При $k \leq k_{\text{th}}$ интервал значений квазиимпульса рождающихся МСВ очень мал и стягивается в точку при $k \rightarrow k_{\text{th}}$:

$$\begin{aligned} k'_{\min} &\leq k' \leq k'_{\max}, \\ k'_{\min} &= (k_{\text{th}} - k) \left\{ s - \left[\frac{\partial \omega_0(k)}{\partial k} \right]_{k=k_{\text{th}}} \right\} \frac{1}{s(\alpha + 1)}, \\ k'_{\max} &= (k_{\text{th}} - k) \left\{ s - \left[\frac{\partial \omega_0(k)}{\partial k} \right]_{k=k_{\text{th}}} \right\} \frac{1}{s(\alpha - 1)}, \end{aligned} \quad (16.13)$$

причем можно показать, что на границах интервала угол φ равен π и 0.

Анализ кинематики процесса рождения фонона необходим при расчете времени жизни МСВ (раздел 17). Важно подчеркнуть: дисперсия магнона, обусловленная неоднородным обменным взаимодействием, тоже может служить причиной существования порога (см. раздел 7):

$$k_{\text{th}}^{\text{ex}} = \frac{s}{2\omega_{\text{ex}} a^2}.$$

Для наблюдения описанного здесь порога необходимо, чтобы значение k_{th} было меньше $k_{\text{th}}^{\text{ex}}$. Последнее обеспечивается выполнением условия (16.2).

Аномальная зависимость частоты МСВ от номера n приводит к тому, что при испускании фонона магнито-статической волной с $n = 0$ может родиться МСВ с $n' > 0$.

Пусть $kd \ll 1$. Поступая аналогично предыдущему рассмотрению, получим, что при распаде МСВ с $n = 0$ на фонон и МСВ с $n' \neq 0$ должно выполняться следующее соотношение для k' (аналогичное (16.4)):

$$(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \varphi)^{1/2} = \alpha k. \quad (16.14)$$

В уравнение не входит n' , поскольку член $(k'/n')^2$ опущен, так как он пренебрежимо мал по сравнению с остальными членами. Уравнение (16.14) имеет решение при произвольном значении α . При $\alpha < 1$ угол φ ограничен условием

$$|\sin \varphi| < \alpha. \quad (16.15)$$

Возможные значения k' изображены на рис. 18а. Существуют два решения — две функции $k'(\varphi)$. Для одной

$$\min k'(\varphi = 0) = k(1 - \alpha),$$

для другой

$$\max k'(\varphi = 0) = k(1 + \alpha).$$

В точке пересечения кривых

$$k'(\varphi = \arcsin \alpha) = k\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \alpha < 1.$$

Рассмотрим теперь излучение фонона магнито-статической волной с $n \neq 0$. По-прежнему считаем, что $kd \ll 1$. Испускание возможно только, если $q_{n'} > q_n$ (см. раздел 14). В первом исчезающем по kd порядке законы сохранения приводят к следующему уравнению:

$$(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \varphi)^{1/2} = \frac{\alpha d}{\pi^2} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{k'^2}{n'^2} \right). \quad (16.16)$$

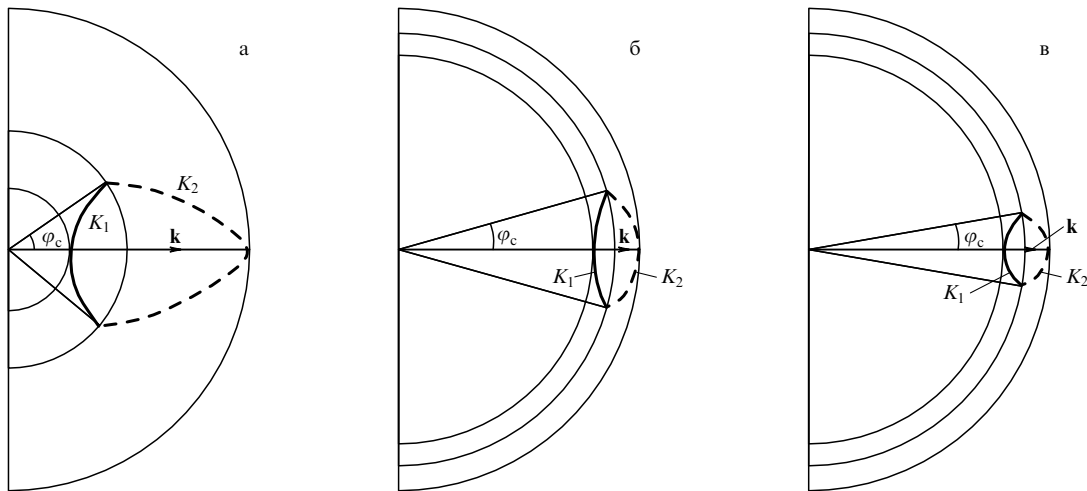


Рис. 18. Зависимость k' от угла φ . Возможные значения k' (кривые K_1 и K_2) при испускании фонона для $n = 0$, $n' > 0$, $kd \ll 1$ (а), $n > 0$, $n' > n$, $kd \ll 1$ (б) и для $n > 0$, $n' > n$, $kd \gg 1$ (в) (см. текст).

Для существования решений необходимо выполнение неравенств

$$|\sin \varphi| < \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) kd \ll 1, \quad (16.17)$$

т.е. интервал возможных углов φ очень мал. МСВ, излучив фонон, практически не изменяет своего направления. На рисунке 18б изображены возможные значения \mathbf{k}' . Существуют два решения (линии K_1 и K_2) $k'(k)$. Для одного из них

$$\max k'(\varphi = 0) = k \left[1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) kd \right],$$

а для другого

$$\min k'(\varphi = 0) = k \left[1 - \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) kd \right],$$

для обоих

$$k'(\varphi_c) = k \left\{ 1 - \left[\frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) kd \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Значение φ_c очень мало:

$$\sin \varphi_c = \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) kd.$$

Малые kd (длинные волны) характерны близостью к точке сгущения. Точка сгущения есть и при $kd \gg 1$. Рассмотрим испускание фонона при $kd \gg 1$. Если "разрешить" испускание фонона без изменения номера моды МСВ ($n' = n$), то волна с $n = 0$ ничем не выделена. Всегда $q_{n'} > q_n$ и $k'd \gg 1$ вместе с $kd \gg 1$. Из (16.3) имеем

$$(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \varphi)^{1/2} = \frac{\pi^2}{2s} \frac{\omega_0 \omega_M (n'^2 + 2n' - n^2 - 2n)}{[\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2} (kd)^2}, \quad n' \geq n. \quad (16.18)$$

Интервал возможных углов φ , согласно (16.8), очень мал: порядка $(kd)^{-3}$. На рисунке 18в показаны возможные значения вектора \mathbf{k}' . Существуют два решения $k'(k)$ (линии K_1 и K_2). Для K_2

$$\max k'(\varphi = 0) = k \left(1 + \frac{B}{k^3} \right).$$

Для K_1

$$\min k'(\varphi = 0) = k \left(1 - \frac{B}{k^3} \right).$$

В точке пересечения

$$k'(\varphi_c) = k \left[1 - \left(\frac{B}{k^3} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \sin \varphi_c = \frac{B}{k^3},$$

$$B = \frac{\omega_0 \omega_M}{2[\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/2}} \frac{\pi^2 (n'^2 + 2n' - n^2 - 2n)}{sd^2}.$$

16.2. Поглощение фонона

В обратное время жизни МСВ при $kd \ll 1$ с $n = 0$ этот процесс дает гораздо меньший вклад, чем испускание

фонона, а для МСВ с $n \neq 0$ его вклад определяющий. Поэтому ограничимся случаем $n \neq 0$.

Положим n' равным нулю, так как вероятность процессов со всеми остальными значениями $n' \neq 0$ гораздо меньше. Из законов сохранения получаем

$$(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \varphi)^{1/2} = \alpha k', \quad k' > k. \quad (16.19)$$

При $\alpha > 1$ ограничений на угол нет, значения k' лежат в области

$$\left(\frac{k}{\alpha + 1}, \frac{k}{\alpha - 1} \right), \quad (16.20)$$

причем

$$\max k'(\varphi = \pi) = \frac{k}{\alpha - 1}, \quad \min k'(\varphi = 0) = \frac{k}{\alpha + 1}.$$

При $\alpha < 1$ ограничения есть:

$$\sin^2 \varphi < \alpha^2, \quad (16.21)$$

и существуют два значения k' для каждого k, φ [29]. Для одного из них

$$\max k'(\varphi = 0) = \frac{k}{1 - \alpha},$$

для другого

$$\min k'(\varphi = 0) = \frac{k}{1 + \alpha}$$

и для обоих

$$k'(\varphi = \arcsin \alpha) = \frac{k}{(1 - \alpha^2)^{1/2}}.$$

Во избежание путаницы отметим, что испускание и поглощение фонона не являются по отношению друг к другу прямым и обратным процессами. Каждый из них имеет свой обратный процесс, в котором соответственно испускание сменяется поглощением и наоборот, но одновременно меняются местами \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Кинематика прямого и обратного процессов тождественна.

17. Времена жизни магнитостатических волн и фононов *

В этом разделе приведены времена жизни МСВ [29], обусловленные процессами, кинематика которых описана в разделе 16.

Квантование проводилось по стандартной процедуре с использованием разложения Голстейна–Примакова. Гамильтониан взаимодействия ограничен простым инвариантом (как в разделе 8):

$$H_{\text{int}} = \gamma \int M_i M_k u_{ik} dv, \quad (17.1)$$

здесь γ — магнитоупругая константа, u_{ik} — компоненты тензора деформации. Из четырех типов звуковых колебаний, существующих в пластине, нас интересует только один. Он дает основной вклад в затухание МСВ; как отмечалось в разделе 16, вектор смещения в этой волне однороден по координате z .

В величину обратного времени жизни МСВ $\tau_n^{-1}(k)$ дают вклад три однофотонных процесса, два из них — испускание и поглощение фотона магнитостатической волной — рассмотрены выше, а вероятность третьего процесса слияния двух МСВ с образованием фотона содержит экспоненциально малый множитель $\exp(-\hbar\omega/T)$, поэтому его вкладом в $\tau_n^{-1}(k)$ можно пренебречь.

Рассмотрим сначала испускание фотона симметричной магнитостатической волной при $n = n' = 0$, $kd \ll 1$ и $\alpha > 1$ (напомним, что при $\alpha < 1$ такого процесса нет). Возникают два новых параметра k_M и k_{th} (из α и d). Пусть $k_{th}d \ll 1$ (см. (16.9), (16.12)). Тогда $[\tau^{00}(k)]^{-1} \neq 0$ в интервале волновых векторов от $k = 0$ до $k = k_{th}$. Зависимость обратного времени жизни МСВ имеет пик при некотором значении волнового вектора $k = k_M$ (рис. 19). В точке максимума кривой при $\alpha \gg 1$

$$\frac{1}{\tau_{\max}^{00}} \sim \frac{\gamma^2 k_{th}^3}{2^{15} \rho (\alpha - 1)^{1/2} d} \begin{cases} \frac{T}{s}, & T \gg \hbar\omega_M k_{th} d, \\ \frac{\hbar k_{th}}{s}, & T \ll \hbar\omega_M k_{th} d. \end{cases} \quad (17.2)$$

При $\alpha \gg 1$

$$k_M \simeq \frac{1}{d} \left[\frac{2^7}{\pi \alpha} \left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_M} \right)^{1/3} \right]^{1/4},$$

$$\left[\frac{1}{\tau^{00}(k)} \right]_{\max} \simeq \frac{(\gamma g M)^2 \hbar}{2^5 \pi^2 \rho \omega_0^2 d^5} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_M}} \alpha^2. \quad (17.3)$$

В начале кривой при $kd \ll T/\hbar\omega_M$

$$\frac{1}{\tau^{00}(k)} = \frac{(\gamma g M)^2 T (kd)^2 k^2}{2^{10} \pi \rho d^3 \omega_0^2 s \sqrt{2(\alpha - 1) k_{th} k}}. \quad (17.4)$$

Обратное время жизни $[\tau^{00}(k)]^{-1}$ обращается в нуль по линейному закону при $k \rightarrow k_{th}$.

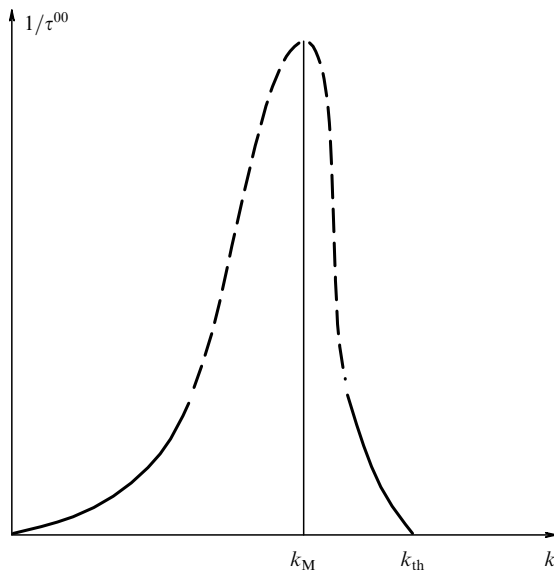


Рис. 19. Зависимость $[\tau^{00}(k)]^{-1}$ от k при испускании фотона ($\alpha \gg 1$; $kd \ll 1$); $k = 4(\alpha - 1)/d(2 + \omega_M/\omega_0)$.

При значениях k близких к k_{th} и параметре α не близком к единице

$$\frac{1}{\tau_{th}^{00}} = \frac{(\gamma g M)^2 \hbar}{2^6 \rho d^3} \frac{\alpha k_{th}^3}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \frac{1 - (\partial\omega_0(k)/\partial k)_{th} s^{-1}}{\omega_0(\omega_0 + s k_{th})} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin(q_0 d)}{q_0} \right]_{th}^2 (k_{th} - k) \begin{cases} 1, & T \ll \hbar s k_{th}, \\ \frac{T}{\hbar s k_{th}}, & T \gg \hbar s k_{th}. \end{cases} \quad (17.5)$$

Здесь q_0 — нулевое решение уравнения (14.10).

С ростом α (от 1 к $\alpha \gg 1$) кривая на рис. 19 сохраняет свой вид, но максимум кривой "сдвигается" вправо, в сторону больших k .

Вероятность процесса испускания фотона при $n = 0$ с переходом МСВ в состояние с $n' > 0$, при $kd \ll 1$ (т.е. процесса с изменением номера моды) гораздо меньше, чем вероятность процесса, рассмотренного выше (без изменения номера моды), поэтому мы приведем значение $[\tau^{0n'}(k)]^{-1}$ только для случая $\alpha < 1$, в котором процесс без изменения моды невозможен:

$$\frac{1}{\tau^{0n'}(k)} = \frac{1}{2n'^4} \left(\frac{\gamma}{8\pi} \right)^2 \frac{\omega_M^2}{\omega_0^3} \frac{\alpha^4 (\alpha^2 + 1)}{\rho d^5} \times$$

$$\times \begin{cases} (kd)^5 T, & kd \ll \frac{T}{\hbar\omega_0} \ll 1, \\ (kd)^6 \hbar\omega_0, & \frac{T}{\hbar\omega_0} \ll kd \ll 1. \end{cases} \quad (17.6)$$

Суммарная вероятность $[\tau^0(k)]^{-1}$ испускания фотона МСВ нулевой моды со всеми значениями n' при $\alpha > 1$ приблизительно равна $[\tau^{00}(k)]^{-1}$, а при $\alpha < 1$

$$\frac{1}{\tau^0(k)} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{8\pi} \right)^2 \frac{\omega_M^2}{\omega_0^3} \frac{\alpha^4 (\alpha^2 + 1)}{\rho d^5} \times$$

$$\times \begin{cases} (kd)^5 T, & kd \ll \frac{T}{\hbar\omega_0} \ll 1, \\ (kd)^6 \hbar\omega_0, & \frac{T}{\hbar\omega_0} \ll kd \ll 1. \end{cases} \quad (17.7)$$

Однако надо иметь в виду, что хотя мы не приводим значения вероятности $[\tau^{0n'}(k)]^{-1}$ при $\alpha > 1$, она отлична от нуля, и, следовательно, при $k > k_{th}$ отлична от нуля суммарная вероятность рождения фотона. Существование порога проявляется в изломе на кривой зависимости обратного времени жизни МСВ от волнового вектора. Для испускания фотона МСВ с $n \neq 0$ при $kd \ll 1$ справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{\tau^{nn'}(k)} = \frac{1}{2n^6} \left(\frac{\gamma}{8\pi} \right)^2 \frac{\hbar \alpha^4}{\rho d^5} (kd)^{10} \left(1 + \frac{n}{n'} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right]^2,$$

$$\frac{T}{\hbar\omega_0} \ll kd \ll 1. \quad (17.8)$$

Формулу для $[\tau^{nn'}(k)]^{-1}$ при $kd \ll T/\hbar\omega_M$ мы не приводим, так как в этом диапазоне основной вклад в затухание МСВ с $n > 0$ дает не процесс испускания фотона, а процесс поглощения.

Спектр МСВ, как мы отмечали, имеет две точки сгущения. Обратное время жизни представляет интерес

только при $kd \gg 1$:

$$\frac{1}{\tau^{m'}(k)} = \frac{(\gamma g M)^2 \hbar}{2^7 \pi d \rho s^2} \begin{cases} A^2 (kd)^{-6}, & 1 \ll (kd)^2 \ll \frac{\hbar s A}{T}, \\ \frac{T A}{\hbar s} (kd)^{-4}, & (kd)^2 \gg \frac{\hbar s A}{T} \gg 1. \end{cases} \quad (17.9)$$

Здесь принято обозначение

$$A = \frac{\omega_0 \omega_M \pi^2 (n'^2 + 2n' - n^2 - 2n)}{2[\omega_0(\omega_0 + \omega_M)]^{1/3} s}.$$

Так как $A = 0$ при $n = n'$, то $(\tau^{m'})^{-1} \equiv 0$. Как и выше, полученная формула не позволяет вычислить полное время испускания фонона

$$\frac{1}{\tau^n} = \sum_{n'} \frac{1}{\tau^{m'}}.$$

Рассмотрение предельных случаев позволяет оценить порядок величины обратного времени жизни МСВ, обусловленного испусканием фонона. Считая $\alpha \geq 1$, а $\omega_0 \sim \omega_M$, легко убедиться, что

$$\frac{1}{\tau_{\text{em}}(k)} \sim \frac{\gamma^2 \hbar}{\rho d^5} f(kd), \quad (17.10)$$

а функция $f(kd)$, вид которой (при $kd \ll 1$ и при $kd \gg 1$) нетрудно установить из выведенных выше формул, достигает максимума при $kd \sim 1$, причем $f_{\text{max}} \sim 1$. Таким образом,

$$\left(\frac{1}{\tau_{\text{em}}} \right)_{\text{max}} \sim \frac{\gamma^2 \hbar}{\rho d^5}. \quad (17.11)$$

Конечно, это — очень грубая оценка, так как мы опустили все безразмерные множители.

Вычисление обратного времени жизни, определяемого процессом поглощения фонона симметричной магнитостатической волной, дает

$$\frac{1}{\tau^n(k)} = \frac{(\gamma g M)^2 \alpha^4}{2^6 \pi^3 \omega_0^2 \omega_M \rho} \frac{k^5 T}{n^2}, \quad kd \ll \frac{T}{\hbar \omega_M}. \quad (17.12)$$

При $kd \gg 1$ вклад поглощения фонона в величину обратного времени жизни гораздо меньше, чем вклад испускания фонона (соответствующую формулу мы здесь не приводим).

Суммируя результаты, полученные для обоих процессов затухания МСВ (напомним, что вклад третьего процесса экспоненциально мал), мы можем привести схематическую зависимость $[\tau^n(k)]^{-1}$ при $d \gg d_{\text{ex}}$ (рис. 20). При $\alpha \sim 1$ максимум первого графика лежит в области волновых векторов $kd \sim 1$ (см. (17.10)).

Совсем кратко остановимся на затухании антисимметричной МСВ. При $kd \ll 1$ основной вклад в затухание дает процесс испускания фонона. Все вычисления совершенно аналогичны вычислениям для симметричной волны в случае $n > 0$ (формально πn заменяется на $\pi n + \pi/2$). Процесс возможен только при $n' \geq n$:

$$\frac{1}{\tau^n(k)} = \frac{(\gamma g M)^2}{2^{12} \pi^4 \omega_0^2} \frac{\hbar a^4 d^5 k^{10}}{\rho (n + 1/2)^8} \times$$

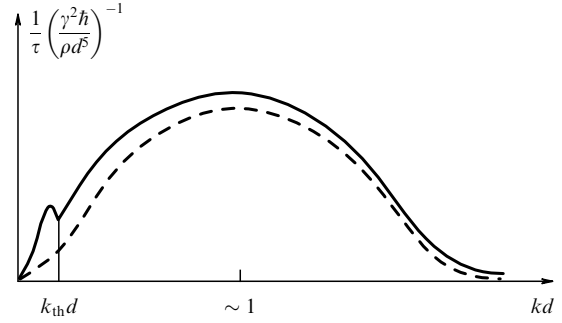


Рис. 20. Качественная зависимость времени затухания МСВ, взаимодействующей с фононами, от величины волнового вектора. Сплошной линией изображена зависимость $1/\tau^0(k)$, она имеет излом при $k = k_{\text{th}}$, штриховой линией — $1/\tau^n(k)$ при $n > 0$. Максимальное значение обратного времени жизни оценивается только по порядку величины, точное значение $(1/\tau)(\gamma^2 \hbar / \rho d^5)^{-1}$ существенно зависит от конкретных параметров системы.

$$\times \begin{cases} 1, & \frac{2\pi n^2 T}{\hbar \omega_M} \ll (kd)^2 \ll 1, \\ \frac{2\pi^2 n^2 T}{(kd)^2 \hbar \omega_M}, & (kd)^2 \ll \frac{2\pi^2 n^2 T}{\hbar \omega_M}. \end{cases} \quad (17.13)$$

Нет необходимости отдельно рассматривать МСВ с $n = 0$, так как и при $n = 0$ частота $\omega_0(k)$ квадратично зависит от k при $k \rightarrow 0$.

Чтобы получить $[\tau^{m'}(k)]^{-1}$ при $kd \gg 1$, достаточно провести замены $n + 1/2$ на $n + 1$ и $n' + 1/2$ на $n' + 1$ в формуле (17.9). Как и для симметричной МСВ, время жизни возрастает с ростом номера моды. Сравнивая формулы для симметричной и антисимметричной МСВ, убеждаемся, что при предельно малых kd время жизни симметричных МСВ меньше времени жизни антисимметричных, а при предельно больших kd эти времена жизни — величины одного порядка.

Подчеркнем два обстоятельства:

1. Во всех рассмотренных случаях время жизни МСВ существенно зависит от ее длины волны (от волнового вектора k). Обычно эксперименты по исследованию МСВ проводятся при фиксированной частоте ω , а изменяемым параметром служит магнитное поле. Обращая закон дисперсии, легко выразить k через H (напомним, что $\omega_0 = gH$ и $H \leq \omega/g$), что позволяет найти зависимость времени жизни МСВ от магнитного поля.

2. Наиболее интересными из полученных выше результатов нам представляются те, которые связаны с существованием пороговых значений волнового вектора $k = k_{\text{th}}$ (и, следовательно, магнитного поля $H = H_{\text{th}} < \omega/g$), квазирезонансных пиков зависимости времени жизни от k (от H), и, конечно, изломов при $H = H_{\text{th}}$, когда один из механизмов рассеяния "выходит из игры".

Учет взаимодействия между МСВ и фононами позволяет оценить влияние двухмагнонного взаимодействия не только на затухание МСВ, но и на затухание фонона. Если энергия фонона меньше удвоенной энергии магнтона, то распад его на две МСВ запрещен, и двухмагнонные процессы приводят к экспоненциально большому (по температуре) времени жизни фонона.

Рассмотрим фонон с очень малым волновым вектором $f \rightarrow 0$ и однородный по z , учтя его взаимодействие с

симметричными МСВ. Процесс слияния двух МСВ с образованием фонона невозможен при $f \rightarrow 0$ (ведь для этого необходимо, чтобы $sf > 2\omega_0$).

Для процессов поглощения и испускания фонона магнитостатической волной в случае $n - n' = 0$ законы сохранения выполняются только при $\alpha > 1$ и обратное время жизни фонона есть

$$\frac{1}{\tau_{ph}^{00}(f)} = \frac{3!}{2^8 \pi^3} \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^{1/3}} \frac{\gamma^2 T}{\rho d^4 \omega_M} \left(\frac{T}{\hbar \omega_M} \right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{T}\right) f. \quad (17.14)$$

При $\alpha - 1 \ll 1$ следует использовать более точные формулы для расчета обратного времени жизни, чтобы ликвидировать расходимость (17.14) при $\alpha \rightarrow 1$:

$$\frac{1}{\tau_{ph}^{00}(f)} = \frac{(\alpha - 1)^{1/2}}{2^{12} \cdot 2^{1/3} \pi^3} \frac{\omega_M}{\omega_0(\omega_0 + \omega_M/2)} \frac{(\hbar \omega_M)^2}{\rho d^4 T} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{T}\right) f, \quad \alpha - 1 \ll fd. \quad (17.14')$$

Появление малого множителя $(\alpha - 1)^{1/2}$ компенсируется большим множителем $(\hbar \omega_M/T)^4$ (напомним, что $T \ll \hbar \omega_M, \hbar \omega_0$).

Законы сохранения при $n = 0, n' > 0$ выполняются при любом значении α .

После суммирования по $n' > 0$ получим, что соответствующий вклад в обратное время затухания фонона равен

$$\frac{1}{\tau_{ph}^{0, n' > 0}(f)} = \frac{\gamma^2 \hbar^2 s^4 f^6}{2^7 \pi^4 d^3 \rho \omega_M \omega_0^2 T} \exp\left(-\frac{\hbar \omega_0}{T}\right). \quad (17.15)$$

Вклад от слагаемых с $n > 0, n' > 0$ гораздо меньше, чем вычисленный выше, и им можно пренебречь, так же как и вкладом от взаимодействия с антисимметричными МСВ.

Итак, в пластинах, в которых $\alpha < 1$ обратное время жизни фонона определяется формулой (17.15), а при $(\alpha - 1) \gg fd$ — формулами (17.14) и (17.15), причем, если $T \ll \hbar \Omega(f)(fd)^{1/4}$, то можно использовать только формулу (17.15), а при $T \gg \hbar \Omega(f)(fd)^{1/4}$ — только (17.14).

18. Антирезонанс. Селективная прозрачность ферромагнитных металлических пластин

Свойства металлических пластин на протяжении многих лет служили и служат предметом пристального внимания как физиков-экспериментаторов, так и физиков-теоретиков. Круг вопросов, изучающихся и изученных, трудно перечислить. Естественно, важное место занимают те свойства, в которых проявляется способность электронов проводимости долетать от одной границы металлической пластины до другой практически без столкновений, т.е. случай, когда $ld \gg 1$, где l — средняя длина свободного пробега, а d — толщина пластины.

В ферромагнитных и вообще магнитных пластинах спектр магнитных возбуждений значительно отличается от спектра неограниченного магнетика. Если считать электронную и магнонную системы квазинезависи-

мыми, т.е. связывающимся только благодаря эффектам запаздывания (см. раздел 11), то электроны проводимости должны себя проявить в перенормировке закона дисперсии поверхностных магнитных поляритонов (раздел 13), приводящей к возникновению у них затухания, вызванного процессами электронной диссипации. При переходе от магнитных поляритонов к МСВ (раздел 14) можно сохранить слагаемые, включающие в себя проводимость и тем самым вычислить электронный коэффициент затухания МСВ. Детально такое рассмотрение, как нам представляется, не проводилось. Следует сказать, что при учете влияния на электронную подсистему столкновений не только с границами пластины, но и с примесями, фононами и магнонами, а также влияния среднего магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ на динамику электронов проводимости, такая задача весьма сложна, хотя, конечно, может быть.

Мы в этом разделе приводим пример модификации электромагнитных свойств металла, обусловленной магнитной подсистемой, точнее, дисперсией магнитной проницаемости. Для того чтобы наиболее наглядно была видна роль дисперсии магнитной проницаемости, будем считать, что ни ограниченные размеры образца, ни магнитное поле не влияют на электроны проводимости, т.е. между напряженностью электрического поля \mathbf{E} и плотностью тока \mathbf{j} справедливо обычное соотношение — закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (18.1)$$

где σ — удельная проводимость металла. При решении задач электродинамики иногда удобно пользоваться не тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}$, а ему обратным $\hat{\nu} \equiv \hat{\mu}^{-1}$, тогда магнитное материальное уравнение записывается в виде

$$h_\alpha = v_{\alpha\beta} b_\beta, \quad \alpha, \beta = x, y, \quad (18.2)$$

ось z совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k} ; двумерный характер соотношения (18.2) — следствие того, что $b_z \equiv 0$ в силу условия отсутствия магнитных зарядов (вектор индукции \mathbf{b} всегда поперечен, $\text{div } \mathbf{b} = 0$). Для ферромагнетика в тех же условиях, что и раньше,

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2 - \omega_{AM}(\omega_{AM} - 4\pi g M \cos^2 \theta)}{\omega^2 - \omega_{AM}^2} & i \frac{4\pi \omega g M \cos \theta}{\omega^2 - \omega_{AM}^2} \\ -i \frac{4\pi \omega g M \cos \theta}{\omega^2 - \omega_{AM}^2} & \frac{\omega^2 - \omega_{AM} \omega_0}{\omega^2 - \omega_{AM}^2} \end{pmatrix}, \quad (18.3)$$

где

$$\omega_{AM} = gB = g(H + 4\pi M) \quad (18.4)$$

— частота антирезонанса (см. введение), а θ — угол между осью z (или \mathbf{k}) и \mathbf{H} (\mathbf{H} включает в себя и поле анизотропии). Из формулы (18.4) видна физическая природа антирезонанса: ω_{AM} — частота свободной прецессии вектора \mathbf{h} (при $\mathbf{b} = 0$). Заметим, что в отличие от частоты резонанса частота антирезонанса не зависит от направления распространения волны (от угла θ). Это обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что при $\mathbf{b} \equiv 0$ не играет роли размагничивающий фактор.

Для эллиптически поляризованных волн матрица \hat{v} диагонализируется:

$$\begin{aligned} h_{\pm} &= v_{\pm}(\omega) b_{\pm}, \quad h_{\pm} = h_x \pm i p_{\pm} h_y, \\ p_{\pm} &= \frac{\omega_{AM} \sin^2 \theta \pm \sqrt{\omega_{AM}^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta}}{2\omega \cos \theta}, \\ v_{\pm} &= \left\{ \omega^2 - \omega_{AM}^2 + 2\pi g M \left[(1 + \cos^2 \theta) \omega_{AM} \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 \omega_{AM}^2 + 4(\omega^2 - \omega_{AM}^2) \cos^2 \theta} \right] \right\} \times \\ &\quad \times (\omega^2 - \omega_{AM}^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (18.5)$$

Компонента v_- остается конечной при антирезонансе (при $\omega = \omega_{AM}$), а v_+ обращается в бесконечность. Это позволяет установить поляризацию свободно прецессирующего поля \mathbf{h} ($p_+ = \cos^{-1} \theta$ при $\omega = \omega_{AM}$).

Нас в дальнейшем, естественно, интересует волна с поляризацией p_+ , для которой выпишем значения v_+ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$:

$$v_+ = \begin{cases} \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_{AM}}, & \theta = 0, \\ \frac{\omega^2 - \omega_0 \omega_{AM}}{\omega^2 - \omega_{AM}^2}, & \theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (18.6)$$

При произвольном значении угла θ вблизи антирезонанса

$$v_+ \simeq \frac{2\pi g M (1 + \cos^2 \theta)}{\omega - \omega_{AM}}, \quad \omega \simeq \omega_{AM}. \quad (18.7)$$

Дисперсионное уравнение — следствие уравнений Максвелла с материальными уравнениями (18.1) и (18.2) (см. также (18.5)) — позволяет определить значение волнового вектора "+"-волны:

$$k^2 = \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2 v_+(\omega)}. \quad (18.8)$$

Вблизи антирезонанса

$$k^2 = \frac{2\pi i \omega_{AM} \sigma (\omega - \omega_{AM})}{g M (1 + \cos^2 \theta)}. \quad (18.7')$$

Несколько слов о поверхностном импедансе ферромагнитного полупространства. Как известно, в случае оптически плотной среды поверхностный импеданс ζ — достаточно полная электромагнитная характеристика поверхности. Это означает, что ζ не зависит от формы (направления и поляризации) падающей на поверхность волны и, следовательно, во-первых, может быть рассчитан при простейшем предположении о нормальном падении волны, а во-вторых, может служить для формулировки эффективных граничных условий (условий Леонтовича–Фока) при решении внешних (по отношению к оптически плотному телу) задач электродинамики. Для магнетика дело обстоит сложнее. Как мы уже отмечали во введении, показатель преломления $n = (\epsilon \mu)^{1/2}$ и импеданс $\zeta = (\mu/\epsilon)^{1/2}$ не связаны между

собой простым соотношением¹⁴ ($\zeta \neq 1/n$), и малость импеданса ($|\zeta| \ll 1$) автоматически не означает большой оптической плотности (не обязательно $|n| \gg 1$). Это, в свою очередь, приводит к зависимости импеданса от формы волны. Действительно, при наклонном падении импеданс есть либо

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta}}{\epsilon}, \quad \text{либо} \quad \zeta_2 = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu - \sin^2 \theta}}.$$

Здесь θ — угол между \mathbf{k} и нормалью к поверхности, а индексы 1 и 2 соответствуют поляризации электрического вектора в плоскости падения и в перпендикулярной плоскости. Видно, что ζ_1 и ζ_2 даже при $|\epsilon| \gg 1$ существенно различны и вблизи антирезонанса нельзя пренебречь зависимостью от угла θ .

Рассматривая нормальное падение на металлическое полупространство электромагнитной волны поляризации p_+ , нетрудно получить

$$\zeta_+ = \frac{\omega c k}{4\pi i \sigma}, \quad (18.9)$$

а волновой вектор k определен формулами (18.7) и (18.7'), т.е.

$$\zeta_+ = \sqrt{\frac{\omega}{4\pi i \sigma v_+(\omega)}}. \quad (18.10)$$

Вблизи антирезонанса

$$\zeta_+ \simeq \sqrt{\frac{\omega_{AM}(\omega - \omega_{AM})}{4\pi i \sigma \cdot 2\pi g M (1 + \cos^2 \theta)}}. \quad (18.11)$$

Видно, что при $\omega = \omega_{AM}$ импеданс корневым образом обращается в нуль. Учет пространственной дисперсии магнитной проницаемости, который необходим при оценке особенности импеданса в антирезонансе, показывает, что вблизи антирезонанса импеданс ζ_+ приобретает небольшую аддитивную добавку, обусловленную тем, что часть энергии электромагнитной волны уносит магнотон. По порядку величины

$$\zeta_{ex} \sim \frac{\omega_{AM}}{c k_{ex}}, \quad k_{ex} \sim \frac{1}{a} \left(\frac{\omega_{AM}}{\omega_{ex}} \right)^{1/2}.$$

Строго говоря, выделение особенности при $\omega = \omega_{AM}$ нужно проводить, исследуя не зависимость $\zeta_+ = \zeta_+(\omega)$, а ее производную, которая обращается при $\omega = \omega_{AM}$ в бесконечность как $(\omega - \omega_{AM})^{-1/2}$.

Наконец, рассмотрим прохождение электромагнитной волны через пластину толщиной $2d$ (она занимает слой $|z| \leq d$). Наблюдение селективной прозрачности толстой металлической пластины (вдали от антирезонанса $\delta \ll d$) послужило открытием антирезонанса в 1969 г. [30]. Предположим, что падающая волна имеет поляризацию p_+ (это оправданно, так как для волны с поляризацией p_- пластина не обладает аномальной прозрачностью). В случае диэлектрика, если считать,

¹⁴ Для простоты в этом абзаце рассматривается изотропный магнетик с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ (как во введении).

что на пластину падает волна единичной амплитуды, то амплитуда прошедшей волны β выражается следующей формулой:

$$\beta = \frac{i\zeta \exp(-2ik_0d)}{[\cos(kd) - i\zeta \sin(kd)][\sin(kd) + i\zeta \cos(kd)]}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \mu \equiv \frac{1}{\nu_+}. \quad (18.12)$$

Для диэлектрика ε , как и μ , — действительная величина. Коэффициент прозрачности равен

$$|\beta|^2 = \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^2 \sin^2(kd) \right]^{-1} \quad (18.13)$$

при $\mu > 0$ или

$$|\beta|^2 = \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon} \right)^2 \sinh^2(kd) \right]^{-1}$$

при $\mu < 0$. В антирезонансе ($\omega = \omega_{AM}$, $\mu = 0$)

$$|\beta|^2 = \left[1 + \frac{\omega^2 \varepsilon^2 d^2}{c^2} \right]^{-1}. \quad (18.14)$$

Для металла $\varepsilon = 4\pi i\sigma/\omega$ и, пренебрегая ζ по сравнению с единицей, имеем

$$|\beta|^2 = \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma^2 d^2} \frac{2x^2}{\sinh^2 x + \sin^2 x},$$

$$x = \left| \frac{2d}{\delta} \right|, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}. \quad (18.15)$$

Максимальная прозрачность

$$|\beta|_{\max}^2 = \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma^2 d^2} = \left(\frac{d_\sigma}{d} \right)^2, \quad d_\sigma = \frac{c}{4\pi\sigma} \quad (18.16)$$

невелика, так как $d_\sigma = \delta_L/\omega_L\tau$ значительно меньше межатомного расстояния ($\delta_L = c/\omega_L$, а $\omega_L^2 = 4\pi ne^2/m^*$, $\tau = l/v_F$). Однако из-за неэкспоненциальной зависимости от толщины коэффициент прозрачности (18.14) на много порядков превышает коэффициент прозрачности обычных пластин (немагнитных или магнитных при $\omega \neq \omega_{AM}$). Функция от x описывает форму линии прозрачности: она тем уже, чем пластина толще.

Мы нигде в этом разделе не учитывали магнитной диссипации. Естественно, все выписанные здесь формулы справедливы с хорошей точностью, если $\mu'' \ll 1$ при $\omega \sim \omega_{AM}$. Это означает, что частота антирезонанса должна существенно отличаться от резонансной частоты. В антиферромагнетике типа ЛО при $H < H_{SF}$ нулевые и бесконечные значения μ_{eff} близки друг к другу: наблюдение антирезонанса по селективной прозрачности пластин кажется затруднительным.

Явление селективной прозрачности ферромагнитных пластин было открыто 25 лет тому назад (а предсказано еще за 10 лет до этого [31]), однако почему-то оно не нашло своего технического применения (несмотря на казалось бы очевидную свою техническую пригодность) и не послужило дополнительным методом исследования магнитного упорядоченного состояния, хотя представляет собой способ возбуждения электромагнитного

поля в пластине с совершенно непохожим на другие случаи (например, в резонансе) пространственным распределением.

19. Заключение

Мы уже отмечали, что сформулированная более полувека назад концепция магнонов (спиновых волн) не претерпела со времени своего появления принципиальных изменений. Очевидно, наш обзор в этом смысле не изменил ситуацию. Но нам хочется верить, что знакомство с обзором показало, что в рамках общей концепции магнонов существует много интересных задач для физика-теоретика и многие тонкие свойства магнетиков ожидают исследований.

Работы, которые легли в основу обзора, в своем большинстве делались в Институте физических проблем им. П.Л. Капицы РАН. Мы пользуемся случаем и выражаем благодарность всем сотрудникам института и его руководству, без поддержки которых эти работы не были бы сделаны.

Особо мы благодарим Л.А. Прозорову. Она первая прочитала обзор, и ее замечания были важны авторам.

Один из авторов (М.И.К.) благодарит Международный научный фонд за финансовую поддержку. Она была существенна на начальном этапе работы. Другой автор (Н.Б.П.) благодарит за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (грант № 96-02-19755).

Примечание М.И. Каганова. Этот обзор опубликован в номере, посвященном 80-летию Ильи Михайловича Лифшица. Поэтому кажется уместным добавить несколько строк.

Все работы, вошедшие в обзор, сделаны сравнительно недавно. Мы были лишены возможности обсудить их с Ильей Михайловичем. Однако используемый в обзоре макроскопический подход вырабатывался под непосредственным влиянием Ильи Михайловича. Хочется верить, что принадлежность к школе Ильи Михайловича Лифшица в обзоре ощущается. Когда мы работали над обзором, я часто с грустью думал, как было бы полезно и приятно обсудить тот или иной вопрос с Ильей Михайловичем...

Список литературы

1. Ахиезер А И, Барьяхтар В Г, Пелетминский С В *Спиновые волны* (М.: Наука, 1967)
2. Гуревич А Г, Мелков Г А *Магнитные колебания и волны* (М.: Наука, 1994)
3. Вашковский А В, Стельмах В С, Шарлевский Ю П *Магнито-статические волны в электронике сверхвысоких частот* (Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1993)
4. Бланк А Я, Каганов М И *УФН* **92** 583 (1967)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Наука, 1976)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 2 (М.: Наука, 1982)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1979)
8. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Кинетика* (М.: Наука, 1979)
9. Каганов М И, Шалаева Т И *Магнито-статические волны. Термодинамика и кинетика* (Киев: Наукова думка, 1991) с. 144
10. Каганов М И, Пустыльник Н Б *ЖЭТФ* **107** 1298 (1995)
11. Каганов М И, Пустыльник Н Б *ЖЭТФ* **110** (6) (1996)
12. Каганов М И, Цукерник В М *ЖЭТФ* **36** 224 (1959)

13. Kaganov M I, Shalaeva T I *Phys. Stat. Sol. (b)* **162** 469 (1990)
14. Каганов М И *УФН* **100** 172 (1970)
15. Гинзбург Вл Л, Каганов М И *ФТТ* **10** 3293 (1968)
16. Simons S *Proc. Phys. Soc. (London)* **82** 401 (1963)
17. Каганов М И, Кадигробов А М *ФММ* **18** 821 (1964)
18. Каганов М И, Шалаева Т И *ЖЭТФ* **96** 2185 (1989)
19. Eshbach J R, Damon R W *Phys. Rev.* **118** 1208 (1960)
20. Каганов М И, Шалаева Т И *ЖЭТФ* **95** 1913 (1989)
21. Лифшиц И М, Азбель М Я, Каганов М И *Электронная теория металлов* (М.: Наука, 1979)
22. Каганов М И, Шалаева Т И *ФНТ* **15** 1177 (1989)
23. Каганов М И, Янкевич Р М *ФТТ* **10** 2771 (1968)
24. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика сред с пространственной дисперсией* (М.: Наука, 1965)
25. Walker L R *Phys. Rev.* **105** 390 (1956)
26. Каганов М И, Шалаева Т И *ЖЭТФ* **103** 1476 (1993)
27. Каганов М И, Шалаева Т И *ЖЭТФ* **106** 904 (1994)
28. Грибкова Ю В, Каганов М И *ФТТ* **33** 508 (1991)
29. Каганов М И, Шалаева Т И *ЖЭТФ* **100** 975 (1992)
30. Гейнрих Б, Мещеряков В М *Письма в ЖЭТФ* **9** 618 (1969)
31. Каганов М И *ФММ* **7** 288 (1959)

Magnons, magnetic polaritons, and magnetostatic waves

M.I. Kaganov, N.B. Pustyl'nik, T.I. Shalaeva

M.V. Lomonosov Moscow State University,

Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 939-48 11

E-mail: kaganov@kapitza.ras.ru, natasha@ljar17.jinr.dubna.su

Electrodynamical properties of magnetically ordered media are analysed theoretically. Two types of magnetic materials, namely ferromagnets and antiferromagnets, are considered and the effect of the magnetic subsystem on the properties of the host metal are discussed. Various types of elementary excitations, such as magnetic polaritons, magnetostatic waves, and magnons, are examined within the conventional quasiparticle framework. The dispersion of the quasiparticles as a function of the relation between the characteristic frequencies of electrical and magnetic nature is described over a wide range of frequencies. Particular attention is given to the statistical thermodynamics and kinetics of the magnetic materials. The possibility of Bose–Einstein condensation in a magnon gas is analysed and the kinetic theory of electron-assisted magnetostatic wave damping in a ferromagnetic metal is developed. The dispersion of surface polaritons is examined in detail. Example solutions of spatially non-uniform problems with spatial dispersion are discussed which show this latter to be of particular importance in ferromagnetic materials.

PACS numbers: **71.36. + c**, **75.30.Ds**, **76.50. + g**

Bibliography — 31 references

Received 3 September 1996