

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Коротковолновая неустойчивость и переход к хаосу в распределенных системах с дополнительной симметрией

М.И. Трибельский

Представлен обзор теории образования структур в распределенных диссипативных системах вдали от равновесия. Особое внимание уделяется системам с дополнительными (по сравнению с пространственным переносом и вращением) непрерывными группами симметрии. Показано, что дополнительная симметрия вызывает существенную destabilизацию основного состояния, приводящую к непосредственному переходу от пространственно-однородного состояния к турбулентному, что аналогично фазовому переходу второго рода в квазиравновесных системах. Теоретическое рассмотрение сопровождается обсуждением результатов эксперимента.

PACS numbers: 05.45.+b, 47.52.+j

Содержание

1. Введение (167).
 2. Коротковолновая устойчивость в традиционных системах (171).
 - 2.1. Универсальность уравнений Свифта – Хохенберга и Гинзбурга – Ландау.
 - 2.2. Пространственно-периодические решения и их устойчивость. Критерий Экхаузера.
 3. Коротковолновая неустойчивость в системах с дополнительной непрерывной группой симметрии (176).
 - 3.1. Симметрия и гольдстоуновские моды.
 - 3.2. (Квази)одномерные пространственно-периодические решения и их устойчивость.
 - 3.3. Дисперсионное уравнение в условиях смещения ε -масштабов и симметрия.
 4. Мягкие турбулентные моды и "непрерывный" переход к хаосу (182).
 5. Эксперимент. Турбулентность с пороговым значением числа Рейнольдса, равным нулю (184).
 6. Заключение (187).
 7. Приложение (188).
- Список литературы (189).

Светлой памяти Ильи Михайловича Лифшица

1. Введение

Свое участие в этом выпуске УФН, посвященном юбилею Ильи Михайловича Лифшица, я рассматриваю как большую честь, сопряженную со столь же большой ответственностью. В особенности в связи с тематикой, затрагиваемой в настоящем обзоре. Дело в том, что в последние годы жизни проблемы самоорганизации и

М.И. Трибельский. Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Mediro-ku Tokyo 153, Japan

Статья поступила 22 октября 1996 г.

перехода к хаосу привлекали пристальное внимание Ильи Михайловича Лифшица. И, хотя у него нет публикаций на эту тему, мне кажется, что Илья Михайлович переживал период накопления информации в новой для него области — период, который должен был бы завершиться статьей (или серией статей) программного характера, как в свое время это произошло в физике полимеров [1]. Должен был бы завершиться, но не завершился из-за безвременной кончины Ильи Михайловича.

Цель настоящего обзора — привлечь внимание исследователей к ряду результатов, полученных в самое последнее время в области образования структур и перехода к хаосу в диссипативных системах. Эти результаты во многом отличаются от традиционных представлений, сложившихся в данной области, и показывают, что симметрия задачи играет значительно более важную роль, чем принято считать до сих пор.

Обзор ориентирован на широкого читателя. Поэтому, где это возможно, я буду стараться избегать подробного воспроизведения громоздких математических выкладок (с которыми, как правило, сопряжено любое теоретическое описание указанных проблем), отсылая за деталями таких вычислений к оригинальным работам. Это позволит сфокусировать внимание на ключевых моментах анализа соответствующих задач и их связи с качественными особенностями обсуждаемых явлений.

Кроме того, поскольку терминологию в рассматриваемой области еще нельзя считать вполне сложившейся и разные авторы иногда придают различный смысл одним и тем же выражениям, я, во избежание недоразумений, начну с того, что поясню все специальные термины, используемые ниже.

Под *распределенными* системами понимаются любые объекты или явления, описываемые уравнениями в частных производных (как правило, нелинейными). Тер-

мин диссипативные указывает на то, что рассматриваемые системы являются неравновесными и характеризуются протеканием определенных диссипативных процессов. Отмечу, что в случае открытых систем (энергия вводится в систему извне, диссирирует в ней и в конечном счете выводится из системы либо сбрасывается "на бесконечность") будет предполагаться, что "поток энергии через систему" остается постоянным. Последнее создает предпосылки для возникновения в системе стационарных неравновесных состояний.

Проблема образования структур и перехода к хаосу в таких системах чрезвычайно широка и охватывает множество конкретных задач. Она включает в себя задачи о гидродинамических течениях, проблемы теории горения, кинетики фазовых переходов, теории реакционно-диффузионных систем типа Белоусова – Жаботинского, биологии и даже социологии и психологии (см., например, [2–4] и цитированную там литературу).

Из всего этого многообразия меня будет интересовать частный случай систем с коротковолновой неустойчивостью пространственно-однородного состояния и дополнительной непрерывной группой симметрии. Эта терминология также требует пояснения.

Чтобы не быть голословным, я рассмотрю конкретный пример, известный под названием проблемы Рэлея – Бенара (Rayleigh – Benard) — конвекцию в горизонтальном слое жидкости, находящемся в поле силы тяжести. В простейшей реализации этой проблемы нижняя и верхняя поверхности слоя поддерживаются при фиксированных температурах T_1 и T_2 соответственно так, что $T_1 > T_2$ (слой, подогреваемый снизу и охлаждаемый сверху). Очевидно, что такая система является открытой — энергия (поток тепла) вводится в нее через нижнюю поверхность и выводится через верхнюю.

Хорошо известно (см., например, [5]), что до тех пор, пока $\Delta T \equiv T_1 - T_2$ меньше определенного критического значения (порог конвективной неустойчивости, или просто порог конвекции), стационарное состояние жидкости с отсутствием какого бы то ни было гидродинамического движения является устойчивым к (бесконечно) малым возмущениям. При таком стационарном состоянии гидродинамическая скорость жидкости тождественно равна нулю, а ее температура и давление зависят только от одной пространственной координаты (z), направленной поперек слоя. Таким образом, в плоскости слоя (плоскость xy) состояние жидкости является пространственно-однородным. Такие пространственно-однородные состояния диссипативной системы я буду называть *тривиальными*.

Поскольку, однако, нагретая жидкость, находящаяся внизу слоя, стремится всплыть, а холодная, находящаяся вверху, — уйти вниз, то ясно, что увеличение разности температур между верхней и нижней поверхностями слоя в конце концов должно приводить к возникновению гидродинамического течения, т.е. к потере устойчивости стационарного пространственно-однородного состояния.

Существенно, что уравнение непрерывности не позволяет реализовать такое течение пространственно-однородным способом: весь нижний слой не может всплыть как единое целое, так как над ним находятся другие слои той же жидкости. Поэтому любое конвективное течение неизбежно приводит к нарушению пространственной однородности в горизонтальной плоскости, что неиз-

бежно создает в этой плоскости определенный пространственный масштаб. Поскольку, с другой стороны, единственным характерным пространственным масштабом задачи является толщина слоя d , то ясно, что он-то и определяет характерный горизонтальный масштаб течения.

Иными словами, превышение порога конвекции приводит к *спонтанному понижению симметрии* состояния системы. Математически это выражается в том, что пространственно-однородное состояние становится неустойчивым по отношению к пространственно-неоднородным возмущениям, содержащим множители вида

$$\exp(\gamma t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1)$$

где \mathbf{k} — двумерный волновой вектор возмущения, лежащий в плоскости xy , а $\mathbf{r} = (x, y)$ — соответствующий двумерный радиус-вектор.

Что касается дисперсионной зависимости $\gamma(\mathbf{k})$, то в проблеме Рэлея – Бенара она оказывается чисто действительной ($\text{Im } \gamma \equiv 0$ — *апериодическая неустойчивость*). При этом из сказанного ранее следует, что на пороге возникновения неустойчивости $\max \{\gamma(k)\} \equiv \gamma(k_c) = 0$, где критическое волновое число k_c удовлетворяет соотношению $k_c d \sim 2\pi$.

Таким образом, приведенное объяснение спонтанного возникновения в задаче характерного масштаба в горизонтальной плоскости основывается на рассмотрении неустойчивости, развивающейся при наличии в системе *ограничений* (верхняя поверхность, ограничивающая движение жидкости) и *законов сохранения* (в данном случае массы) [4].

Ввиду важности вопроса рассмотрим ту же проблему с другой точки зрения. Прежде всего заметим, что из изотропии задачи в горизонтальной плоскости следует, что γ не может зависеть от ориентации вектора \mathbf{k} в этой плоскости, так что фактически $\gamma(\mathbf{k})$ означает $\gamma(k)$, а возмущения (1) без нарушения общности можно заменить на возмущения вида

$$\exp(\gamma t + ikx). \quad (2)$$

Заметим далее, что в задаче имеются *два* физически различных механизма диссипации — вязкость и тепло-проводность, сравнительная роль которых меняется по мере изменения k . Действительно, рассмотрим два предельных случая длин неволновых ($k \rightarrow 0$) и коротковолновых ($k \rightarrow \infty$) возмущений. Траектории малого выделенного объема жидкости (жидкой частицы), соответствующие случаям длинноволновых и коротковолновых возмущений, изображены на рис. 1а и 1б соответственно.

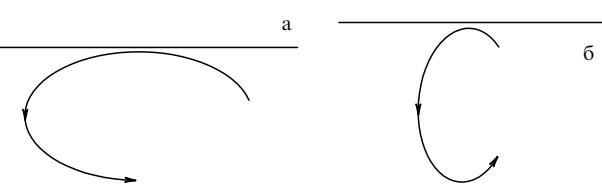


Рис. 1. Траектории движения "жидкой частицы" в случае длинноволновых (а) и коротковолновых (б) возмущений пространственно-однородного состояния. Траектории, вообще говоря, незамкнуты в силу стационарности течения.

В случае длинноволновых возмущений большой характерный размер траектории приводит к малым значениям горизонтальной проекции градиента температуры, связанной с нарушением пространственной однородности (т.е. с возмущением), так как величина этой проекции обратно пропорциональна горизонтальному размеру траектории (движение вверх соответствует "горячей" жидкости, вниз — "холодной"). Поэтому диссипация за счет теплопроводности для таких возмущений подавлена, зато за счет вязкости велика из-за большой длины траектории и становится тем больше, чем меньше делается k . По этой причине очень длинноволновые возмущения являются "энергетически невыгодными" и не могут приводить к неустойчивости.

С другой стороны, для очень коротковолновых возмущений (рис. 1б) вязкостная диссипация сравнительно мала, но велика теплопроводная за счет большого градиента температуры, связанного с малым горизонтальным масштабом траектории, так что такие возмущения тоже невыгодны.

Конкуренция этих двух механизмов диссипации приводит к тому, что наиболее "опасными" с точки зрения возникновения неустойчивости являются возмущения с некоторым *конечным* (не слишком большим и не слишком малым) волновым числом.

Следует, однако, помнить, что такое объяснение возникновения в задаче характерного пространственного масштаба фактически основывается на принципе минимума производства энтропии [2], который справедлив только для стационарных состояний и только при малых отклонениях от равновесия. Применение этого принципа в сильннеравновесных и(или) нестационарных задачах может приводить к неправильным, а порой и к абсурдным результатам.

Итак, возникновение в проблеме Рэлея–Бенара определенного пространственного масштаба связано с возникновением неустойчивости при некотором конечном волновом числе возмущения. Такую неустойчивость я буду называть *коротковолновой* в отличие от *длинноволновой* неустойчивости, где область волновых чисел, соответствующая неустойчивым возмущениям, начинается с $k = 0$.

Формализуя определение, можно сказать, что на пороге коротковолновой неустойчивости $\gamma(k) = 0$ (в более общем случае комплексного спектра $\operatorname{Re} \gamma(k) = 0$) при определенном конечном $k = k_c$. При этом всюду в окрестности k_c $\gamma(k) < 0$ ($\operatorname{Re} \gamma(k) < 0$). Слабое превышение порога коротковолновой неустойчивости приводит к появлению зоны неустойчивости $\gamma(k) > 0$ ($\operatorname{Re} \gamma(k) > 0$) при $k_1 < k < k_2$, где $k_{1,2}$ — конечные величины, зависящие от меры превышения порога (рис. 2).

Я говорю о зоне неустойчивости, потому что всюду ниже будут рассматриваться системы, имеющие бесконечную протяженность в направлении пространственной однородности высокосимметричного состояния, так что k является непрерывной величиной.

Обсудим теперь наиболее важный для данной работы вопрос, а именно, симметрию проблемы.

Подчеркну, что под симметрией проблемы понимается симметрия соответствующей краевой задачи, т.е. уравнений и дополняющих их граничных условий, а не симметрия решения этой задачи, что далеко не одно и то же. Дело в том, что симметрия всех нетривиальных решений, обсуждаемых в настоящем обзоре, оказывается

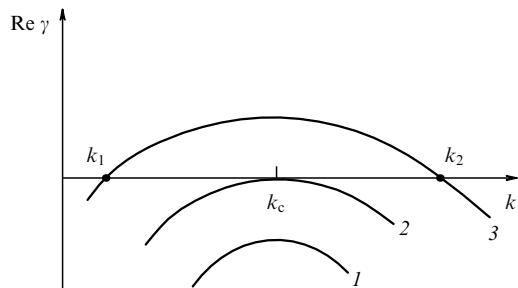


Рис. 2. Действительная часть дисперсионной зависимости $\gamma(k)$ при коротковолновой неустойчивости. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям контрольного параметра: 1 — несколько ниже порога неустойчивости, 2 — точно на пороге, 3 — несколько выше порога. k_c — критическое волновое число, k_1 и k_2 — границы зоны неустойчивости.

ниже исходной симметрии проблемы (спонтанное понижение симметрии, уже отмечавшееся выше в проблеме Рэлея–Бенара).

Обычно задачи, имеющие бесконечную пространственную протяженность вдоль какого-то направления, оказываются трансляционно-инвариантны в этом направлении, т.е. соответствующая краевая задача не меняется при преобразовании координат вида

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}, \quad (3)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор (одно- или двумерный в зависимости от постановки задачи), \mathbf{a} — произвольный постоянный вектор той же пространственной размерности.

В случае двумерного вектора \mathbf{r} я дополнительно буду предполагать *изотропию* задачи в соответствующей плоскости, т.е. ее инвариантность по отношению к *вращениям* вокруг произвольной оси, перпендикулярной плоскости пространственной однородности.

Кроме того, я буду считать, что "лево" и "право" в задаче эквивалентны (*left-right parity*), т.е. задача инвариантна к замене знака компонент вектора \mathbf{r} (*пространственные отражения*).

Наконец, обычно время входит в задачу только в виде производных, что приводит к инвариантности к сдвигу по времени

$$t \rightarrow t + \text{const}. \quad (4)$$

Совокупность перечисленных выше преобразований симметрии я буду называть *традиционной* (conventional) симметрией. В некоторых случаях, однако, задача может иметь дополнительную (по отношению к указанным) непрерывную однопараметрическую группу симметрии. Это означает, что существует группа преобразований, отличных от указанных выше, которые не меняют рассматриваемую краевую задачу. Каждое преобразование этой группы однозначно фиксируется заданием одного скалярного параметра (*однопараметричность*), который может принимать любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала (*непрерывность*). В дальнейшем будет важно, чтобы этот интервал включал нулевое значение указанного параметра.

Приведу некоторые примеры таких задач. Прежде всего сюда относятся различные формулировки проблемы движения фазовых границ при фазовых переходах первого рода или движения фронтов химических

реакций (например, горения). При стационарном движении плоской границы (фронт), если только оно не навязано внешними факторами, задача трансляционно-инвариантна в направлении движения этой границы (фрonta). Замечу, что, поскольку трансляция происходит в направлении *перпендикулярном* плоскости границы (т.е. в направлении *нарушенней* пространственной однородности), такое преобразование не сводится к (3) и дает дополнительную симметрию. Задачи такого рода, демонстрирующие коротковолновую неустойчивость плоской границы (фрonta), рассмотрены, например, в работах [6, 7] (я отбираю примеры по принципу их наибольшей близости к деталям обсуждаемых ниже проблем).

Другим примером являются задачи с галилеевской инвариантностью, не меняющиеся при замене

$$v \rightarrow v + v_0; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (5)$$

(см. [4, 8]). Здесь v — скорость и v_0 — произвольная константа. Напомню, что я обсуждаю однопараметрическую группу дополнительной симметрии, в соответствии с чем галилеевская инвариантность системы предполагается только по одной из компонент вектора скорости.

Еще одним важным и, по-видимому, теоретически наиболее детально изученным примером является *конвекция Рэлея–Бенара со свободными* (free slip или по stress) *границами* [4, 9–15]. Остановлюсь поэтому на данном примере несколько подробнее.

В случае, когда слой жидкости ограничен твердыми поверхностями, естественные граничные условия гласят, что скорость жидкости на твердой границе равна нулю: $v = 0$ (*rigid*, или *no slip boundary conditions*). Тем не менее в большинстве теоретических работ, посвященных проблеме Рэлея–Бенара, начиная с работ самого лорда Рэлея [9, 10], используются условия свободных границ: $v_z = 0$, $\partial v_{x,y}/\partial z = 0$. Удобство этих граничных условий связано с видом зависимости от z собственных функций задачи устойчивости тривиального состояния $v \equiv 0$. В случае свободных границ эти собственные функции сводятся к обычным тригонометрическим функциям, что существенно упрощает выкладки.

Замечу теперь, что граничные условия $v_z = 0$, $\partial v_{x,y}/\partial z = 0$ допускают незатухающее движение жидкости вдоль таких границ. Если при этом жидкость движется как твердое тело, т.е. вертикальная компонента скорости тождественно равна нулю, горизонтальные компоненты не зависят от z , и сдвиговые деформации отсутствуют, то всякий тензор напряжений тождественно обращается в нуль и течение в целом оказывается незатухающим. Очевидно, что возможны два типа таких течений. Первый — поступательное движение с постоянной горизонтальной скоростью, второй — вращение жидкого слоя с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. Возможность реализации незатухающего течения с постоянной горизонтальной скоростью приводит к уже обсуждавшейся галилеевской инвариантности задачи. Однако, хотя слой жидкости и предполагается бесконечно протяженным в горизонтальной плоскости, следует помнить, что такая постановка задачи является идеализацией и что в действительности всегда имеются боковые стенки, препятствующие возникновению течения с ненулевым потоком массы "на бесконечность". Поэтому обычно галилеевская инва-

риантность в конвективном слое подавлена, хотя, конечно, ее можно восстановить при специальной конструкции контейнера, содержащего изучаемый слой жидкости.

Но если поступательное движение слоя жидкости запрещено, ничто не препятствует его вращательному движению, которое не приводит к выносу массы на бесконечность, то инвариантность задачи к таким вращениям, являющаяся аналогом галилеевской инвариантности для вращательного движения, есть искомая дополнительная симметрия. Подчеркну еще раз, во избежание недоразумений, что речь идет *не* об инвариантности к вращениям на произвольный угол, что является следствием изотропии задачи (традиционная симметрия), *но* об инвариантности по отношению к вращениям с произвольной фиксированной угловой скоростью.

Отмечу, что хотя экспериментальная реализация такой инвариантности и сопряжена со значительными трудностями, случай не является совершенно безнадежным (см., например, [16], а также обсуждение этого вопроса в обзоре [4]).

Для анизотропной жидкости (жидкие кристаллы) аналогом проблемы Рэлея–Бенара является электроконвекция в термотропном нематике [17–20]. Молекулы такого жидкого кристалла имеют форму, сильно вытянутую в одном направлении. В нематической фазе они предпочитают выстраиваться параллельно друг другу, что делает жидкость анизотропной. При изучении электроконвекции слой нематика, толщина которого в типичных случаях составляет 10–100 мкм, заключается между двумя прозрачными (что позволяет изучать задачу оптическими методами) электродами, к которым подводится переменное напряжение V . При определенных условиях, обсуждение которых можно найти в цитированных выше работах, превышение напряжения V над некоторым пороговым значением V_c приводит к возникновению конвективного движения, аналогичного тому, которое наблюдается при конвекции Рэлея–Бенара. При этом, в отличие от случая термоконвекции, система обычно терmostатируется, так что роль разности температур между верхней и нижней границами слоя теперь играет квадрат приложенного напряжения, а его частота может быть соотнесена в термоконвекции с числом Прандтля¹.

Откуда и как в такой задаче может возникать дополнительная симметрия? Дело в том, что обычно твердые поверхности, ограничивающие слой нематика, обрабатываются таким образом, чтобы придать определенную ориентацию молекулам жидкого кристалла, соприкасающимся с этими поверхностями. Рассмотрим случай гомеотропной ориентации, когда молекулы нематика выстраиваются перпендикулярно этим поверхностям. При отсутствии внешнего электрического поля, ориентация молекул, задаваемая поверхностями, определяет ориентацию во всем слое.

Что будет, если на такой ориентированный слой действовать электрическим полем? Результат воздействия будет существенно зависеть от знака диэлектрической анизотропии нематика. Нам интересен случай *отрицательной* анизотропии, когда молекулы жидкого кристалла стремятся повернуться перпендикулярно

¹ Отношение кинематической вязкости к коэффициенту теплопроводности жидкости.

силовым линиям поля, т.е. ориентация молекул полем приходит в конфликт с ориентацией, налагаемой граничными условиями. Хорошо известно, что в такой ситуации существует определенное пороговое напряжение V_F . При $V < V_F$ однородное гомеотропное распределение молекул остается устойчивым. При $V > V_F$ происходит переход Фредерикса, и равновесная ориентация молекул всюду, за исключением узкого приповерхностного слоя, прилегающего к граничным поверхностям, становится наклонной по отношению к плоскости слоя [17–19].

Таким образом, при $V > V_F$ оси молекул имеют ненулевую проекцию на плоскость слоя, что приводит к возникновению в этой плоскости анизотропии. Поскольку, однако, все внешние факторы, воздействующие на систему, включая электрическое поле, создающее указанную анизотропию, остаются пространственно-однородными и изотропными в плоскости слоя, направление оси анизотропии определяется случайными причинами и может быть любым.

При этом, разумеется, все состояния, отличающиеся только направлением оси анизотропии, являются физически-эквивалентными. Иными словами, в системе происходит спонтанное нарушение изотропности в плоскости слоя, сопровождающееся вырождением по отношению к вращениям на произвольный угол вокруг оси перпендикулярной плоскости слоя [21].

В типичных случаях [22–24] порог перехода Фредерикса оказывается ниже порога возникновения конвективной неустойчивости. Поэтому состояние системы на пороге конвективного движения оказывается вырожденным по отношению к указанным выше вращениям, что и создает искомую дополнительную симметрию.

Подчеркну, что особенность этой задачи состоит в том, что симметрия по отношению к вращениям на произвольный угол, классифицированная ранее как традиционная, выступает в роли дополнительной симметрии из-за отмеченного спонтанного нарушения изотропности системы.

Из приведенного далеко не полного списка примеров видно, что круг задач с коротковолновой неустойчивостью пространственно-неоднородного состояния и дополнительной непрерывной группой симметрии достаточно широк. Ниже будет показано, что развитие коротковолновой неустойчивости в таких задачах качественно отличается от этого процесса в аналогичных системах, обладающих лишь традиционной симметрией. Однако, прежде чем перейти к такому сравнению, нужно понять, как описывается развитие коротковолновой неустойчивости в традиционных системах. Краткому обсуждению этого вопроса и посвящен следующий раздел настоящей работы.

2. Коротковолновая неустойчивость в традиционных системах

2.1. Универсальность уравнений

Свифта – Хохенберга и Гинзбурга – Ландау

Вернемся опять к проблеме Рэлея–Бенара и обсудим сначала качественно, что происходит с произвольным малым пространственно-неоднородным возмущением тривиального состояния при слабом превышении порога конвекции. Раскладывая такое возмущение в плоскости xy в интеграл Фурье и пользуясь принципом

суперпозиции, справедливым, пока амплитуда фурье-трансформант достаточно мала, приходим к выводу, что на начальной стадии эволюция каждой из пространственных гармоник описывается множителем $\exp[i\gamma(k)t]$, в котором зависимость $\gamma(k)$ изображена на рис. 2. Отсюда немедленно следует, что, каков бы ни был вид начального возмущения, почти все его пространственные гармоники, за исключением узкого волнового пакета, сосредоточенного в окрестности $k = k_c$, экспоненциально быстро затухнут. Таким образом, долговременная асимптотика задачи будет определяться медленной эволюцией мод из указанного узкого пакета.

При слабом превышении порога значение $\gamma_{\max} \equiv \max\{\gamma(k)\}$ также сравнительно мало (см. рис. 2). Поскольку характерное время развития неустойчивости определяется обратной величиной инкремента, т.е. $1/\gamma_{\max}$, то малость γ_{\max} является количественной мерой медленности процесса. На практике, однако, более удобно оказывается связывать медленность развития неустойчивости с величиной контрольного параметра, определяющего устойчивость или неустойчивость системы. Роль такого конкретного параметра в проблеме Рэлея–Бенара играет разность температур верхней и нижней поверхностей слоя ΔT , вернее, определенная безразмерная комбинация констант задачи, получившая название *число Рэлея Ra*, которая пропорциональна этой разности [4, 5]. Вблизи порога неустойчивости (Ra_c) удобно ввести перенормированный параметр порядка (*normalized* или *reduced control parameter*)

$$\varepsilon \equiv \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}, \quad (6)$$

который ниже для краткости будет именоваться *просто контролльным параметром*.

Ясно, что γ_{\max} есть определенная функция ε , удовлетворяющая условию $\gamma_{\max} = 0$ при $\varepsilon = 0$. Полагая зависимость $\gamma_{\max}(\varepsilon)$ гладкой и раскладывая ее в ряд по степеням ε , убеждаемся, что при малых ε величины γ_{\max} и ε можно считать пропорциональными друг другу.

Вернемся к обсуждению динамики развития неустойчивости в проблеме Рэлея–Бенара. С ростом амплитуды неустойчивых мод линейное приближение становится неприменимым, и определяющую роль начинает играть нелинейное взаимодействие этих мод (*non-linear mode coupling*). Заметим, что возникновение конвективного течения, очевидно, приводит к улучшению теплообмена между верхней и нижней границами слоя по сравнению с теплообменом в покоящейся жидкости, т.е. должно уменьшать разницу температур между этими поверхностями, устранивая тем самым первопричину неустойчивости. Иными словами, нелинейное взаимодействие мод должно приводить к стабилизации неустойчивости. Поэтому естественно ожидать, что асимптотическое состояние системы должно соответствовать гидродинамическому движению со сравнительно малыми характерными скоростями, величина которых тем меньше, чем меньше ε , что и наблюдается в эксперименте [4, 5].

Указанные особенности явились основанием для построения различных версий теории возмущений, в которых нелинейность проблемы проявляется в виде поправок к собственным функциям линейной задачи устойчивости тривиального состояния, амплитуда которых, однако, больше не является произвольной постоян-

ной, по самосогласованию находится в процессе решения. Инициированные работами Горькова [25], Малкуса и Верониса [26], а также Шлюгера, Лортца и Буссе [27] в настоящее время такие исследования составляют самостоятельный раздел динамики жидкости (см. обзор последних достижений в этой области в работе [4]).

Во всех этих версиях исходным уравнением является уравнение Навье–Стокса. Зависимость решения от z предполагается такой же, как для собственных функций линейной задачи устойчивости, после чего координата z легко исключается и задача сводится к двумерной. Существенным моментом, однако, является то, что как в термодинамически равновесных фазовых переходах вблизи точки перехода существует масштабная инвариантность и вся специфика конкретной физической системы сводится к определенному набору критических индексов [28], так и в распределенных диссипативных системах вблизи порога коротковолновой неустойчивости динамика различных систем может описываться некоторыми универсальными уравнениями и вся специфика системы сводится к значению коэффициентов в этих уравнениях [2–4].

Чтобы понять происхождение такой универсальности, применим, следуя работам [4, 29], феноменологический подход к проблеме, восходящей к основополагающим работам Ландау по теории фазовых переходов [28, 30] и теории турбулентности [31, 32]. Рассмотрим задачу, которая возникает после исключения зависимости решения от z . При этом ограничимся для простоты одномерным случаем, когда зависимость решения от координаты u подавлена, например, за счет геометрического фактора (конвекция в длинном и узком контейнере, ширина которого порядка толщины слоя). Пусть $u(x, t)$ — z -компоненты скорости течения в плоскости, проходящей через середину слоя, а $U_k(t)$ — пространственная фурье-трансформанта этой величины:

$$U_k(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int u(x, t) \exp(ikx) dx.$$

В линейном приближении функция $U_k(t)$, очевидно, должна удовлетворять следующему уравнению (здесь и ниже $\gamma(k)$ предполагается чисто действительной величиной):

$$\frac{dU_k}{dt} = \gamma(k) U_k. \quad (7)$$

Далее, в духе [31, 32] заметим, что правая часть (7) фактически есть первый член разложения по степеням U_k . Дописывая высшие члены этого разложения, получаем, что в наиболее общем случае эволюционное уравнение должно иметь вид [33]

$$\begin{aligned} \frac{dU_k}{dt} = & \gamma(k) U_k - \int \alpha(k, k_1, k_2) U_{k_1} U_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) \times \\ & \times dk_1 dk_2 - \int \beta(k, k_1, k_2, k_3) U_{k_1} U_{k_2} U_{k_3} \times \\ & \times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3 - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\alpha(k, k_1, k_2)$ и $\beta(k, k_1, k_2, k_3)$ — некоторые действительные коэффициенты (вершины или матричные элементы) и δ -функции отражают тот факт, что нелинейное взаимодействие мод приводит к воздействию на моду с

данным волновым вектором \mathbf{k} в том и только в том случае, когда сумма волновых векторов этих мод равняется \mathbf{k} .

Формально интегрирование в (8) происходит от минус до плюс бесконечности. Однако фактически из обсуждавшихся выше качественных особенностей задачи ясно, что основной вклад в интегралы вносит окрестность точки $k = k_c$, а также окрестности волновых векторов пространственных сателлитов моды с $k = k_c$, т.е. точек с $k = nk_c$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Появление сателлитов обусловлено нелинейными эффектами, приводящими к генерации кратных пространственных гармоник. Существенно, что все сателлиты лежат далеко в области линейной устойчивости (значение $\gamma(nk_c) < 0$ и велико по абсолютной величине при $n \neq 1$). С другой стороны, нелинейные эффекты слабы — каждый следующий член в правой части (8) имеет дополнительную малость по U . Поэтому естественно предположить, что характерные значения U_k убывают с возрастанием $|n|$, так что наибольшую величину имеют U_k с $k \simeq \pm k_c$.

Таким образом, реально интегралы в правой части (8) разбиваются на суммы интегралов, взятых по малым окрестностям точек $k = nk_c$. В этом случае, предполагая, что коэффициенты $\alpha(k, k_1, k_2)$ и $\beta(k, k_1, k_2, k_3)$ являются гладкими функциями волновых векторов, разлагая их по малым отклонениям каждого из аргументов от соответствующего nk_c и ограничиваясь главным приближением (т.е. первым неисчезающим членом такого разложения), приходим к выводу, что в каждой из указанных окрестностей можно считать

$$\alpha(k, k_1, k_2) \simeq \alpha(nk_c, n_1 k_c, n_2 k_c) = \text{const},$$

аналогично

$$\beta(k, k_1, k_2, k_3) \simeq \beta(nk_c, n_1 k_c, n_2 k_c, n_3 k_c) \simeq \text{const}.$$

Разумеется, значения констант будут различны для различных наборов n .

Как уже отмечалось, наибольший интерес представляют моды с $k \simeq k_c$. Положим в (8) $k = k_c + p$, где p — малая величина, и покажем, что в этом случае квадратичный член в правой части (8) эффективно оказывается не второго, а третьего порядка малости и может быть включен в кубический. Действительно, при данном k , учитывая предполагаемую иерархию характерных значений U_k при изменении номера n , получаем, что в главном приближении этот член разбивается на два интеграла:

$$\begin{aligned} & \int \alpha(k, k_1, k_2) U_{k_1} U_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \simeq \\ & \simeq 2 \left\{ \alpha(k_c, k_c, 0) \int U_{k_c+p_1} U_{p_2} \delta(p - p_1 - p_2) dp_1 dp_2 + \right. \\ & \left. + \alpha(k_c, 2k_c, -k_c) \int U_{2k_c+p_1} U_{-k_c+p_2} \delta(p - p_1 - p_2) dp_1 dp_2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

(множитель 2 в правой части (9) появился из-за учета симметрии коэффициента α относительно перестановки "немых" $k_{1,2}$: $\alpha(k, k_1, k_2) = \alpha(k, k_2, k_1)$).

Рассмотрим для определенности первый из этих интегралов. В него помимо U_k с $k \simeq k_c$ входит амплитуда длинноволновой моды U_{p_2} , где значение p_2 мало. В

свою очередь уравнение для амплитуд длинноволновых мод в главном приближении имеет вид

$$\frac{dU_p}{dt} = \gamma(p)U_p - 2\alpha(0, k_c, -k_c) \int U_{k_c+p_1}U_{-k_c+p_2} \times \\ \times \delta(p - p_1 - p_2) dp_1 dp_2. \quad (10)$$

Заметим теперь, что временная эволюция длин неволновой моды с $k = p$ обусловлена ее нелинейной связью с коротковолновыми модами с $k \approx k_c$. Поэтому характерное время изменения амплитуды $U_p(t)$ совпадает с аналогичной величиной для $U_{k_c}(t)$, т.е. оказывается порядка $1/\gamma_{\max}$. Отсюда следует, что

$$\left| \frac{dU_p}{dt} \right| \sim \gamma_{\max}|U_p| \ll |\gamma(p)U_p|, \quad (11)$$

так как $\gamma(p) \approx \gamma(0)$ является большой отрицательной величиной.

Условие (11) дает основание пренебречь в уравнении (10) производной dU_p/dt по сравнению с $\gamma(p)U_p$, что позволяет выразить $U_p(t)$ в явном виде. Подставляя это выражение в (9), убеждаемся, что

$$\int \alpha(k_c, k_c, 0)U_{k_c+p_1}U_{p_2}\delta(p - p_1 - p_2) dp_1 dp_2 \simeq \\ \simeq \frac{2\alpha(k_c, k_c, 0)\alpha(0, k_c, -k_c)}{\gamma(0)} \int U_{k_c+p_1}U_{k_c+p_2}U_{-k_c+p_3} \times \\ \times \delta[(k_c + p) - (k_c + p_1) - (k_c + p_2) - (-k_c + p_3)] \times \\ \times dp_1 dp_2 dp_3, \quad (12)$$

т.е. имеет такой же вид, как и главное приближение к кубическому члену в правой части (8)². Аналогичными преобразованиями к такому же виду приводится и второй интеграл в правой части (9).

Таким образом, квадратичный член в правой части (8) исключается, и в указанном приближении уравнение приобретет вид

$$\frac{dU_k}{dt} = \gamma(k)U_k - \beta \int U_{k_1}U_{k_2}U_{k_3} \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (13)$$

где β — некоторая константа, получающаяся из $\beta(k_c, k_c, k_c, -k_c)$ с учетом симметрии относительно перестановок немых $k_{1,2,3}$ и вкладов от исключения квадратичного члена. Интегрирование в (13) происходит по малым окрестностям $k_1 = k_c$, $k_2 = k_c$ и $k_3 = -k_c$, однако в силу быстрой сходимости интегралов его можно распространить от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Обсудим теперь дисперсионную зависимость $\gamma(k)$. Прежде всего в силу инвариантности задачи к пространственным отражениям зависимость $\gamma(k)$ должна быть четной функцией k , так как замена $x \rightarrow -x$ для фурье-трансформант эквивалентна замене $k \rightarrow -k$. Далее, в силу сказанного ранее, наиболее существенной в уравнении (13) является область k близких к k_c . Поэтому истинную зависимость $\gamma(k)$ можно заменить некоторой

² Фактически, эта процедура является исключением из задачи зависимых мод (*slaved modes*) в соответствии с подходом Хакена [3]. При этом из (10) видно, что $U_p \sim U_{k_c}^2$, что подтверждает сделанные предположения об иерархии характерных значений амплитуд.

аппроксимацией, так, чтобы эта аппроксимация хорошо описывала поведение $\gamma(k)$ при $k \approx k_c$. Что же касается поведения $\gamma(k)$ при других значениях k , то здесь достаточно качественного согласия аппроксимации с истинной дисперсионной зависимостью: значение $\gamma(k) < 0$ и велико по абсолютной величине при $|k - k_c| \geq k_c$. Простейшей аппроксимацией такого рода, удовлетворяющей условию $\gamma(k) = \gamma(-k)$, является выражение

$$\gamma(k) = \frac{1}{\tau_0} [\varepsilon - \xi_0^4 (k^2 - k_c^2)^2], \quad (14)$$

где τ_0 и ξ_0 — константы, имеющие смысл соответственно характерного времени и характерного пространственного масштаба.

Подставляя (14) в (13) и осуществляя обратное преобразование Фурье (при этом $k \rightarrow -i\partial/\partial x$), получаем уравнение, которое масштабным преобразованием

$$U \rightarrow \frac{(k_c \xi_0)^2}{\sqrt{\beta}} U, \quad t \rightarrow \frac{\tau_0}{(\xi_0 k_c)^4} t, \\ x \rightarrow \frac{x}{k_c}, \quad \varepsilon \rightarrow (k_c \xi_0)^4 \varepsilon \quad (15)$$

приводится к следующему универсальному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\varepsilon - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] u - u^3. \quad (16)$$

Я сохранил за новыми безразмерными величинами старые обозначения, так как это не может привести к недоразумениям. Отмечу также, что при выводе (16) молчаливо предполагалось, что константа β положительна. При $\beta > 0$ нелинейный член в правой части (13) оказывает стабилизирующую действие. Если же $\beta < 0$, то этот член дестабилизирует задачу, и для адекватного описания процесса требуется учет высших нелинейностей, что отмечал еще Ландау [31].

Уравнение (16), известное под названием Свифта – Хохенберга, впервые было получено (другим способом, исходя из уравнения Навье – Стокса) в двумерной версии: $\partial^2/\partial x^2 \rightarrow \Delta_2$, где Δ_2 — двумерный лапласиан, используемый при изучении вполне конкретной проблемы — роли флукутации в конвекции Рэлея – Бенара [34]. Важность этого уравнения для описания образования структур в распределенных системах была понята позднее (см. обсуждение этого вопроса, например, в обзоре [4]).

Уравнение (16), однако, допускает дальнейшее упрощение. С этой целью выделим быстроосцилирующую часть решения в явном виде, т.е. представим $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\psi(x, t) \exp(ix) + \psi^*(x, t) \exp(-ix)], \quad (17)$$

где $\psi(x, t)$ — медленно меняющаяся (огибающая) функция. Напомню, что в новых безразмерных переменных $k_c = 1$, так как теперь

$$\gamma(k) = \varepsilon - (k^2 - 1)^2 \quad (18)$$

(см. (16)). Представляя далее k в виде $1 + p$, где $p \lesssim \sqrt{\varepsilon}$, переписываем (18) в виде

$$\gamma(k) \simeq \varepsilon - 4p^2, \quad (19)$$

где отброшенные члены имеют порядок $p^3 \sim \varepsilon^{3/2}$.

С другой стороны, представляя $U(x, t)$ и $\psi(x, t)$ в виде интегралов Фурье, легко убедиться, что

$$ip[\psi \exp(ix)]_p \rightarrow \exp(ix) \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (20)$$

Поэтому в x -представлении дисперсионное соотношение (19) соответствует оператору³

$$\varepsilon + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (21)$$

где, согласно (20), дифференцирование распространяется только на ψ , но не на $\exp(ix)$.

Наконец, возводя правую часть (17) в куб и отбрасывая высшие пространственные гармоники, приводим (16) к виду

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \varepsilon \psi - \frac{3}{4} |\psi|^2 \psi.$$

Масштабное преобразование

$$x = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} X, \quad t = \frac{T}{\varepsilon}, \quad \psi = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \Psi \quad (22)$$

придает этому уравнению окончательную форму:

$$\Psi_T = \Psi_{XX} + (1 - |\Psi|^2) \Psi, \quad (23)$$

где индексы обозначают соответствующие операции дифференцирования.

Уравнение (23) есть не что иное, как широко известное уравнение Гинзбурга – Ландау. Отмечу, что записанное в форме (23) это уравнение не содержит никаких малых или больших параметров — все входящие в него величины порядка единицы. Отсюда и из масштабного преобразования (22) немедленно следует оценка для характерных значений исходных переменных: $\psi \sim \sqrt{\varepsilon}$, характерный пространственный масштаб изменения функции $\psi(x, t)$ порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$, а характерный временной масштаб $\sim 1/\varepsilon$.

Прежде чем двигаться дальше, хочу подчеркнуть, что уравнение (23) инвариантно относительно замены $\Psi \rightarrow \Psi \exp(i\varphi_0)$, где φ_0 — произвольная постоянная фаза (инвариантность к вращениям в комплексной плоскости). Эта инвариантность приводит к возникновению определенной сохраняющейся величины, эквивалентной моменту импульса в задаче о движении классической частицы в аксиально-симметричном потенциале. В свою очередь, наличие указанного дополнительного закона сохранения играет важную роль в ряде конкретных задач, таких, например, как отбор волнового числа пространственно-периодической структуры (spatially periodic pattern) на доменной стенке [35, 36].

Существенным моментом, однако, является то, что обсуждающаяся симметрия не является дополнительной симметрией исходной задачи. Эта симметрия возникла при переходе от уравнения (16) к уравнению (23) и обусловлена приближениями, сделанными в процессе этого перехода. Такая симметрия называется *случайной* и снимается в высших порядках теории возмущений. Действительно, учет отброшенных при переходе от (16)

к (23) членов, например, вида $\psi^3 \exp(3ix)$ разрушает эту симметрию, *а вместе с ней и упоминавшийся закон сохранения*, что приводит к возникновению в задаче качественно новых эффектов, связанных с высшими порядками теории возмущений [36].

Обсуждение этих вопросов лежит вне рамок настоящего обзора, но в силу их важности я не мог не воспользоваться случаем и не обратить внимание читателя на коварность случайной симметрии. Подавляющее большинство уравнений, использующихся в теоретической физике, являются приближенными и могут быть дополнены малыми (по отношению к рассматриваемому приближению) членами. Если эти малые члены приводят к понижению симметрии проблемы, то это всегда является основанием для возникновения в соответствующей задаче качественно новых эффектов, связанных с такими членами, как бы ни были эти члены малы сами по себе.

Вернемся к уравнению Свифта – Хохенберга и обсудим, как меняется задача при рассмотрении коротковолновой неустойчивости в двух пространственных измерениях. Исходной точкой опять должно являться эволюционное уравнение в форме (8), где теперь скалярные величины k нужно заменить на соответствующие двумерные векторы. Это приводит к двум качественно новым эффектам.

Во-первых, за счет того, что три вектора \mathbf{k} , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , образующие правильный треугольник со стороной равной k_c , удовлетворяют условию $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = 0$, квадратичный член оказывается уже не третьего (как было раньше), а, как ему и положено быть, второго порядка малости и уже не сводится к кубическому. Если при этом в задаче нет специальных причин, приводящих к численной малости коэффициента α , то довольно просто показать (см., например, [33]), что при $\varepsilon > 0$ в такой задаче реализуется взрывная неустойчивость, связанная с неограниченным (в рамках рассматриваемого приближения) ростом амплитуды гексагональной ячеистой структуры.

Существенно, однако, то, что квадратичный член в уравнении (8) нарушает инвариантность этого уравнения по отношению к изменению знака U_k . Между тем, в ряде задач такая инвариантность следует из симметрии проблемы. Так, например, при конвекции в слое жидкости, заключенном между двумя твердыми поверхностями, баланс сил, действующих на всплывающую жидкую частицу, перегретую на δT по отношению к окружающей ее жидкости, равен по величине и противоположен по знаку такому балансу для аналогичной тонущей частицы, переохлажденной на δT и расположенной симметрично относительно серединной плоскости. По этой причине профиль x -компоненты скорости течения должен обладать симметрией к отражениям в серединной плоскости, что означает симметрию задачи к преобразованию $U_k \rightarrow -U_k$ и приводит к требованию $\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv 0$.

При учете более тонких эффектов, таких как, например, температурная зависимость вязкости, симметрия $U_k \rightarrow -U_k$ нарушается. В таких случаях коэффициент $\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ уже не равен нулю тождественно, но остается мал в меру малости указанных эффектов. При малом α квадратичный и кубический члены в двумерной версии уравнения (8) могут быть сопоставимы и должны учитываться одновременно.

³ Тот же результат, но значительно более трудоемким способом можно было получить, подставляя (17) в (16), учитывая, что $d\psi/dx \sim \sqrt{\varepsilon}\psi \ll \psi$ в силу медленности изменения ψ и удерживая только главное приближение по пространственным производным.

Здесь мы встречаемся со вторым качественным различием одно- и двумерной версий уравнения (8): величина $\beta(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ даже в главном приближении по отклонениям величин векторов $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ от k_c не является больше постоянной, но есть функция угла раствора ромба, образованного четырьмя этими векторами:

$$\beta(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)_{k=k_1=k_2=k_3=k_4=k_c} = \beta(\theta).$$

Из сказанного ясно, что в двумерном случае уравнение Свифта–Хохенберга не является больше универсальным уравнением, описывающим слабонелинейную динамику широкого класса задач с коротковолновой неустойчивостью. Более общее эволюционное уравнение (8) сводится к двумерной версии уравнения Свифта–Хохенберга в том и только в том случае, когда $\alpha(k, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv 0$ и $\beta(\theta) = \text{const}$. Тем не менее двумерное уравнение Свифта–Хохенберга, а также различные его обобщения, являются удобными моделями, изучение которых позволяет понять многие тонкие вопросы проблемы образования структур (pattern formation) (см., например, подробное обсуждение этих вопросов в работе [4]).

2.2. Пространственно-периодические решения и их устойчивость. Критерий Экхауза

Приведу теперь сводку основных результатов, касающихся пространственно-периодических решений уравнений (16), (23) и устойчивости этих решений, отсылая за более подробной информацией к работам [4, 37–43].

Легко видеть, что уравнение (23) имеет семейство стационарных пространственно-периодических решений вида

$$\Psi = \sqrt{1 - K^2} \exp[i(KX + \varphi_0)], \quad (24)$$

формально существующих при любом $K \leq 1$. Обсудим устойчивость этих решений к малым возмущениям. Для этого удобней всего представить функцию Ψ в виде $\Psi = R \exp(i\Phi)$, а уравнение Гинзбурга–Ландау, соответственно, в виде

$$R_T = R_{XX} + (1 - R^2 - \Phi_X^2)R, \quad (25)$$

$$\Phi_T = \frac{1}{R^2}(R^2\Phi_X)_X. \quad (26)$$

Решению (24) при этом соответствует

$$R = \sqrt{1 - K^2}, \quad \Phi = KX + \varphi_0. \quad (27)$$

Линеаризуя систему (25), (26) около этого решения и представляя возмущенное решение в виде

$$\tilde{R} = R + r \exp(\sigma T + iQX), \quad (28)$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \varphi \exp(\sigma T + iQX), \quad (29)$$

где r и φ — бесконечно малые константы⁴, стандартным образом получаем квадратное дисперсионное уравнение

⁴ Возмущению фазы (29) соответствует возмущение Ψ вида $R \exp[\Phi + \varphi \exp(\sigma T + iQX)]$, что, на первый взгляд, кажется необычным, однако, учитывая малость φ , это выражение можно переписать как $R \exp(\Phi) \exp[\varphi \exp(\sigma T + iQX)] \simeq R \exp(\Phi)[1 + \varphi \exp(\sigma T + iQX)]$, что приводит такое возмущение к стандартному виду.

для $\sigma(K, Q)$, решением которого является

$$\sigma_{1,2} = K^2 - 1 - Q^2 \pm \sqrt{(1 - K^2)^2 + 4K^2Q^2}. \quad (30)$$

Дисперсионная зависимость (30) всегда соответствует чисто действительным значениям σ , т.е. малые возмущения эволюционируют во времени монотонно. Далее, знак минус перед радикалом в выражении (30) соответствует отрицательным значениям σ при любых значениях K и Q , т.е. одна из всех ветвей спектра, описываемого соотношением (30), которую для краткости будем называть σ_2 , всегда устойчива. Что же касается второй ветви спектра σ_1 (знак плюс перед радикалом), то эта ветвь соответствует устойчивым возмущениям ($\sigma_1 \leq 0$ при любых значениях Q), только если

$$K^2 < K_E^2 \equiv \frac{1}{3}. \quad (31)$$

При $K^2 > 1/3$ в спектре появляется область неустойчивости: значение $\sigma(K, Q)$ становится положительным при

$$-\sqrt{2(3K^2 - 1)} < Q < \sqrt{2(3K^2 - 1)}. \quad (32)$$

Существенно, что область (32) всегда включает точку $Q = 0$. С другой стороны, для рассматриваемой ветви спектра $\sigma = 0$ при $Q = 0$ и любом значении K . Мы увидим ниже, что обращение в нуль $\sigma(K, Q)$ при $Q = 0$ не является случайным, а есть фундаментальное свойство задачи, связанное с трансляционной инвариантностью уравнения (23). Соответствующая нейтрально-устойчивая мода называется *голдстоуновской* (Goldstone mode) и играет чрезвычайно важную роль в проблеме устойчивости.

При малых Q из дисперсионного соотношения (30) легко получить

$$\sigma_1 = \frac{3K^2 - 1}{1 - K^2} Q^2 + O(Q^4), \quad (33)$$

т.е. возникновение неустойчивости связано с изменением знака коэффициента перед Q^2 в разложении $\sigma(K, Q)$ по степеням Q^2 . При этом ветвь спектра, описывающая неустойчивые моды, отщепляется от точки $Q = 0$ (*голдстоуновская ветвь*), а волновые числа Q , соответствующие этим неустойчивым модам, при $0 < 3K^2 - 1 \ll 1$ сосредоточены в малой окрестности нуля, т.е. неустойчивость оказывается связанный с *длинноволновой* модуляцией пространственно-периодической структуры (sideband modes).

Таким образом, формально существующие пространственно-периодические решения уравнения Гинзбурга–Ландау становятся неустойчивыми при слишком большом значении волнового числа K . Критерию устойчивости (31) можно придать несколько другой вид, воспользовавшись соотношением (27), связывающим K с амплитудой изучаемой пространственно-периодической структуры. А именно, пространственно-периодические решения оказываются устойчивыми, если их амплитуда $R(K)$ удовлетворяет условию

$$\frac{R^2(K)}{R_{\max}^2} > \frac{2}{3}, \quad (34)$$

где $R_{\max} \equiv \max_k \{R(K)\} = R(K_c)$. Напоминаю, что K_c соответствует максимуму инкремента неустойчивости тривиального состояния. Для уравнения Гинзбурга –

Ландау тривиальное состояние есть $\Psi \equiv 0, \gamma(K) = -1 - K^2$ и $K_c = 0$.

Удобство критерия устойчивости в форме (34) состоит в его масштабной инвариантности, т.е. независимости формы записи от единиц измерения. Поэтому критерий устойчивости (34) является *универсальным законом*, справедливым и для уравнения Свифта – Хохенберга (16), а также для *любого другого* уравнения с коротковолновой неустойчивостью, которое при малых превышениях порога может быть сведено к уравнениям (16), (23) согласно изложенной ранее методике. Подчеркну, что множитель $2/3$, стоящий в правой части (34), является *мировой константой*, такой же как, скажем, число π . Условия, эквивалентные (31), (34), впервые были получены в работах [44, 45] и называются критерием Экхауза.

Наконец, приведу еще одну форму критерия Экхауза, удобную при сравнении теории и эксперимента. Определим на плоскости $k\varepsilon$ кривую *нейтральной устойчивости* тривиального состояния согласно условию $\gamma(k) = 0$. Из (14) следует, что при $|k - k_c| \ll k_c$ эта кривая сводится к параболе

$$\varepsilon = 4\xi_0^4 k_c^2 (k - k_c)^2. \quad (35)$$

С другой стороны, в уравнении Гинзбурга – Ландау условие нейтральной устойчивости $\gamma(K) = 0$ соответствует условию $K^2 = 1$. Сопоставляя это условие с (35), находим соответствие масштабов

$$K^2 = \frac{4\xi_0^4 k_c}{\varepsilon} (k - k_c)^2. \quad (36)$$

Тогда критерий Экхауза в форме (31) в размерных переменных соответствует условию

$$\varepsilon > 3 \cdot 4\xi_0^4 k_c^2 (k - k_c)^2, \quad (37)$$

и определяет *внутри* первой параболы (35) другую, более крутую параболу, отделяющую устойчивые пространственно-периодические решения от неустойчивых.

Такие кривые, отделяющие на плоскости параметров задачи устойчивые пространственно-периодические состояния от неустойчивых, обычно называются *баллоном устойчивости* (stability balloon), или *баллоном Буссе* (Busse balloon) в честь основополагающего вклада Буссе в проблему устойчивости пространственно-периодических структур в конвекции Рэлея – Бенара (обзор и библиографию этих работ Буссе можно найти, например, в [4, 46, 47]).

Отмечу, что универсальность критерия Экхауза существенно связана со сведением эволюционного уравнения общего вида (8) к уравнению Гинзбурга – Ландау, что справедливо только в *главном* приближении по малому $\sqrt{\varepsilon}$. Учет следующих членов разложения дает поправки к условиям (34), (37), которые уже не имеют универсального вида. Важно, однако, что все такие поправки малы (см., например, [48]).

В заключение настоящего раздела сформулируем основные качественные результаты, полученные выше для традиционных систем:

1. При достаточно малых значениях ε в задаче всегда имеется определенное свойство *устойчивых* стационарных пространственно-периодических решений.

2. На плоскости $k\varepsilon$ указанным устойчивым решениям соответствует баллон Буссе, ширина которого (т.е. расстояние между правой и левой границами при фиксированном значении ε) порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

3. Релаксация устойчивых возмущений пространственно-периодических решений, так же как и рост неустойчивых (за пределами баллона Буссе) происходят *монотонно* по времени ($\text{Im } \sigma \equiv 0$).

4. За границами баллона Буссе неустойчивые моды всегда связаны с голдстоуновской ветвью спектра.

5. Для получения критерия устойчивости пространственно-периодических решений в главном (по малому $\sqrt{\varepsilon}$) приближении достаточно ограничиться главным же приближением к соответствующему эволюционному уравнению — малые поправки к этому уравнению дают малые поправки к критерию устойчивости.

При развитии коротковолновой неустойчивости в двумерных системах задача делается богаче как с точки зрения появления новых типов структур (ячеистые пространственно-периодические структуры (collular patterns) [4] и даже квазипериодические структуры [4, 49–53]), так и с точки зрения возникновения новых типов неустойчивости. Однако перечисленные выше качественные характеристики проблемы устойчивости стационарных структур, как правило, остаются в силе и для двумерных задач.

При переходе же к задачам с дополнительной симметрией ситуация меняется радикально. Наличие в задаче дополнительной непрерывной группы симметрии вне зависимости от пространственной размерности такой задачи приводит к изменению всех пяти перечисленных выше качественных характеристик. Попытаемся понять причины этих изменений.

3. Коротковолновая неустойчивость в системах с дополнительной непрерывной группой симметрии

3.1. Симметрия и голдстоуновские моды

Прежде всего следует отметить, что любая непрерывная группа симметрии, как правило, приводит к появлению соответствующей голдстоуновской ветви спектра возмущений стационарного решения. Действительно, пусть $u(\mathbf{r})$ — некоторое стационарное решение задачи, а \hat{T}_a — оператор непрерывной однопараметрической группы симметрии, переводящий решение $u(\mathbf{r})$ в некоторое $u_a(\mathbf{r})$:

$$\hat{T}_a u(\mathbf{r}) = u_a(\mathbf{r}), \quad (38)$$

где a — параметр, определяющий преобразование. Так, для группы пространственных трансляций

$$\hat{T}_a u(x) = u(x + a), \quad (39)$$

для группы вращений в комплексной плоскости

$$\hat{T}_a u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) \exp(ia) \quad (40)$$

и т.п.

Разумеется, $u_a(\mathbf{r})$ также является стационарным решением задачи, т.е. тождественно удовлетворяет соответствующим уравнениям и граничным условиям. Рассмотрим теперь случай бесконечно малого параметра a . Тогда

$$u_a(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + a \left[\frac{\partial}{\partial a} u_a(\mathbf{r}) \right]_{a=0} \quad (41)$$

(здесь учтено, что $u_a(\mathbf{r})|_{a=0} \equiv u(r)$). С другой стороны, второй член в правой части (41) можно рассматривать как возмущение стационарного решения $u(\mathbf{r})$. Это возмущение переводит $u(\mathbf{r})$ в другое стационарное же решение $u_a(\mathbf{r})$. По указанной причине такое возмущение должно быть нейтрально-устойчивым. Иными словами, производная $(\partial u_a / \partial a)|_{a=0}$ должна быть собственной функцией соответствующей задачи устойчивости для $u(\mathbf{r})$, обладающей нулевым собственным значением, т.е. является голдстоуновской модой⁵.

Таким образом, число голдстоуновских мод в задаче об устойчивости данного решения $u(\mathbf{r})$, как правило, совпадает с полным числом непрерывных скалярных величин, параметризующих все возможные преобразования симметрии, т.е. полную непрерывную группу симметрии рассматриваемой задачи. Употребленное выше словосочетание "как правило" означает, что это не всегда так. Действительно, из этого правила имеются исключения. Два важнейших из них сводятся к следующему.

Во-первых, действие преобразования симметрии на некоторые решения переводит их не в эквивалентные решения, но в себя самих, так что $u_a(\mathbf{r}) \equiv u(\mathbf{r})$. В этом случае $(\partial u_a / \partial a)|_{a=0}$ есть тождественный нуль и голдстоуновская мода не возникает. Примерами такого рода являются действия пространственных трансляций, вращения и т.п. на тривиальное решение $u \equiv 0$; в двумерной задаче — трансляция вдоль оси u , действующая на квазидномерное решение $u(x)$, и др.

Вторым важным исключением является случай, когда в задаче имеется несколько различных преобразований симметрии (полная группа симметрии G является прямым произведением некоторого числа подгрупп более низкой симметрии: $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$). При этом из-за случайного вырождения действия преобразований, принадлежащих различным подгруппам, на некоторое решение $u(\mathbf{r})$ описываются одним и тем же оператором \hat{T}_a . Этот случай реализуется, например, при действии преобразований пространственных трансляций ($X \rightarrow X + a$) и вращений в комплексной плоскости ($\Psi \rightarrow \Psi \exp(i\varphi_0)$) на решение (27) уравнения Гинзбурга — Ландау (при этом $\varphi_0 \equiv aK$). По указанной причине случайная симметрия (проблема вращения в комплексной плоскости) никак не оказывается на задаче устойчивости решений (24). В этой задаче имеется единственная голдстоуновская мода (см. (33)), несмотря на наличие двух непрерывных однопараметрических групп симметрии.

Почему я так много внимания уделяю голдстоуновским модам? Дело в том, что моды эти важны не сами по себе, а тем, что от них отщепляются голдстоуновские ветви спектра, определяющие зону медленно эволюционирующих возмущений. В свою очередь, существование такой зоны должно в явном виде учитываться как при выводе соответствующего эволюционного уравнения (голдстоуновские ветви в задаче об устойчивости тривиального состояния), так и при анализе устойчивости решений этого уравнения.

Так, например, в обсуждавшейся выше проблеме развития коротковолновой неустойчивости в системах с

традиционной симметрией задача об устойчивости тривиального состояния вообще не имела голдстоуновских мод, а задача устойчивости слабонелинейных пространственно-периодических решений имела единственную голдстоуновскую моду, связанную с трансляционной симметрией этих решений. Соответственно, при выводе эволюционного уравнения медленно эволюционирующими были только моды с волновыми числами $K \approx k_c$, порожденные коротковолновой неустойчивостью. Все же остальные моды были с ними связаны адиабатически. В результате эволюционное уравнение свелось к уравнению Свифта — Хоэнберга (16), а задача устойчивости пространственно-периодических решений — к критерию Экхауза (34). Рассмотрим, к каким изменениям приводят появление в задаче дополнительных голдстоуновских мод, связанных с ее дополнительной симметрией.

3.2. (Квази)одномерные пространственно-периодические решения и их устойчивость

Как уже говорилось во введении, одной из наиболее изученных задач о коротковолновой неустойчивости в системах с дополнительной симметрией является проблема Рэля — Бенара со свободными границами [4, 9–15]. Отмечавшаяся дополнительная симметрия (незатухающее вращение слоя как целого) приводит к появлению в спектре возмущений тривиального состояния голдстоуновской ветви, описывающей медленную релаксацию вихревых мод с вертикальной компонентой вектора завихренности:

$$\Omega \equiv [\nabla \times \mathbf{v}] = (0, 0, \Omega_z), \quad (42)$$

где \mathbf{v} — трехмерный вектор скорости. С учетом этого обстоятельства авторы работ [9–15] выводили систему эволюционных уравнений для двух связанных квадратичной нелинейностью медленно эволюционирующих полей: поля $u(x, y, t)$, где u , как и раньше, обозначает значение v_z в серединной плоскости, и поля Ω_z . Отправной точкой являлась система уравнений Навье — Стокса в так называемом приближении Обербека — Буссинеска (Oberbeck — Boussinesq), приводящем к симметрии задачи по отношению к замене знака u . Известно (см., например, [4]), что единственным слабонелинейным стационарным пространственно-периодическим решением задачи в этом приближении являются квазидномерные конвективные волны (rolls), когда u зависит только от одной пространственной переменной и имеет вид⁶

$$u = R(k) \cos(kx + \varphi_0) + O(\varepsilon) \quad (43)$$

(см. (17), (22), (24)).

Такое решение, соответствующее нулевой завихренности ($\Omega_z = 0$), и было получено в [9–15]. Ключевым моментом, однако, является анализ устойчивости этого решения. Результаты этого анализа, изложенные в [14], не имеют ничего общего с критерием Экхауза и сводятся к следующему:

1. Аномальное сужение баллона Буссе до ширины порядка ε либо (в зависимости от величины числа

⁵ Оператор $(\hat{\partial} \hat{T}_a / \partial a)|_{a=0}$, производящий эту голдстоуновскую моду из решения $u(\mathbf{r})$, называется инфинитезимальным генератором соответствующей группы симметрии.

⁶ Более сложные двумерные решения $u(x, y)$, описывающие ячеистые структуры, в этом случае не удовлетворяют эволюционным уравнениям.

Прандтля) его полное исчезновение, т.е. неустойчивость всех стационарных пространственно-периодических решений.

2. При наличии конечного баллона Буссе — колебательная релаксация возмущений устойчивых решений внутри баллона, колебательный рост неустойчивых возмущений вне одной из границ баллона Буссе и монотонный их рост вне другой границы.

Однако наиболее удивительным результатом работы [14] явилось существенное отличие критериев устойчивости и определенных типов наиболее "опасных" (т.е. первыми приводящих к неустойчивости) возмущений от аналогичных критериев и возмущений, полученных при исследовании *той же задачи* авторами [12, 13]. Следует подчеркнуть, что в [12, 13] и [14] применялись *разные*, хотя, казалось бы, эквивалентные *версии теории возмущений*, и что указанное отличие не было связано с тривиальной вычислительной ошибкой.

Этот парадокс был разрешен Берноффом [54], который показал, что задача устойчивости в рассматриваемом случае обладает следующей особенностью: малые (по $\sqrt{\varepsilon}$) поправки к эволюционным уравнениям, которые в традиционном подходе всегда отбрасываются (см. раздел 2), в данной задаче могут в процессе вычислений перенормироваться и вносить в критерий устойчивости вклад того же порядка по $\sqrt{\varepsilon}$, что и основное приближение. Иными словами, задача становится чрезвычайно чувствительной к обрыванию ряда теории возмущений. Ограничение только первыми нетривиальными членами этого ряда, как это было сделано в [12, 13] по аналогии с традиционным подходом, дает неправильные условия устойчивости. Учет же высших порядков теории возмущений приводит подходы работ [12, 13] и [14] в полное согласие с [54].

Вопрос, естественным образом вытекающий из этого результата работы [54], состоит в том, какова должна быть минимально необходимая точность ряда теории возмущений и какая конкретная реализация этой теории оказывается наиболее удобной для проведения анализа устойчивости решений конкретной задачи.

Чтобы разобраться в этом вопросе, а также убедиться в том, что перечисленные выше особенности задачи устойчивости не являются некоторым исключительным свойством одной частной проблемы, но должны рассматриваться как общие свойства задач с дополнительной симметрией, рассмотрим, следуя работам [55–57], одну из простейших реализаций такой проблемы, связанной с уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] v + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (44)$$

Уравнение (44) было предложено Николаевским [58, 59] для описания сейсмических волн, распространяющихся в высокоэластичной среде. Уравнение записано в безразмерных переменных и v имеет смысл скорости смещения. Отмету, что фигурирующая в (44) квадратичная нелинейность $v \partial v / \partial x$ происходит из-за перехода к "бегущей" переменной и поэтому типична для широкого класса задач о движении фронтов и фазовых границ [4]. Как обычно, проблема формулируется в бесконечном пространстве: $-\infty < x < \infty$.

Анализ устойчивости тривиального решения $v \equiv 0$ по отношению к пространственно-периодическим возмуще-

ниям вида (2) приводит к дисперсионной зависимости

$$\gamma(k) = k^2 [\varepsilon - (k^2 - 1)^2], \quad (45)$$

отличающейся от (14) наличием голдстоуновской моды: $\gamma(k) = 0$ при $k = 0$. Покажем, что возникновение этой моды не является следствием случайного вырождения, а связано с дополнительной симметрией задачи. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varepsilon - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (46)$$

Легко видеть, что дифференцирование по x и преобразование $2\partial u / \partial x \equiv v$ сводит (46) к (44), так что с точки зрения образования пространственно-периодических структур эти уравнения эквивалентны. Однако в отличие от (44) уравнение (46) в явном виде демонстрирует дополнительную симметрию по отношению к преобразованию

$$u \rightarrow u + \text{const}. \quad (47)$$

Несмотря на кажущуюся близость задачи (44) к уравнению Свифта–Хохенберга, свойства решений этих уравнений существенно отличаются друг от друга, что было понято достаточно рано [60, 61]. Наиболее полный анализ уравнения (44) и различных его обобщений содержится в работе [61]. Однако этот анализ, основанный на сведении задачи (44) к системе уравнений типа Гинзбурга–Ландау для медленно меняющихся огибающих, ограничивается учетом только *главного* приближения к этим уравнениям, т.е. содержит ту же ошибку, что и допущенная авторами [12, 13] при обсуждении конвекции со свободными границами. По этой причине, несмотря на правильное описание некоторых качественных особенностей задачи, в целом такое рассмотрение неадекватно. В частности, полученный в [61] вывод о существовании конечного баллона Буссе для пространственно-периодических решений уравнения (44) является неверным и все такие решения оказываются неустойчивыми [56].

Чтобы в этом убедиться, прежде всего получим указанные пространственно-периодические решения в явном виде. При этом из-за отмечавшейся явной дополнительной симметрии уравнения (46) оно становится более удобным для анализа, чем исходное уравнение (44). Представляя $u(x, t)$ в виде ряда Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{nk}(t) \exp(inkx), \quad U_{nk}^* = U_{-nk}, \quad (48)$$

и подставляя (48) в (46), получаем следующую цепочку уравнений для амплитуд U_{nk} :

$$\frac{dU_{nk}}{dt} = \gamma(nk) U_{nk} + k^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} l(n-l) U_{lk} U_{(n-l)k}. \quad (49)$$

Из условия $\gamma(nk) = 0$ при $n = 0$ и конкретного вида нелинейности в (46) — квадрат градиента u — следует, что амплитуда $U_0(t)$ не входит в правую часть уравнения (49) и всегда может быть полностью исключена из задачи преобразованием $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - U_0(t)$, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Рассмотрим случай малого положительного значения ε и определим границы нейтральной устойчивости $k_{1,2}$ ($0 < k_1 \leq k_2$) согласно стандартному условию $\gamma(k_{1,2}) = 0$. Далее, обрывая ряд (48) на конечном числе членов: $|n| < N$, где N — любое целое число ≥ 2 , легко убедиться, что для любого k из интервала $k_1 \leq k \leq k_2$ ($|k_{1,2} - 1| \sim \sqrt{\varepsilon}$, см. (45)) существует стационарное решение задачи вида

$$U_{nk} = \sum_{m=0}^N U_{nk}^{(m)}, \quad U_{nk}^{(m)} = O(\varepsilon^{(n+2m)/2}). \quad (50)$$

Так, например, при $N = 3$ имеем

$$|U_k|^2 = -\frac{\gamma(k)\gamma(2k)}{4k^4} [1 + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2)], \quad (51)$$

$$U_{\pm 2k} = -\frac{k^2 U_{\pm k}^2}{\gamma(2k)} [1 + O(\varepsilon)], \quad (52)$$

$$U_{\pm 3k} = O(\varepsilon^{3/2}) \quad (53)$$

(напоминаю, что при $|k - 1| \sim \sqrt{\varepsilon}$ $\gamma(k) \sim \varepsilon$, а $\gamma(2k) \sim 1$, см. (45)).

Таким образом, в главном порядке по $\sqrt{\varepsilon}$ амплитуда стационарного решения рассматриваемой задачи оказывается $\sim \sqrt{\varepsilon}$ (см. (51)), т.е. того же порядка, что и для уравнения Свифта–Хохенберга (см. (17), (22), (24)). Иными словами, наличие дополнительной симметрии уравнения (46) не сказывается на порядке величины амплитуды его стационарного решения. Причины этого вполне понятны. В уравнения для стационарных амплитуд могут входить только амплитуды, резонансно связанные с U_k . Из всего спектра длинноволновых мод, обусловленных наличием дополнительной симметрии, этому условию удовлетворяет только собственно голдстоунская мода с $K = 0$, которая не зависит от x . Такая не зависящая от x мода сама по себе не может играть никакой роли в процессе образования пространственно-периодических структур и всегда может быть исключена из задачи либо указанным выше преобразованием параметра порядка u , либо его дифференцированием по x .

Иное дело — задача устойчивости. Здесь с модой $U_k \exp(i k x)$ может оказаться связанной любое из пространственно-периодических возмущений, в том числе и принадлежащее длинноволновой голдстоунской ветви спектра с малым, но отличным от нуля волновым вектором. Взаимодействие такого возмущения со стационарным решением приводит к длинноволновой пространственной модуляции последнего, которая уже не может быть устранена тривиальными преобразованиями параметра порядка. Другими словами, не сказываясь на структуре стационарных пространственно-периодических решений, дополнительная симметрия должна приводить к различным различиям в задаче об устойчивости этих решений, к обсуждению которой мы и переходим.

3.3. Дисперсионное уравнение в условиях смешения ε -масштабов и симметрия

Попытаемся понять, откуда в задаче возникает отмечавшееся выше смешение масштабов в разложении операторов эволюционных уравнений и их решений по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (ε -scale-mixing [55, 56]) и что в таких случаях определяет минимально необходимую точность вычи-

слений. Формальный ответ на второй из этих вопросов тривиален: точность промежуточных вычислений следует шаг за шагом повышать до тех пор, пока критерий устойчивости стационарных решений не перестанет меняться в главном порядке по $\sqrt{\varepsilon}$. Практически, однако, дело обстоит не так просто. Вычисление каждой следующей поправки по $\sqrt{\varepsilon}$ требует все больше и больше усилий из-за резкого возрастания с ростом n числа членов, имеющих порядок $(\sqrt{\varepsilon})^n$. С другой стороны, только несколько из этих малых поправок перемасштабируются в процессе вычислений и приводят к ненулевому вкладу в главный порядок критерия устойчивости, в то время как все остальные могут быть отброшены без серьезного ущерба для задачи [56]. Поэтому большую важность приобретает возможность оценки порядка величины вклада, вносимого каждой поправкой в теорию устойчивости, без вычисления этого вклада в явном виде. Задача эта была решена в работе [56] за счет надлежащего выбора конкретной формы теории возмущений по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Ввиду специальности этого вопроса его детальное обсуждение выходит за рамки настоящего обзора. По этой причине здесь отмечаются только основные моменты указанного анализа. Более подробную информацию читатель может найти в работе [56].

Возмущение стационарного решения уравнения (46) представляется в виде

$$\delta u = \exp(\sigma t) \sum_n V_{nk+q} \exp[i(nk + q)x], \quad (54)$$

где $k_1 \leq k \leq k_2$, а q — волновой вектор возмущения. При подстановке (54) в линеаризованное около (48), (50) уравнение (46) получается дисперсионное уравнение, которое сводится к равенству нулю некоторого детерминанта⁷. Легко понять, что диагональные элементы этого детерминанта имеют вид $\sigma - \gamma(nk + q)$.

Замечу теперь, что обсуждавшийся выше анализ устойчивости стационарных решений уравнения Свифта–Хохенберга показал, что для неустойчивых мод характерные значения σ оказываются порядка ε , а характерные значения $q \sim \sqrt{\varepsilon}$ (см. (17), (22), (30), (32), (36)). Можно предположить, что аналогичные соотношения справедливы и в рассматриваемом случае, по крайней мере как оценки сверху, что, разумеется, должно быть проверено по получении окончательного ответа, т.е. дисперсионной зависимости $\sigma(k, q)$.

При сделанных предположениях величина $\gamma(nk + q)$ оказывается порядка σ при $n = 0, \pm 1$ и порядка единицы, т.е. велика по сравнению с σ , во всех остальных случаях (напомню, что из условия $k_1 \leq k \leq k_2$ следует, что $k = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon \sim \sqrt{\varepsilon}$). По этой причине произведение элементов главной диагонали при любом достаточно большом, но конечном порядке детерминанта оказывается порядка ε^3 , что определяет как точность раскрытия детерминанта, так и порядок дисперсионного уравнения (σ^3) в главном по $\sqrt{\varepsilon}$ приближении.

Дело, однако, заключается в том, что минимальный (по $\sqrt{\varepsilon}$) порядок членов, возникающий при раскрытии детерминанта, оказывается не ε^3 , а $\varepsilon^{5/2}$ и связан с недиагональными элементами строк, соответствующей

⁷ Так же, как и при построении стационарного решения уравнений (49), суммирование в (54) следует оборвать на некотором достаточно большом числе членов $|n| \leq M$.

проекции эволюционного уравнения для собственного вектора задачи (54) на длинноволновую моду $\sim \exp(iqx)$, т.е. на моду, принадлежащую новой (по сравнению с задачей Свифта–Хохенберга) гольстоуновской ветви спектра. Поэтому для получения дисперсионного уравнения с необходимой точностью $\sim \varepsilon^3$ к главному приближению для элементов детерминанта следует делать поправки, имеющие относительную малость $\sim \sqrt{\varepsilon}$. Это обстоятельство и является фактической причиной отмечавшегося смешения ε -масштабов в дисперсионном уравнении. Подчеркну, что из сказанного следует, что смешение ε -масштабов непосредственно вытекает из существования дополнительной гольстоуновской моды в спектре возмущений, т.е. из симметрии задачи.

Конкретные вычисления, связанные с учетом указанных поправок, не представляют принципиальных трудностей, но чрезвычайно громоздки. Они приводят к дисперсионному уравнению, коэффициенты которого зависят от весьма тонких деталей поведения функции $\gamma(k)$ в окрестностях максимума, соответствующего коротковолновой неустойчивости (таких, как $\gamma'|_{k=1} = O(\varepsilon)$ и $\gamma'''|_{k=1}$, где штрих означает дифференцирование по k , а также от значения производной $\gamma'|_{k=2}$). Таким образом, уже в главном приближении по $\sqrt{\varepsilon}$ спектр задачи устойчивости "чувствует" отклонение волнового числа, максимизирующего $\gamma(k)$, от $k_c = 1$, определяемое величиной $\gamma'|_{k=1}$, несимметрию этого максимума, описываемую производной $\gamma'''|_{k=1}$, и наклон дисперсионной кривой далеко в области линейной устойчивости ($\gamma'|_{k=2}$). Все это делает задачу существенно нелокальной.

В случае обобщения проблемы при ее представлении в интегральной форме (8) помимо отмечавшихся тонких характеристик дисперсионной зависимости $\gamma(k)$, определяющей линейную эволюцию амплитуд U_k , задача устойчивости начинает зависеть также от тонких деталей *нелинейного взаимодействия* мод, происходящих из-за разложения вершин по степеням отклонения $k - k_c$ [56]. Разумеется, квадратичная нелинейность теперь не сводится больше к кубической, так как длинноволновые моды теперь не следуют адиабатически за модами с $k \simeq k_c$, но являются независимыми степенями свободы.

Как уже отмечалось, дисперсионное уравнение, описывающее зависимость $\sigma(k, q)$, в общем случае имеет весьма громоздкий вид (см. [56]) и здесь приводиться не будет. Замечательно, однако, что *структура* этого уравнения достаточно универсальна и может быть получена без всяких вычислений, так как она вытекает из симметрии задачи [55].

Действительно, нам уже известно, что в главном по $\sqrt{\varepsilon}$ приближении зависимость $\sigma(k, q)$ определяется кубическим уравнением, т.е. искомое дисперсионное уравнение имеет вид

$$\sigma^3 + a_2(k, q)\sigma^2 + a_1(k, q)\sigma + a_0 = 0, \quad (55)$$

что, фактически, связано с наличием в спектре возмущений (54) трех пространственных гармоник с волновыми числами $-k + q$, q и $k + q$, для которых значение γ мало. Замечу, что для уравнения Свифта–Хохенберга таких гармоник две ($-k + q$ и $k + q$), поэтому дисперсионное уравнение задачи устойчивости в главном приближении квадратично по σ (см. обсуждение выражений (25)–(29)).

Далее, в соответствии с (51), (52) обе амплитуды U_k и U_{2k} можно без нарушения общности считать действи-

тельными величинами, что в x -представлении соответствует четной функции $u(x)$: $u(x) = u(-x)$. Наконец, линеаризация уравнения (49) относительно решения (51), (52) при действительных U_k , U_{2k} приводит к уравнению для амплитуд V_{nk+q} с действительными коэффициентами, откуда следует действительность коэффициентов $a_{0,1,2}(k, q)$ в уравнении (55). Учитывая, кроме того, четность $u(x)$ и симметрию исходной нелинейной задачи, определяющей эволюцию $u(x, t)$ по отношению к пространственным отражениям, получаем, что задача для эволюции bi также должна быть инвариантна к замене $x \rightarrow -x$. Как уже отмечалось, такая симметрия в x -представлении соответствует для фурье-трансформант симметрии задачи по отношению к замене $q \rightarrow -q$, что означает *четность* коэффициентов $a_{0,1,2}(k, q)$ по q .

Замечу теперь, что эти коэффициенты зависят от q из-за дифференцирования выражения (54) по x (что дает только *целые степени* q) и раскрытия соответствующего детерминанта. В результате заключаем, что $a_{0,1,2}$ должны быть рациональными функциями q^2 , разложимыми при $q = 0$ в ряд Тейлора (последнее в силу того, что *все* коэффициенты $a_{0,1,2}$ должны оставаться конечными при $q = 0$).

Единственное, что еще осталось учесть, это наличие в задаче устойчивости двух гольстоуновских мод, соответствующих двум непрерывным группам симметрии: пространственных трансляций ($x \rightarrow x + \text{const}$) и трансляций параметра порядка ($u \rightarrow u + \text{const}$), в соответствии с чем уравнение (55) должно иметь *двойной корень* $\sigma_{1,2} = 0$ при $q = 0$.

Из всего сказанного следует, что в пределе длинноволновых возмущений ($q \rightarrow 0$) уравнение (55) должно иметь вид

$$\sigma^3 + b_2(k)\sigma^2 + b_1(k)q^2\sigma + b_0(k)q^2 = 0. \quad (56)$$

Строя решение этого уравнения в виде ряда по степеням q , легко получить, что две гольстоуновские ветви спектра возмущений описываются соотношением

$$\sigma_{1,2} = \pm q \sqrt{-\frac{b_0}{b_2} + \frac{q^2}{2b_2} \left(\frac{b_0}{b_2} - b_1 \right)} + O(q^3). \quad (57)$$

Из выражения (57) немедленно следует вывод, что устойчивость задачи существенно зависит от знака отношения $b_0(k)/b_2(k)$. Если это отношение отрицательно, то знак плюс перед радикалом в (57) соответствует неустойчивой ветви спектра. При этом значение σ для такой ветви *чисто действительно* (монотонное развитие неустойчивости).

Если же $b_0(k)/b_2(k) > 0$, то первый член в правой части (57) чисто мнимый и устойчивость решения определяется *поправкой* к этому члену. Условия устойчивости в этом случае сводятся к следующим очевидным неравенствам:

$$\frac{b_0(k)}{b_2(k)} > 0, \quad (58)$$

$$\frac{1}{2b_2(k)} \left[\frac{b_0(k)}{b_2(k)} - b_1(k) \right] < 0, \quad (59)$$

которые должны выполняться одновременно. Ясно, что эти два условия определяют две границы баллона Буссе. При этом из (57)–(59) следует, что внутри баллона

релаксация возмущений колебательная, при нарушении условия (58) неустойчивые возмущения растут монотонно во времени, а при нарушении условия (59) — колебательно (ср. со свойствами спектра возмущений в конвекции со свободными границами, обсуждавшимися в начале раздела 3.2).

Разумеется, ничто не мешает условиям (58) и (59) оказаться несовместимыми. В таких случаях баллон Буссе отсутствует и все стационарные, пространственно-периодические решения задачи неустойчивы. Конкретные расчеты коэффициентов $b_{0,1,2}$, выполненные в [56] для решений (51)–(53) уравнения (16), показывают, что эти решения устойчивы к длинноволновым возмущениям в узком интервале

$$\frac{91}{144} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{11}{12}, \quad (60)$$

где ε — введенное выше отклонение волнового числа решения (51)–(53) от единицы: $\varepsilon = k - 1$. Отмету резкое сужение зоны устойчивости по сравнению с критерием Экхаза (см. (37)).

Однако устойчивость к длинноволновым возмущениям еще не означает устойчивости к произвольным возмущениям. Вообще говоря, спектр неустойчивых возмущений может быть отделен от голдстоуновских мод конечной щелью. Полное исследование задачи устойчивости, не связанное с ограничениями, налагаемыми условием $q \rightarrow 0$, показывает, что в рассматриваемом случае дело обстоит именно так: в области, определяемой неравенством (60), неустойчивость сохраняется, но она оказывается связанный с возмущениями, имеющими конечные значения q [56]. Следует подчеркнуть, что такое свойство спектра возмущений является еще одним качественным отличием задачи с дополнительной симметрией от уравнения Свифта–Хохенберга, где неустойчивость всегда связана с голдстоуновской ветвью спектра (см. (32)).

Использовавшиеся выше оценки $\sigma \sim \varepsilon$ и $q \sim \sqrt{\varepsilon}$ оказываются справедливыми, только при $\varepsilon \sim \varepsilon$. С другой стороны, формально решения (50) существуют при любом k из интервала $k_1 \leq k \leq k_2$, которому соответствует $\varepsilon \sim \sqrt{\varepsilon}$. Для таких значений ε зависимость σ от ε оказывается более сложной и, вообще говоря, не сводится к пропорциональности σ определенной фиксированной степени ε [56]. С точки зрения задачи устойчивости значения $\varepsilon \sim \sqrt{\varepsilon}$ не представляют большого интереса, так как все такие решения неустойчивы уже к длинноволновым возмущениям (см. (60)). Однако отмеченная сложная зависимость σ от ε указывает на то, что в отличие от уравнения Свифта–Хохенберга, сводящегося к уравнению Гинзбурга–Ландау в форме (23), теперь задача не может быть переформулирована таким образом, чтобы ε можно было исключить простым масштабным преобразованием переменных [57, 61]. В свою очередь, это дает основания ожидать возникновения в задаче при сколь угодно малых положительных ε сложной пространственно-временной эволюции решения, связанной с проявлением различных характерных масштабов [55, 57]. Прежде чем переходить к обсуждению этого важного вопроса, подведем некоторые итоги.

Итак, хотя наличие *одной* дополнительной непрерывной однопараметрической группы симметрии и допускает существование в задаче устойчивых стационарных пространственно-периодических решений, в частном

случае уравнения (46) все такие решения оказываются неустойчивыми. Обсудим, как меняется общая ситуация, когда помимо трансляционной симметрии задача имеет *две* дополнительные однопараметрические группы симметрии, так что общее число голдстоуновских мод в задаче устойчивости пространственно-периодической структуры равно *трем*. В этом случае, исходя из тех же аргументов, что и ранее, замечаем, что при $q = 0$ дисперсионное уравнение имеет *тройной* нуль $\sigma_{1,2,3} = 0$, соответствующий трем голдстоуновским ветвям спектра. Тогда в длинноволновом пределе это уравнение имеет вид

$$q^2 c_0(k) + q^2 c_1(k)\sigma + q^2 c_2(k)\sigma^2 + \dots = 0, \quad (61)$$

где многоточие обозначает более высокие степени σ . При малых σ уравнение (61) имеет решение

$$\sigma_{1,2,3} = (-q^2 c_0)^{1/3} \exp\left(\frac{i 2\pi m}{3}\right), \quad m = 0, 1, 2. \quad (62)$$

Легко видеть, что при любом знаке $c_0(k)$ действительная часть по крайней мере одного из корней (62) положительна, что означает неустойчивость всех стационарных пространственно-периодических решений в задаче с такой симметрией.

Следует, однако, подчеркнуть, что при всей кажущейся простоте приведенных аргументов они имеют строго очерченную область применимости, выход за пределы которой чреват серьезными ошибками. В качестве примера такого неправильного обобщения рассмотрим задачу устойчивости *двумерной* структуры, состоящей из квадратных ячеек, при наличии только традиционной (но двумерной, т.е. двухпараметрической) группы симметрии по отношению к пространственным трансляциям. Казалось бы, что поскольку два независимых преобразования этой группы, т.е. трансляции вдоль направления x и вдоль направления y генерируют две независимые голдстоуновские моды, то задача сводится к обсуждавшейся выше и критерий устойчивости к длинноволновым возмущениям должен определяться неравенствами (58), (59).

В действительности же, поскольку обращение в нуль свободного члена в дисперсионном уравнении, приводящее к появлению голдстоуновских мод, происходит как при $q_x \rightarrow 0, q_y \neq 0$, так и при $q_y \rightarrow 0, q_x \neq 0$, где $q_{x,y}$ — соответствующие проекции волнового вектора возмущения, то структура дисперсионного уравнения оказывается совсем иной, чем определяемая выражением (56). В длинноволновом пределе уравнение, описывающее голдстоуновские ветви спектра, имеет вид⁸

$$q_x^2 q_y^2 g_0 + [q_x^2 g_{1x} + q_y^2 g_{1y}] \sigma + g_2 \sigma^2 + \dots = 0, \quad (63)$$

где коэффициенты $g_{0,1x,1y,2}$ не зависят от волнового вектора возмущения. Разумеется, свойства дисперсионного соотношения, определяемого уравнением (63), оказываются существенно отличными от обсуждавшихся выше свойств $\sigma(k, q)$, следующих из уравнения (55).

⁸ Детальное обсуждение проблемы устойчивости ячеистых структур в диссипативных системах можно найти, например, в работах [49, 62, 63], а для гамильтоновских систем, например, в работе [64].

4. Мягкие турбулентные моды и "непрерывный" переход к хаосу

Естественный вопрос, который вытекает из неустойчивости *всех* стационарных пространственно-периодических решений уравнения (46), — это вопрос: "А что же будет?" Иными словами, каково то асимптотическое состояние, в которое при $t \rightarrow \infty$ переходит неустойчивое тривиальное решение $u \equiv 0$? Поскольку аналитическое исследование такой задачи едва ли возможно, для ответа на этот вопрос опять-таки естественно применить численные методы. Замечу, однако, что задача (46), как и большинство задач с дополнительной симметрией, весьма трудна для численного интегрирования. Помимо тривиальных причин, таких как аппроксимация производных высокого порядка конечными разностями, трудности обусловлены также и причинами, неразрывно связанными с внутренними свойствами этих задач, т.е. с их симметрией. В первую очередь к этим "внутренним" причинам относятся следующие две. Во-первых, из-за отмечавшегося смешения масштабов и невозможности переформулировать проблему, устранив из нее малое число ε , в задаче имеются характерные малые масштабы порядка единицы, которые не зависят от ε , и характерные большие масштабы, которые расходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для правильного описания такой задачи на малых масштабах интегрирование следует проводить с малыми пространственно-временными шагами. Для описания же асимптотического состояния системы интегрирование должно покрывать временные интервалы, значительно превосходящие $1/\varepsilon$, что предъявляет жесткие требования к устойчивости разностной схемы и приводит к чрезвычайно большим затратам машинного времени — тем большим, чем меньше ε .

Вторая причина связана с исключительно важной ролью, которую играют в задаче длинноволновые моды, что уже много раз отмечалось в предыдущих разделах обзора. Поскольку, однако, при любом численном моделировании задача на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ заменяется задачей на конечном отрезке $0 \leq x \leq L$ (обычно с периодическими граничными условиями на концах отрезка), это приводит к обрезанию спектра на волновых числах порядка $2\pi/L$ (для периодических граничных условий $2\pi/L$ является *точной* границей спектра снизу). Существенно, что величину $2\pi/L$ следует сравнивать не с единицей и даже не с $1/\sqrt{\varepsilon}$, как было для уравнения Свифта–Хохенберга (см. (22)), а с $1/\varepsilon$ (см. (60)). Поэтому при малых ε значение L должно быть весьма велико, что также сильно увеличивает затраты машинного времени.

Одно из первых численных исследований развития коротковолновой неустойчивости в задачах типа уравнений (44), (46) проводилось в работе [65]. В этой работе, однако, рассматривалось не само уравнение (44), а его обобщение, в котором линейный дифференциальный оператор дополнен третьей производной по x . Такое отличие весьма существенно, так как оно не только делает дисперсионную зависимость $\gamma(k)$ комплексной, но и нарушает симметрию задачи по отношению к пространственному отражению ($x \rightarrow -x$). В [65] рассмотрена эволюция малого начального возмущения в форме белого шума. Эволюция приводит к образованию пространственно-периодической структуры, которую авторы интерпретируют как стационарную. Результаты

эти допускают, однако, и другую интерпретацию. Зависимости $v(x)$, приведенные в [65] как примеры стационарных состояний, имеют четко выраженную длинноволновую модуляцию, которую можно рассматривать как начало развития длинноволновой неустойчивости. К сожалению, отмечая трудности проведения численных расчетов, авторы [65] указывают, что им не удалось продвинуться по времени дальше, чем на величину порядка нескольких ε^{-1} , что по указанным выше причинам не может считаться достаточным. Величина L в этом моделировании, насколько можно судить по приведенным данным, соответствовала условию $k_c L/(2\pi) \sim 10$, что также нельзя считать вполне удовлетворительным.

Более определенные результаты относятся к численному исследованию уравнения (46), изложенному в работах [55–57]. Исследования проводились на суперкомпьютере CRAY C-90 с применением разностной схемы, специально построенной для интегрирования уравнения (46) при экстремально малых значениях ε [66], что позволило продвинуться по времени до значений $t \sim 10^3/\varepsilon$. Разностная схема тщательно тестировалась путем сравнения результатов со всеми доступными аналитическими выражениями, полученными в [56] методами теории возмущений.

Эти расчеты показали следующее. При сколь угодно малых положительных значениях ε (расчеты проводились до $\varepsilon = 10^{-4}$) и достаточно больших значениях L (типичные значения $k_c L/(2\pi)$ при $\varepsilon = 10^{-4}$ составляли величину порядка 10^3) эволюция малых начальных возмущений всегда приводила к установлению хаотического режима с весьма необычными свойствами. Режим характеризуется возбуждением большого числа (при $L \rightarrow \infty$, по-видимому, континуума) мод, сосредоточенных в малых окрестностях волно-

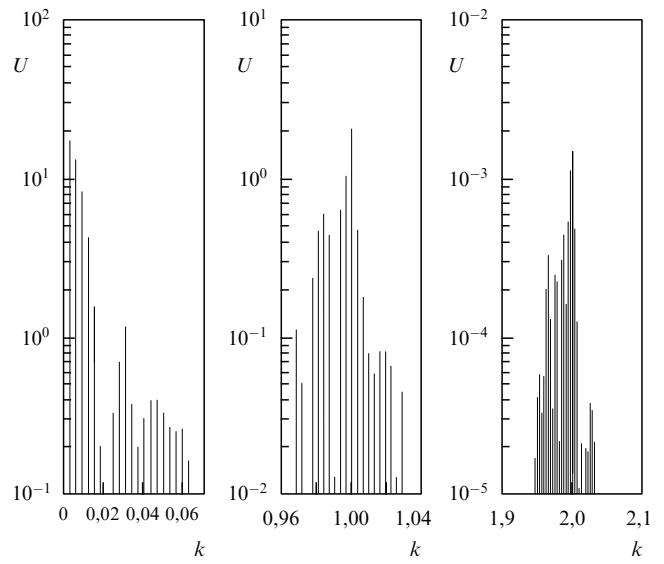


Рис. 3. Типичная зависимость амплитуды пространственных гармоник решения уравнения (46) от их волнового числа в некоторый фиксированный момент времени по достижении асимптотического состояния [55]. Численное интегрирование с периодическими граничными условиями, $\varepsilon = 10^{-4}$. Расстояние между двумя соседними модами Δk , обусловленное дискретизацией спектра за счет конечности L , составляет $3,125 \times 10^{-3}$. Каждый из трех участков спектра изображен в своем масштабе.

вого числа, равного нулю (голдстоуновская ветвь) и единице (ветвь, связанная с коротковолновой неустойчивостью), а также пространственных сателлитов этих мод (рис. 3). При этом амплитуда, оставаясь величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$, хаотически меняется во времени (рис. 4, 5). Указанная динамика обладает всеми признаками развитого хаоса — экспоненциальным разбеганием близких траекторий в фазовом пространстве и экспоненциальным затуханием автокорреляционных функций [57]. Обращает на себя внимание тот факт, что характерные значения амплитуд длинноволновых мод (которые в линейной задаче соответствуют медленно меняющейся, но устойчивой ветви спектра: $\gamma(k) < 0$ в окрестности $k = 0$) оказываются больше, чем такие значения для мод, сосредоточенных в окрестности $k = 1$, которые непосредственно связаны с коротковолновой неустойчивостью ($\gamma(k) > 0$ при $k = 1$, см. рис. 3).

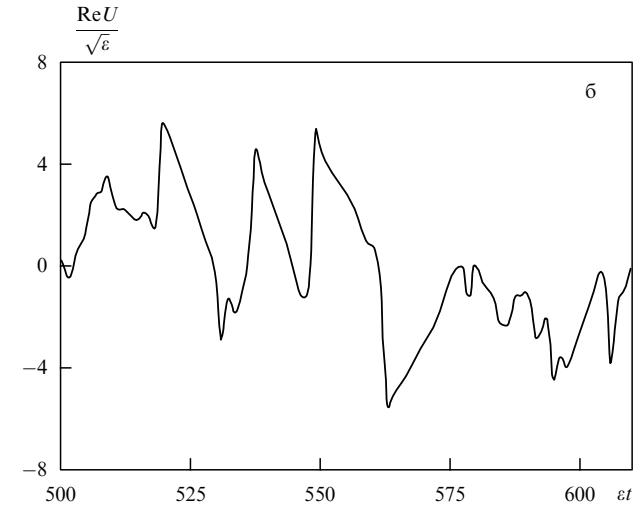
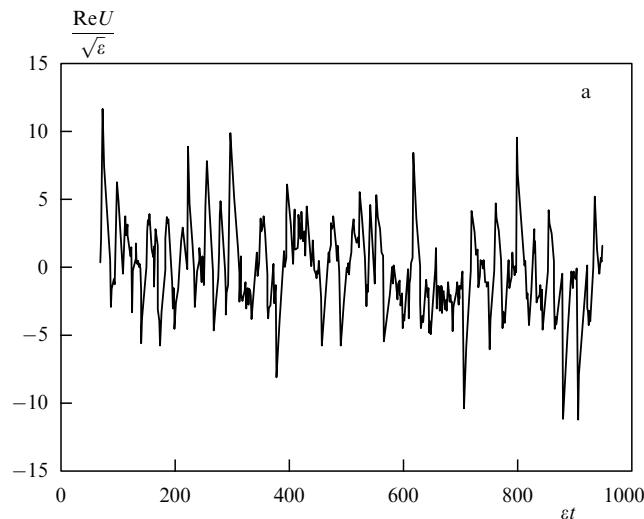


Рис. 4. Временная эволюция реальной части амплитуды моды с $k = 3,125 \times 10^{-3}$, соответствующая рис. 3 (а), и малый фрагмент этой кривой, указывающий на существование "тонкой структуры" (б) [57].

Замечательной особенностью задачи является то, что хаотическая эволюция каждой из мод имеет определенную "тонкую структуру" (рис. 4б, 5б), обладающую некоторым характерным временем $\tau(k)$, которое факти-

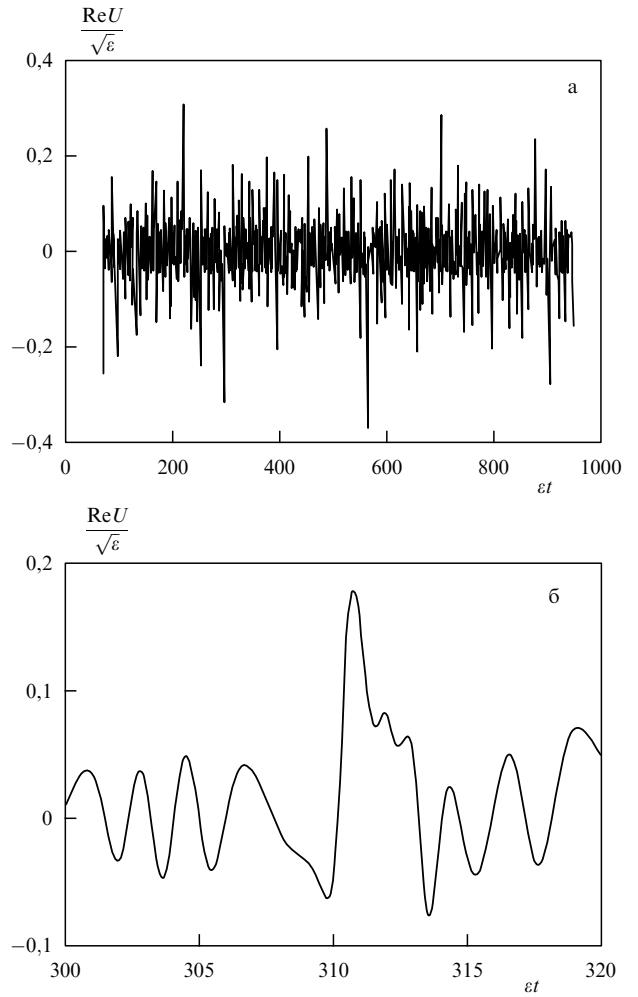


Рис. 5. То же, что на рис. 4, для моды с $k = 1$ [57].

чески определяет время затухания автокорреляционной функции (корреляционное время). При фиксированном значении ε величина $\tau(k)$ возрастает с уменьшением k (ср. рис. 4б и 5б). Существенно, однако, что все эти характерные времена оказываются величинами не порядка единицы, как можно было бы ожидать, а порядка $1/\varepsilon$, т.е. расходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Все сказанное свидетельствует о том, что при $\varepsilon = 0$ в системе происходит бифуркация, при которой "состояние покоя" ($u \equiv 0$) непосредственно переходит в хаотическую динамику. При этом соответствующие турбулентные⁹ моды являются *мягкими*, т.е. переход "состояние покоя – хаос" является *непрерывным*. Разумеется, слово "непрерывный" употребляется здесь не в том смысле, что асимптотическое поведение системы каким-то таинственным образом *постепенно* (?) становится хаотическим. Это бессмыслица. Хаос либо есть, либо его нет. Он наступает скачком при $\varepsilon = 0$. Но *количественные характеристики* этого хаоса, такие, как характерная величина амплитуд турбулентных мод, характерное корреляционное время (так же как и характерное время установления асимптотического режима) непрерывным образом смы-

⁹ В настоящем обзоре термин "турбулентность" используется в широком смысле для обозначения *любого* пространственно-временного хаоса.

каются с состоянием покоя через обращение в нуль амплитуд и расходимость характерных времен (*критическое замедление*) при $\varepsilon = 0$. В этом контексте слово "непрерывный" имеет тот же смысл, который в него вкладывал Ландау, называя непрерывными фазовые переходы второго рода [30].

Дополнительным аргументом, подтверждающим мягкость турбулентных мод в рассматриваемой задаче, является отмечавшееся в [57] отсутствие гистерезиса при "адиабатическом" сканировании ε от малых положительных к малым отрицательным значениям и в обратном направлении.

Расчеты также показали, что задача действительно оказывается крайне чувствительной к обрезанию длинноволновой части спектра за счет конечности L . Если значение L недостаточно велико, то вместо хаоса асимптотическое состояние соответствует сильно нелинейным, но периодическим колебаниям амплитуды каждой из мод. Так, при $\varepsilon = 10^{-4}$ эти колебания наблюдались уже при $k_c L / (2\pi) = 50$. Указанное обстоятельство дало основания предположить, что фазовое пространство задачи содержит предельные циклы (предельный цикл) устойчивые по одним направлениям и неустойчивые по другим. При достаточно больших значениях L хаотическая динамика соответствует случайному блужданию фазовой траектории, заключающемуся в ее притяжении по устойчивым направлениям с последующим уходом по неустойчивым. Редуцирование же фазового пространства при уменьшении L стабилизирует предельные циклы (цикл), что и приводит к отмеченной периодической динамике [57].

5. Эксперимент. Турбулентность с пороговым значением числа Рейнольдса, равным нулю

Симметрия, голдстоуновские моды, численное моделирование. Все это очень хорошо, но какое все это имеет отношение к реальной физике? Мало ли какие уравнения можно придумать. Что из всего этого можно увидеть в эксперименте?

Вот круг вопросов, который неизбежно должен возникнуть у всякого, кто прочитал обзор до этого места. Так что же действительно говорит эксперимент?

Одна из первых экспериментальных реализаций системы с коротковолновой неустойчивостью и дополнительной симметрией связана с конвекцией Рэлея–Бенара в слое со свободными границами и была осуществлена в уже упоминавшейся работе [16]. Свободные граничные условия достигались благодаря оригинальной конструкции контейнера: слой силиконового масла, конвективное движение которого изучалось, отделялся от твердых границ контейнера снизу слоем жидкости ртути, а сверху слоем гелия (в газовой фазе) (рис. 6). Благодаря громадному отличию коэффициентов кинематической вязкости гелия и ртути от коэффициентов кинематической вязкости силиконового масла (соответствующие отношения равны $2,1 \times 10^{-6}$ и $1,6 \times 10^{-4}$) такая система с высокой точностью моделирует для слоя масла свободные граничные. Действительно, критическое значение числа Рэлея, соответствующее порогу возникновения конвективного движения, которое измерено в этой работе, хорошо согласуется с теоретическим значением, полученным для конвекции со свободными границами самим лордом Рэлеем [9, 10].

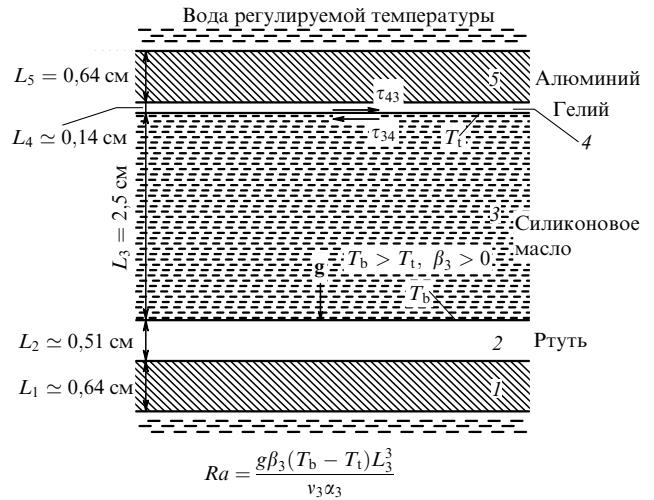


Рис. 6. Схема экспериментальной установки по изучению тепловой конвекции со свободными границами [16].

К сожалению, работа [16] была выполнена задолго до того, как Сиггия и Зиппелиус обратили внимание на роль вертикальной завихренности в дестабилизации стационарных структур в конвекции со свободными границами [11]. И хотя авторы [16] и сообщают о том, что все измерения проводились после установления в системе определенного асимптотического режима конвекции, никаких деталей, касающихся вида этого режима, не приводится.

Целенаправленное экспериментальное изучение влияния дополнительной симметрии на структурообразование в задачах с коротковолновой неустойчивостью началось только в самое последнее время на примере электроконвекции в слое гомеотропно ориентированного нематика, к обсуждению которой я и перехожу.

Эксперименты были начаты почти одновременно двумя группами, которые я для краткости буду называть европейской [22, 23] и японской [24, 67, 68]. Постановка экспериментов в обеих группах была близка. Использовался стандартный нематик *p*-метокс-бензимидин-*p*'-*n*-бутиланилин (МВВА) с отрицательной диэлектрической анизотропией, так что переход Фредерикса предшествовал возникновению конвективного движения, и изучалась конвекция при малых значениях контрольного параметра ε , определенного согласно условию

$$\varepsilon = \frac{V^2 - V_c^2}{V_c^2},$$

где V_c — критическое значение приложенного напряжения, вызывающее (при данной частоте колебаний этого напряжения f) конвективную неустойчивость. Для снятия вырождения, связанного с переходом Фредерикса, использовалось магнитное поле, приложенное в плоскости слоя, что создавало в этой плоскости выделенное направление. Результаты, полученные этими группами, находятся в хорошем согласии друг с другом. Различие в ряде деталей, несущественных с точки зрения настоящего обзора, может быть объяснено разными значениями материальных констант нематика (величина которых изменяется за счет добавления в него определенных примесей) и других параметров экспериментов, проводи-

мых указанными группами. Однако результаты японской группы отличаются от результатов европейской тем, что помимо *наблюдения* соответствующих структур, содержат важную *количественную* информацию об их временных спектрах, что существенно для сравнения с теорией, обсуждавшейся в предыдущих разделах обзора. Поэтому я остановлюсь именно на результатах японской группы.

Основные детали эксперимента заключались в следующем. Толщина слоя МВВА составляла 50 мкм при латеральных размерах 1×1 см². Для обеспечения гомеотропной ориентации нематика поверхности стеклянных пластинок, ограничивающих слой, обрабатывались поверхностью-активным веществом *n*-*n'*-диметил-*n*-октадецил-3-аминопропил-триметоксил хлоридом (DMOAP). Проводимости нематика были $\sigma_{\parallel} = 3,30 \times 10^{-7}$ Ом м⁻¹ и $\sigma_{\perp} = 2,34 \times 10^{-7}$ Ом м⁻¹, что контролировалось добавлением 0,012 весовых процента тетра-*n*-бутил-аммония бромида (TBBA). Значения диэлектрических констант составляли $\epsilon_{\parallel} = 4,21$, $\epsilon_{\perp} = 4,70$. Образец термостатировался при $30 \pm 0,02$ °C. Частота прикладываемого напряжения составляла 500 Гц, чему соответствовало $V_c = 8,34$ В. Порог перехода Фредерикса V_F был равен 3,92 В. При возникновении конвективного движения пространственные модуляции директора (единичного вектора **n**, указывающего направление преимущественной ориентации молекул) приводят к соответствующим модуляциям показателя преломления, что визуализирует конвективную структуру. Все изображения таких структур записывались на магнитную ленту и магнитные диски и позже анализировались на компьютере.

Эксперимент проводился следующим образом. Сначала для инициирования перехода Фредерикса в неподвижном нематике напряжение скачком поднималось до 6,00 В, что выше V_F , но ниже V_c . В этом состоянии образец выдерживался 5 мин, чтобы угол наклона директора по отношению к вертикальной оси, связанный с переходом Фредерикса, успевал релаксировать к своему равновесному значению. Затем опять скачком напряжение поднималось до некоторого фиксированного значения выше порога конвективной неустойчивости, и по прошествии 5 мин (отводимых на завершение переходных процессов, связанных с развитием конвективного движения) проводились измерения. По окончании измерений напряжение снималось. При отсутствии напряжения образец выдерживался еще 5 мин для стирания "памяти" о предыдущем эксперименте, после чего процедура повторялась.

Конвективные структуры, наблюдавшиеся в этих опытах при *всех*, включая минимальные экспериментально доступные, значениях ε , являлись *хаотическими и нестационарными* — они медленно эволюционировали во времени, не обнаруживая никакой тенденции к достижению стационарного состояния. Типичная такая структура в некоторый фиксированный момент времени изображена на рис. 7а. Обращает на себя внимание тот факт, что структура сохраняет характерный "микромасштаб" (ближний порядок), связанный с критическим волновым числом коротковолновой неустойчивости, и что хаотизация связана с длинноволновыми модуляциями "микро-рельефа" (отсутствие дальнего порядка).

Что будет, если аналогичные эксперименты проводить в присутствии магнитного поля, приложенного в

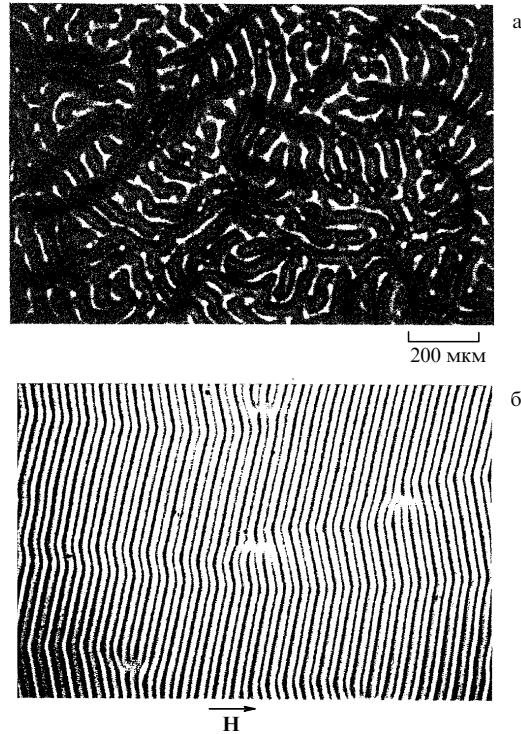


Рис. 7. Типичное изображение турбулентной структуры, наблюдающейся близи порога электроконвекции в гомеотропно ориентированном жидким кристаллом в некоторый фиксированный момент времени, $\varepsilon = 0,1$, $V = 8,75$ В (а); стабилизация турбулентной структуры магнитным полем, приложенным в плоскости слоя, $H = 1600$ Гс, $V = 10,07$ В, что с учетом изменения V_c магнитным полем также соответствует $\varepsilon = 0,1$ (б) [68]. Подробности в тексте.

плоскости слоя? Такое поле создает анизотропию в указанной плоскости, т.е. понижает симметрию задачи до традиционной. Если изложенные теоретические представления правильны, это должно приводить к появлению устойчивых пространственно-периодических структур. Эксперимент показывает, что включение магнитного поля действительно приводит к стабилизации хаоса и возникновению в системе дальнего порядка (рис. 7б). Структура, изображенная на этом рисунке, так называемые *наклонные волны* (oblique rolls), типична для слабонадкритической электроконвекции при *планарной* ориентации директора (директор параллелен плоскости слоя — задача изначально анизотропна в этой плоскости) [17–20]. Существенно, что стабилизация хаотической динамики магнитным полем *обратима* по полю: снятие магнитного поля, восстанавливающее дополнительную симметрию задачи, приводит к спонтанному разрушению стационарных пространственно-периодических структур, и система возвращается к хаотической динамике, соответствующей рис. 7а. Это доказывает, что наблюдающийся пространственно-временной хаос не является затянувшимся тривиальным переходным процессом релаксации к пространственно-однородному состоянию начальной (пространственно-неоднородной на больших расстояниях) азимутальной ориентации проекции директора на плоскость слоя, но есть глубокое внутреннее свойство задачи [23, 24, 67, 68].

Для получения временных характеристик наблюдаемой турбулентности использовался следующий подход. Произвольная строка изображения выбиралась за ось x .

Яркость различных точек этой строки вводилась в компьютер в виде пространственно-временного профиля $\xi(x, t)$ (рис. 8). Затем в каждой точке x вычислялась локальная автокорреляционная функция

$$\phi_x(t) = \langle [\xi(x, t + t') - \langle \xi(x, t') \rangle] [\xi(x, t') - \langle \xi(x, t') \rangle] \rangle, \quad (64)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени t' ($0 \leq t' \leq T$, здесь T — полное время наблюдения).

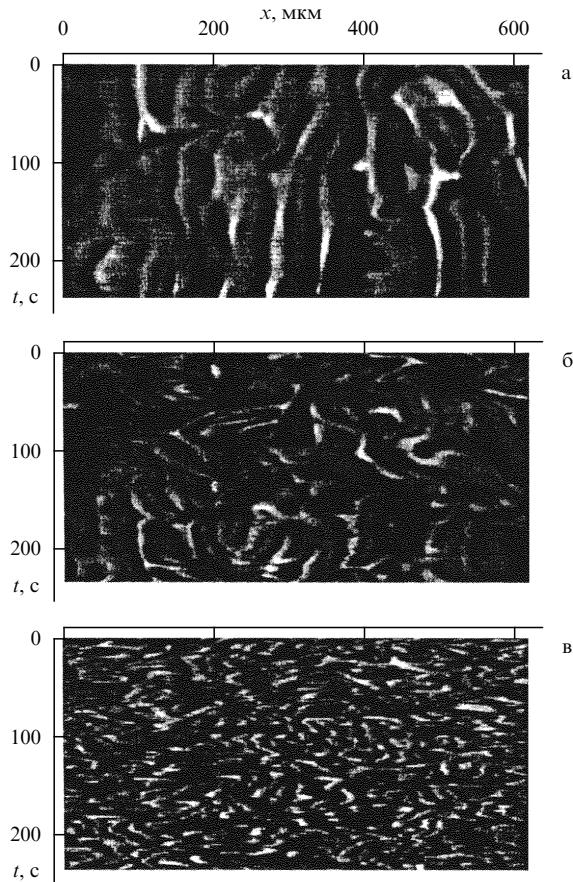


Рис. 8. Пространственно-временные профили яркости произвольной строки изображения [68]. Пространственное разрешение $1,27 \text{ мкм пиксель}^{-1} \times 512$ пикселей. Временное разрешение $1,0 \text{ с пиксель}^{-1} \times 256$ пикселей; $\varepsilon = 0,010$ (а), $0,24$ (б), $0,69$ (в).

Наконец, полученный набор $\phi_x(t)$ усреднялся по x . Автокорреляционные функции $\phi(t)$, полученные в результате такого подхода при нескольких значениях ε , представлены на рис. 9. При всех значениях ε хорошо видно быстрое затухание автокорреляционной функции, типичное для развитого хаоса.

Характерное корреляционное время τ определялось путем аппроксимации экспериментально полученных функций $\phi(t)$ вида

$$\phi(t) = \phi(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (65)$$

где значение $\phi(0)$ бралось из эксперимента и τ — единственный подгоночный параметр, определявшийся методом наименьших квадратов. Полученная таким

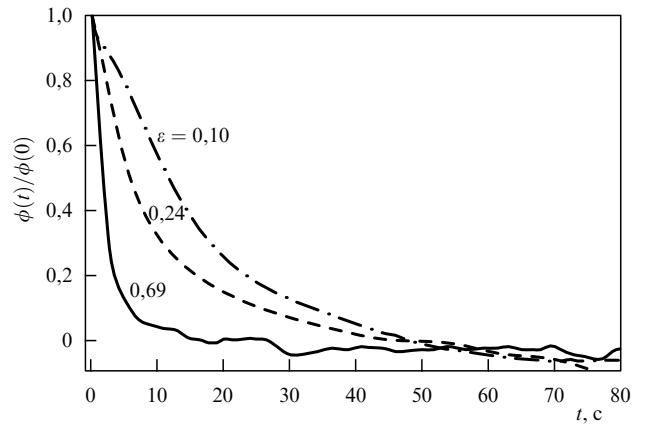


Рис. 9. Автокорреляционные функции, соответствующие пространственно-временным профилям рис. 8 [68]. Подробности в тексте.

образом зависимость $\tau(\varepsilon)$ представлена на рис. 10. Экспериментальные точки с хорошей точностью ложатся на прямую $1/\tau = \text{const } \varepsilon$.

Важной характеристикой случайной величины является также ее спектральная плотность. Для квазистационарного случайного процесса его спектральная плотность определенным образом связана с фурье-компонентами автокорреляционной функции [28]. Поэтому сравнение этих двух величин является хорошим критерием для проверки справедливости всех предположений, положенных в основу обсуждающихся результатов. Поскольку, однако, при получении соотношения, связывающего спектральную плотность случайной величины и ее автокорреляционную функцию, в [28] существенно использовалась гипотеза эргодичности, применение которой к флуктуациям в неравновесных системах требует специального обоснования, и поскольку в [28] сразу рассматривался случай $T \rightarrow \infty$, тогда как переход от конечного к бесконечному времени наблюдения в рассматриваемой задаче не вполне тривиален, я счел целесообразным поместить в приложении вывод этого соотношения, не использующий предположение об эргодичности процесса и справедливый при конечных значениях T . При сделанных предположениях о виде $\phi(t)$ (см. (65)) и зависимости от ε корреляционного времени $\tau = (\Lambda\varepsilon)^{-1}$, где $\Lambda = \text{const}$, формула (П.7) приводит к

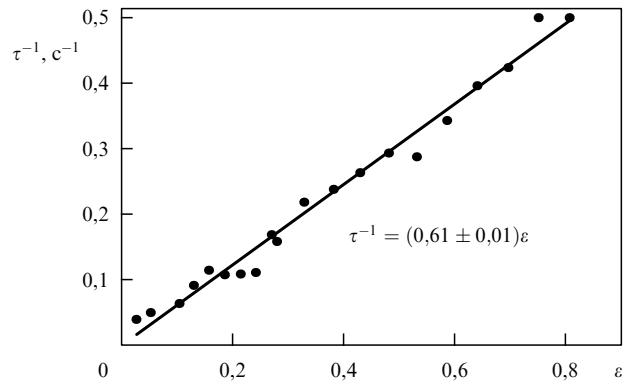


Рис. 10. Зависимость корреляционного времени от ε [68]. Подробности в тексте.

следующему выражению:

$$\frac{\varepsilon S_\omega}{T\phi(0)} = \frac{2\Lambda}{\Lambda^2 + \Omega^2}, \quad (66)$$

где $\Omega \equiv \omega/\varepsilon$ и S_ω — модуль коэффициентов Фурье спектрального разложения временной зависимости яркости сигнала, усредненный по x так же, как это было сделано для локальных автокорреляционных функций (для краткости в выражении (66) у ω_n опущен индекс n).

Отмечу, что правая часть (66) является универсальной, не зависящей от ε функцией и что входящие в (66) величины $\phi(0)$ и Λ были определены при изучении автокорреляционных функций, а ε и T фиксированы условиями эксперимента, так что в выражении (66) отсутствуют какие бы то ни было подгоночные параметры.

Сравнение экспериментально измеренной при различных значениях ε спектральной плотности яркости сигнала с выражением (66) представлено на рис. 11. Согласие эксперимента с (66) вполне убедительное.

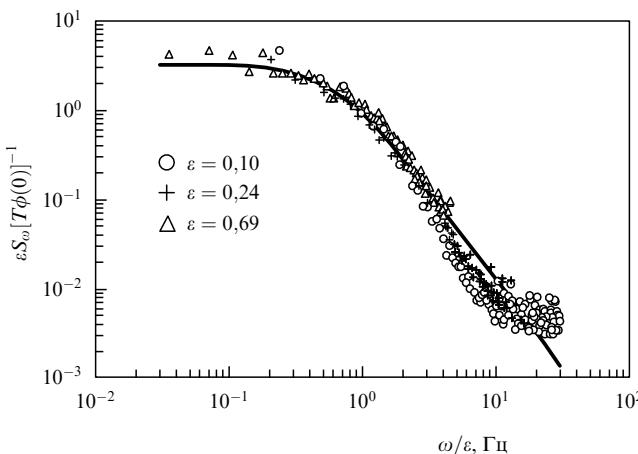


Рис. 11. Спектральная плотность яркости изображения турбулентной структуры при различных значениях ε [68]. Сплошная линия — правая часть зависимости (66). Подробности в тексте.

Таким образом, все качественные выводы особенностей перехода к хаосу в системах с дополнительной симметрией, равно как и ряд характерных масштабных соотношений, следующих из обсуждавшегося в предыдущих разделах обзора теоретического анализа явления, находят свое подтверждение в эксперименте.

К сожалению, в настоящее время отсутствуют как теоретические, так и количественные экспериментальные данные о *пространственных* характеристиках хаоса. Однако из качественного описания структур, наблюдавшихся в работах [22–24, 67, 68], можно сделать вывод, что речь идет именно о *пространственно-временному* хаосе, возникающем при $\varepsilon = 0$, т.е. одновременно с началом всякого гидродинамического движения. Иными словами, наблюдается *турбулентность с пороговым числом Рейнольдса, равным нулю*.

Отмечу в заключение этого раздела, что в настоящее время уже имеются определенные успехи в построении количественной слабонелинейной теории электроконвекции в слое гомеотропно ориентированного нематика, справедливой при малых значениях ε [69, 70]. Численное интегрирование полученных уравнений при значениях параметров близких к экспериментам [22, 23] приводит

к пространственно-временному хаосу весьма похожему на структуры, наблюдавшиеся в работах [22, 23], а обработка полученных данных также дает зависимость корреляционного времени от ε вида $\tau \propto 1/\varepsilon$. Однако уравнения, полученные и исследованные в [69, 70], весьма сложны, их подробное обсуждение представляется узкоспециальный интерес и выходит за рамки настоящего обзора.

6. Заключение

Обычно заключение отводится для подведения итогов и обсуждения перспектив. В данном случае и то, и другое едва ли имеет смысл. Что касается итогов, то и в теории, и, особенно, в эксперименте сделано еще настолько мало, что говорить о каких-то итогах неуместно. По этой же причине неуместно и обсуждение перспектив — неизвестно еще так много, что любые исследования в этой области являются перспективными. На сегодняшний день с уверенностью можно сказать только то, что, во-первых, в поведении различных систем с коротковолновой неустойчивостью и дополнительной симметрией наблюдается много общих черт, и, во-вторых, это поведение настолько отличается от традиционного, что системы с дополнительной симметрией, бесспорно, составляют отдельный, самостоятельный класс задач. Класс, изучение которого может не только обогатить наши знания об образовании как порядка, так и хаоса, но, возможно, и изменить ряд твердо сложившихся представлений в этой области.

Завершая обзор, мне хотелось бы сделать несколько замечаний общего характера, касающихся как аналогии рассматриваемых проблем с задачами термодинамики и кинетики фазовых переходов, так и отличия от этих задач.

Начну с аналогии. Такая аналогия напрашивается сама собой. Она отмечалась многими авторами (см. [2–4] и цитируемые там работы) и уже многократно подчеркивалась на протяжении настоящего обзора (роль симметрии, разложение по степеням параметра порядка и т. п.). Однако обычно эта аналогия является "сильно анизотропной", т.е. направлена на перенесение представлений из развитой и хорошо изученной области фазовых переходов в более молодую и, соответственно, менее развитую область образования структур в диссипативных системах. Сейчас я хочу изменить знак этой анизотропии и обсудить, какие из свойств диссипативных систем с дополнительной симметрией могут проявиться в области фазовых переходов и как они могут проявиться.

Одним из наиболее важных свойств диссипативных систем с дополнительной симметрией является дестабилизация стационарных, пространственно-периодических структур за счет их взаимодействия с длинноволновыми модами голдстоуновской ветви спектра. Существенно, что при определенных условиях дестабилизация может приводить к полному исчезновению устойчивых пространственно-периодических решений задачи. Вторым существенным моментом является смешение ε -масштабов, приводящее к неадекватности исследования задачи в низшем порядке теории возмущений.

Образованиею стационарных пространственно-периодических структур при превышении порога коротковолновой неустойчивости в теории фазовых переходов, очевидно, соответствует переход со спонтанным пониже-

нием симметрии из некоторой высокосимметричной (в частности, изотропной) фазы I в менее симметричную фазу II. В рамках рассматриваемой аналогии при наличии в такой задаче дополнительной симметрии взаимодействие длинноволновых макроскопических флуктуаций, отщепляющихся от соответствующих гольстоуновских мод, с фазой II должно приводить к ее дестабилизации вплоть до полного подавления фазового перехода в определенной области значений параметров задачи.

В качестве возможного примера такой ситуации укажу на переход изотропная фаза — холестерическая фаза, или нематик — смектик, происходящий в жидком кристалле, помещенном в капилляр. Один из типов длинноволновых флуктуаций в такой системе связан с возбуждением гидродинамических мод. С другой стороны, известно, что течение холестерического или смектического жидкого кристалла по капилляру, если скорость такого течения достаточно мала, напоминает "просачивание" (permeation) молекул сквозь геликоидальную (холестерик) или слоистую (смектик) структуру жидкокристаллического упорядочения, положение которой фиксировано за счет взаимодействия со стенками капилляра — так называемый механизм Хелфриха [17, 18, 71]. Поэтому длинноволновые моды Хелфриха в такой задаче оказываются аналогичными модами, связанными с вертикальной завихренностью в проблеме Рэлея — Бенара со свободными границами — и те, и другие вызывают смещение жидкости относительно мелкомасштабной (жидкокристаллической в рассматриваемом случае и конвективной в проблеме Рэлея — Бенара) структуры, в этой жидкости возникающей [72].

Применение идей и методов, обсуждавшихся в настоящем обзоре, к исследованию устойчивости холестерической (смектической) фазы по отношению к "флуктуациям Хелфриха" могло бы быть интересным примером "обратного" влияния задач теории образования диссипативных структур на задачи теории фазовых переходов.

С другой стороны, не следует забывать, что любая аналогия есть не более чем сходность, похожесть, но никак не тождественность. Поэтому наличие определенных свойств в задаче о фазовых переходах является лишь *основанием для ожидания близких свойств в аналогичной задаче о диссипативных структурах*, но никак не гарантией существования таких свойств. В качестве примера опасности излишне широкого использования таких аналогий укажу на роль аддитивных (тепловых) флуктуаций в обеих проблемах.

Определяющая роль флуктуаций в непосредственной окрестности точек фазового перехода общеизвестна [28]. В определенных случаях учет флуктуации даже изменяет род фазового перехода со второго на первый [73]. Казалось бы, что по этой причине полное пренебрежение флуктуациями делает неадекватными выводы настоящего обзора, касающиеся поведения диссипативных систем в непосредственной окрестности порога возникновения коротковолновой неустойчивости. В действительности же такое пренебрежение весьма оправданно. Дело в том, что в отличие от фазовых переходов, где спонтанное понижение симметрии связано с упорядочением на атомных масштабах, в диссипативных системах образующиеся структуры всегда имеют *макроскопический* масштаб. По этой причине в соответствующий

безразмерный параметр, определяющий ширину "флуктуационной" области (число Гинзбурга), для диссипативных систем всегда входит отношение характерного атомного и макроскопического размеров. Это, как правило, приводит к такому сужению флуктуационной области, что вопрос о влиянии флуктуаций на динамику системы утрачивает реальный смысл [34]. Подчеркну во избежание недоразумений, что речь идет именно о *влиянии* флуктуаций на динамику развития коротковолновой неустойчивости, но не о самих флуктуациях. Вопрос о наблюдении самих флуктуаций вполне осмыслиенный и был решен в работе [74] благодаря применению изящного подхода, в котором коротковолновая неустойчивость играла роль своеобразного усилителя тепловых флуктуаций.

Завершая обзор, я не могу не воспользоваться случаем и не выразить глубокую признательность М. Мимуре (M. Mimura) и Т. Очиаи (T. Ochiai) за мое приглашение в Токийский университет и за создание исключительно благоприятных условий для работы. Я также благодарен Ш. Каю (S. Kai) за плодотворное обсуждение многих вопросов, затронутых в обзоре, и Л. Крамеру (L. Kramer) за возможность ознакомиться с работой [70] до ее опубликования.

7. Приложение

Для получения соотношения, связывающего спектр случайной величины с ее автокорреляционной функцией, рассмотрим действительную случайную величину $\zeta(t)$, наблюдавшуюся в течение некоторого времени $T (-T/2 \leq t \leq T/2)$ и удовлетворяющую условию $\langle \zeta \rangle = 0$. Определим теперь $\zeta(t)$ на всей временной оси $(-\infty < t < \infty)$, продолжив ее периодически за границы интервала $-T/2 \leq t \leq T/2$ ($\zeta(t+T) = \zeta(t)$), и разложим $\zeta(t)$ в ряд Фурье, который удобно записать в виде

$$\zeta(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_{\omega_n} \exp(i\omega_n t),$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad \xi_{\omega_n} = \xi_{\omega_{-n}}^* = \int_{-T/2}^{T/2} \zeta(t) \exp(-i\omega_n t) dt. \quad (\text{П.1})$$

Отмечу, что при такой записи ω_n удовлетворяет очевидному тождеству $\omega_n + \omega_m = \omega_{n+m}$.

В этом случае, согласно определению автокорреляционной функции, имеем

$$\phi(t) = \langle \zeta(t+t') \zeta(t') \rangle =$$

$$= \frac{1}{T^2} \sum_{n,m} \zeta_{\omega_n} \zeta_{\omega_m} \exp(i\omega_n t) \langle \exp(i\omega_{n+m} t') \rangle. \quad (\text{П.2})$$

Последнее в силу того, что усреднение проводится по t' , а единственная величина под знаком суммы, зависящая от t' , есть $\exp(i\omega_{n+m} t')$. С другой стороны,

$$\langle \exp(i\omega_{n+m} t') \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega_{n+m} t') dt' = \delta_{nm}, \quad (\text{П.3})$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Подставляя (П.3) в (П.2) и учитывая, что $\xi_{\omega_{-n}} = \xi_{\omega_n}^*$, получаем

$$\phi(t) = \frac{1}{T^2} \sum_n |\zeta_{\omega_n}|^2 \exp(i\omega_n t), \quad (\text{П.4})$$

т.е.

$$\phi_{\omega_n} = \frac{1}{T} |\zeta_{\omega_n}|^2, \quad (\text{П.5})$$

где ϕ_{ω_n} — коэффициенты разложения $\phi(t)$ в ряд Фурье. Отмечу, что из действительности коэффициентов ϕ_{ω_n} следует, что $\phi(t) = \phi(-t)$, как и должно быть [28].

Для экспоненциально затухающей автокорреляционной функции (65) прямое интегрирование при условии $T \gg \tau$ дает (согласно общим правилам, при $t < 0$ в экспоненте следует заменить t на $|t|$ [28])

$$\phi_{\omega_n} \simeq \frac{2\tau\phi(0)}{1 + \omega_n^2\tau^2}. \quad (\text{П.6})$$

Сопоставляя (П.5) и (П.6), приходим к выводу, что для автокорреляционной функции (65) справедливо соотношение

$$\frac{1}{T} S_{\omega_n} = \frac{2\tau\phi(0)}{1 + \omega_n^2\tau^2}, \quad (\text{П.7})$$

где введено обозначение $S_{\omega_n} = |\zeta_{\omega_n}|^2$ и, согласно определению, $\phi(0) \equiv \langle \zeta^2 \rangle$ (см. (П.2)).

Уместно сделать два следующих замечания относительно соотношений (П.5), (П.7) и способа их получения. Во-первых, может показаться, что при выводе (П.5) использовалось не только предположение об эргодичности (поскольку рассматривалась единственная случайная величина, то вопрос об эргодичности флуктуаций в этой постановке вообще не возникает), но и предположение о квазистационарности процесса, т.е. независимость статистических характеристик от момента начала отсчета времени. В действительности же, как легко убедиться, *периодическое* продолжение на всю временную ось случайной функции, определенной на конечном временному отрезке, автоматически гарантирует квазистационарность такого процесса, так как интеграл от периодической функции по ее периоду, очевидно, не зависит от положения начальной точки интегрирования.

Второе замечание касается перехода к пределу $T \rightarrow \infty$. Вводя $\Delta\omega \equiv 2\pi/T$, записывая (П.1) как интегральную сумму и переходя к пределу, получаем

$$\zeta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum \zeta_{\omega_n} \exp(i\omega_n t) \Delta\omega \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{\omega} \exp(i\omega t) d\omega,$$

где через ζ_{ω} обозначен формальный предел ζ_{ω_n} при $T \rightarrow \infty$ (см. (П.1)). Обозначая, далее, через ϕ_{ω} предел ϕ_{ω_n} при $T \rightarrow \infty$, получаем, что выражение (П.7) переходит в известное соотношение, приведенное в [28]. Существенно, однако, что оба предела, т.е. ζ_{ω} и ϕ_{ω} , вообще говоря, не могут быть конечными одновременно. Действительно, если предположить, что значение ϕ_{ω} конечно, то из (П.5) следует, что $\zeta_{\omega_n} \propto \sqrt{T}$ и расходится при $T \rightarrow \infty$, что фактически связано с тем, что $\zeta(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ [28].

Список литературы

1. Лифшиц И М ЖЭТФ **55** 2408 (1968)
2. Nicolis G, Prigogine I *Self-organisation in Nonequilibrium Systems, from Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (New York: Wiley, 1977)
3. Haken H *Advanced Synergetics* (Berlin: Springer-Verlag, 1983)
4. Cross M C, Hohenberg P C Rev. Mod. Phys. **65** 851 (1993)
5. Chandrasekhar S *Hydrodynamic and Hydrodynamic Stability* (Oxford: Clarendon Press, 1961)
6. Анисимов С И, Трибельский М И, Эпельбаум Я Т ЖЭТФ **51** 802 (1980)
7. Bernoff A J et al. SIAM J. Appl. Math. **55** 485 (1995)
8. Coullet P, Fauve S Phys. Rev. Lett. **55** 2857 (1985)
9. Lord Reyleigh Proc. R. Soc. London A **93** 148 (1917)
10. Lord Rayleigh Phil. Mag. **32** 529 (1916)
11. Siggia E D, Zippelius A Phys. Rev. Lett. **47** 835 (1981)
12. Zippelius A, Siggia E D Phys. Rev. A **26** 1788 (1982)
13. Zippelius A, Siggia E D Phys. Fluids **26** 2905 (1983)
14. Busse F H, Bolton E W J. Fluid Mech. **146** 115 (1984)
15. Bolton E W, Busse F H J. Fluid Mech. **150** 487 (1985)
16. Goldstein R J, Graham D J Phys. Fluids **12** 1133 (1969)
17. Chandrasekhar S *Liquid Crystals* (Cambridge: Cambridge University Press, 1977)
18. De Gennes P G *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford: Clarendon Press, 1982)
19. Blinov L M *Electro-Optical and Magneto-Optical Properties of Liquid Crystals* (New York: Wiley, 1983)
20. Kai S Forma **7** 189 (1992)
21. Hertich A et al. J. de Phys. II **2** 1915 (1992)
22. Richter H, Buka A, Rehberg I Phys. Rev. E **51** 5886 (1995)
23. Richter H et al. Europhys. Lett. **30** 37 (1995)
24. Tribelsky M I et al. Bussei Kenkyu (Kyoto) **66** 592 (1966); Proc. of the 1st Tohwa Univ. Int. Meeting on Stat. Phys., Fukuoka, Japan, Nov. 1995
25. Горьков Л П ЖЭТФ **33** 402 (1957)
26. Malkus W V R, Veronis G J. Fluid Mech. **4** 225 (1958)
27. Schluter A, Lortz D, Busse F H J. Fluid Mech. **23** 129 (1965)
28. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Наука, 1995)
29. Трибельский М И Изв. АН СССР. Сер. Физ. **53** 722 (1989)
30. Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) с. 234
31. Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) с. 447
32. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988)
33. Кузнецов Е А, Спектор М Д ПМТФ **21** (2) 76 (1980)
34. Swift J B, Hohenberg P C Phys. Rev. A **15** 319 (1977)
35. Malomed B A, Nepomnyashchy A A, Tribelsky M I Phys. Rev. A **42** 7244 (1990)
36. Nepomnyashchy A A, Tribelsky M I, Velarde M G Phys. Rev. E **50** 1194 (1994)
37. Langer J S, Ambegaokar V Phys. Rev. **164** 498 (1967)
38. McCumber D E, Halperin B I Phys. Rev. B **1** 1054 (1970)
39. Newell A C, Whitehead J A J. Fluid Mech. **38** 279 (1969)
40. Stuart J T, Di Prima R C Proc. R. Soc. London A **362** 27 (1978)
41. Kramer L, Zimmermann W Physica D **16** 221 (1985)
42. Kramer L, Schober H R, Zimmermann W Physica D **31** 212 (1988)
43. Tribelsky M I, Kai S, Yamazaki H Prog. Theor. Phys. **86** 963 (1991)
44. Eckhaus W J. Mecanique **2** 153 (1963)
45. Eckhaus W *Studies in Nonlinear Stability Theory* (Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 6) (Berlin: Springer-Verlag, 1965)
46. Busse F H Rep. Prog. Phys. **41** 1929 (1978)
47. Busse F H, in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (Eds H L Swinney, J P Gollub) (Berlin: Springer-Verlag, 1981) p. 97. [Буссе Ф Г, в кн. *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности* (Под ред. Х Сунни, Дж. Голлуба) (М.: Мир, 1984) с. 124]
48. Malomed B A, Staroselsky I E, Konstantinov A B Physica D **34** 270 (1989)
49. Маломед Б А, Непомнящий А А, Трибельский М И ЖЭТФ **96** 684 (1989)
50. Edwards W S, Fauve S J. Fluid Mech. **278** 123 (1994)
51. Ishimasa T, Nissen H -U, Fukano Y Phys. Rev. Lett. **55** 511 (1985)
52. Bendersky L Phys. Rev. Lett. **55** 1461 (1985)
53. Wang N, Chen H, Kuo K H Phys. Rev. Lett. **59** 1010 (1987)
54. Bernoff A J Europ. J. Appl. Math. **5** 267 (1994)
55. Tribelsky M I Int. J. Brif. Chaos (Proc. of Int. Workshop on Nonlinear Dynamics and Chaos, Pohang, Korea, July, 1995) (in press)
56. Tribelsky M I, Velarde M G Phys. Rev. E (in press)
57. Tribelsky M I, Tsuboi K Phys. Rev. Lett. **76** 1631 (1996)

58. Николаевский В Н *ДАН СССР* **307** 570 (1989)
59. Nikolaevsky V N, in *Recent Advances in Eng. Sci.* (Lecture Notes in Eng. 39) (Eds S L Koh, C G Speciale) (Berlin: Springer-Verlag, 1989) p. 210
60. Маломед Б А, Митлин В С, Николаевский В Н *ПММ* **55** 795 (1991)
61. Malomed B A *Phys. Rev. A* **45** 1009 (1992)
62. Busse F H, Riahi N J. *Fluid Mech.* **96** 243 (1980)
63. Маломед Б А, Трибельский М И *ЖЭТФ* **92** 539 (1987)
64. Кузнецов Е А, Спектор М Д *ЖЭТФ* **71** 262 (1976)
65. Beresnev I A, Nikolaevskiy V N *Physica D* **66** 1 (1993)
66. Tsuboi K, Tribelsky M I *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics* (in Japanese) (in press)
67. Hidaka Y et al. *Technology Reports of Kyushu Univ.* (in Japanese) **69** 411 (1996)
68. Hidaka Y et al. *Phys. Rev. Lett.* (in press)
69. Rossberg A G et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 4729 (1996)
70. Rossberg A G, Kramer L *Phys. Scripta* (in press)
71. Helfrich W *Phys. Rev. Lett.* **23** 372 (1969)
72. Dubois-Violette E, Guazzelli E, Prost J *Philos. Mag. A* **48** 727 (1983)
73. Бразовский С А *ЖЭТФ* **68** 175 (1975)
74. Rehberg I et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 596 (1991)

Short-wavelength instability and transition to chaos in distributed systems with additional symmetry

M.I. Tribel'skiⁱⁱ

*Graduate School of Mathematical Science, University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Meguro-ku Tokyo 153, Japan*

A review is presented of the theory of pattern formation in extended, dissipative, highly nonequilibrium systems. Emphasis is placed on systems which, in addition to spatial translations and rotations, have additional continuous symmetry group(s). It is shown that the additional symmetry destabilizes dramatically the ground state of the system thus causing it to make a direct transition from a spatially uniform to a turbulent state in an analogous fashion to the second-order phase transition in quasi-equilibrium systems. Apart from the theoretical analysis, a discussion of experimental data is given.

PACS numbers: **05.45.+b, 47.52.+j**

Bibliography — 74 references

Received 22 October 1996