

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Коллективно флуктуирующие активы при наличии арбитражных возможностей и оценка платежных обязательств

А.Н. Адамчук, С.Е. Есипов

Методы функционального анализа используются для описания коллективно флуктуирующих бескупонных облигаций при наличии операционного шума, порождающего арбитражные ситуации. Модель обладает двумя основными особенностями: (i) естественным образом фиксированной ценой облигации в момент погашения, что достигается использованием только тех траекторий процесса цен, которые отвечают указанному терминальному условию, и (ii) наиболее привлекательными арбитражными возможностями между облигациями с близкими сроками погашения, моделируемыми в линейном локальном приближении. Модель может быть сформулирована в различных замкнутых формах как стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных. Выводится функциональное уравнение Блэка–Шоулса для платежного обязательства и указывается связь с традиционными методами оценки платежных обязательств (опционов).

PACS numbers: 01.75. + m, 02.30.Sa, 02.90. + p, 89.90. + n

Содержание

1. Введение. Явление коррелированных флуктуаций. Общее описание (1295).
 2. Различие между стохастической корреляцией и детерминистическим взаимодействием (1296).
 3. Арбитражные возможности — механизм релаксации (1397).
 - 3.1. Ряд Тейлора, линейный арбитраж, арбитражное время.
 - 3.2. Два коррелированных актива.
 4. Интеграл по траекториям, действие и "броуновский мост" (1297).
 - 4.1. Уравнения Фоккера–Планка вперед и назад по времени.
 - 4.2. Распределение (6) как стационарное распределение.
 - 4.3. Дрейф с расходимостью в модели Болла–Тороуса и эквивалентная мартингальная мера.
 5. Временная структура процентных ставок — вероятностное описание кривой форвардных ставок и коллективных флуктуаций (1300).
 - 5.1. Представление в виде функционального интеграла и уравнения Фоккера–Планка.
 - 5.2. Стратегия Блэка–Шоулса и линейный арбитраж. Оценка опционов на облигации.
 - 5.3. Уравнение с искусственным временем.
 - 5.4. Коэффициент корреляции между двумя облигациями. Случай краткосрочного опциона.
 6. Заключение (1305).
- Словарь терминов (1305).
Список литературы (1305).

1. Введение. Явление коррелированных флуктуаций. Общее описание

Внимательное изучение ежедневных, месячных и годовых изменений цен облигаций позволяет заметить различные эволюционные зависимости. Общепринятый метод представления этой информации — временная структура процентных ставок (*term structure*) или кривая доходности, и форвардные процентные ставки (*forward interest rates*). Хотя согласованное поведение рынков (облигаций) очевидно, трудно создать соответствующую модель, в частности, ввиду большого объема статистической информации, необходимого для определения множества эффектов взаимозависимости. Изменения цен облигаций приводит к возникновению арбитражных возможностей и, как ни малы эти возможности, интересно их точно смоделировать. Присутствие арбитража позволяет анализировать область применимости хорошо исследованных безарбитражных [1, 2] (или равновесных моделей) и выработать подход к анализу рынков, на которых ожидаются арбитражные ситуации.

Равновесные модели временной структуры процентных ставок [3–5] предполагают, что ставка может колебаться около некоторого "среднего" значения, и показывают, что эффективные рынки имеют механизм релаксации к этому среднему. Поскольку процентные ставки в общем случае не являются торгуемыми активами, между арбитражными возможностями и механизмом релаксации имеется только косвенная связь. В то же время, линейный дрейф — это естественный путь представления медленных изменений в структуре процентных ставок и ценах облигаций. Ниже мы предполагаем

А.Н. Адамчук. 201 Physics Building, Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, NY 13244
E-mail: 102731.3275@CompuServe.COM

С.Е. Есипов. 5640 South Ellis Avenue, Department of Physics and James Franck Institute, University of Chicago, Chicago, IL 60637
E-mail: Sergei_Esipov%CENTRE-RE@notes.inter/iant.com

Статья поступила 3 апреля 1997 г.

использовать подобный тип релаксации для моделирования арбитражных возможностей.

По мере развития финансовые модели учитывают все больше и больше особенностей реальных рынков, представляя оставшиеся факторы как "*effective medium*" (действие среды), которое служит причиной шума или указанных средних значений. Основополагающая модель Блэка и Шоулса (Black and Scholes, 1973)¹ делит рынок на две подсистемы: одиночный актив и остальной рынок. Рынок задает среднюю процентную ставку и стохастический шум с заданной волатильностью, тогда как актив не влияет на рынок² [6]. Два, три и более активов обычно рассматриваются аналогичным образом, и их взаимное влияние моделируется парными коэффициентами корреляции [7]. Качественно иная картина возникает, когда число активов становится большим и/или их общая стоимость становится сравнимой с объемами торгов, как это имеет место на рынке облигаций.

В модели Хэса – Джерроу – Мортон (ХДМ) (Heath – Jarrow – Morton) [2] рынок задает семейства функций сноса и волатильности, определяющие структуру процентных ставок. В данном случае, "*effective medium*" используется в полную силу. Действительно, нам известно, что в модели безарбитражного рынка форвардная ставка, $f(t, T)$, является *полным* описанием, и поэтому упомянутые функции сноса и волатильности должны некоторым образом зависеть от $f(t, T)$. Эта самосогласованность в указанной модели

подменяется использованием эмпирических сноса и волатильности.

В настоящей статье мы изучаем иную модель цен облигаций и структуры процентных ставок, которая обладает преимуществом замкнутости, т.е. описывает весь рынок облигаций или полностью задает эволюцию кривой доходности по определенным начальным условиям. В простейшем случае модель имеет только два параметра (волатильность σ и интервал времени необходимого для арбитража τ). Никакие "внешние" процентные ставки или средние значения не используются. Многие понятия в стохастической динамике цен облигаций в нашей модели относятся к модификациям типа "броуновского моста" ("Brownian-bridge") [8] для логарифмически нормального процесса Блэка – Шоулса и описания линейного арбитража в структуре процентных ставок [4, 5].

Здесь следует напомнить некоторые математические методы, которые в дальнейшем позволят моделировать временную структуру процентных ставок шаг за шагом. В следующем разделе мы продолжим обсуждение различий между стохастическим и детерминистическим взаимодействием различных цен на рынке. В разделе 3 мы рассмотрим подход к моделированию арбитражных возможностей с помощью линейного дрейфа и используем его в простейшей из возможных замкнутой системе двух облигаций, служащей примером замкнутой системы с наличием арбитражных возможностей и маркет-мейкеров. Необходимый математический аппарат дается в разделе 4, который посвящен анализу модели "броуновского моста", ее связи с условными вероятностями, уравнениями Фоккера – Планка (Fokker – Planck), интегралами по траекториям, образованием квазистационарных распределений. Тем самым модель Болла – Тороуса (БТ) (Ball – Torous) [8] освещается под различными дополнительными углами. Модель БТ, как известно, обладает расходящимся поведением к моменту погашения, что делает проблематичным замену переменных к эквивалентной мартингальной мере [9]. Эта особенность обсуждается в конце раздела 4, где показано, что в системе с одной облигацией ее цена не является мартингалом.

Модель динамики системы из многих облигаций в терминах арбитражной релаксации приведена в разделе 5, где выведено стохастическое уравнение в частных производных для рынка облигаций вместе с формулировкой в терминах потраекторных интегралов. Стратегия Блэка – Шоулса при наличии арбитражных возможностей также описывается в разделе 5, и устанавливается связь с параметрами, используемыми в традиционных моделях, а также приводятся некоторые аналитические решения.

2. Различие между стохастической корреляцией и детерминистическим взаимодействием

Экономические и финансовые рынки — это системы одновременно со стохастическими и детерминистическими (взаимо)зависимостями между ценами, индексами, ставками и т. п. Вообще говоря, коррелированные события могут быть объектом как детерминистического, так и стохастического моделирования (последнее использует наблюдаемые или феноменологические коэффи-

¹ 14 октября 1997 г. в Стокгольме были объявлены лауреаты Нобелевской премии в области экономики. Ими стали американские экономисты — 53-летний Роберт Мертон (представитель гарвардской школы) и 56-летний Майрон Шоулс из Стэнфордского университета. До сих пор никто из нобелевских лауреатов не мог похвастаться тем, что его экономические открытия были применены в реальной жизни, а в этом году предпринята первая попытка превратить экономистов в физиков. По мнению представителей Королевской академии наук Швеции, "их метод оценки производных ценных бумаг явился, без преувеличения, самым значительным вкладом в экономическую науку за последние 25 лет". В начале 70-х годов они разработали формулу оценки стоимости производных ценных бумаг, на основе которой, как утверждает шведская академия наук, впоследствии строилась деятельность всех финансовых рынков. Главным условием успешной деятельности этой схемы является правильная оценка дериватива. Мертон, Шоулс и присоединившийся к ним позднее Фишер Блэк разработали методику оценки производных ценных бумаг. Впоследствии Блэк и Шоулс создали так называемую формулу Блэка – Шоулса, которой с 1973 г. изо дня в день пользуются тысячи трейдеров и инвесторов для оценки опционов на мировых финансовых рынках. Формула учитывает множество финансово-экономических факторов: размеры процентных ставок, уровень флуктуации акций, их ликвидность и т.д. Помимо оценки деривативов формула Блэка – Шоулса успешно применяется и для оценки страховых контрактов и гарантий, а также для определения эффективности инвестиционных проектов. А метод Мертона, развившего их теорию, позволил исследователям проникнуть в новые области науки, даже за пределами финансовой экономики. К сожалению, Блэку не довелось разделить триумф своих коллег — в 1995 г. он умер от рака в возрасте 57 лет. Эксперты утверждают, что если бы Блэк был жив, премия была бы присуждена в первую очередь ему. (По материалам И. Моцкобили "Коммерсантъ-daily", № 176, 15 октября 1997 г. — *Примеч. редактора.*)

² Т.е. изменения цены актива не влияют на указанные параметры: среднюю процентную ставку и волатильность. Более того, в модели предполагается, что никакие действия инвестора не влияют ни на рынок, ни на цену актива. (*Примеч. переводчика.*)

циенты корреляции). Эти особенности учтены и в финансовых моделях. Рассмотрим модель структуры процентных ставок Васичека (Vasicek):

$$dr = \frac{1}{\tau}(b - r)dt + \sigma d\varepsilon, \quad (1)$$

где $r(t)$ — краткосрочная безрисковая процентная ставка в момент t , b — среднее значение, возвращение к которому происходит за характерное время τ , и σ — волатильность процентной ставки [5]. В этой модели тенденция процентной ставки коррелировать со средним значением b моделируется как линейный дрейф $(b - r)/\tau$, и является полностью детерминистическим. Влияние "остального" рынка учитывается как стохастический (гауссов) шум, $\sigma \varepsilon$ с $d\varepsilon = \xi dt$, подобно шуму цен актива в уравнении Блэка – Шоулса. Распределение шума определено как

$$P(\varepsilon) = N \exp\left(-\frac{1}{2} \int \xi^2 dt\right), \quad (2)$$

где интегрирование осуществляется по всему интервалу времени, а N — нормализующий коэффициент. Кроме того, для гауссова процесса $\xi(t)$ существуют средние корреляции первого и второго порядка: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Парная корреляция. В случаях, когда соотношения между изменяющимися переменными сложны, часто используется альтернативный подход к моделированию статистической зависимости. Коэффициент корреляции, ρ , является хорошим выражением зависимости, когда мы не предполагаем описания соответствующего механизма взаимовлияния коррелированных наблюдений. Классическим примером такого подхода является концепция диверсифицированного портфеля Марковица (Markowitz) [10], где коэффициент корреляции β представляет взаимодействие между рынком и данным активом.

Отдельные примеры включают модели типа Блэка – Шоулса для двух и более коррелированных активов, где также не моделируется причина их корреляции. Например, в межвалютных фьючерсах и опционах индекс и обменная ставка задаются двумя стохастическими дифференциальными уравнениями с логарифмически нормальным шумом, в то время как их очевидно согласованная эволюция определяется постоянным коэффициентом корреляции ρ [7]. Аналогичный подход используется при определении соотношения цены облигации, на которую заключен опцион, и цены облигации, погашаемой одновременно с указанным опционом [6], и во многих других примерах.

3. Арбитражные возможности — механизм релаксации

Стратегии, используемые финансовыми институтами, становятся все более и более изощренными. Время, необходимое для адаптации новых моделей, время, необходимое для вычислений и реагирования на особые рыночные условия, барьеры, порожденные операционными издержками и налогами, делают арбитраж наблюдаемым. Чем более сложным становится использование преимуществ наблюдаемых арбитражных возможностей, тем более значимым является вклад собираемых

статистических данных с арбитражными возможностями, которые используются в операциях, основанных на принятых финансовых моделях. Однако многие модели являются внутренне безарбитражными и совмещение их с данными, содержащими арбитраж, нежелательно.

3.1. Ряд Тейлора, линейный арбитраж, арбитражное время

Если бы можно было видеть динамику влияния арбитражеров, то наблюдатель отметил бы, что появившись, арбитражные возможности со временем уменьшаются и затем исчезают. Этот процесс является детерминированным, и существует связанное с ним характерное время. Можно моделировать подобный процесс в первом порядке разложения в ряд Тейлора некоторой неизвестной функции текущей цены, B , и безарбитражной цены \bar{B} , а именно, $-(B - \bar{B})/\tau$, где τ — характерное время. Линейная (по отклонению цены от безарбитражного значения) релаксация интенсивно используется в финансовых моделях [4, 5, 11, 12].

3.2. Два коррелированных актива

Предположим, что имеются только две биржи, причем каждая вовлечена в торговлю одинаковыми активами, доступными по цене, B_1 и B_2 , соответственно. Арбитражеры, желающие действовать при $B_1 \neq B_2$, сталкиваются с необходимостью затратить конечное время, τ , для передачи информации, инструкций и денежных средств между биржами. Подходящей моделью для цен активов может служить система:

$$dB_1 = \left[\mu B_1 + \frac{1}{\tau_1}(B_2 - B_1) \right] dt + \sigma_1 B_1 d\varepsilon_1, \quad (3)$$

$$dB_2 = \left[\mu B_2 + \frac{1}{\tau_2}(B_1 - B_2) \right] dt + \sigma_2 B_2 d\varepsilon_2,$$

где μ — общая процентная ставка, $\sigma_{1,2}$ — волатильность цен, а детерминистический снос моделирует арбитражные возможности.

Логарифмы цен, $A_{1,2} = \ln B_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям

$$dA_1 = \left\{ \mu - \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{1}{\tau_1} [\exp(A_2 - A_1) - 1] \right\} dt + \sigma_1 d\varepsilon_1, \quad (4)$$

$$dA_2 = \left\{ \mu - \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{1}{\tau_2} [\exp(A_1 - A_2) - 1] \right\} dt + \sigma_2 d\varepsilon_2,$$

которые могут быть линейаризованы для достаточно малых разностей $|A_1 - A_2|$. Система из двух активов представлена здесь только как иллюстрация арбитражного сноса. Наш последующий анализ будет затрагивать много активов (облигаций) одновременно.

4. Интеграл по траекториям, действие, и "броуновский мост"

В этом разделе рассматривается модель "броуновского моста" [8] и объясняются причины, побудившие нас включить в дальнейшее рассмотрение элемент релаксации из "броуновского моста". Мы также укажем связь с методом интегралов по траекториям [13]. Их математи-

ческие аналоги и примеры приложений в теории финансов можно найти в [14] (Sections 21, 22).

При вычислении вероятностей и математических ожиданий в стохастических моделях иногда принято представлять ответ как интеграл или сумму, взятую по всем возможным "траекториям" $B(t)$ цены актива, или по траекториям $A(t)$ логарифма цены актива. Метод интегралов по траекториям [13] рассматривает все возможные реализации зависимости цены актива от времени. Соответствующим пространством является пространство (возможно, разрывных) функций времени. Вероятность каждой реализации задается как $P[A(t)] = N \exp(-S)$, где S — мера вклада данной траектории $A(t)$, и N — нормирующий множитель [13]. Функционал $S[A(t)]$ традиционно именуется *действием*.

Стохастическое дифференциальное уравнение с аддитивным шумом

$$dA = -v(A, t) dt + \sigma d\varepsilon, \quad (5)$$

рассматриваемое на интервале $t_1 \leq t \leq t_2$, порождает различные реализации $A(t)$ логарифма цен в соответствии с дрейфом v и добавленным шумом. Вероятность каждой реализации задается [15], как

$$\begin{aligned} P[A(t)] &= N \exp(-S) = \\ &= N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{dA}{dt} + v \right)^2 - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial A} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Некоторые результаты финансовых моделей с винеровскими (броуновскими) шумами могут быть переписаны с использованием потраекторных интегралов. В качестве примера мы продемонстрируем, как выводятся результаты в модели БТ [1]. Одной из проблем, возникающих в связи с оценкой облигаций, является детерминированное конечное условие для цены облигации, $B(T) = B_T$, в момент погашения T . Чтобы модифицировать подход Блэка–Шоулса ввиду этого условия, был введен в рассмотрение специальный стохастический процесс, так называемый "броуновский мост" [8]

$$dB = \left[\frac{B}{T-t} \ln \frac{B_T}{B} \right] dt + \sigma B d\varepsilon. \quad (7)$$

Расходящийся знаменатель дрейфового члена, $T-t$, представляет "восстанавливающую силу", которая гарантирует, что конечная цена будет удовлетворять условию $B(T) = B_T$. Предполагается, что процентная ставка есть $\mu = [\ln B_T - \ln B_0]/T$. (Обсуждение эквивалентных мартингалов мер будет проведено в конце данного раздела.)

С технической стороны метод интегралов по траекториям — это независимый тест результатов БТ, который выявляет смысл дрейфового члена, рассматривая все возможные траектории цены облигации, $B(t)$, которые начинаются в точке B_0 и заканчиваются в точке B_T . Примеры таких траекторий показаны на рис. 1.

Рассмотрим логарифмически нормальную траекторию $B(t)$, удовлетворяющую обычному стохастическому дифференциальному уравнению,

$$dB = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma B d\varepsilon \quad (8)$$

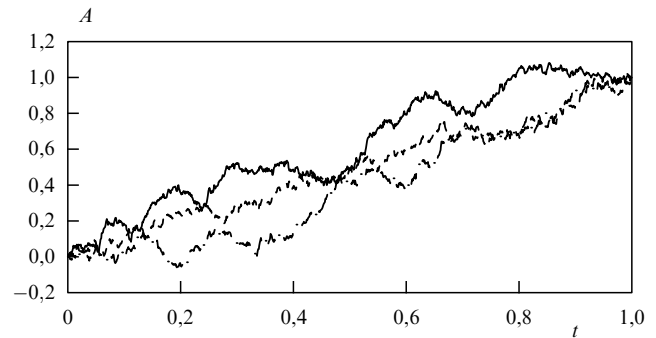


Рис. 1. Три возможные зависимости цен от времени, соединяющие начальную логарифмическую цену облигации A_0 и логарифмическую цену A_T в момент погашения T . Кривые получены методом Монте-Карло для уравнения (21). Время T дискретизировано на 512 точек, проведено 10^4 шагов по искусственному времени Θ ; $\sigma^2 = 10, 0$; $A_0 = 0$; $A_T = 1$; $T = 1$ (произвольные единицы).

($A = \ln B$), которое рассматривается на интервале $t_1 \leq t \leq t_2$. Вероятность отдельной реализации $A(t)$ есть

$$P[A(t)] = N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{dA}{dt} - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Интеграл выражения (9) по всем соответствующим образом ограниченным траекториям может быть вычислен точно, например, делением траектории на большое количество временных интервалов и вычислением каждого из них, а далее переходом к пределу по величине интервалов [13]. Учитывая начальное и конечное условия, $A(t_1) = A_1$, $A(t_2) = A_2$ получаем гауссово распределение

$$\begin{aligned} P_G(A_1, t_1; A_2, t_2) &= \\ &= \int_{A(t_1)=A_1}^{A(t_2)=A_2} \mathcal{D}A(t) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{dA}{dt} - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{[2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)]^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{[A_2 - A_1 - (\mu - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)]^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

как и следовало ожидать. Это обычное логарифмически нормальное распределение для B . При ограничениях на ставку, когда начальное — B_0 , промежуточное — B и конечное — B_T условия определены, вычисление интеграла по траекториям дает

$$\begin{aligned} P_C(A_0, 0; A, t; A_T, T) &= \frac{1}{[2\pi\sigma^2 t(1 - t/T)]^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{[A - A_0 - (A_T - A_0)(t/T)]^2}{2\sigma^2 t(1 - t/T)} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно легко проверить, что вероятность P_C удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial P_C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A_T - A}{T - t} P_C \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_C}{\partial A^2}, \quad (12)$$

которое представляет собой уравнение Фоккера – Планка³ для случайного процесса (7). Следовательно, релаксация БТ есть в точности релаксация, отвечающая ограничению на терминальное значение (граничное условие) $B(T) = B_T$ для любой броуновской траектории, и никакая искусственная релаксация не используется. Более того, как можно убедиться с помощью алгебры, P_C есть просто условная вероятность

$$P_C(A_0, 0; A, t; A_T, T) = \frac{P_G(A_0, 0; A, t) P_G(A, t; A_T, T)}{P_G(A_0, 0; A_T, T)}. \quad (13)$$

Хотя интеграл по траекториям может показаться излишним на этой стадии изложения, мы считаем, что он дает полезный подход, обобщаемый на случай согласованно эволюционирующих активов, в отличие от уравнений (7), (11).

4.1. Уравнения Фоккера – Планка вперед и назад по времени

Другой метод выведения уравнения (11) вытекает из соотношения (12). Предположив, что указанное соотношение выполняется для любого момента времени t , можно рассматривать изменение, произошедшее за бесконечно малый промежуток времени dt . В несколько более общем случае, чем мы исследуем (ср. (5)), безусловные вероятности, появляющиеся в правой части уравнения (12), отвечают уравнениям Фоккера – Планка вперед (индекс f со знаком плюс) и назад (индекс b и знак минус) по времени:

$$\pm \frac{\partial P_{f,b}}{\partial t} = \frac{\partial(v P_{f,b})}{\partial A} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_{f,b}}{\partial A^2}, \quad (14)$$

где v — скорость релаксации ($v = -\mu + \sigma^2/2$ для гауссова случая, рассмотренного выше). Прямые и обратные решения определяются начальным, $P_f(A, 0) = \delta(A - A_0)$, и конечным, $P_b(A, T) = \delta(A - A_T)$, условиями соответственно. Дифференцируя соотношение $P_C \propto P_f P_b$ по времени и используя (13), получаем выражение

$$\frac{\partial P_C}{\partial t} = v \left(P_b \frac{\partial P_f}{\partial A} - P_f \frac{\partial P_b}{\partial A} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \left(P_b \frac{\partial^2 P_f}{\partial A^2} - P_f \frac{\partial^2 P_b}{\partial A^2} \right), \quad (15)$$

которое следует сравнить с ожидаемой формой уравнений Фоккера – Планка

$$\frac{\partial P_C}{\partial t} = \frac{\partial(V P_C)}{\partial A} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P_C}{\partial A^2}, \quad (16)$$

с неизвестной скоростью релаксации V . Рассмотрение правых частей (14), (15) приводит к уравнению для V :

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(V P_f P_b + \sigma^2 P_f \frac{\partial}{\partial A} \right) = v \left(P_b \frac{\partial P_f}{\partial A} - P_f \frac{\partial P_b}{\partial A} \right). \quad (17)$$

Интегрируя по интервалу (A, A_T) для фиксированного t и предполагая $V(A_T) = 0$, имеем

$$V(A) = -\sigma^2 \frac{\partial \ln P_b}{\partial A} - \frac{1}{P_f P_b} \int_A^{A_T} \left(P_b \frac{\partial P_f}{\partial A} - P_f \frac{\partial P_b}{\partial A} \right) v \, dA'. \quad (18)$$

Это общая формула, связывающая скорость сноса условной вероятности P_C с функцией Грина уравнения Фоккера – Планка без ограничений (P_f и P_b — только два различных представления функции Грина (10)). Она демонстрирует существование замкнутого уравнения Фоккера – Планка (15) и стохастического уравнения,

$$\frac{dA_C}{dt} = -V + \sigma \Xi, \quad (19)$$

для соответствующего процесса (5).

4.2. Распределение (6) как стационарное распределение

Мы будем использовать еще одно уравнение, связанное с уравнением (5). Рассмотрим функцию двух переменных, $A(\theta, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$dA = -\frac{\delta S}{\delta A} d\theta + d\Xi(\theta, t) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial A} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial A^2} \right] dt + d\Xi(\theta, t), \quad (20)$$

с δ -коррелированным двумерным гауссовым шумом $\Xi(\theta, t)$ и единичной дисперсией ($\delta/\delta A$ обозначает функциональную производную). В отличие от (5) уравнение (20) является уравнением второго порядка по t , в которое будущее и прошлое входят эквивалентным образом. Эти преимущества частично балансируются дополнительной переменной θ и большим количеством членов в правой части. Рассматривая это стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных относительно времени θ , можно прийти к стационарному распределению $P[A(\infty, t)] = N \exp(-S)$, которое есть в точности распределение, соответствующее стохастическому уравнению (5). Уравнение (20) позволяет накладывать различные ограничения и условия на траектории, описываемые действием $S(t)$ (см. (6)). Для логарифмически-нормального процесса (8) уравнение (20) записывается, как

$$dA = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} dt + d\Xi(\theta, t). \quad (21)$$

Это уравнение определено на полосе $0 \leq t \leq T$ с граничными условиями $A(\theta, 0) = A_0$, $A(\theta, T) = A_T$. Квазистационарное распределение $P(A)$ при больших θ дается уравнением (11). Оно может быть получено преобразованием Фурье (см. также раздел 5).

4.3. Дрейф с расходимостью в модели Болла – Тороуса и эквивалентная мартигальная мера

В соответствии с уравнением (7) фиксированное терминальное значение цены облигации, $B(T) = B_T$, или логарифма цены, $A(T) = A_T$, порождается расходящимся сносом для всех других значений B или A . В конечной точке, $t = T$, уравнение в некотором смысле не является более стохастическим: решение известно заранее. Исследуя этот результат детально, Ченг (Cheng) показала [9], что дрейф в модели БТ не является квадратично интегрируемым

$$\left\langle \int_0^T dt' \left[\frac{A(t') - A_T}{T - t'} \right]^2 \right\rangle \geq \int_0^T dt' \frac{t}{T(T - t')} = \infty, \quad (22)$$

и производная Радона – Никодима, соответствующая исключению дрейфа уравнения (7), также расходится в

³ В математической литературе часто именуемое уравнением Колмогорова. (Примеч. переводчика.)

точке $t = T$. В результате наиболее слабые достаточные условия теоремы Гирсанова не выполняются. Соответственно, в момент $t = T$ невозможно исключить снос заменой переменных, т.е. нет гарантии, что случайные процессы $B(t)$ или $A(t)$ являются мартингалами.

Рассматривая этот результат подробнее, предположим, что существует только одна облигация (см. уравнение (7)). В этом случае нет информации о процентных ставках за исключением данных о B и B_T (т.е. $[1/(T-t)] \ln(B_T/B)$). Существует только одно ограничение — терминальное значение цены облигации. В такой ситуации нельзя получить "ожидания" текущей цены облигации и дисконтировать терминальное значение цены, поскольку не существует никакой дополнительной информации. Хотя эта задача предельно упрощена, на следующей стадии возникает проблема "решить уравнение таким образом, как если бы решение было уже известно".

В модели, включающей много облигаций, можно использовать близкие облигации для получения оценки стоимости данной облигации. Однако безарбитражные модели не накладывают никаких ограничений на наклон кривой доходности. Поэтому мы переходим к рассмотрению арбитражных ситуаций для облигаций с близкими сроками погашения.

5. Временная структура процентных ставок — вероятностное описание кривой форвардных ставок и коллективных флуктуаций

Перейдем к моделированию коллективно эволюционирующих активов. Мы хотели бы сосредоточиться на отдельном примере согласованного поведения, который обнаруживается на рынке облигаций. Облигации, погашаемые в одно и то же время, легко сравнивать в любой момент, вычисляя форвардные процентные ставки. Арбитражные возможности, возникающие между этими облигациями, исчезают быстро и не затрагиваются нашим описанием медленного арбитража, в применении к эволюции временной структуры процентных ставок.

Обозначим как $B(t, T)$ текущую цену бескупонной облигации, погашаемой в момент T . Это — синтетическое значение, в реальности представляющее собой среднюю стоимость облигаций с одинаковыми датами погашения. Как функция T , кривая $B(t, T)$ связана с форвардной ставкой $\mathcal{R}(t, T_1, T_2) = -[\ln B(t, T_2) - \ln B(t, T_1)]/(T_2 - T_1)$ в момент t для интервала от T_1 до T_2 и мгновенной форвардной ставкой, $R(t, T)$, рассматриваемой в момент t для облигации, погашаемой в момент T . По определению, $R(t, T) = \mathcal{R}(t, T, T) = -\partial[\ln B(t, T)]/\partial T$. Функция $B(t, T)$ может быть получена из $R(t, T)$ интегрированием, $B(t, T) = B_T \times \exp[-\int_t^T dt' R(t', t')]$. В модели ХДМ любая реализация функции $R(t, T)$ возможна и не предполагает арбитражных возможностей [1].

В то же время, множество моделей включают так называемое обращение среднего: появляющиеся процентные ставки должны возвращаться к некоторому среднему уровню [7]. Предположим, что в результате интенсивной торговли (возможно, порожденной спекулянтами), цены облигаций со сроками погашения, близкими к T , существенно выросли. Мгновенная процентная ставка, R , являющаяся логарифмической производной,

приобретает N-образную форму в точке T_0 . Можно легко показать, что подобный "кинк" не может существовать долгое время с точки зрения упомянутого выше обращения среднего. Однако замкнутая модель рынка облигаций является сама источником информации о процентных ставках и не предполагает такого явления, как описанная "средняя процентная ставка", к которой должна стремиться функция R , если не принимать во внимание действия маркет-мейкеров, законы спроса и предложения, действия казначейства и т.д. Эволюция временной структуры предполагает наличие существенной корреляции между ценами облигаций с близкими сроками погашения взамен сходимости всех цен к указанному среднему значению.

Вернемся к примеру двух облигаций, рассмотренному выше (см. раздел 3.2). Эта упрощенная ситуация показывает, что не существует "среднего" или предпочтительного значения цены, а средняя цена одного актива задается ценой другого. Облигации определяются в данном случае своими датами погашения, а не продолжительностью (аналогичный подход был использован в [1, 7]). Мы предполагаем, что облигации со сроками погашения, близкими к T_0 справа и слева, будут рассматриваться арбитражерами в первую очередь. Подобный арбитраж имеет вероятностную составляющую. Ничто не указывает на то, что N-образный профиль на кривой доходности должен исчезнуть, если об этом не свидетельствует история. Более вероятно, что этот кинк порожден торговлей самой по себе, а не ожиданием в момент T_0 быстрых изменений в экономике в будущем, и рынок облигаций обладает механизмом "рассасывать" кинки в форвардных ставках.

Мы предполагаем, что облигации, погашаемые в интервале $T_0 \pm \Delta T$, где ΔT — малое приращение сроков погашения, будут рассматриваться для арбитража [16], поскольку малое изменение в $B(t, T_0)$ приводит к серьезным изменениям в форвардных ставках между $T_0 - \Delta T$, T_0 и $T_0 + \Delta T$. Это приводит к связанным с арбитражем дрейфовым членам, подобным $(1/\tau)\{B(t, T_0 + \Delta T) \times \exp[-R(t, T)\Delta T] - B(t, T_0)\}$ и $(1/\tau)\{B(t, T_0 - \Delta T) \times \exp[R(t, T)\Delta T] - B(t, T_0)\}$, или в пределе, $v[\partial^2 B/\partial T^2 - 2R\partial B/\partial T + R^2 B]$, где $v = \Delta T^2/\tau$. Теперь мы завершим вывод стохастического уравнения для временной структуры процентных ставок. Дополнительные соображения в пользу линейного локального арбитража даются в конце этого раздела.

Комбинируя согласованное поведение, заданное приведенным выше членом сноса, с обычным логарифмически нормальным шумом, отражающим независимые источники флуктуаций (таких, как торговые операции) получаем

$$dB = \left\{ \mu B + v \left[\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} - 2R \frac{\partial B}{\partial T} + R^2 B \right] \right\} dt + \sigma B d\varepsilon. \quad (23)$$

Уравнение (23) является стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных. Оно определено на полосе $\{t \geq 0, T \geq t, T \leq t + T_m\}$, где T_m — максимальный наблюдаемый срок погашения (30 лет). Для этого уравнения заданы начальные и конечные условия. Начальное условие $B(0, T)$ определяется известными на начальный момент ценами облигаций. Граничное условие в момент $T = t$ — фиксированная цена облигации в момент погашения: $B(T, T) = B_T$. Гранич-

ное условие в момент $T = t + T_m$ — начальная цена облигации, предлагаемой к продаже. Эта цена может быть получена экстраполяцией мгновенной форвардной ставки на интервале от $R(t, t + T_m - \Delta T)$ до $t + T_m$. Если $R\Delta T$ мало отличается от единицы, можно просто использовать $B(t, t + T_m) = B(t, t + T_m - \Delta T)$ или, в пределе, $\partial B / \partial T = 0$ к $T = t + T_m$. Логарифмическая производная уравнения (24) дает (незамкнутое) дифференциальное уравнение в частных производных для временной структуры. Уравнения связаны с уравнением Бюргера (Burgers), которое используется в статистической физике турбулентности [17–19] при различных классах начальных и граничных условий. Уравнение Бюргера и ранее использовалось в финансовой литературе в различном контексте [20].

Заметим, что мы можем удовлетворить конечному условию $B(T, T) = B_T$ без специального дрейфового члена. Это следствие производной второго порядка по T . Как бы ни казалось привлекательным это свойство, необходимо корректно задать дрейф, отражающий броуновский характер согласованно взаимодействующих активов (см. предыдущий раздел).

Диффузионный член $\partial^2 B / \partial T^2$ подразумевает дополнительные предположения. Во-первых, он предполагает, что связанное с арбитражем увеличение (уменьшение) цены данной облигации сопровождается компенсирующим уменьшением (увеличением) цен облигаций с близкими сроками погашения. Это, в сущности, эквивалентно предположению, что сумма средств на рынке облигаций остается практически незатронутой этим арбитражем, и все остальные изменения происходят ввиду шумовой составляющей.

Во-вторых, эффективный арбитраж предполагается "краткодействующим" или локальным по времени погашения T . Очевидно, имеет место долгодействующий или нелокальный арбитраж, когда используется сравнение цен облигаций с различными далекими друг от друга сроками погашения [16]. Предполагается, что такой арбитраж имеет более низкую доходность, или, что сильнее квадрата разности моментов погашения проданных и купленных облигаций сходится быстро при усреднении по темпам операций и объемам. "Диапазон" арбитража может быть коротким или длинным в зависимости от рассматриваемых интервалов времени. Например, арбитраж между облигациями с годовой разницей в сроках погашения не является локальным относительно структуры форвардных ставок внутри года и может быть аппроксимирован как локальный в сравнении со всей кривой доходности.

В-третьих, мы пренебрегаем производными высшего порядка по T . Доказательство допустимости такой аппроксимации основано на предположении, что временная структура процентных ставок является гладкой. Если соответствующий масштаб измерения времени T_s , то малый параметр — $\Delta T / T_s \ll 1$. Если минимальная возможная разница в сроках погашения — 1 день, $\Delta T = 1$, и время τ , необходимое для арбитража при компьютерных торгах — 1 с, то $\nu \sim 10^5$ дней. Так называемая диффузионная длина за год, $\Delta t = 300$, есть $\sqrt{\nu \Delta t} = 5500$ дней, т.е. около 15 лет. Следовательно, менее чем через год с локальным арбитражем можно полностью забыть о начальных условиях.

Наконец, подразумевается, что линейная ось T и арбитраж между ценами облигаций B являются пред-

почтительней, чем, скажем, логарифмическая ось $\ln T$ и арбитраж между различными логарифмами цен A . Это — "корректируемые" предположения.

5.1. Представление в виде функционального интеграла и уравнения Фоккера–Планка

Здесь мы повторим некоторые результаты предыдущего раздела в отношении стохастического уравнения (23). Делая подстановку $A = \ln B$, находим

$$dA = \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \nu \left[\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + 4 \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)^2 \right] \right\} dt + \sigma d\varepsilon, \quad (24)$$

откуда действие есть

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_t^{t+T_m} dT \frac{1}{2\sigma^2} \times \\ \times \left[\frac{\partial A}{\partial t} - \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \nu \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - 4\nu \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)^2 \right]^2, \quad (25)$$

и соответствующая функция (функционал) Грина (ср. (10)) равна

$$P(A_1(T), t_1; A_2, t_2) = \int_{A(t_1, T)=A_1(T)}^{A(t_2, T)=A_2(T)} \mathcal{D}A \exp(-S). \quad (26)$$

Когда число интегралов в (25) больше, чем один, реализации $A(t, T)$ называются *полями*, а не траекториями, тогда, как интеграл по траекториям именуется функциональным интегралом [15]. Здесь необходимо сделать несколько замечаний. К сожалению, решение уравнения (24) неизвестно и интеграл, входящий в (26) не может быть вычислен. Проблемы подобного рода хорошо известны в статистической физике и для анализа корреляционных функций, полученных из стохастических уравнений с частными производными и их функциональных интегралов, предлагаются различные методы [15, 21]. В большинстве случаев только так называемые критические индексы или *экспоненты* являются объектами изучения. С финансовой точки зрения это согласовывалось бы с наблюдением того, что, скажем, логарифм цены актива, заданной уравнением Блэка–Шоулса, изменяется пропорционально квадратному корню от времени, $t^{1/2}$. Экспонента $1/2$ была бы соответствующим ответом. Возможности описания рынка одним числом довольно ограничены.

С другой стороны, проблема, рассматриваемая здесь, является следствием нашей попытки вывести замкнутое стохастическое уравнение в частных производных, которое корректно отвечает терминальному граничному условию $B(T, T) = B_T$, подобно уравнению БТ (7).

Уравнение (21) соответствует логарифмически нормальному процессу Блэка–Шоулса, и остается определить скорость дрейфа. Уравнение (функциональное) Фоккера–Планка для функционала Грина (26) может быть выведено варьированием верхнего, t_2 , или нижнего, t_1 , предела интегрирования в действии S (25) (ср. с [13]). Зависящие от времени пределы t и $t + T_m$, ограничивающие T -интегрирование не вносят вклад в бесконечно малое варьирование двойного интеграла. Имеем

$$\pm \frac{\partial P_{f,b}}{\partial t} = \int_t^{t+T_m} dT \left[\frac{\delta}{\delta A(t, T)} \nu + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta A(t, T)^2} \right] P_{f,b}, \\ - \nu = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \nu \left[\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + 4 \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)^2 \right], \quad (27)$$

где $\delta/\delta A$ обозначает функциональную производную. Уравнение (27) является аналогом уравнения (14). Мы знаем, что функциональный интеграл (26) представляет решение уравнения (27), но мы не можем его вычислить. Тем не менее аналог формулы (18)

$$V(A, T) = -\sigma^2 \frac{\delta \ln P_b}{\delta A} - \frac{1}{P_f P_b} \int_{A(t, T)}^{A_T} dA(t, T) v \times \\ \times \left(P_b \frac{\delta P_f}{\delta A(t, T)} - P_f \frac{\delta P_b}{\delta A(t, T)} \right), \quad (28)$$

дает нужную скорость сноса в терминах функционального интеграла (26). В стохастическом уравнении для цен облигаций

$$dB = \left(BV + v \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} - 2R \frac{\partial B}{\partial T} + R^2 B \right) dt + \sigma B d\Xi \quad (29)$$

скорость дрейфа $V(A)$ остается неизвестной, хотя анализ, проведенный выше, гарантирует ее существование. Следующий раздел построен на наблюдении, что эволюция портфеля Блэка–Шоулса не зависит от деталей структуры дрейфового члена.

5.2. Стратегия Блэка–Шоулса и линейный арбитраж. Оценка опционов на облигации

Стратегия Блэка–Шоулса подразумевает совершенные рынки и дает возможность оценивать платежные обязательства из соображений арбитража. Предположим, что портфель, Π , формируется из a активов H , b облигаций B (погашаемых одновременно с опционом) и европейского опциона $call$ F [6]. Предполагается, что мы можем сохранить нулевую позицию для этого портфеля $\Pi = aH + bB - F = 0$. Дифференциальное условие $\delta\Pi/\delta t = 0$ вместе со случайными процессами, определяющими H и B ,

$$dH = \mu_1 H + \sigma_1 H d\Xi_1, \quad (30)$$

$$dB = \mu_2 B + \sigma_2 B d\Xi_2, \quad (31)$$

приводит к выражению, в котором можно исключить стохастическую составляющую, выбирая соответствующим образом a и b (см. ниже), и получить детерминистическое уравнение Блэка–Шоулса.

Далее мы хотим проанализировать последствия ослабления условия $\Pi = aH + bB - F = 0$ вместе с $\delta\Pi/\delta t = 0$ и замены их соотношением линейного арбитража $\delta\Pi/\delta t = -(1/\tau)\Pi$, которое подразумевает, что для осуществления желаемых изменений в портфеле необходимо время τ . Используя уравнения (31), находим

$$\left[a\mu_1 H + b\mu_2 B - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial H} \mu_1 H - \frac{1}{2} \sigma_1^2 H^2 \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} - \frac{\partial f}{\partial B} \mu_2 B - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sigma_2^2 B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial B^2} - \rho \sigma_1 \sigma_2 H B \frac{\partial^2 f}{\partial H \partial B} + \frac{a}{\tau} H + \frac{b}{\tau} B - \frac{f}{\tau} \right] dt + \\ + \left(a\sigma_1 H - \frac{\partial f}{\partial H} \sigma_1 H \right) d\Xi_1 + \left(b\sigma_2 B - \frac{\partial f}{\partial B} \sigma_2 B \right) d\Xi_2 = 0, \quad (32)$$

где ρ — коэффициент корреляции случайных процессов Ξ_1 и Ξ_2 . Стратегии a , b , необходимые для исключения стохастических составляющих, являются такими же, как и в безарбитражном случае $a = \partial f/\partial H$, $b = \partial f/\partial B$. Заметим, что даже если значения a и b вычисляются с

задержкой, финансовый институт еще имеет запас времени порядка τ для завершения изменений в портфеле. Остается детерминистическое уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 H^2 \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 B^2 \frac{\partial^2 f}{\partial B^2} - \rho \sigma_1 \sigma_2 H B \frac{\partial^2 f}{\partial H \partial B} + \\ + \frac{\partial f}{\partial H} \frac{H}{\tau} + \frac{\partial f}{\partial B} \frac{B}{\tau} - \frac{f}{\tau} = 0. \quad (33)$$

Это уравнение должно отвечать граничным условиям

$$f(H = 0, B = B_0, t = 0) = 0,$$

$$f(H, B = B_T, t = T) = \max(0, H - X), \quad (34)$$

где X — цена исполнения [6]. Следуя [6], рассмотрим решение методом подобия

$$f(S, B, t) = X B h\left(\frac{H}{XB}, t\right), \quad (35)$$

который предлагает сведение аргументов к переменной $x = H/XB$. Подставляя (35) в уравнение (33), находим, что метод подобия *точен* и приводит к замкнутому уравнению для $h(x, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} D x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad D = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2, \quad (36)$$

в соответствии с условиями

$$f(x = 0, t = 0) = 0,$$

$$f(x, t = T) = \max\left(0, x - \frac{1}{B_T}\right). \quad (37)$$

На этой стадии задача более не зависит от τ . Решением (в случае постоянного D) будет

$$h(x, t) = \frac{1}{2B_T} \left\{ x B_T \operatorname{erfc} \left[-\frac{\ln x B_T + (1/2)D(T-t)}{\sqrt{D(T-t)}} \right] - \right. \\ \left. - \operatorname{erfc} \left[-\frac{\ln x B_T - (1/2)D(T-t)}{\sqrt{D(T-t)}} \right] \right\}, \quad (38)$$

и, согласно (35), цена опциона есть

$$f = X B_0 h\left(\frac{H_0}{X B_0}, 0\right), \quad (39)$$

где H_0 и B_0 — настоящие значения цен актива и облигации соответственно. Следовательно, линейный арбитражный снос не приводит к изменению стратегии Блэка–Шоулса, но скорее показывает, что она имеет больший диапазон применимости, чем предполагается в безарбитражных моделях. В рассуждениях, представленных выше, механизм арбитража, приводящего к линейному дрейфу, или действия агента не были использованы. Действия финансового института не зависят от τ . Предположим, что требуется оценить опцион на облигацию ввиду согласованной природы изменений цен облигаций, изложенной выше. Рассмотрим европейский опцион $call$ на $B(t, T_X)$, т.е. $\mathcal{F}[B(t, T_X), t]$, погашаемый в момент $t = T_X$ с ценой исполнения X . Необходимо ограничиться полями B , отвечающими указанной облигации, погашаемой в момент T_X , и *всеми* другими

облигациями. Эти поля должны начинаться на кривой $B_0(0, T)$ при $t = 0$, $t \leq T \leq t + T_m$, проходя через любую точку $B(t_X, T_X) \geq X$ при $t = t_X$, — другие составляющие остаются неограниченными (иначе опцион не будет предъявлен) — и заканчиваться на кривой $B(T, T) = B_T$ в момент $t = T$ для всех T . В отсутствие торговли цена опциона \mathcal{F} оценивается как ожидаемое значение $\max[(B(t_X, T_X) - X), 0]$ относительно вероятностного распределения (27). Стратегия продаж, построенная на портфеле Блэка–Шоулса и примененная к уравнению (24), отвечает портфелю, Π , состоящему из выпущенной производной ценной бумаги и $b(t, T)$ облигаций, имеющих цены $B(t, T)$ и погашаемых при различных T . Капитал портфеля есть

$$\Pi = -\mathcal{F} + \int_t^{t+T_m} b(t, T) B(t, T) dT. \quad (40)$$

Как и ранее, чтобы удостовериться, что шумовые члены исключены полностью, выбираем хедж Блэка–Шоулса, $b = \delta\mathcal{F}/\delta B(t, T)$. Уравнение (33) становится функциональным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \int_t^{t+T_m} \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\delta B^2(t, T)} dT + \\ + \frac{\mathcal{F}}{\tau} - \frac{1}{\tau} \int_t^{t+T_m} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta B(t, T)} B(t, T) dT = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

отвечающим терминальному условию $\mathcal{F}(t = T_X) = \max[(B(t_X, T_X) - X), 0]$ и начальному условию $\mathcal{F}(B(0, T_X) = 0, t = 0) = 0$ (в то время, как остальные облигации, существующие в момент $t = 0$, имеют их собственные цены). Для логарифма цены облигации, $A = \ln B$, уравнение (41) является линейным бесконечномерным диффузионным уравнением, которое может быть решено "в лоб". Удобнее, однако, следовать методу подобия Мертона, который мы показали выше, и рассматривать подстановку

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = X\mathcal{P}'h\left(\frac{B(t, T_X)}{X\mathcal{P}'}, t\right), \\ \ln \mathcal{P} = \int_t^{t+T_m} dT \ln B(t, T), \end{aligned} \quad (42)$$

где штрих означает, что вклад облигации $B(t, T_X)$ исключен в бесконечном произведении. Уравнение (41) принимает следующую форму

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} D x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{N-1}{\tau} f, \quad (43)$$

$$D = \int_t^{t+T_m} \sigma^2 dT, \quad (44)$$

где N — число рассматриваемых облигаций. Уравнение (43) вместе с бесконечным произведением \mathcal{P} требует особой осторожности, поскольку предел $N \rightarrow \infty$ используется во всех других выражениях. Решение этого уравнения есть произведение $\exp[-(N-1)(T-t)/\tau]$ и правой части (38). Соотношение (42) приводит к формуле для цены.

Хотя и возможно управлять всем портфелем Π (при отсутствии операционных издержек на рынке), предпочтительнее ограничиться только двумя облигациями,

$B(t, t_X)$ и $B(t, T_X)$, как было сделано в цитируемых статьях [6, 8]. Это возможно ввиду того, что начальное условие на текущие цены облигаций может быть использовано частично, т.е. только для облигаций портфеля. Тогда уравнение (41) сводится к уравнению (33). Соображения, представленные в начале этого раздела, применимы, и формула (39) представляет желаемый ответ (для $\rho = 0$). Как указано Мертоном, справедливость уравнения (39) не основана на мнении участников относительно дрейфа в структуре процентных ставок. Однако вопрос о поперечных корреляциях и соответствующем значении ρ требует дальнейшего изучения. Мы отложим это до конца статьи.

5.3. Уравнение с искусственным временем

Хотя уравнение (34) позволяет оценивать платежные требования на много облигаций одновременно, и демонстрирует, что оценивание при наличии арбитража сводится к процессу оценки при отсутствии арбитража, на первый взгляд может показаться обескураживающим отсутствие новых формул для оценки платежных обязательств. Уравнение (41) отвечает тому, что можно было бы записать без предшествующего анализа; оно построено только на нечувствительности эквивалентной меры с броуновскими процессами к конкретной форме скорости дрейфа. Однако используемый процесс (23) модифицирует процедуру использования параметров таких, как $\sigma(t, T)$, необходимых для оценки.

Для извлечения параметров из статистических данных о рынке необходимо установить явную форму дрейфового члена V . Альтернативный подход опирается на метод, указанный в предыдущем разделе. Варьируя действие S , заданное уравнением (25), находим

$$\begin{aligned} dA = \frac{dt}{\sigma^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial^2}{\partial T^2} - 2v \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right) \frac{\partial}{\partial T} \right] \times \\ \times \left[\frac{\partial A}{\partial t} - v \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - v \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)^2 \right] + d\Xi(\theta, t, T) \end{aligned} \quad (45)$$

в соответствии с начальными условиями: $A(\theta, 0, T) = A_0(T)$ (начальная форма временной структуры), $A(\theta, t, t) = A_T(T)$ (форма временной структуры для различных сроков погашения), $\partial A(\theta, t, t + T_m)/\partial T = 0$. Применяя метод Монте-Карло к уравнению (45), можно получить распределение A для различных t, T и сравнить их со статистическими данными. Пример решения уравнения (45) показан на рис. 2.

Параметры v, σ могут, в принципе, зависеть от времени и сроков погашения. Положительный средний наклон, $s(T)$, кривой доходности не сохраняется в представленной модели. Для включения, например, так называемой теории предпочтения ликвидности [7], можно добавить член $-\gamma[s(T) + \partial A/\partial T]$ к действию (25), где γ будет скоростью релаксации. Стохастические уравнения в частных производных представляют широкий спектр явлений, и анализ особых случаев очень полезен. Решение линейной версии уравнения (45) будет опубликовано отдельно.

Вернемся к вопросу оценки опционов [6, 8], а именно, к анализу, использующему эмпирический коэффициент корреляции ρ между ценами облигаций, погашаемых в моменты t_X и T_X . Именно этот коэффициент корреляции

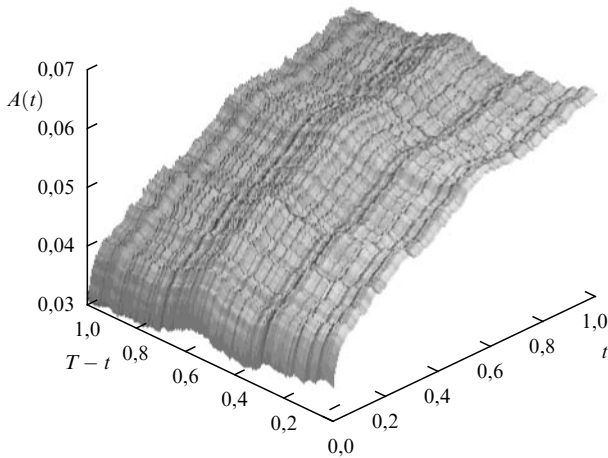


Рис. 2. Поверхность представляет возможную реализацию поля $A(t, T)$, эволюционирующую от заданных начальных логарифмических цен $A_0(T)$ и удовлетворяющую граничным условиям: фиксированным в момент погашения логарифмическим ценам облигаций $A(T, T) = 0$ и $(\partial A / \partial T) = A / T_m$ для облигаций с наибольшим сроком до погашения, $T = t + T_m$. Поверхность получена методом Монте-Карло для (линеаризованного по A) уравнения (45): $dA = \sigma^{-2} [\partial^2 A / \partial t^2 - v^2 \partial^4 A / \partial T^4] dt + d\Xi(t, T, \theta)$; t и T дискретизированы на решетке из 256×256 точек, произведено 3×10^5 шагов по искусственному времени θ . $\sigma^2 = 10$, $v = 100$, $T_m = 1$ (произвольные единицы), $A_0(T) = T^{1/2}$. Анизотропные складки на поверхности $A(t, T)$ появляются из-за большого значения v (несмотря на медленный диффузионный процесс 4-го порядка) вдоль оси T .

мы вычислим в следующем разделе на основании уравнения (21) с тем, чтобы продемонстрировать соотношение нашей модели и моделей, использовавшихся ранее.

5.4. Коэффициент корреляции между двумя облигациями. Случай краткосрочного опциона

Для исследования различий между результатами раздела 5.2 и предыдущими работами мы вычислим значение ρ точно. В добавление к основным предположениям об отсутствии операционных издержек (трения), непрерывном функционировании рынка и отсутствии ограничений на условия контракта [7], использованных выше, мы ограничимся случаем, когда краткосрочный опцион заключен в отношении облигации задолго до ее погашения и по истечении значительного срока после выпуска облигации. Мы также предположим, что рынок облигаций медленный, так что амплитуда шума σB может быть аппроксимирована константой κ , сводя логарифмически нормальный шум к нормальному. Это — так называемая чисто диффузионная модель [7]. Другой, но связанной с ней, аппроксимацией было бы исключение нелинейного члена в соответствующем уравнении для логарифма цены $A = \ln B$.

В линейном приближении и для нормального шума уравнение (23) преобразуется в

$$dB = \left(\mu B + v \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \right) + \kappa d\Xi, \quad (46)$$

с процентной ставкой $\mu(T)$. На него налагаются начальное условие $B(0, T) = B_0(T)$, и уравнение рассматривается на бесконечном интервале $-\infty < T < \infty$, поскольку мы планируем сосредоточиться на эволюции в интер-

вале (t, T) , то $t \ll T \ll T_m$. Данное линейное уравнение описывает гауссов процесс и может быть решено аналитически с помощью преобразования Фурье по T для случая $\mu(T) = \text{const}$. Эволюция интегралов Фурье,

$$\begin{aligned} b(t, \Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT \exp(-i\Omega T) B(t, T), \\ \xi(t, \Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT \exp(-i\Omega T) \Xi(t, T), \end{aligned} \quad (47)$$

отвечает процессу Орнштейна–Уленбека (ср. с [22]),

$$db = (\mu b - v\Omega^2 b) dt + \kappa d\xi = \bar{\mu} b dt + \kappa d\xi, \quad (48)$$

со ставкой $\bar{\mu} = \mu - v\Omega^2$. Соответствующая гауссова функция Грина есть

$$\begin{aligned} P(b_1, t_1; b_2, t_2) &= \left(\frac{\pi \kappa^2}{\bar{\mu}} \left\{ \exp[2\bar{\mu}(t_2 - t_1)] - 1 \right\} \right)^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left(- \frac{\bar{\mu} \left\{ b_2 - b_1 \exp[\bar{\mu}(t_2 - t_1)] \right\}^2}{\kappa^2 \left\{ \exp[\bar{\mu}(t_2 - t_1)] - 1 \right\}} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Вероятность получить конкретную форму $B(t_2, T) = B_2(T)$, начиная с указанной формы $B(t_1, T) = B_1(T)$, дается формулой

$$P[B_1(T), t_1; B_2(T), t_2] = \exp \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \ln P(b_1, t_1; b_2, t_2) \right]. \quad (50)$$

Это позволяет вычислять различные корреляции. Например, можно показать, что среднее значение и корреляционная функция первого порядка равны

$$\begin{aligned} \langle B_2(T) \rangle &= \frac{1}{[2\pi v(t_2 - t_1)]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dT' B_1(T') \times \\ &\times \exp \left[- \frac{(T - T')^2}{2v(t_2 - t_1)} \right], \\ \langle B_2(T_1) B_2(T_2) \rangle &= \langle B_2(T) \rangle \langle B_2(T_2) \rangle + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{8\pi^2 v \Omega^2} \left\{ 1 - \exp[-2v\Omega^2(t_2 - t_1)] \right\} \times \\ &\times \exp[i\Omega(T_1 + T_2)]. \end{aligned} \quad (51)$$

В локальных моделях без производных $\partial/\partial T$ уравнение (51) заменяется двумя обычными стохастическими дифференциальными уравнениями для облигаций, погашаемых при t_X и T_X [6]. Они эквивалентны уравнениям (30), (31) при условии, что H представляет облигацию t_X и B — облигацию T_X . Сравнивая уравнения (30), (31) с уравнением (51), сопоставим члены $\sigma_1 S dz_1$ и $\sigma_2 B dz_2$ с членами $(\partial^2 B / \partial T^2) dt + \kappa d\Xi$, взятыми в моменты t_X и T_X , соответственно. Коэффициент корреляции оказывается равен

$$\rho(t, t_X, T_X) = \langle \Xi_\alpha \Xi_\beta \rangle_c = \frac{v}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\partial^4}{\partial^2 t_X \partial^2 T_X} \langle B_2(t_X) B_2(T_X) \rangle, \quad (52)$$

и может быть вычислен с помощью уравнения (51). Здесь мы обозначили облигацию, погашаемую в момент t_X ,

как B_1 , и облигацию, погашаемую в момент T_X , как B_2 . Получим

$$\rho = \frac{v^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left\{ \frac{\chi^2 [4vt - (t_X + T_X)^2]}{2^{13/2} (\pi vt)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(t_X + T_X)^2}{8vt} \right] + \frac{\delta^4}{\partial t_X^2 \partial T_X^2} \langle B_2(t_X) \rangle \langle B_2(T_X) \rangle \right\}. \quad (53)$$

Таким образом, "эффективные" случайные процессы, управляющие эволюцией обеих облигаций, обнаруживают корреляцию, и вместо использования формулы с $\rho = 0$ и параметров, присущих модели коллективно флуктуирующих облигаций (раздел 5.2), можно использовать стандартный подход [8]. Эта гибкость ограничена гауссовым случаем.

6. Заключение

Мы указали различные методы функционального анализа, которые позволяют обобщить финансовые модели до уровня описания вероятностей различных реализаций кривым доходности и структуры форвардных ставок. В настоящее время осуществляется адаптация нашей модели к реальным кривым доходности согласованно эволюционирующих облигаций при наличии арбитражных возможностей. Наша модель позволяет также изучать влияние арбитража, возникающего при различных процентных ставках. Мы надеемся, что указанные принципы будут полезны при моделировании других согласованно эволюционирующих активов.

Благодарности. Мы благодарим З. Арбиеву за неоценимую помощь при подготовке данной работы, Т.Д. Ньюмана за полезные обсуждения и С. Адамчука за ценные комментарии. Мы благодарны Г. Константиридесу за обсуждение арбитража и модели БТ.

Словарь терминов

Актив — часть бухгалтерского баланса, отражающая все принадлежащие предприятию, организации материальные ценности, денежные средства, долговые обязательства.

Арбитражные сделки (арбитраж) — операции с целью получения дохода от перепродажи товаров (контрактов) по более выгодным ценам.

Кривая доходности — график зависимости доходности облигаций одинакового срока действия от времени, остающегося до их погашения.

Облигация — ценная бумага, удостоверяющая факт внесения и право получения ее владельцем номинальной стоимости этой ценной бумаги в предусмотренный срок с уплатой фиксированного процента.

Опцион — контракт, дающий право на покупку или продажу определенного числа акции по зафиксированной цене, действующей в течение всего указанного в контракте срока. Покупатель контракта выплачивает продавцу так называемую опционную премию — цену опциона.

Опцион call — опцион на покупку.

Портфель заказов (портфель) — совокупность заказов, полученных на определенную дату.

Процентная ставка — цена денежной ссуды, определяемая отношением суммы денег, выплачиваемых в единицу времени в качестве платы за ссуду, к величине ссуды.

Рынок — сфера товарного обращения, где формируется спрос, предложение и цена на товары.

Форвардная сделка — вид сделки, в результате которой товар должен быть поставлен не сразу, а в будущем, но с определением всех условий непосредственно во время заключения сделки.

Хеджирование — операция на бирже, позволяющая застраховаться от неблагоприятного изменения цены.

Список литературы

1. Heath D, Jarrow R, Morton A "Bond Pricing and the Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology" *Econometrica* **60** 77 (1992)
2. Brace A, Gatarek D, Musiela M *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, Preprint Dept. of Statistics, School of Mathematics, UNSW, Report N S95-2 (Australia)
3. Chen L "Stochastic Mean and Stochastic Volatility — a Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and its Application in Derivatives Pricing and Risk Management" *Financial Markets, Institutions Instrum.* **5** 1 (1996)
4. Hull J, White A "Pricing Interest Rates Derivative Securities" *Rev. Financial Studies* **3** 573 (1990)
5. Vasicek O A "An Equilibrium Characterization of the Term Structure" *J. Financial Economics* **5** 177 (1977)
6. Merton R "The Theory of Rational Option Pricing" *Bell J. Economics Management Sci.* **4** 141 (1973)
7. Hull J *Options, Futures, and other Derivative Securities* 2nd ed. (New Jersey, Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1993)
8. Ball C A, Torous W N "Bond Price Dynamics and Options" *J. Financial Quantitat. Analysis* **18** 517 (1993)
9. Cheng S "On the Feasibility of Arbitrage-Based Option Pricing when Stochastic Bond Price Processes are Involved" *J. Econ. Theor.* **53** 185 (1991)
10. Markowitz H M "Portfolio Selection" *J. Finance* **7** 77 (1952)
11. Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A "A Theory of the Term Structure of Interest Rates" *Econometrica* **53** 385 (1985)
12. Ho T S Y, Lee S-B "Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims" *J. Finance* **41** 1011 (1986)
13. Feynman R P, Hibbs A R *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill, 1965)
14. Duffie D *Security Markets. Stochastic Models* (Boston: Academic Press, 1988)
15. Zinn-Justin J *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 1990)
16. Breakey J D "Yield Curve Arbitrage and Trading", in *The Handbook of Treasury Securities* (Ed. F J Fabozzi) (Chicago: Probus, 1987)
17. Burgers J M *The Non-linear Diffusion Equation* (Dordrecht: Reidel, 1974)
18. Krug J, Spohn H, in *Solids far from Equilibrium: Growth, Morphology and Defects* (Ed. C Godreche) (Cambridge: Cambridge University Press, 1990)
19. Esipov S E, Newman T J "Interface Growth and Burgers Turbulence: the Problem of Random Initial Conditions" *Phys. Rev. E* **48** 1046 (1993); see also: Esipov S E "Energy Decay in Burgers Turbulence and Interface Growth. The Problem of Random Initial Conditions II" *Phys. Rev. E* **49** 2070 (1994)
20. Hodges S, Carverhill A "Quasi Mean Reversion in an Efficient Stock Market: the Characterization of Economic Equilibria Which Support Black-Scholes Option Pricing" *Econ. J.* **103** 395 (1993)
21. Itzykson C, Zuber J-B *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill, 1980)
22. Van Kampen N G *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: North-Holland, 1981)

Collectively fluctuating assets in the presence of arbitrage opportunities, and option pricing**A.N. Adamchuk***201 Physics Building, Department of Physics,**Syracuse University, Syracuse, NY 13244**E-mail: 102731.3275@CompuServe.COM***S.E. Esipov***5640 South Ellis Avenue, Department of Physics and James Franck Institute,**University of Chicago, Chicago, IL 50637**E-mail: Sergei_Esipov%CENTRE-RE@notes.inter|iant.com*

Methods of functional analysis are applied to describe collectively fluctuating default-free pure discount bonds subject to trading-related noise which generates arbitrage opportunities. Two key elements of the model are: (i) the naturally incorporated fixed bond price at maturity which is achieved by making use of only those fluctuating paths of price motion which terminate at a specified final condition, and (ii) account for most attractive arbitrage between bonds with close maturities which is modelled in a linear local approximation. The model can be written in different closed forms as a stochastic partial differential equation. Functional Black–Scholes equation for contingent claims is derived, and a connection with the conventional methods of option valuation is indicated.

PACS numbers: **01.75. + m**, **02.30.Sa**, **02.90. + p**, **89.90. + n**

Bibliography — 22 references

Received 3 April 1997