Ноябрь 1997 г. *Том 167, № 11*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Гамильтоновский формализм для нелинейных волн

В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов

Представлен обзор по гамильтоновскому описанию систем гидродинамического типа для плазмы, гидродинамики и магнитной гидродинамики. Основное внимание уделяется проблеме введения канонических переменных. Указана связь с другими способами введения гамильтоновской структуры, в частности, с помощью скобок Пуассона, выраженных в естественных переменных. Показано, что вырожденность неканонических скобок Пуассона связана с существованием симметрии — группы переобозначений лагранжевых маркеров жидких частиц. Все известные теоремы о сохранении вихря (теоремы Коши, Эртеля, Томсона (Кельвина), вмороженности и сохранения топологического инварианта Хопфа) являются следствием данной симметрии. Введены канонические переменные в бесстолкновительную кинетику плазмы. Обсуждается вопрос о гамильтоновских структурах уравнений Бенни и уравнения, описывающего волны Россби. Введена гамильтоновская структура в уравнение Деви – Стюартсона. Представлен также общий метод исследования слабонелинейных волн, основанный на классической теории возмущений и редукции гамильтонианов.

PACS numbers: **52.30.–q**, 52.35.Ra, 52.55.Fa

Содержание

1. Введение

Уравнения гидродинамики и их различные обобщения являются одним из основных инструментов описания нелинейных волн в макроскопической физике. При их изучении весьма важным является вопрос о том, обладают ли эти уравнения в случае отсутствия диссипации гамильтоновской структурой. Прежде всего этот вопрос важен в связи с проблемой квантования. Однако и в классическом случае установление факта гамильтоновости позволяет (хотя это и не всегда является простым делом) ввести явным образом канонические переменные, после чего все варианты теории возмущений значительно упрощаются и стандартизуются (см., например, [1 – 4]). В частности, такой подход дает возможность рассматривать любые нелинейные процессы с единых позиций без фиксации их особенностей, связанных с конкретной средой. Гамильтоновский метод дает также определенные преимущества при тех или иных приближениях. Классический пример этого — описание движений сплошной среды, имеющих два (или несколько) различных пространственных или временных масштабов, например, описание взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн (см. замечательную книгу [5]). Для гамильтоновских систем задача устойчивости стационарных решений (кноидальных волн, солитонов, вихрей и т.п.) формулируется также единообразно. Ее решение для малых возмущений может быть найдено из анализа квадратичного гамильтониана, а если изучается нелинейная устойчивость (см., например, [6 – 8]), то гамильтониан в комбинации с другими интегралами (числом частиц, импульсом и т.д.) может быть использован в качестве функционала Ляпунова.

Уравнения гидродинамического типа помимо собственно гидродинамики широко используются для описания процессов в физике плазмы и магнитной гидродинамике (МГД). Они представляют собой уравнения движения среды и уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей. Важное значение эти модели также играют для физики твердого тела и нелинейной оптики.

Вопрос о гамильтоновской структуре гидродинамических уравнений имеет давнюю историю. Имеется два

В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН,
117334 Москва, ул. Косыгина 2, Россия
E-mail: zakharov@itp.ac.ru, kuznetso@itp.ac.ru

Статья поступила 5 июня 1997 г.

традиционных подхода к его решению. Во-первых, можно попытаться непосредственно угадать для той или иной системы полный набор канонических переменных. При этом автоматически решается проблема вычисления скобок Пуассона между любыми физическими величинами, удается также записать вариационный принцип. Обычно гамильтоновские переменные выражаются через естественные физические переменные (скорость, давление) весьма нетривиальным образом.

Во-вторых, возможно прямое нахождение выражения для скобки Пуассона в "естественных" переменных. Это не дает возможности ввести вариационный принцип, но для ряда физических задач, в том числе для задачи квантования, оказывается достаточным. Уравнения гидродинамического типа имеют ту же степень нелинейности (квадратичную по скоростям), что и интеграл энергии. Следовательно, выражение для скобки Пуассона должно быть линейным по входящим в него переменным. Легко показать, что все такие скобки представляют собой скобки Березина – Кириллова – Константа (БКК) на некоторых группах Ли. Это немаловажное обстоятельство было понято сравнительно недавно, впервые, по-видимому, В.И. Арнольдом [9, 10] (см. также [11]), хотя скобки Пуассона между компонентами скорости вычислялись в связи с проблемой квантования еще в работе Л.Д. Ландау [12]. Развитию этих представлений были посвящены также работы [13, 14]. Для уравнений магнитной гидродинамики неканонические скобки Пуассона были вычислены впервые в [15], а для кинетических уравнений Власова – Максвелла для плазмы — в [16].

Что касается канонических переменных, то для идеальной гидродинамики однородной несжимаемой жидкости они были найдены еще в прошлом веке Клебшем (см., например, [17]). Топологический смысл этих переменных был разъяснен в [18]. В 1932 г. Х. Бейтман [19], впоследствии независимо Б.И. Давыдов [20] распространили результат Клебша на сжимаемую баротропную жидкость. В 1952 г. И.М. Халатников [21] ввел канонические переменные для небаротропных течений идеальной жидкости. При этом одна из переменных Клебша отождествлялась с энтропией. Позднее этот результат был повторен в ряде работ (см., например, [22]).

Из этих результатов можно вывести канонические переменные для несжимаемой жидкости переменной плотности, в том числе и жидкости со свободной границей, что и было сделано в [23]. Однако весьма важный с точки зрения поверхностных волн вопрос о гамильтоновском описании жидкости со свободной поверхностью был решен ранее одним из авторов настоящего обзора (В.Е. Захаровым) [25]. Канонические переменные были приведены без доказательства в 1966 г. [24]. В этих работах рассматривалось лишь потенциальное движение жидкости. Частичное перенесение результатов на случай непотенциального течения было осуществлено в работах [26, 27], при этом в [27] была решена также проблема гамильтоновского описания внутренних волн в океане. Изложение этих результатов можно найти в монографии [28], целиком написанной с позиции гамильтоновского формализма, а также в [29].

Особый интерес представляет гамильтоновский формализм для уравнений Бенни, описывающих непотенциальные длинные волны на мелкой воде. Система уравнений Бенни является вполне интегрируемой [30, 31], гамильтоновский формализм для нее был сформулирован (на языке скобок Пуассона между моментами от продольной скорости) в [32]. Канонические переменные, позволяющие вычислять скобки Пуассона между любыми величинами, были найдены для уравнений Бенни в [30]. Вопрос этот неожиданным образом оказался связанным с гамильтоновским описанием плазмы, давно привлекавшим внимание. Гамильтоновское описание магнитной гидродинамики было осуществлено авторами настоящего обзора в 1970 г. [33]. Канонические переменные в двухжидкостную гидродинамическую модель были введены в [34], впоследствии они использовались в ряде работ по описанию нелинейных процессов в плазме (см., например, [35]). Оставался открытым вопрос о введении канонических переменных в бесстолкновительную кинетику плазмы, хотя после [31] стало ясно, что такие переменные должны существовать. В настоящем обзоре эти переменные введены при использовании эквивалентности уравнений Власова бесконечной системе гидродинамических уравнений. Эта эквивалентность, замеченная одним из авторов (Е.А. Кузнецовым), осуществляется преобразованием Радона и, по существу, использовалась в [30], где было показано, что уравнения Бенни эквивалентны одному варианту уравнений Власова.

В настоящем обзоре дано также систематическое описание упомянутых выше работ. Обсуждается также интересный вопрос о гамильтоновской структуре для двумерной несжимаемой гидродинамики и для уравнения Чарни – Обухова – Хасегавы – Мимы, описывающего волны Россби. В этих системах не удается ввести удобные канонические переменные, хотя существование гамильтоновской структуры является доказанным фактом. Питербарг [39], обобщая результаты [38], показал, что неканоническая скобка Пуассона для произвольных течений с замкнутыми линиями тока может быть сведена к скобке Гарднера – Захарова – Фаддеева, возникшей впервые в теории интегрируемых уравнений [40], и предложил конструктивную схему нахождения канонического базиса. Кроме того, в данном обзоре рассматриваются некоторые общие свойства гамильтоновских систем с континуальным числом степеней свободы.

Основой данного обзора является работа [1] обзорного характера, опубликованная авторами в 1986 г. в достаточно редком издании на английском языке и оставшаяся по этой причине практически неизвестной не только русскому, но и зарубежному читателю. По сравнению с [1] текст обзора значительно переработан и расширен. Переработке и дополнению подверглись прежде всего вопросы о неканонических скобках Пуассона и их вырождении. Для систем гидродинамического типа это вырождение связано со скрытой симметрией уравнений, являющейся, по существу, калибровочной. Эта симметрия имеет лагранжево происхождение; она связана с группой переобозначений (*relabeling group*) лагранжевых переменных, маркирующих каждую жидкую частицу. Очевидно, что никакое изменение маркеров не может влиять на динамику системы. Впервые наиболее полно этот факт был понят Салмоном [41] в 1982 г., хотя еще Эккарт в 1938 г., затем в 1960 г. [44], а немного позднее Ньюкомб (1967 г.) [46] понимали роль этой симметрии. В частности, ее следствием являются все известные теоремы о сохранении вихря: теорема Эртеля

— существование для небаротропных течений лагранжева инварианта [42] (см. также с. 31 в [54]), теоремы вмороженности Коши [17] и Томсона (Кельвина) о сохранении циркуляции (§ 8 в [54]), а также сохранении топологического инварианта Хопфа [56, 57], характеризующего заузленность течения. Важно, что эта симметрия связана также с введением канонических переменных Клебша и их калибровочной симметрией.

Следует отметить, что введение канонических переменных типа Клебша в гидродинамических моделях позволяет найти выражения всех известных неканонических скобок Пуассона исходя из пересчета канонических скобок. Этот факт впервые был продемонстрирован авторами данного обзора [47, 1] для уравнений гидродинамики и кинетических уравнений Власова – Максвелла для плазмы. Однако переход в обратном направлении, т.е. нахождение канонической скобки из неканонической в ситуации общего положения, сопряжен с определенными трудностями, связанными с существованием вырожденности неканонических скобок.

В данном обзоре эти вопросы подробно рассмотрены применительно к уравнениям идеальной гидродинамики. Мы не обсуждаем, какова роль этой симметрии для других гидродинамических моделей за исключением, пожалуй, уравнений МГД (см. [48]). По нашему мнению, этот вопрос недостаточно изучен и требует дополнительных исследований. Однако он принципиален для понимания многих нелинейных явлений, происходящих в жидкостях и плазме. Прежде всего это относится к процессам пересоединения вихревых линий для жидкостей либо линий магнитного поля в случае плазмы, т.е. к тем процессам, которые изменяют топологию системы.

2. Общие замечания

Напомним некоторые элементарные факты. Наиболее наивное определение конечномерной гамильтоновской системы выглядит следующим образом. Рассматривается система четного числа дифференциальных уравнений относительно функции времени $q_k(t)$, $p_k(t)$ $(k = 1, \ldots, N)$, имеющих вид

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\,. \tag{2.1}$$

Здесь $H(p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N)$ — заданная функция переменных, гамильтониан.

Приведенное определение удовлетворительно далеко не всегда, поскольку оно неявно предполагает, что область изменения p_i и q_i — фазовое пространство — представляет собой область вещественного векторного пространства R^{2N}. Однако уже в случае математического маятника, когда обобщенная координата есть угол, приходится отождествлять его значения, отличающиеся на 2π. Таким образом, фазовое пространство маятника представляет собой цилиндр, что весьма существенно, так как любые функции, определенные однозначно на цилиндре, должны быть периодическими функциями угловой координаты. Еще сложнее обстоит дело с пространственным маятником или движением твердого тела с закрепленной точкой. Все эти примеры относятся к следующему по степени нетривиальности классу гамильтоновских систем, когда можно с достаточной степенью определенности разделить две группы переменных — обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_N$ и обобщенные импульсы $p_1, \ldots, p_N$. Разделение основано на том, что обобщенные координаты задают точку на произвольном N-мерном многообразии (конфигурационном пространстве) M, а импульсы могут принимать произвольное значение в векторном пространстве импульсов R^N. В этом случае фазовое пространство системы — $G = T^*(M)$ — представляет собой кокасательное расслоение многообразия M. Гамильтоновские системы этого типа сохраняют основные свойства "наивных" гамильтоновских систем. В частности, для них справедлив вариационный принцип в форме Гамильтона и возможен переход к лагранжеву описанию.

В стандартных учебниках теоретической физики (см., например, [55]) обычно описываются только системы этого типа.

Полезно, однако, рассматривать гамильтоновские системы более общего вида, в которых невозможно провести однозначное разделение переменных на координаты и импульсы. Эти системы удобно описывать в общих координатах, вообще говоря, не являющихся каноническими. Пусть G — фазовое пространство системы — многообразие размерности N, покрытое некоторой системой карт. Мы предполагаем, что на многообразии G задана симплектическая структура — невырожденная замкнутая два-форма Ω. Это означает, что в каждой точке определены дважды ковариантный антисимметричный тензор $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$. Пусть x_i — локальные координаты некоторой точки. Условие замкнутости означает, что Ω_{ij} подчиняется системе уравнений

$$\frac{\partial\Omega_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial\Omega_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial\Omega_{ki}}{\partial x_j} = 0\,. \tag{2.2}$$

Кроме того, $\det\Omega_{ij} \neq 0$.

Система дифференциальных уравнений, определенных на G, называется гамильтоновской, если на G задана еще функция H и в окрестности каждой точки

$$\Omega_{ij}\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial x_i}\,. \tag{2.3}$$

Легко видеть, что при заменах координат $x_i = x_i(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$, для которых якобиан $\partial(x_1, \ldots, x_N) \times [\partial(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)]^{-1} \neq 0$, уравнение (2.3) остается инвариантным. При этом матрица Ω преобразуется по следующему закону:

$$\tilde{\Omega}_{lm} = \frac{\partial x_i}{\partial\tilde{x}_l}\,\Omega_{ij}\,\frac{\partial x_j}{\partial\tilde{x}_m}\,.$$

Многообразие, на котором можно задать симплектическую структуру, называется симплектическим. Оно обязательно имеет четную размерность (в противном случае $\det\Omega_{ij} = 0$). В каждой односвязной области условия (2.2) могут быть проинтегрированы

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\,. \tag{2.4}$$

Здесь $A_i(x)$ — "потенциалы" формы Ω_{ij}. Если решения системы (2.3) не выходят за пределы этой области, то справедлив вариационный принцип $\delta S = 0$,

$$S = \int (A_i\dot{x}_i + H)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.5}$$

Однако глобально вариационный принцип для (2.5) существует только, если форма Ω_{ij} является точной, т.е. соотношение (2.4) может быть распространено на все многообразие G. Вообще говоря, A_i являются многозначными функциями на G, приобретающими ненулевые приращения при обходе каждого не гомологичного нуля цикла. Локально в каждой односвязной области можно подходящей заменой переменных привести систему к каноническим координатам, т.е. к виду (2.1) (теорема Дарбу). Глобально на всем G это, вообще говоря, невозможно, даже если форма (2.4) точна. Поскольку форма Ω_{ij} невырождена, уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\dot{x}_i = R_{ij}\,\frac{\partial H}{\partial x_j}\,. \tag{2.6}$$

Здесь $R_{ij} = -R_{ji}$ — матрица, обратная к Ω_{ij}. Легко проверить, что соотношения (2.2) эквивалентны уравнениям

$$R_{im}\,\frac{\partial}{\partial x_m}\,R_{jk} + R_{km}\,\frac{\partial}{\partial x_m}\,R_{ij} + R_{jm}\,\frac{\partial}{\partial x_m}\,R_{ik} = 0\,. \tag{2.7}$$

Далее с помощью матрицы R определяется скобка Пуассона между любыми функциями A и B, заданными на G:

$$\{A, B\} = \sum R_{ij}\,\frac{\partial A}{\partial x_i}\,\frac{\partial B}{\partial x_j}\,. \tag{2.8}$$

Из антисимметрии R_{ij} следует

$$\{A, B\} = -\{B, A\}\,,$$

а соотношения (2.7) обеспечивают выполнение тождества Якоби

$$\big\{\{A, B\}, C\big\} + \big\{\{B, C\}, A\big\} + \big\{\{C, A\}, B\big\} = 0\,. \tag{2.9}$$

В силу невырожденности матрицы Ω_{ij}, в каждой системе координат матрица R_{ij} тоже невырождена. Матрица R называется симплектическим оператором. Она играет ту же самую роль, что и метрический тензор g_{ij} в евклидовой геометрии. Так, обращение в нуль тензора кривизны для евклидова пространства эквивалентно в данном случае условию (2.7). Соответственно каноническая форма

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

является аналогом формы

$$g = I$$

в евклидовом пространстве, где I — единичная матрица.

Следующим шагом на пути к обобщению понятия гамильтоновской системы является отказ от требования невырожденности R. Возникающий при этом вариант гамильтоновской механики иногда называют пуассоновской механикой.

Если $\det R_{ik} = 0$, то возвращение к виду (2.3) невозможно. Пусть ξ_i^α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ — базис в коядре оператора R_{ij} (т.е. $\xi_i R_{ij} = 0$). Из (2.6) следуют теперь соотношения

$$\xi_i^\alpha \dot{x}_i = 0\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, k\,. \tag{2.10}$$

В односвязной области, в которой ранг матрицы R постоянен, в силу теоремы Фробениуса уравнения (2.10) могут быть проинтегрированы в виде

$$f^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{const}\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, k\,.$$

В свою очередь эти соотношения связаны с векторами ξ_i^α очевидными формулами

$$\xi_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}\,.$$

Константы f^α называются функциями Казимира или кратко — просто казимирами. Теорема Фробениуса и соотношения (2.7) гарантируют, что все k инвариантов f^α функционально независимы. Очевидно, что они — интегралы движения нашей гамильтоновской системы. Эти интегралы выделяют в G-инвариантные относительно системы (2.6) многообразия (симплектические листы). На каждом из них можно ввести обычную гамильтоновскую механику. Из всего сказанного ясно, что возможность вводить скобки Пуассона представляет собой гамильтоновость в наиболее слабом смысле.

Особый интерес представляет случай, когда элементы R_{ij} линейно зависят от координат

$$R_{ij} = e_{ij,m} x_m\,. \tag{2.11}$$

Из условия (2.7) следует теперь, что $e_{ij,m}$ подчиняются теперь соотношениям

$$e_{ik,m}\,e_{jm,l} + e_{ji,m}\,e_{km,l} + e_{kj,m}\,e_{im,l} = 0\,,$$

т.е. являются структурными константами некоторой алгебры Ли — L. Вычисляя скобки между величинами x_i, x_j, убеждаемся, что

$$\{x_i, x_j\} = R_{ij} = e_{ij,m}\,x_m\,. \tag{2.12}$$

Таким образом, само пространство G представляет теперь алгебру L.

Матрица R_{ij}, вообще говоря, вырождена. Однако соотношения (2.10) всегда являются интегрируемыми. Рассмотрим алгебру L*, сопряженную к L, и соответствующую ей группу Ли l^*. Теперь алгебра L образует коприсоединенное представление группы l^*. Соотношения (2.10) инвариантны относительно действия группы l^*, и поэтому условия (2.12) существуют и определяют в L орбиты действия группы l^*. На этих орбитах (см. [36, 37]) существует полноценная гамильтонова механика.

Если гамильтониан является полиномом от своих переменных, то в канонических координатах уравнения также полиномиальны и имеют на единицу меньшую степень нелинейности. Если степень нелинейности заведомо гамильтоновской системы совпадает со степенью нелинейности гамильтониана, то матрица линейна по координатам, и симплектическое многообразие представляет собой орбиту некоторой группы Ли в ее коприсоединенном представлении. Именно так обстоит дело для уравнений гидродинамического типа.

Другим интересным случаем является ситуация, когда пуассоновская структура R зависит от координат x_i квадратичным образом. В этом варианте она может быть интерпретирована как "классическая R-матрица", играющая важную роль в теории гамильтоновских систем, интегрируемых при помощи метода обратной задачи рассеяния. Эта теория находится вне пределов настоящего обзора и мы в дальнейшем не будем ее касаться.

3. Гамильтоновский формализм в сплошных средах

Введение гамильтоновской структуры для консервативных нелинейных сред по сути дела представляет собой обобщение гамильтоновского формализма для систем с конечным числом степеней свободы на системы с континуальным числом степеней свободы. Под этим, в основном, мы будем подразумевать описание динамики сплошной среды с помощью канонических переменных. Каких-либо общих рецептов введения канонических переменных в сплошных средах нет. Для решения этой задачи иногда оказывается полезным подход с использованием лагранжиана со связями, в качестве которых выступают какие-либо уравнения движения. Данный метод, восходящий, по-видимому, к работам [19, 20], оправдан, если выражение для лагранжиана без связей прямо вытекает из механики или теории поля. К таким системам, в частности, относятся рассматриваемые в данном обзоре системы гидродинамического типа, широко используемые для описания нелинейных волн в плазме, гидродинамике и магнитной гидродинамике. Для всех этих систем мы найдем канонические переменные.

Пусть среда описывается одной парой канонических переменных — обобщенной координатой $q(\mathbf{r},t)$ и обобщенным импульсом $p(\mathbf{r},t)$, эволюция которых задается уравнениями Гамильтона:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q}, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p}\,. \tag{3.1}$$

Здесь гамильтониан H представляет собой некоторый функционал от p и q. Формально его можно представить в виде ряда по степеням канонических переменных

$$H = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\int G_n^k(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_{k+1},\ldots,\mathbf{r}_n)\times$$
$$\times\, p(\mathbf{r}_1)\ldots p(\mathbf{r}_k)q(\mathbf{r}_{k+1})\ldots q(\mathbf{r}_n)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1\ldots\mathrm{d}\mathbf{r}_n\,. \tag{3.2}$$

Это разложение в отсутствие внешних сил начинается с квадратичного по p и q члена. Для пространственно-однородных сред структурные функции G_n^k являются функциями разностей $(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$. В частности, для таких сред квадратичный член разложения H_0 имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2}\int\big[A(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,p(\mathbf{r})\,p(\mathbf{r}') + 2B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,p(\mathbf{r})q(\mathbf{r}') +$$
$$+\, C(\mathbf{r}-\mathbf{r}')q(\mathbf{r})q(\mathbf{r}')\big]\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\,. \tag{3.3}$$

Диагонализация H_0 решает задачу устойчивости однородной среды относительно малых возмущений.

Для ее решения вначале совершим фурье-преобразование по координатам:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int p_k\exp(\mathrm{i}\mathbf{kr})\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,, \qquad p_k = p^*_{-k}\,,$$

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int q_k\exp(\mathrm{i}\mathbf{kr})\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,, \qquad q_k = q^*_{-k}\,.$$

В результате (3.3) принимает вид

$$H_0 = \frac{1}{2}\int\big[A_k p_k p_k^* + 2B_k p_k q_k^* + C_k q_k q_k^*\big]\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,.$$

Входящие сюда фурье-образы от структурных функций обладают следующими свойствами:

$$A_k = A_k^* = A_{-k}\,, \qquad C_k = C_k^* = C_{-k}\,,$$
$$B_k = B_{1k} + \mathrm{i}B_{2k} = B_{1-k} - \mathrm{i}B_{2-k}\,.$$

При этом уравнения (3.1) в k-представлении имеют вид

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q_k^*}\,, \qquad \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_k^*}\,.$$

Уравнения для малых возмущений получаются отсюда варьированием гамильтониана H_0. Анализ этих уравнений показывает, что в среде могут распространяться волны с частотами

$$\omega_{1,2} = -B_{2k} \pm \sqrt{A_k C_k - B_{1k}^2}\,.$$

Среда будет устойчивой относительно малых возмущений, если

$$A_k C_k - B_{1k}^2 > 0\,, \tag{3.4}$$

и, соответственно, неустойчивой — в противоположном случае. Последний может быть реализован, например, в холодной плазме с монохроматическим электронным пучком, когда плазменные электроны и электроны пучка можно рассматривать как две независимые жидкости. В дальнейшем будем предполагать условие устойчивости (3.4) выполненным. Для инвариантных относительно отражений координат $\big(B(\mathbf{r}) = B(-\mathbf{r})\big)$ сред

$$B_{2k} = 0\,, \qquad \omega_k^2 = A_k C_k - B_{1k}^2\,.$$

Далее совершим каноническое преобразование от переменных p_k и q_k к нормальным переменным a_k и a_k^*:

$$p_k = U_k a_k + U_k^* a_{-k}^* \qquad (U_k = U_{-k})\,,$$
$$q_k = V_k a_k + V_k^* a_{-k}^* \qquad (V_k = V_{-k})\,. \tag{3.5}$$

В новых переменных гамильтониан H_0 равен

$$H_0 = \int \omega_k a_k^* a_k\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,, \tag{3.6}$$

а уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -\mathrm{i}\,\frac{\delta H}{\delta a_k^*}\,. \tag{3.7}$$

Здесь ω_k — одна из функций $\omega_{1,2}$.

Подставляя (3.5) в (3.3), из сравнения с (3.6) получим систему уравнений для определения U_k и V_k. Требуя, чтобы такое преобразование было каноническим:

$$U_k V_k^* - U_k^* V_k = -\mathrm{i}\,,$$

найдем

$$U_k = \mathrm{i}\,\frac{B_{1k} - \mathrm{i}\omega_{0k}}{\sqrt{2}A_k\omega_{0k}}\exp(\mathrm{i}\varphi_k)\,,$$

$$V_k = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{A_k}{2\omega_{0k}}}\exp(\mathrm{i}\varphi_k)\,.$$

Здесь $\omega_{0k} = \mathrm{sign}\,(A_k)(A_k C_k - B_{1k}^2)^{1/2}$, а φ_k — произвольный фазовый множитель, который в дальнейшем мы будем полагать равным нулю. (Это соответствует простому переопределению a_k: $a_k \to a_k \exp(\mathrm{i}\varphi_k)$.)

При этом

$$\omega_k = -B_{2k} + \mathrm{sign}(A_k)(A_k C_k - D_{1k}^2)^{1/2}$$

есть закон дисперсии волн. Существенно, что знак частоты совпадает со знаком энергии волн в среде [1]. По этой причине все волны можно разделить на два больших класса: волны с положительной энергией и волны с отрицательной энергией. Все хорошо известные волны (гравитационные и капиллярные волны на поверхности жидкости, акустические и световые и т.п.) принадлежат первому классу. Волны с отрицательной энергией, как правило, существуют в средах с током (это электронные или ионные пучки в плазме, течение одной жидкости относительно другой и т.д.). В этом случае своим появлением волны отрицательной энергии обязаны эффекту Доплера. Следует сказать, что нелинейное взаимодействие между волнами внутри одного класса принципиально ничем не отличаетя от взаимодействия внутри другого. Однако это различие существенно при взаимодействии между волнами из разных классов.

Рассмотрим следующие члены разложения по степеням a и a^*, которые получаются после подстановки (3.5) в (3.2). В частности, кубический член H имеет вид

$$H_1 = \int (V_{kk_1k_2} a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + \text{к.с.})\delta_{k-k_1-k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \\ + \frac{1}{3}\int (U_{kk_1k_2} a_k^* a_{k_2}^* a_{k_2}^* + \text{к.с.})\delta_{k+k_1+k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\mathrm{d}\mathbf{k}_2\,, \quad (3.8)$$

где матричные элементы U и V обладают следующими свойствами симметрии:

$$U_{kk_1k_2} = U_{kk_2k_1} = U_{k_2k_1k}\,, \qquad V_{kk_1k_2} = V_{kk_2k_1}\,.$$

Среди членов четвертого порядка нас будет интересовать слагаемое вида

$$H_2 = \frac{1}{2}\int T_{k_1k_2k_3k_4} a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4} \prod_i \mathrm{d}\mathbf{k}_i\,.$$

Каждый из членов разложения H по степеням a и a^* имеет простой физический смысл. Уравнение движения в форме (3.7) представляет предел соответствующих квантовых уравнений для бозе-операторов на случай классического волнового поля, при этом переменные a^* и a выступают в качестве аналогов операторов рождения и уничтожения. Поэтому кубический член разложения гамильтониана описывает трехволновые процессы (первое слагаемое в H_1 ответственно за процессы распада одной волны на две другие, второе слагаемое отвечает за рождение одновременно трех волн), следующий — четырехволновые и т.д.

Необходимо сказать, что вычисление матричных элементов в этой схеме представляет собой чисто алгебраическую процедуру, состоящую из подстановки преобразования (3.5) в соответствующий гамильтониан, затем приведения подобных членов и, наконец, симметризации конечного ответа.

В случае, если среда описывается несколькими парами канонических переменных, то при диагонализации H_0 возникает несколько ветвей колебаний с законами дисперсии $\omega_i(k)$ и амплитудами $a_i(k)$. При этом во всех членах разложения возникает суммирование по типам волн.

В последующем, на конкретных примерах мы покажем, как вводятся канонические переменные и вычисляются матричные элементы.

[1] Подразумевается, что нелинейное взаимодействие волн мало, и знак энергии волны определяется ее квадратичным гамильтонианом.

4. Канонические переменные в гидродинамике

В качестве первого примера рассмотрим уравнения потенциального течения идеальной сжимаемой жидкости, давление в которой есть однозначная функция от плотности $p(\rho)$. Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0\,, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2}{2} + w(\rho) = 0\,. \tag{4.2}$$

Здесь φ — потенциал скоростей, $w(\rho) = \partial\varepsilon/\partial\rho$ — энтальпия, $\varepsilon(\rho)$ — плотность внутренней энергии. Эти уравнения сохраняют энергию

$$H = \int \left[\frac{\rho(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2}{2} + \varepsilon(\rho)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{4.3}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что система (4.1), (4.2) может быть представлена в виде уравнений Гамильтона:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\rho}\,, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\varphi}\,.$$

Таким образом, плотность ρ представляет собой обобщенную координату, а φ — обобщенный импульс.

Этот результат может быть также получен из лагранжева подхода. В этом случае следует воспользоваться известным выражением лагранжиана механической системы, обобщенным на континуальный случай, и дополнить его условием связи:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0\,.$$

Тогда действие

$$S = \int L\,\mathrm{d}t = \int\left\{\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} - \varepsilon(\rho) + \varphi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})\right]\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}t\,.$$

Его вариация по переменной $\mathbf{v}$ приводит к условию потенциальности: $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, а по переменным ρ и φ — к уравнениям (4.1), (4.2). При этом переход к гамильтониану осуществляется по стандартной формуле

$$H = \int \varphi \, \frac{\partial\rho}{\partial t} \, \mathrm{d}\mathbf{r} - L$$

и приводит к (4.3).

Запишем выражения для коэффициентов гамильтониана. Диагонализация

$$H_0 = \int \left[\frac{1}{2} \, \rho_0 (\nabla\varphi)^2 + c_{\mathrm{s}}^2 \, \frac{\delta\rho^2}{2\rho_0} \right] \mathrm{d}\mathbf{r}$$

осуществляется с помощью преобразования

$$\varphi_k = -\frac{\mathrm{i}}{k} \left(\frac{\omega_k}{2\rho_0} \right)^{1/2} (a_k - a_{-k}^*) \,,$$
$$\delta\rho_k = k \left(\frac{\rho_0}{2\omega_k} \right)^{1/2} (a_k + a_{-k}^*) \,, \tag{4.4}$$

где $\omega_k = kc_{\mathrm{s}}$, $\delta\rho = \rho - \rho_0$ — отклонение плотности от равновесной ρ_0, $c_{\mathrm{s}} = (\partial p/\partial\rho_0)^{1/2}$ — скорость звука. Подстановка этого преобразования в следующий член разложения H_1,

$$H_1 = \int \left[\frac{1}{2} \, \delta\rho (\nabla\varphi)^2 + c_{\mathrm{s}}^2 g \, \frac{\delta\rho^3}{2\rho_0^2} \right] \mathrm{d}\mathbf{r} \,,$$

дает следующее выражение для $U_{kk_1k_2}$ и $V_{kk_1k_2}$:

$$U_{kk_1k_2} = V_{kk_1k_2} = \frac{1}{16(\pi^3\rho_0)^{1/2}} \left[3gc_{\mathrm{s}}^2 \, \frac{kk_1k_2}{(\omega_k\omega_{k_1}\omega_{k_2})^{1/2}} + \right.$$
$$+ \left(\frac{\omega_k\omega_{k_1}}{\omega_{k_2}} \right)^{1/2} k_1 \, \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} + \left(\frac{\omega_k\omega_{k_24}}{\omega_{k_1}} \right)^{1/2} k_1 \, \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2)}{kk_2} +$$
$$\left. + \left(\frac{\omega_{k_2}\omega_{k_1}}{\omega_k} \right)^{1/2} k \, \frac{(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1)}{k_2k_1} \right] . \tag{4.5}$$

К тому же типу систем, что и (4.1), (4.2) относятся уравнения, описывающие нелинейные звуковые волны в средах с дисперсией. Эти уравнения могут быть получены, если считать внутреннюю энергию системы $\mathcal{E}_{\mathrm{in}}$ функционалом от плотности. Этот функционал можно представить в виде ряда по степеням $\nabla\rho$:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}} = \int \left[\varepsilon(\rho) + \frac{\nu}{2} (\nabla\rho)^2 + \ldots \right] \mathrm{d}\mathbf{r} \,. \tag{4.6}$$

Классической газодинамике соответствует удержание только первого члена ряда; при учете второго члена получаем систему Буссинеска:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\nabla\varphi) = 0 \,,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 = -\frac{\delta\mathcal{E}_{\mathrm{in}}}{\delta\rho} = -w(\rho) - \nu\Delta\rho \,.$$

Гамильтониан в этом случае совпадает с полной энергией системы, т.е. с суммой кинетической энергии и внутренней энергии, задаваемой формулой (4.6), а ρ и φ остаются канонически сопряженными величинами.

Введение канонических переменных возможно также при учете вихревых движений идеальной жидкости [17, 19, 20]. Рассмотрим сначала баротропные движения жидкости, когда давление p зависит только от плотности ρ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0 \,, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p(\rho)}{\rho} = -\nabla w(\rho) \,. \tag{4.8}$$

Известно, что для этой системы уравнений справедлива теорема Томсона (Кельвина), согласно которой циркуляция скорости по "жидкому" контуру сохраняется. Иначе говоря, в такой системе существует некоторая скалярная функция $\mu(\mathbf{r}, t)$, переносящаяся вместе с жидкостью:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \mu = 0 \,. \tag{4.9}$$

Поэтому при формулировке вариационного принципа учтем уравнение (4.9) в виде связи. Тогда

$$L = \int \left[\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} - \varepsilon(\rho) + \varphi \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) \right) - \lambda \left(\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mu \right) \right] \mathrm{d}\mathbf{r} \,. \tag{4.10}$$

Вариация L по переменным $\mathbf{v}$, ρ и μ приводит к следующцм уравнениям:

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{\rho} \, \nabla\mu + \nabla\varphi \,, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla\varphi) - \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w(\rho) = 0 \,, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\lambda\mathbf{v}) = 0 \,. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.11) представляет собой хорошо известную замену к переменным Клебша λ и μ (см., например, [17]). Уравнение (4.12) — это нестационарное уравнение Бернулли для непотенциальных течений, а уравнение (4.13) определяет эволюцию новой переменной λ.

Выбор переменных λ и μ по данному значению $\mathbf{v}$ неоднозначен. Рассмотрим два набора потенциалов λ, μ, φ и λ', μ', φ', задающих $\mathbf{v}$ с помощью (4.11). Домножив (4.11) на дифференциал $\mathrm{d}\mathbf{r}$, найдем связь между новыми и старыми переменными:

$$\mathrm{d}\varphi + \frac{\lambda}{\rho} \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\varphi' + \frac{\lambda'}{\rho} \, \mathrm{d}\mu'$$

или

$$\mathrm{d}f \equiv \mathrm{d}(\varphi - \varphi') = -\frac{\lambda}{\rho} \, \mathrm{d}\mu - \frac{\lambda'}{\rho} \, \mathrm{d}\mu' \,. \tag{4.14}$$

Последнее соотношение показывает, что $(\varphi' - \varphi)$ является производящей функцией f калибровочных преобразований, зависящей от μ и μ'. Через производящую функцию новые и старые канонические координаты выражаются формулами [21]:

$$\lambda = -\rho \, \frac{\partial f}{\partial\mu} \,, \qquad \lambda' = \rho \, \frac{\partial f}{\partial\mu'} \,, \tag{4.15}$$

определяющими неоднозначность выбора переменных Клебша.

Непосредственно подставляя скорость $\mathbf{v}$, выраженную в переменных λ, μ и φ, в уравнение Эйлера (4.8), убеждаемся, что

$$\frac{\lambda}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}+(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mu\right]+\boldsymbol{\nabla}\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\lambda}{\rho}+(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\frac{\lambda}{\rho}\right]+ \\ +\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\varphi-\frac{\mathbf{v}^2}{2}+w(\rho)\right]=0\,.$$

Это равенство удовлетворяется, если φ и λ подчиняются уравнениям (4.12), (4.13). Поэтому можно говорить, что система уравнений гидродинамики эквивалентна системе (4.7), (4.9), (4.12), (4.13). Этот факт опирается на единственность решения задачи Коши для исходной и полученной систем. При этом по заданной скорости $\mathbf{v}$ в начальный момент времени необходимо построить какой-либо набор функций λ_0, μ_0 и φ_0, выступающих в качестве начальных условий для системы (4.9), (4.12), (4.13). Переходя далее к гамильтоновскому описанию, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\varphi}\,,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\rho}\,; \\ \frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\mu}\,,\qquad \frac{\partial\mu}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\lambda}\,, \tag{4.16}$$

где гамильтониан

$$H=\int\left[\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}+\varepsilon(\rho)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}$$

совпадает с полной энергией системы. Для потенциальных течений ($\lambda=\mu=0$) мы приходим вновь к паре канонических переменных (ρ,φ).

По аналогии с (4.11) вводятся канонические переменные для уравнений релятивистской гидродинамики:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})=0\,, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\right]\mathbf{p}+m\boldsymbol{\nabla}w(\rho)=0\,, \\ \mathbf{p}=m\mathbf{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

В этом случае

$$\frac{\mathbf{p}}{m}=\frac{\lambda}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}\mu+\boldsymbol{\nabla}\varphi\,.$$

Так же как и в предыдущем примере, переменные (λ,μ) и (ρ,φ) образуют пары канонически сопряженных величин, подчиняющихся уравнениям (4.12) с гамильтонианом

$$H=\int\left[\frac{\rho}{m}\,(m^2c+p^2c^2)^{1/2}+\varepsilon(\rho)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Естественным обобщением формулировки Клебша (4.8) является введение канонических переменных для небаротропных течений [22], когда ε зависит как от плотности ρ, так и от энтропии S. Уравнения движения (4.9), (4.11) дополняются уравнением непрерывности для энтропии

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\right]S=0$$

и термодинамическим соотношением

$$\mathrm{d}\varepsilon=\rho T\,\mathrm{d}S+w\,\mathrm{d}\rho\,.$$

Переход к новым переменным осуществляется по формуле

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\varphi+\frac{\lambda}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}\mu+\frac{\beta}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}S\,. \tag{4.17}$$

Для таких небаротронных течений (φ,ρ), (λ,μ) и (S,β) являются парами канонически сопряженных величин:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\varphi}=-\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})\,, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\rho}=\frac{\mathbf{v}^2}{2}-\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\varphi-w\,, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\mu}=-\mathrm{div}\,(\lambda\mathbf{v})\,, \\ \frac{\partial\mu}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\lambda}=-\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\mu\,, \\ \frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta S}=-\mathrm{div}\,(\beta\mathbf{v})+\rho T\,, \\ \frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\beta}\,,$$

где $H=\int\left[\rho(\mathbf{v}^2/2)+\varepsilon(\rho,S)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}$. Эквивалентность этих уравнений уравнениям гидродинамики проверяется непосредственной подстановкой скорости в уравнение Эйлера (4.8). Таким образом, по сравнению с баротропным случаем, число канонических переменных увеличилось на два. Возникает естественный вопрос: каково должно быть минимальное число пар канонически сопряженных величин для описания произвольного течения? Как мы видели выше, введение новых канонических переменных было связано с добавлением новых связей в лагранжиан. Например, для лагранжиана (4.11) это были уравнения непрерывности и уравнение для лагранжева инварианта μ, переносимого жидкостью. В небаротропном случае, чтобы прийти к формуле (5.4), необходимо добавить уравнение для нового лагранжева инварианта — энтропии S.

Как известно, чтобы описать движение жидкости в переменных Лагранжа достаточно взять три величины $(a_1,a_2,a_3)=\mathbf{a}$, маркирующие каждую отдельную жидкую частицу так, чтобы координаты частиц в момент времени t были равны

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{a},t)\,. \tag{4.18}$$

В простейшем, наиболее часто встречающемся варианте вектор $\mathbf{a}$ отождествляют с начальным значением координаты частиц:

$$\mathbf{a}=\mathbf{r}(\mathbf{a},0)\,.$$

Отсюда следует, что имеется всего три независимых лагранжевых инварианта

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r},t)\,.$$

(Это соотношение определяет обратное к (4.18) отображение.) Все другие лагранжевы инварианты являются функциями $\mathbf{a}$. Если теперь в лагранжиане рассматривать уравнения для $\mathbf{a}$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a} = 0$$

в качестве связей [2], то мы немедленно придем к трем парам канонических переменных (λ_l, a_l), $l = 1, 2, 3$, через которые скорость выражается посредством формулы:

$$\mathbf{v} = u_l \nabla a_l \,. \tag{4.19}$$

Здесь $u_l = \lambda_l/\rho$, а плотность ρ определяется через $\mathbf{a}$ как

$$\rho = \frac{\rho_0(\mathbf{a})}{J}\,,$$

где $\rho_0(\mathbf{a})$ — начальная плотность, $J = \det \hat{J}_{ij}$ — якобиан отображения (4.18), а $\hat{J}_{ij} = \partial x_i/\partial a_j$ — матрица Якоби (об этом более подробно см. разделы 5, 6). Вектор $\mathbf{u}$ в этой формуле выражается через компоненты скорости с помощью $\hat{J}$:

$$\mathbf{u} = \hat{J}^{\mathrm{T}} \mathbf{v}\,,$$

где индекс T означает транспонирование.

Представление (4.19) является наиболее общим. В частности, все замены переменных, рассмотренные выше, следуют из этой формулы. Она может быть немного упрощена с сохранением своей общности.

Рассмотрим гладкие обратимые замены переменных

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{a}})\,.$$

При этих преобразованиях представление (4.19) остается инвариантным

$$\mathbf{v} = \tilde{u}_l \nabla \tilde{a}_l\,,$$

а вектор $\mathbf{u}$ преобразуется

$$\tilde{u}_l = u_k \frac{\partial a_k}{\partial \tilde{a}_l}\,.$$

Если теперь потребовать, чтобы одна из компонент, скажем u_3, была равна 1, то представление (4.19) записывается в виде (ср. с [49]):

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \frac{\lambda_1}{\rho}\nabla\mu_1 + \frac{\lambda_2}{\rho}\nabla\mu_2\,. \tag{4.20}$$

Если в этом соотношении заменить μ_2 на энтропию S, то (4.20) будет совпадать с преобразованием (5.4). Отметим, что такая редукция возможна, если семейство поверхностей постоянной энтропии S $\big(S(\mathbf{r}, t) = \mathrm{const}\big)$ гомотопно совокупности поверхностей, скажем, семейству $a_1(\mathbf{r}, t) = \mathrm{const}$. Отсюда, в частности, следует, что в баротропном случае для того, чтобы описать произвольное течение, достаточно взять две пары переменных Клебша. Одна пара переменных Клебша, как мы увидим далее, описывает частный тип течения. Тем не менее локально любое баротропное течение может быть всегда параметризовано одной парой переменных Клебша [17].

5. Неканонические скобки Пуассона

Рассмотрим, каким образом вводится гамильтоновская структура в гидродинамике в терминах естественных физических переменных. Для этого достаточно построить скобку Пуассона, которая удовлетворяет всем необходимым требованиям. Наиболее простой путь построения таких скобок состоит в пересчете скобки Пуассона, выраженной через канонические переменные, к скобке в терминах естественных переменных. Примечательно, что возникающий при этом симплектический оператор оказывается локальным по этим переменным. В качестве примера произведем пересчет формулы для баротропных течений идеальной жидкости [1]. (Точно так же проводятся вычисления и в других моделях.)

В соответствии с (4.16) скобка Пуассона дается выражением:

$$\{F, G\} = \int \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \rho}\frac{\delta G}{\delta \varphi} - \frac{\delta F}{\delta \varphi}\frac{\delta G}{\delta \rho} \right) + \left(\frac{\delta F}{\delta \lambda}\frac{\delta G}{\delta \mu} - \frac{\delta F}{\delta \mu}\frac{\delta G}{\delta \lambda} \right) \right] \mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{5.1}$$

При этом скорость выражается через λ, μ, ρ и φ по формуле

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{\rho}\nabla\mu + \nabla\varphi\,,$$

с помощью которой вычисляются вариационные производные от F по ρ, φ, λ и μ:

$$\frac{\delta F}{\delta \rho}\bigg|_{\lambda} = \frac{\delta F}{\delta \rho}\bigg|_{v} - \frac{\lambda\nabla\mu}{\rho}\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}\,, \qquad \frac{\delta F}{\delta \varphi} = -\mathrm{div}\,\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}\,,$$
$$\frac{\delta F}{\delta \lambda} = \frac{\nabla\mu}{\rho}\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}\,, \qquad \frac{\delta F}{\delta \mu} = -\mathrm{div}\left(\frac{\lambda}{\rho}\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}\right). \tag{5.2}$$

В (5.2) вариационные производные слева от знаков равенства берутся при фиксированных λ, μ, ρ, φ, а справа — при постоянных ρ и $\mathbf{v}$. Подстановка этих соотношений в (5.1) приводит нас к скобке [15]:

$$\{F, G\} = \int \left[\left(\nabla\frac{\delta F}{\delta \rho}, \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}} \right) - \left(\nabla\frac{\delta G}{\delta \rho}, \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \right) \right] \mathrm{d}\mathbf{r} + $$
$$+ \int \left(\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{v}}{\rho}, \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}} \right] \right) \mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{5.3}$$

тождество Якоби (2.9) для которой выполняется автоматически.

Уравнения неразрывности и Эйлера в терминах этой скобки имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = \{\rho, H\}\,,$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} - \nabla w(\rho) = \{\mathbf{v}, H\}\,,$$

где $H = \int \big[\rho\mathbf{v}^2/2 + \varepsilon(\rho)\big]\,\mathrm{d}\mathbf{r}$.

Скобка (5.3) имеет более прозрачный смысл, если от $\mathbf{v}$ перейти к новой переменной $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}$ — плотности импульса. В этих переменных эта скобка превращается в

[2] Эти связи часто называют связями Лина [50].

скобку БКК [14]:

$$\{F,G\} = \int \rho\left[\left(\nabla\frac{\delta F}{\delta\rho}, \frac{\delta G}{\delta\mathbf{p}}\right) - \left(\nabla\frac{\delta G}{\delta\rho}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{p}}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r} + \int\left(\mathbf{p}, \left[\left(\frac{\delta G}{\delta\mathbf{p}}\nabla\right)\frac{\delta F}{\delta\mathbf{p}} - \left(\frac{\delta F}{\delta\mathbf{p}}\nabla\right)\frac{\delta G}{\delta\mathbf{p}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}. \quad (5.4)$$

Вычисляя с помощью (5.4) скобки между компонентами $\mathbf{p}$ и ρ, найдем, что

$$\{p_i(\mathbf{r}), p_j(\mathbf{r}')\} = [p_j(\mathbf{r}')\nabla_i' - p_i(\mathbf{r})\nabla_j]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$\{p_i(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}')\} = \rho\nabla_i\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (5.5)$$

В соответствии с (2.12) эти соотношения задают алгебру Ли; в данном случае она совпадает с алгеброй векторных полей [58, 14].

Скобки (5.4), (5.5) могут быть получены и другими способами. Простейший состоит в том, что скобку Пуассона можно рассматривать как классический предел соответствующих квантовых коммутаторов, впервые вычисленных для гидродинамики в [12]. Другой метод вычисления скобок Пуассона для гидродинамических моделей, предложенный в [13], основан на том, что $\mathbf{p}$ и ρ представляют собой плотности генераторов трансляций и градиентных преобразований.

Для небаротропных течений, когда давление зависит также от энтропии, скобки Пуассона в естественных переменных могут быть найдены аналогично (5.3). Впервые они были приведены в [15]:

$$\{F,G\} = \int\left[\left(\nabla\frac{\delta F}{\delta\rho}, \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right) - \left(\nabla\frac{\delta G}{\delta\rho}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r} + \int\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{v}}{\rho}, \left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r} + \int\left(\frac{\nabla S}{\rho}, \left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta G}{\delta S} - \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta F}{\delta S}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}. \quad (5.6)$$

Хотелось бы еще раз повторить: введение скобок Пуассона означает, что система обладает гамильтоновской структурой в самом слабом смысле. Например, для идеальной гидродинамики это проявляется в том, что скобки, выраженные в естественных переменных, являются вырожденными, т.е. существуют аннуляторы скобок Пуассона — казимиры, которые, как будет показано в следующих разделах, связаны со специфической калибровочной симметрией уравнений гидродинамики, обеспечивающей, в частности, сохранение завихренности течения жидкости. Кроме того, этот факт значит также, что прямой переход, скажем, от скобок (5.3) или (5.6) к каноническому базису невозможен. Сначала необходимо разрешить все дополнительные связи (казимиры) путем введения новых переменных. Несмотря на то, что мы еще не знаем явный вид казимиров, один пример разрешения этих связей нам уже известен — это параметризация течения посредством переменных Клебша.

Особый интерес представляет введение гамильтоновской структуры для несжимаемой жидкости. В этом случае φ уже не является независимой величиной и может быть исключена с помощью соотношения $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. Таким образом, в пределе несжимаемой жидкости имеется только одна пара канонических переменных λ и μ, скобка Пуассона соответственно приобретает вид

$$\{F,G\} = \int\left(\frac{\delta F}{\delta\lambda}\frac{\delta G}{\delta\mu} - \frac{\delta F}{\delta\mu}\frac{\delta G}{\delta\lambda}\right)\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

С помощью соотношений аналогичных (5.2)

$$\frac{\delta F}{\delta\lambda} = \left(\frac{\nabla\mu}{\rho}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}} - \nabla\frac{1}{\Delta}\operatorname{div}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right),$$
$$\frac{\delta F}{\delta\mu} = -\operatorname{div}\frac{\lambda}{\rho}\left(\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}} - \nabla\frac{1}{\Delta}\operatorname{div}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right),$$

получим, что ($\rho = 1$)

$$\{F,G\} = \int\left(\operatorname{rot}\mathbf{v}, \left[\left(\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}} - \nabla\frac{1}{\Delta}\operatorname{div}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right)\times\left(\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}} - \nabla\frac{1}{\Delta}\operatorname{div}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right)\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Это выражение показывает, что многообразие G совпадает с алгеброй векторных полей $\mathbf{A}(r)$, для которых $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. В более компактной форме данная скобка записывается в терминах $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ [18]:

$$\{F,G\} = \int\left(\boldsymbol{\Omega}, \left[\operatorname{rot}\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{\Omega}}\times\operatorname{rot}\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{\Omega}}\right]\right). \quad (5.8)$$

При этом уравнение Эйлера для $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\Omega}] \quad (5.9)$$

становится гамильтоновским [9, 18]:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \{\boldsymbol{\Omega}, H\}$$

с гамильтонианом

$$H = \int\frac{\mathbf{v}^2}{2}\,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Скобка (5.8) задает гамильтоновскую структуру и для двумерной гидродинамики. В этом случае $\boldsymbol{\Omega}$ имеет единственную компоненту, которую удобно выразить через функцию тока ψ:

$$\Omega = -\Delta\psi \qquad \left(v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Уравнение движения (5.9) и скобка Пуассона (5.8) в двумерном случае имеют вид

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \{\Omega, H\} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \equiv -\frac{\partial(\Omega,\psi)}{\partial(x,y)}, \quad (5.10)$$

$$\{F,G\} = \int\Omega\,\frac{\partial(\delta F/\delta\Omega, \delta G/\delta\Omega)}{\partial(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (5.11)$$

$$H = \frac{1}{2}\int(\nabla\psi)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Гамильтоновская структура вводится аналогичным образом в уравнение для волн Россби [1], которое отличается от (5.11) дополнительным членом $\beta(\partial\psi/\partial y)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta\psi + \beta\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial(\Delta\psi,\psi)}{\partial(x,y)}\,. \tag{5.12}$$

Легко видеть, что замена $\Omega \to \Omega - \beta y$ сводит это уравнение к (5.11). Поэтому скобка Пуассона для (5.12) задается аналогичным образом [1]:

$$\{F,G\} = \int(\Omega+\beta y)\,\frac{\partial(\delta F/\delta\Omega,\,\delta G/\delta\Omega)}{\partial(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{5.13}$$

а гамильтониан H определяется прежним выражением:

$$H = \frac{1}{2}\int(\nabla\psi)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

К сказанному следует добавить, что скобки Пуассона (5.11) и (5.13) для течений с замкнутыми линиями тока могут быть сведены к скобке Гарднера – Захарова – Фаддеева, используемой в теории интегрируемых систем [40]. Детали этого рассмотрения можно найти в оригинальных работах [38, 39].

Таким образом, введение неканонических скобок Пуассона, исходя из канонических скобок, представляет собой наиболее простой способ их получения. Вместе с тем гамильтоновская структура, задаваемая посредством этих скобок, является наиболее слабой формулировкой гамильтоновости уравнений. В этой формулировке, в частности, невозможно записать вариационный принцип. С другой стороны, представление уравнений движения для систем гидродинамического типа через неканонические скобки Пуассона справедливо, как будет показано далее, для произвольных течений. За это, однако, приходится расплачиваться их вырожденностью, т.е. существованием казимиров, обращающих в нуль неканоническую скобку.

6. Теорема Эртеля

Покажем, следуя в основном результатам работ [41, 43], что для идеальных жидкостей с произвольной зависимостью давления от плотности и энтропии теорема Эртеля, а также теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости являются следствием специальной симметрии калибровочного типа, связанной с переобозначением маркеров жидких частиц (см. также разделы 7, 8). Обсудим также, какую роль играет данная симметрия в гамильтоновских структурах, введенных выше.

Теорема Эртеля [42] для идеальных жидкостей гласит, что величина

$$I_{\mathrm{L}} = \frac{(\mathbf{\Omega}\nabla S)}{\rho} \tag{6.1}$$

является лагранжевым инвариантом. Здесь $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ — завихренность; при этом скорость жидкости $\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}\,; \tag{6.2}$$

энтропия S единицы массы, переносимая жидкостью, подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)S = 0\,, \tag{6.3}$$

а плотность ρ определяется из уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \tag{6.4}$$

Мы опускаем доказательство этой теоремы, справедливость которой может быть проверена прямым вычислением (см., например, с. 31 в [54]).

Инвариантность I_{L} (6.1) означает, что I_{L} есть функция лагранжевых координат $\mathbf{a}$; эта величина переносится вместе с жидкостью, оставаясь неизменной со временем.

Как уже отмечалось выше, выбор лагранжевых переменных произволен: они маркируют каждую частицу. Поэтому часто эти координаты называют лагранжевыми маркерами. Обычно лагранжевы координаты выбирают так, чтобы они совпадали с начальными значениями положения частиц $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}$. Таким образом, переход от одного (эйлерова) описания к другому (лагранжеву) осуществляется посредством замены переменных:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a},t) \tag{6.5}$$

с $\mathbf{a}$, являющимся маркером каждой жидкой частицы. При этом скорость частицы в точке $\mathbf{r}$ дается обычной формулой

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \dot{\mathbf{r}}\Big|_{\mathbf{a}}\,, \tag{6.6}$$

где точка означает дифференцирование по времени t. В лагранжевых перенных решение уравнений (6.4) и (6.3) следующее:

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{a})}{J}\,, \qquad S(\mathbf{r},t) = S_0(\mathbf{a})\,, \tag{6.7}$$

где $J = \det\hat{J}_{ij}$ — якобиан и

$$\hat{J}_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}$$

— матрица Якоби отображения (6.5). В дальнейшем будем предполагать $J \neq 0$ всюду, что гарантирует существование обратного к (6.5) отображения.

Введенная выше матрица Якоби играет фундаментальную роль при лагранжевом описании. Ее знание позволяет определить не только основные параметры течения, но также его геометрические характеристики, в частности метрический тензор. Уравнение движения для матрицы Якоби прямо следует из определения скорости (6.6). Рассмотрим вектор $\delta\mathbf{r}$, соединяющий две ближайшие жидкие частицы:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}+\delta\mathbf{a},t) - \mathbf{r}(\mathbf{a},t)\,.$$

Исходя из определения скорости (6.6), нетрудно получить уравнение для этой величины:

$$\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (\delta\mathbf{r},\nabla)\mathbf{v}\,. \tag{6.8}$$

Разлагая далее $\delta\mathbf{r}$ по малости вектора $\delta\mathbf{a}$,

$$\delta x_i = \hat{J}_{ik}\delta a_k\,, \tag{6.9}$$

приходим к уравнению движения для матрицы Якоби:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat{J} = U\hat{J}\,. \tag{6.10}$$

Здесь матрица U имеет вид

$$U_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,;$$

ее симметричная часть

$$B = \frac{1}{2}(U + U^{\mathrm{T}})$$

есть тензор напряжений, а антисимметричная определяет завихренность:

$$\Omega = \frac{1}{2}(U - U^{\mathrm{T}})\,.$$

Обратная к $\hat{J}$ матрица подчиняется уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat{J}^{-1} = -\hat{J}^{-1}U\,, \tag{6.11}$$

которое при покомпонентной записи имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = -\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,. \tag{6.12}$$

Что касается метрического тензора, то он определяется из расстояния между двумя ближайшими лагранжевыми точками с помощью соотношения (6.9)

$$(\delta x_i)^2 = g_{ik}\delta a_i \delta a_k$$

и соответственно равен

$$g_{ik} = \hat{J}_{li}\,\hat{J}_{lk}\,.$$

Инвариант Эртеля I_{L}, как лагранжев инвариант, есть функция лагранжевых переменных и в этом смысле он локален. С его помощью можно построить бесконечное семейство законов сохранения в интегральной форме, если произвести сверку I_{L} с произвольной функцией $f(a)$:

$$I_i = \int I_{\mathrm{L}}(\mathbf{a})\,f(\mathbf{a})\,\mathrm{d}\mathbf{a}\,. \tag{6.13}$$

Покажем далее, что из соотношения (6.13) для баротропных течений следует, в частности, теорема Кельвина. Заметим, что в этом случае у нас есть одна дополнительная свобода: энтропия S теперь постоянна, и вместо нее в качестве лагранжева инварианта в (6.7) и (6.1) можно взять произвольную функцию лагранжевых маркеров $\mathbf{a}$. Отметим также, что в первом соотношении (6.7) можно без ограничения общности положить $\rho_0 = 1$ [3], так что

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{J}\,. \tag{6.14}$$

Подставляя (6.1) в (6.13) при учете (6.7) и $J\,\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{r}$, проинтегрируем один раз по частям:

$$I_i = \int \big(\mathbf{v}, [\boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} S]\big)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{6.15}$$

Здесь градиент берется по $\mathbf{r}$, хотя f и S являются функциями $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$. Поэтому вновь вернемся к интегрированию по $\mathbf{a}$. В результате простых преобразований мы приходим к следующему выражению:

$$I_i = \int \dot{x}_i\, J\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_\beta}{\partial x_k}\,\frac{\partial f(a)}{\partial a_\alpha}\,\frac{\partial S_0(a)}{\partial a_\beta}\;\mathrm{d}\mathbf{a}\,.$$

Учитывая тождество

$$J\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_\beta}{\partial x_k} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x_i}{\partial a_\gamma}\,, \tag{6.16}$$

интеграл преобразуется до вида

$$I_i = \int A_j(\mathbf{a})\dot{x}_i\,\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\;\mathrm{d}\mathbf{a}\,. \tag{6.17}$$

Здесь

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}) = [\boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} S_0] \tag{6.18}$$

— векторная функция, имеющая нулевую дивергенцию:

$$\mathrm{div}_a\,\mathbf{A}(\mathbf{a}) = 0\,. \tag{6.19}$$

Отметим, что до сих пор во всех вычислениях мы нигде еще не использовали факт баротропности, т.е. полученное выражение (6.17) применимо для произвольного уравнения состояния. В баротропном случае S_0 можно считать произвольной функцией $\mathbf{a}$. В силу этого функционального произвола $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ можно рассматривать как произвольную функцию с единственным ограничением — нулевой дивергенцией.

Пусть вектор-функция $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ будет отлична от нуля на некоторой замкнутой кривой. Эту кривую будем параметризовать длиной дуги s:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(s)\,, \qquad \mathbf{a}(s + l) = \mathbf{a}(s)\,. \tag{6.20}$$

Легко проверить тогда, что функция

$$\mathbf{A} = \int_0^l \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(s)}{\mathrm{d}s}\,\delta\big[\mathbf{a} - \mathbf{a}(s)\big]\,\mathrm{d}s$$

удовлетворяет всем необходимым требованиям: она сконцентрирована на кривой $\mathbf{a} = \mathbf{a}(s)$ и имеет нулевую дивергенцию. Подставляя далее $\mathbf{A}$ в (6.17), после простого интегрирования приходим к теореме Кельвина для баротропных жидкостей:

$$I_{\mathrm{K}} = \int_C \big(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t),\, \mathrm{d}\mathbf{l}\big)\,. \tag{6.21}$$

Здесь контур C переносится вместе с жидкостью, являясь образом замкнутой кривой (6.20).

Теорема Кельвина справедлива и при произвольной зависимости $p(\rho, S)$. Этот факт не известен широко в литературе, в частности, он отсутствует в курсе Ландау–Лифшица. Любопытно, что ответ в этом случае будет иметь тот же самый вид, что и (6.21). Единственное различие состоит в выборе контура C. Для баротропного случая, как мы видели ранее, единственное ограничение было связано с условием (6.19), которое обеспечивало только замкнутость контура. В случае общей зависимости $p = p(\rho, S)$ помимо (6.19) необходимо также удовлетворить условию (6.18). В соответствии с послед-

[3] Это соответствует простой замене $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a})$, при которой $J_{ab} = \rho_0$.

ним линии векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ должны лежать на поверхности постоянной энтропии $S(\mathbf{a}) = \mathrm{const}$. Поэтому, если выбрать замкнутый контур, лежащий на этой "жидкой" поверхности (т.е. двигающейся вместе с жидкостью), то мы немедленно приходим к теореме Кельвина в виде (6.21). Таким образом, теорема Кельвина в общем случае гласит: циркуляция скорости сохраняется во времени, если двигающийся контур лежит на поверхности $S\big(\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)\big) = \mathrm{const}$, переносимой самой жидкостью.

В заключении данного раздела мы укажем на интересную интерпретацию теоремы Кельвина. Согласно [11] сохранение циркуляции скорости можно рассматривать как следствие сохранения относительного инварианта Пуанкаре

$$\oint \mathbf{p}\, \mathrm{d}\mathbf{q}\,. \tag{6.22}$$

Для баротропных течений каждой жидкой частице соответствует гамильтониан

$$h = \frac{p^2}{2} + w(\rho)\,,$$

где $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}$, а энтальпия w играет роль потенциальной энергии частицы. Если теперь взять в качестве контура в (6.22) жидкий контур, то видно, что инвариант Пуанкаре будет совпадать с циркуляцией скорости

$$\oint \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

и тем самым теорема Кельвина становится прямым следствием сохранения относительного инварианта Пуанкаре.

Это соображение оказалось весьма полезным для других гидродинамических моделей, в частности, для ряда задач физики плазмы [52, 51], когда движение жидкой частицы может быть сведено к уравнениям Гамильтона для заряженной частицы в магнитном поле в присутствии потенциала самосогласованного вида. В этом случае аналог теоремы Кельвина есть просто следствие сохранения относительного инварианта Пуанкаре.

7. Калибровочная симметрия — группа переобозначений

Рассмотрим, как из вариационного принципа следует сохранение инварианта Эртеля.

Сначала сделаем два замечания.

1. Пусть $\mathbf{I}_\mathrm{l} = (I_1, \ldots, I_n)$ — набор лагранжевых инвариантов, каждый из которых переносится вместе с жидкостью,

$$\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I_k}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla I_k = 0\,.$$

Тогда любая функция от $\mathbf{I}_\mathrm{l}$ будет также лагранжевым инвариантом. Чтобы по заданному лагранжеву инварианту построить эйлерову сохраняющуюся плотность достаточно убедиться, что $I_\mathrm{eu} = \rho I_k$ подчиняется уравнению непрерывности

$$\frac{\partial I_\mathrm{eu}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(I_\mathrm{eu}\mathbf{v}) = 0\,.$$

Уравнения гидродинамики (6.2), (6.3) и (6.4), как мы видели выше, имеют два лагранжевых инварианта: инвариант Эртеля (6.1) и энтропию s[4]. Оба эти инварианта порождают закон сохранения вида

$$I_i = \int \rho f(I_\mathrm{L}, s)\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{7.1}$$

$f(I_\mathrm{L}, s)$ — произвольная функция своих аргументов.

2. Уравнение Эйлера (6.2) в лагранжевых переменных есть не что иное, как уравнение Ньютона для жидкой частицы:

$$\ddot{x}_i = -\frac{\boldsymbol{\nabla}_i p}{\rho}\,. \tag{7.2}$$

Действуя матрицей Якоби $\hat{J}$ на обе части этого уравнения, получаем

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\,\ddot{x}_i = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial a_k}\,. \tag{7.3}$$

Это уравнение — в форме (7.2) или (7.3) — совместно с (6.7) и (6.14) образует замкнутую систему описания жидкости в лагранжевых переменных.

Действие в лагранжевых переменных записывается точно так же, как и в классической механике [17]:

$$S = \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\mathbf{r} \left[\rho\, \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \varepsilon(\rho, s) \right], \tag{7.4}$$

где ε — плотность внутренней энергии, связанной с энтальпией w с помощью термодинамического соотношения

$$\mathrm{d}\varepsilon = \rho T\, \mathrm{d}s + w\, \mathrm{d}\rho\,, \tag{7.5}$$

а T — температура.

Проверим теперь, что вариация действия $\delta S = 0$ эквивалентна уравнению движения (7.3).

Перейдем в (7.4) от интегрирования по $\mathbf{r}$ к интегрированию по $\mathbf{a}$. В результате действие преобразуется следующим образом:

$$S = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\mathbf{a} \left[\frac{\dot{x}_i^2}{2} - \tilde{\varepsilon}(\rho, S) \right]. \tag{7.6}$$

Здесь производные по времени от x берутся при фиксированных $\mathbf{a}$; $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\rho$ есть функция ρ и s, которые в свою очередь определены посредством (6.7) и (6.14). Поскольку только ρ во внутренней энергии $\tilde{\varepsilon}$ содержит зависимость от x через якобиан (6.14), то основная трудность с варьированием будет со вторым слагаемым в (7.6).

Используя тождество (6.16) и формулу

$$J = \frac{1}{6}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}\,\frac{\partial x_j}{\partial a_\beta}\,\frac{\partial x_k}{\partial a_\gamma}\,,$$

[4] Во избежание путаницы только в этом разделе обозначим энтропию как s, во всех остальных разделах мы сохраним за энтропией прежнее обозначение S.

находим

$$\delta S = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{a}\left(-\ddot{x}_i\delta x_i + \rho^2\,\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\rho}\,\delta J\right) =$$

$$= \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{a}\left[-\ddot{x}_i - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\rho^2\,\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\rho}\right)\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial x_j}{\partial a_\beta}\,\frac{\partial x_k}{\partial a_\gamma}\right]\delta x_i =$$

$$= \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{a}\left[-\ddot{x}_i - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\rho^2\,\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\rho}\right)\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i}\right]\delta x_i = 0 \qquad (7.7)$$

или

$$\ddot{x}_i = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\rho^2\,\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\rho}\right)\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i}\,.$$

Видно, что полученное уравнение совпадает с уравнением движения (7.3), если положить

$$p(\rho, s) = \rho^2\,\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\rho}\,.$$

(Последнее соотношение есть прямое следствие термодинамического равенства (7.5).)

Таким образом, уравнения движения идеальной жидкости в лагранжевых переменных прямо следуют из вариационного принципа.

Простейшие законы сохранения, — закон сохранения импульса,

$$\mathbf{P} = \int \dot{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{a} = \int \rho\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

и закон сохранения энергии,

$$E = \int\left[\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \tilde{\varepsilon}(\rho, s)\right]\mathrm{d}\mathbf{a} = \int\left[\frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho, s)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

— являются следствием инвариантности действия относительно двух независимых симметрий: пространственных и временных трансляций.

Уравнения гидродинамики, как это было впервые показано в [41], обладают дополнительной нетривиальной симметрией, связанной со свободой выбора лагранжевых переменных. Очевидно, что от этого выбора ничего не зависит: уравнение движения жидкости, равно как и ее динамика, остаются неизменными. Из всех возможных преобразований, переобозначающих лагранжевы маркеры и оставляющих инвариантным действие, выживает один вполне определенный класс. Так, в случае баротропных жидкостей действие оказывается инвариантным относительно только таких преобразований $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a})$, якобиан которых равен 1:

$$J = \det\,\frac{\partial b_i}{\partial a_j} = 1\,. \qquad (7.8)$$

Все эти преобразования образуют группу диффеоморфизмов, сохраняющих объем. (Интересно отметить, что та же самая группа управляет движением несжимаемой жидкости.) Эта симметрия в соответствии с теоремой Нетер порождает новые законы сохранения. Чтобы найти их, достаточно рассмотреть инфинитиземальные преобразования. В данном случае (для баротропных течений) на величину $\delta\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}$, где

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \delta\mathbf{a}\,,$$

наложено единственное условие — несжимаемости:

$$\frac{\partial\alpha_i(\mathbf{a})}{\partial a_i} = 0\,, \qquad (7.9)$$

которое прямо следует из (7.8).

Для уравнения состояния общего вида $p = p(\rho, s)$ действие инвариантно относительно только таких преобразований, которые, во-первых, несжимаемы и, во-вторых, оставляют неизменными поверхности $S_0(\mathbf{a}) = \mathrm{const}$. Таким образом, помимо (6.19), на функцию $\boldsymbol{\alpha}(a)$ накладывается одно дополнительное ограничение

$$[\boldsymbol{\nabla}s \times \boldsymbol{\alpha}] = 0\,. \qquad (7.10)$$

Если в первом случае уравнение (7.9) может быть разрешено путем введения векторного потенциала:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\zeta}\,,$$

скажем, с кулоновской калибровкой $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta} = 0$, то в общем случае оба уравнения для $\boldsymbol{\alpha}$ (7.9) и (7.10) удовлетворяются, если положить

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\nabla}s \times \boldsymbol{\nabla}\psi]\,.$$

Здесь ψ — скалярная функция, а градиенты взяты по переменной $\mathbf{a}$.

Опуская далее все промежуточные выкладки вывода закона сохранения (а это — стандартная процедура; см., например, [80]), приведем сразу конечные выражения:

1. Для **баротропных** жидкостей закон сохранения имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\nabla}_a\dot{x}_i \times \boldsymbol{\nabla}_a x_i] = 0\,,$$

т.е. в каждой точке $\mathbf{a}$ сохраняется вектор

$$\mathbf{I}_{\mathrm{L}} = [\boldsymbol{\nabla}_a\dot{x}_i \times \boldsymbol{\nabla}_a x_i]\,. \qquad (7.11)$$

Этот интеграл известен еще с прошлого века: он был найден Коши [17] (см. также [44, 45]).

Для справки приведем выражение этого инварианта в матричном представлении:

$$\hat{J}_t^{\mathrm{T}}\hat{J} - \hat{J}^{\mathrm{T}}\hat{J}_t = \Omega^{(0)}\,, \qquad (7.12)$$

где индекс T означает транспонирование, а матрица $\Omega^{(0)}$ выражается через векторный инвариант $\mathbf{I}_{\mathrm{L}}$ с помощью формулы:

$$\Omega_{ij}^{(0)} = \epsilon_{ijk} I_{\mathrm{L}k}\,.$$

Представление (7.12) оказалось весьма полезным — оно недавно было использовано авторами работы [62] для нахождения ряда точных трехмерных решений уравнений Эйлера несжимаемой жидкости.

Перепишим (7.11) в эйлеровых переменных. Используя тождество (6.16), векторный инвариант (7.11) преобразуем к виду

$$\mathbf{I}_{\mathrm{L}} = J(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} \equiv \frac{\rho_0(\mathbf{a})}{\rho}(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}\,. \qquad (7.13)$$

Здесь $\mathbf{a}$ рассматривается как функция от $\mathbf{r}$ и t. Если $\mathbf{a}$ — начальные координаты жидких частиц, то вектор (7.13) совпадает с начальной завихренностью $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})$:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})\,.$$

Отсюда с учетом (7.13) имеет место следующее соотношение для вектора $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega}/\rho$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{J}\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\,.$$

Иными словами, матрица Якоби для вектора $\boldsymbol{\Omega}/\rho$ становится эволюционным оператором.

Следует отметить, что инварианты (7.13) в действительности хорошо известны в гидродинамике: они имеют смысл условия вмороженности завихренности в жидкость.

Запишем уравнение движения для вектора $\mathbf{B}$, которое непосредственно может быть получено из (6.2) и (6.4):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{B} = (\mathbf{B}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\,. \tag{7.14}$$

Здесь $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \equiv \partial/\partial t + v\boldsymbol{\nabla}$. Из сравнения (7.14) с (6.8) для $\delta\mathbf{r}$ видно, что как $\mathbf{B}$, так и $\delta\mathbf{r}$ подчиняются одному и тому же уравнению. Это и есть условие вмороженности завихренности в жидкость — хорошо известное в гидродинамике утверждение. Сделаем теперь следующий шаг, а именно, умножим уравнение (7.14) справа на $\hat{J}^{-1}$, а уравнение (6.11) — слева на $\boldsymbol{\Omega}/\rho$, а затем сложим полученные выражения. Результат этих вычислений есть закон сохранения инварианта Коши (7.13). Эти интегралы движения (иными словами — лагранжевы инварианты) и есть математическая формулировка вмороженности завихренности в жидкость. Уравнение для векторного поля $\mathbf{B}$ (7.14) соответственно называют уравнением вмороженности.

2. В **общем** случае — для произвольной зависимости $p(\rho, s)$ — из векторного инварианта выживает единственный скаляр: проекция $\mathbf{I}_{\mathrm{L}}$ на вектор $\boldsymbol{\nabla}s$:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{L}} = \left(\boldsymbol{\nabla}_a s_0, [\boldsymbol{\nabla}_a \dot{x}_i \times \boldsymbol{\nabla}_a x_i]\right)\,.$$

Возвращаясь в этом выражении к эйлеровым переменным и используя тождество

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}\,\frac{\partial x_j}{\partial a_\beta}\,\frac{\partial x_k}{\partial a_\gamma} = \epsilon_{ijk} J\,,$$

получаем

$$I_{\mathrm{L}} = \frac{(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nabla}s)}{\rho}\,.$$

Этот интеграл как раз и есть инвариант Эртеля (6.1). Таким образом, сохранение инварианта Эртеля, так же как и теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости, является следствием специальной калибровочной симметрии — группы переобозначений лагранжевых маркеров.

Интересно проследить, как вся эта схема работает в двух измерениях. В этом случае инвариант Эртеля тождественно равен нулю: вектор $\boldsymbol{\Omega}$ ортогонален $\boldsymbol{\nabla}s$. Поэтому нетривиальный ответ возникает только для баротропной жидкости. Применяя к равенству (7.11) тождество

$$\epsilon_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha}\,\frac{\partial x_j}{\partial a_\beta} = \epsilon_{ij} J\,,$$

легко получить, что инвариант Коши превращается в хорошо известный лагранжев инвариант:

$$\frac{\Omega}{\rho} = \mathrm{const}(a)\,.$$

Важно отметить также, что в отличии от трехмерного случая это соотношение не содержит матрицу Якоби.

Обратимся теперь к несжимаемой жидкости. В этом случае полученные выше формулы упрощаются. Так, соотношение (7.13) в трехмерном случае записывается в виде

$$\mathbf{I}_{\mathrm{L}} = (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}\,. \tag{7.15}$$

При этом для несжимаемой жидкости векторный инвариант $\mathbf{I}_{\mathrm{L}}$ совпадает с

$$\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a}) = \mathrm{rot}_a\,\mathbf{u}\,,$$

где вектор $\mathbf{u}$ определен с помощью (4.19). Это означает в частности, что поперечная часть вектора $\mathbf{u}$ сохраняется (являясь лагранжевым инвариантом), а его изменение обязано только продольной части. Выбор этого вектора, как отмечалось в четвертом разделе, произволен в силу произвольности лагранжевых маркеров. Это в полной мере относится и к вектору $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})$. Если совершить контактные преобразования $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a})$ с условием $\partial(b_1 b_2 b_3)/\partial(a_1 a_2 a_3) = 1$, то вектор $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})$ будет преобразовываться по закону

$$\tilde{\Omega}_{0i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial b_i}{\partial a_j}\,\Omega_{0j}(\mathbf{a})\,. \tag{7.16}$$

Преобразование (7.16) — калибровочного типа; оно представляет собой обобщение (см. [45]) калибровочных преобразований переменных Клебша (4.15) [5].

Пусть в результате преобразования вектор $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0(\mathbf{b})$ имеет одну ненулевую, скажем z, компоненту, равную 1:

$$\tilde{\Omega}_{01} = (\boldsymbol{\Omega}_0\boldsymbol{\nabla}_a)b_1 = 0\,, \tag{7.17}$$

$$\tilde{\Omega}_{02} = (\boldsymbol{\Omega}_0\boldsymbol{\nabla}_a)b_2 = 0\,, \tag{7.18}$$

$$\tilde{\Omega}_{03} = (\boldsymbol{\Omega}_0\boldsymbol{\nabla}_a)b_3 = 1\,. \tag{7.19}$$

Соотношения (7.17)–(7.19) при заданной "завихренности" $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})$ представляют собой уравнения для определения зависимости $\mathbf{b}(\mathbf{a})$. Это дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, допускающие применение метода характеристик. Уравнения для характеристик здесь одни и те же для всех трех уравнений системы (7.17)–(7.19):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})\,.$$

Эта формула определяет "вихревую" линию $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{a})$; параметр s имеет смысл длины дуги "вихревой" линии. Уравнения на характеристике (для компонент $\mathbf{b}$) имеют

[5] Несколько иной подход к калибровочным преобразованиям был развит в [81].

вид

$$\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{7.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{7.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_3}{\mathrm{d}s} = 1\,. \tag{7.22}$$

Первые две компоненты b_1 и b_2 постоянны вдоль характеристики. Поэтому в качестве b_1 и b_2 можно взять два независимых интеграла c_1 и c_2 уравнения для характеристик, третья компонента линейно меняется с s. Важно отметить, что решение системы (7.20)–(7.22) всегда может быть найдено, по крайней мере локально в окрестности некоторой неособой поверхности, снабженной системой координат, задаваемых, например, инвариантами c_1 и c_2. Строго говоря, это решение не глобально, что типично для метода характеристик.

Отсюда, используя уравнение $\mathrm{rot}_b\,\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{\Omega}}_0(b)$, можно восстановить "скорость" $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\tilde{u}_1 = \frac{\partial\phi}{\partial b_1}\,, \tag{7.23}$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{\partial\phi}{\partial b_2} + b_1\,, \tag{7.24}$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{\partial\phi}{\partial b_3}\,. \tag{7.25}$$

После подстановки этих выражений в (4.19) мы приходим вновь к представлению Клебша с одной парой переменных (более подробно см. [44]):

$$\mathbf{v} = b_1\nabla b_2 + \nabla\phi\,.$$

Соответственно ротор скорости определяется выражением

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = [\nabla b_1 \times \nabla b_2] = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial b_3}(\mathbf{b}, t)\,. \tag{7.26}$$

Последнее равенство — следствие того, что данное преобразование сохраняет объем. Легко проверить, что выражение (7.26), в котором $\mathbf{r}$ заменено на $\mathbf{b}$, удовлетворяет системе (7.17)–(7.19). В этом случае первое уравнение (7.17) трансформируется в $\partial(b_1 b_2 b_3)/\partial(a_1 a_2 a_3) = 1$.

Таким образом, локально любое течение несжимаемой жидкости может быть параметризовано одной парой переменных Клебша. В ситуации общего положения требуются две пары таких переменных.

8. Инвариант Хопфа и вырожденность скобок Пуассона

До сих пор мы не обсуждали вопрос о том, какие классы течений описывают введенные в предыдущих разделах канонические переменные. Рассмотрим этот вопрос на примере идеальной несжимаемой жидкости. Пусть течение жидкости в окрестности некоторой точки односвязной области параметризовано одной парой переменных Клебша:

$$\mathbf{v} = \lambda\nabla\mu + \nabla\varphi\,.$$

Проведем через эту точку внутри этой области замкнутую кривую. Построив переменные Клебша на каждом участке этой кривой, вернемся в исходную точку. Вообще говоря, переменные Клебша примут другие значения. Таким образом, в общем случае переменные Клебша являются многозначными функциями пространственных координат. Один частный случай течений жидкости с многозначными переменными Клебша допускает следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим компактное ориентированное многообразие M^2 и предположим, что λ и μ являются на нем координатами.

Калибровочные преобразования, связанные с неоднозначностью выбора переменных Клебша, приводят к появлению целого семейства калибровочно эквивалентных многообразий, получающихся одно из другого непрерывными деформациями, сохраняющими элемент поверхности:

$$\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\lambda'\,\mathrm{d}\mu'\,.$$

Поэтому из каждого такого семейства многообразий достаточно рассмотреть одного представителя; например, среди поверхностей рода нуль, имеющих одинаковые площади, естественно выделить сферу S^2.

Легко понять, что прообраз любой точки из M^2 в R^3 представляет собой замкнутую линию, совпадающую с вихревой линией. Это непосредственно следует из выражения для ротора скорости:

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \left[\nabla\lambda \times \nabla\mu\right]. \tag{8.1}$$

Вихревая линия представляет собой пересечение двух поверхностей $\lambda(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$, $\mu(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$. Если переменные λ и μ являются однозначными функциями, то многообразие M^2 не может быть замкнутой поверхностью рода g. При этом течения, задаваемые такими переменными, не имеют узлов. Этот факт можно доказать и иначе.

Известно (см. [56, 57]), что степень заузленности течения характеризуется в идеальной гидродинамике сохраняющейся величиной

$$I = \int(\mathbf{v}, \mathrm{rot}\,\mathbf{v})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{8.2}$$

Сохранение этого интеграла непосредственно следует из теоремы Томсона. Чтобы проиллюстрировать сказанное, следуя [57], рассмотрим две замкнутые вихревые линии

$$\mathbf{\Omega} = \int\kappa_1\mathbf{n}_1\delta\left[\mathbf{r} - \mathbf{l}_1(s_1)\right]\mathrm{d}s_1 + \int\kappa_2\mathbf{n}_2\delta\left[\mathbf{r} - \mathbf{l}_2(s_2)\right]\mathrm{d}s_2\,,$$

где $\mathbf{n}_{1,2}$ — касательные, а $\mathrm{d}s_{1,2}$ — элементы длины этих линий.

Вычисляя циркуляцию скорости по контурам $\mathbf{r} = \mathbf{l}_1(s_1)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{l}_2(s_2)$, получим

$$\oint(\mathbf{v},\,\mathrm{d}\mathbf{l}_1) = m\kappa_2\,, \qquad \oint(\mathbf{v}, \mathrm{d}\mathbf{l}_2) = m\kappa_1\,,$$

где m — число зацеплений этих двух линий. Умножая далее первое равенство на κ_2, а второе на κ_1 и складывая результаты, приходим к интегралу I:

$$\int(\mathbf{v}, \kappa_1\,\mathrm{d}\mathbf{l}_1 + \kappa_2\,\mathrm{d}\mathbf{l}_2) = \int(\mathbf{v}, \mathrm{rot}\,\mathbf{v})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 2m\kappa_1\kappa_2\,.$$

Эта формула без труда обобщается на n вихрей, а затем на непрерывное распределение. Сохранение интеграла (8.2) справедливо не только в бесконечной области, но и для конечной, когда вихревые линии касательны к поверхности границы.

Интеграл I, таким образом, для течений с тривиальной топологией тождественно равен нулю, в частности, для течений, параметризуемых через однозначные переменные Клебша.

Покажем теперь, что переменные Клебша в формулировке (8.1) описывают заузленные течения и проиллюстрируем их топологический смысл.

Пусть переменные λ и μ являются локальными координатами сферы S^2. В этом случае λ и μ явно выражаются через сферические углы θ и φ, так что

$$\mathbf{\Omega} = 2A\left[\nabla\cos\theta \times \nabla\varphi\right],$$

где A — размерная константа. При этом переменные Клебша уже не являются однозначными функциями, при обходе вокруг оси z угол φ получает приращение 2π. Далее удобно в выражении для векторного поля Ω от углов θ и φ перейти к $\mathbf{n}$-полю ($\mathbf{n}^2 = 1$) [58]:

$$\Omega_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\big(\mathbf{n}, [\partial_\beta\mathbf{n} \times \partial_\gamma\mathbf{n}]\big). \qquad (8.3)$$

Ограничимся рассмотрением быстро убывающих течений, для которых $\mathbf{n}$ стремится на бесконечности к постоянному вектору $\mathbf{n}_0$. Для данного класса течений R^3 изоморфно четырехмерной сфере S^3. Поэтому классификация течений есть проблема классификации гладких отображений $S^3 \to S^2$. Такие отображения характеризуются гомотопической группой $\pi_3(S^2) = \mathrm{Z}$, т.е. любой класс течений характеризуется числом зацеплений N двух вихревых линий. Это число совпадает с числом зацеплений двух линий $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_2$ ($\mathbf{n}_{1,2} = \mathrm{const}$). Индекс N для гладких отображений называется инвариантом Хопфа [59]. Можно показать, что инвариант Хопфа совпадает с интегралом I с точностью до постоянного множителя [60]:

$$I = \int(\mathbf{v}, \mathbf{\Omega})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 64\pi^2 N A^2.$$

Вывод этого соотношения основан на известной формуле Гаусса для числа зацеплений двух линий.

Следует отметить, что в квантовом случае согласно [60] $A = \hbar/2m$.

Остальные многообразия с точки зрения топологии мало интересны. Так, многообразия M^2, представляющие собой поверхности с краем, гомотопически эквивалентны букету окружностей. Поэтому гомотопическая группа π_3 для них тривиальна. Также тривиальны группы π_3 для замкнутых поверхностей рода g ($g \geqslant 1$). Топологически нетривиальная ситуация имеет место только для поверхностей рода нуль.

Приведем теперь пример нетривиального отображения с $N = 1$ (отображение Хопфа):

$$(\mathbf{n}, \sigma) = q^+\sigma_3 q, \qquad (8.4)$$

$$q = (1 - \mathrm{i}\mathbf{r}\sigma)(1 + \mathrm{i}\mathbf{r}\sigma)^{-1},$$

где σ — матрицы Паули.

В тороидальной системе координат,

$$x + \mathrm{i}y = \frac{\sinh U}{\cosh U + \cos\beta}\exp(\mathrm{i}\alpha), \qquad z = \frac{\sin\alpha}{\cosh U + \cos\beta}$$

$$(0 \leqslant U < \infty, \quad 0 < \alpha, \quad \beta < 2\pi),$$

$$\arctan\frac{n_y}{n_x} = \alpha - \beta, \qquad n_z = 1 - 2\tanh^2 U.$$

Эти формулы показывают, что течение устроено следующим образом: все пространство расслаивается на торы $U = \mathrm{const}$, а любая вихревая линия наматывается на тор, делая один виток. Таким образом, любые вихревые линии зацеплены один раз. Выражения для $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{v}$, вычисленные по формулам (8.4), не являются решениями стационарных уравнений Эйлера и поэтому могут быть использованы в качестве начального условия для (5.9). Очевидно, что эволюция такого распределения не выводит решение из данного класса с инвариантом Хопфа $N = 1$.

Эволюция векторного поля $\mathbf{n}$ определяется из уравнения

$$\mathbf{n}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{n} = 0, \qquad (8.5)$$

эквивалентного эволюционным уравнениям для переменных λ и μ. Уравнение (8.5) также является гамильтоновским

$$\mathbf{n}_t = 2A\left[\mathbf{n} \times \frac{\delta H}{\delta\mathbf{n}}\right]$$

и отличается от известного уравнения Ландау–Лифшица только выбором гамильтониана H.

Скобка Пуассона в данном случае совпадает со скобкой БКК (2.8), (2.11):

$$\{F, G\} = 2A\int\left(\mathbf{n}, \left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{n}} \times \frac{\delta H}{\delta\mathbf{n}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

При переходе в этой скобке от $\mathbf{n}$-поля к $\mathbf{\Omega}$ по формулам (8.3) получаем скобку Пуассона (5.8). Важно отметить, что (5.8) является вырожденной скобкой относительно инварианта I: $\{I, \ldots\} = 0$, что еще раз указывает на его происхождение. С одной стороны вырожденность скобки связана с ее топологией, с другой стороны обязана теореме Кельвина. Последнее, напомним, есть следствие калибровочной симметрии лагранжевых маркеров.

Вопрос о вырожденности скобок Пуассона для уравнений идеальной гидродинамики для произвольного уравнения состояния, как мы выясним ниже, непосредственно связан с этой калибровочной симметрией. С этой целью рассмотрим наиболее общую форму скобки для идеальной гидродинамики — скобку (5.6) для небаротропных течений:

$$\{F, G\} = \int\left[\left(\nabla\frac{\delta F}{\delta\rho}, \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right) - \left(\nabla\frac{\delta G}{\delta\rho}, \frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r} +$$
$$+ \int\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{v}}{\rho}, \left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}} \times \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r} +$$
$$+ \int\left(\frac{\nabla S}{\rho}, \left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta G}{\delta S} - \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta F}{\delta S}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}. \qquad (8.6)$$

Подставляя интеграл (7.1), $I_i = \int \rho f(I_{\rm L}, S)\,{\rm d}\mathbf{r}$ в это выражение, убеждаемся, что он коммутирует с любым функционалом:

$$\{I_i, \ldots\} = 0\,.$$

В соответствии с определением, данным в разделе 2, этот интеграл по отношению к скобке (8.6) является казимиром.

Напомним, что факт сохранения интеграла (7.1) есть следствие специальной калибровочной симметрии уравнений идеальной гидродинамики. Эта же симметрия, как мы видим, ответственна за вырождение скобок Пуассона (8.6).

Для того чтобы теперь перейти от скобки (8.6) к канонической, необходимо разрешить интеграл (7.1) путем введения подходящих координат. Мы уже знаем один ответ на этот вопрос. Если взять выражение (4.17) для скорости и положить в нем вместо μ инвариант Эртеля, то интеграл (7.1) из казимира относительно скобки (8.6) превращается в динамический закон сохранения относительно канонической скобки

$$\{F, G\} = \int\left[\left(\frac{\delta F}{\delta\rho}\frac{\delta G}{\delta\varphi} - \frac{\delta F}{\delta\varphi}\frac{\delta G}{\delta\rho}\right) + \left(\frac{\delta F}{\delta\lambda}\frac{\delta G}{\delta I_{\rm L}} - \frac{\delta F}{\delta I_{\rm L}}\frac{\delta G}{\delta\lambda}\right) + \left(\frac{\delta F}{\delta\beta}\frac{\delta G}{\delta s} - \frac{\delta F}{\delta s}\frac{\delta G}{\delta\beta}\right)\right]{\rm d}\mathbf{r}\,.$$

К этому следует добавить, что, как показано в [53], переход от лагранжева описания для действия (7.6) к каноническим переменным, определяемый заменой (9.11) или (4.20), является каноническим преобразованием.

9. Неоднородная жидкость и поверхностные волны

Введем канонические переменные для описания нелинейных волн в идеальной жидкости переменной плотности. Обычно выделяют два типа волн. Первый относится к так называемым внутренним волнам. Эти волны распространяются в среде с плавной неоднородностью. Второй тип соответствует ситуации, когда градиент плотности резко меняется на размере длины волны, в пределе — скачком. В этом пределе говорят о поверхностных волнах. Канонические переменные как в том, так и в другом случаях могут быть введены в рамках схемы, развитой в предыдущих разделах.

Рассмотрим идеальную жидкость переменной плотности в присутствии постоянного гравитационного поля $\mathbf{g}$, антипараллельного оси z. Будем считать жидкость локально несжимаемой. Это означает в силу ${\rm div}\,\mathbf{v} = 0$, что плотность ρ переносится вместе с жидкостью и является поэтому лагранжевым инвариантом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\rho = 0\,.$$

Поэтому в лагранжиане L это уравнение, а также условие ${\rm div}\,\mathbf{v} = 0$ представляют собой связи:

$$L = \int\left[\rho\,\frac{\mathbf{v}^2}{2} - U(\rho, \mathbf{r}) - \alpha\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\rho\right) + \varphi\,{\rm div}\,\mathbf{v}\right]{\rm d}\mathbf{r}\,. \tag{9.1}$$

Здесь $U(\rho, \mathbf{r})$ — плотность потенциальной энергии в присутствии поля $\mathbf{g}$, задаваемая формулой

$$U(\rho, \mathbf{r}) = g\left[\rho(\mathbf{r}_\perp, z)(z - z') - \int_{z'}^{z}\rho_0(z'')\,{\rm d}z''\right]. \tag{9.2}$$

Первый член в выражении (9.2) соответствует работе в поле тяжести по перемещению жидкого элемента в точку z из точки равновесия z', определяемой из условия равенства равновесной плотности $\rho_0(z')$ и плотности жидкости в данной точке:

$$\rho_0(z') = \rho(\mathbf{r}_\perp, z)\,.$$

Это соотношение задает z' как функцию плотности: $z'(\rho)$. Второе слагаемое в (9.2) отвечает потенциалу выталкивающей силы.

Вариация лагранжиана по $\mathbf{v}$ и φ приводит к соотношению [26]:

$$\rho\mathbf{v} = \nabla\varphi + \alpha\nabla\rho \tag{9.3}$$

при

$${\rm div}\left[\rho^{-1}(\nabla\varphi + \alpha\nabla\rho)\right] = 0\,,$$

задающему связь новых и старых переменных. Варьируя по переменной ρ, приходим к уравнению на потенциал α:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\alpha + \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\partial U}{\partial\rho} = 0\,,$$

где $\partial U/\partial\rho = g(z - z')$.

Подставляя далее (9.3) в уравнение Эйлера (4.8) и учитывая уравнение движения на α и ρ, получаем с точностью до константы выражение для определения давления p:

$$p = -\rho\,\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \rho g(z - z') + \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\varphi + {\rm const}\,.$$

Гамильтониан строится так же, как и раньше — по стандартной схеме; он совпадает с полной энергией:

$$H = \int\left[\rho\,\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U(\rho, \mathbf{r})\right]{\rm d}\mathbf{r}\,,$$

а переменные α и ρ оказываются канонически сопряженными:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\rho}\,, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\alpha}\,.$$

Представленная здесь параметризация скорости через плотность ρ и α накладывает достаточно сильное ограничение на вид начального распределения. Как видно из (9.3), ротор потока массы во все моменты времени, включая начальный момент времени, ортогонален градиенту плотности. Такие движения являются аналогом потенциальных в однородной жидкости. Следует сказать, что в том же духе, как это делалось в разделе 4, данная схема может быть значительно усовершенствована, если учесть "непотенциальные" движения. Что касается неканонических скобок Пуассона, то для внутренних волн они были получены в [63].

При необходимости рассмотрения слабонелинейных колебаний стратифицированной жидкости следует разложить гамильтониан по степеням α и $\delta\rho$. В частности, широко известное приближение Буссинеска получается, если плотность в кинетической энергии заменить на некоторую среднюю постоянную величину:

$$H_{\mathrm{B}} = \int \left[\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + U(\rho, z) \right] \mathrm{d}\mathbf{r} \,.$$

Рассмотрим другой важный предельный случай стратифицированной жидкости, когда стратификация определяется лишь свободной границей.

Вначале обратимся к потенциальным движениям. Для них лагранжиан имеет прежний вид, в котором плотность ρ следует считать постоянной всюду в объеме жидкости и равной нулю вне его, т.е.

$$\rho = \rho_0 \theta\big(z - \eta(\mathbf{r}_\perp, t)\big) \,.$$

Здесь $\theta(z)$ — функция Хевисайда, а $\eta(\mathbf{r}_\perp, t)$ — отклонение свободной поверхности от горизонтали $z = 0$. Через функцию $\eta(\mathbf{r}_\perp)$ явно выражается элемент свободной поверхности $\mathrm{d}s_{\mathrm{n}} = \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \big[1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2\big]^{1/2}$, нормаль к ней: $\mathbf{n} = (-\boldsymbol{\nabla}\eta)\big[1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2\big]^{-1/2}$, а также потенциальная энергия:

$$U = \int \left\{ \frac{\rho_0 g \eta^2}{2} + \sigma \Big[\sqrt{1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2} - 1 \Big] \right\} \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \,.$$

Дополнительно здесь учтен вклад от поверхностного натяжения (σ — коэффициент поверхностного натяжения).

Легко видеть, что уравнение неразрывности в данном случае переходит в кинематическое условие

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla} \right) \eta = v_z \,. \tag{9.4}$$

В соответствии с этим лагранжиан записывается в виде

$$L = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \int_{-h}^{\eta} \mathrm{d}z \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \\ + \int \psi \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_{\mathrm{n}} \sqrt{1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2} \right) \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp - U \,, \tag{9.5}$$

где

$$v_{\mathrm{n}} = \frac{[v_z - \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\eta]_{z=\eta}}{\sqrt{1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2}}$$

— нормальная компонента скорости, а $\psi = -\alpha\rho_0$ — множитель Лагранжа, заданный на свободной поверхности.

Вариация по $\mathbf{v}$ внутри объема приводит к условию потенциальности $\rho_0 \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$, где φ определяется из решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Вариация по $\mathbf{v}$ на границе (при неизменной η) задает граничные условия для уравнения Лапласа:

$$\varphi\Big|_{z=\eta} = \psi \,. \tag{9.6}$$

Нетривиальным является варьирование данного лагранжиана по η. Для этого удобно переписать все слагаемые в (9.5), содержащие $\mathbf{v}$, в виде объемного интеграла, который обозначим через L_v. Тогда с учетом (9.6) имеем

$$L_v = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \int_{-h}^{\eta} \mathrm{d}z \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\varphi \right) .$$

Вариация δL_v при изменении η складывается из двух слагаемых. Первое обязано изменению объема:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\varphi \right) \delta\eta \,.$$

Второе возникает за счет вариаций $\mathbf{v}$ и φ, не связанных с изменением формы этих функций, например,

$$\delta\varphi = \varphi(z - \delta\eta) - \varphi(z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\delta\eta \,.$$

Поэтому вклад в δL_v от этой вариации имеет вид

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \, v_{\mathrm{n}} \sqrt{1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2}\, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\delta\eta \,.$$

Отсюда окончательно имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\rho_0 g \eta + \sigma \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{\nabla}\eta}{\sqrt{1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2}} + \\ + \left[\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, v_{\mathrm{n}} \sqrt{1 + (\boldsymbol{\nabla}\eta)^2} \right]_{z=\eta} . \tag{9.7}$$

Гамильтониан H, как и прежде, совпадает с полной энергией системы

$$H = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \int_{-n}^{\eta} \mathrm{d}z \, \frac{\rho_0 (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2}{2} + U \,,$$

а уравнения Гамильтона имеют вид [25]:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi} \,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta} \,.$$

Рассмотрим разложение гамильтониана H по степеням канонических переменных. В координатном представлении каждый член этого ряда является нелокальным функционалом от η и ψ; последнее связано с тем, что на каждом итерационном шагу приходится решать уравнение Лапласа. После преобразования Фурье по координатам из горизонтальной плоскости и последовательных приближений можно получить, что

$$H = \frac{1}{2} \int (g + \sigma k^2) |\eta_k|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{k} + \frac{1}{2} \int k\psi |\psi_k|^2 \tanh(kh) \, \mathrm{d}\mathbf{k} + \\ + \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int L_{kk_1k_2} \psi_k \psi_{k_1} \eta_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} \, \mathrm{d}\mathbf{k} \, \mathrm{d}\mathbf{k}_1 \, \mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \ldots \,, \tag{9.8}$$

где

$$L_{kk_1k_2} = \frac{1}{2} (k^2 + k_1^2 - k_2^2) - kk_1 \tanh(kh) \tanh(k_1 h) \\ (\rho_0 = 1) \,.$$

Разложение в (9.8) производится по параметру $k\eta$, имеющему смысл характерного угла наклона поверхности жидкости.

В пределе мелкой воды $kh \to 0$

$$L_{kk_1k_2} \to -(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)\,,$$

т.е. кубический член разложения H_1 становится локальным по переменным ψ и η:

$$H_1 = \frac{1}{2}\int \eta(\nabla\psi)^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1\,. \tag{9.9}$$

В частности, переход к известной модели Буссинеска (см., например, [66]) осуществляется, если в качестве гамильтониана взаимодействия взять (9.9), а в H_0 учесть слагаемые, пропорциональные h^3:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -h\Delta\psi - \operatorname{div}(\eta\nabla\psi) + \frac{h^3}{3}\,\Delta^2\psi = \frac{\delta H}{\delta\psi}\,,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -g\eta + \sigma\Delta\eta - \frac{(\nabla\psi)^2}{2} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}\,,$$

где

$$H = \frac{1}{2}\int\left[g\eta^2 + \sigma(\nabla\eta)^2 + h(\nabla\psi)^2 - h^3(\Delta\psi)^2 + \eta(\nabla\psi)^2\right]\mathrm{d}\mathbf{r}_\perp\,.$$

В пределе глубокой воды (см., также [67]):

$$L_{kk_1k_2} \to -(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) - kk_1\,.$$

Переход к нормальным переменным задается формулами:

$$\eta_k = \left[\frac{\omega_k}{2(g+\sigma k^2)}\right]^{1/2}(a_k + a^*_{-k})\,,$$
$$\psi_k = -\mathrm{i}\left(\frac{g+\sigma k^2}{2\omega_k}\right)^{1/2}(a_k - a^*_{-k})\,,$$

где $\omega_k = \left[k(g+\sigma k^2)\tanh(kh)\right]^{1/2}$ — закон дисперсии поверхностных волн.

Как это уже делалось в разделе 4, можно учесть вклад от непотенциальных течений [1]. Для этого необходимо в лагранжиан добавить еще одну связь

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mu = 0\,,$$

так что он приобретает вид

$$L = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_\perp \int_{-h}^{\eta}\mathrm{d}z\left[\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{v} - \lambda(\mu_t + \mathbf{v}\nabla\mu)\right] +$$
$$+ \int\psi\left[\frac{\partial\eta}{\partial t} - v_\mathrm{n}\sqrt{1+(\nabla\eta)^2}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}_\perp - U\,. \tag{9.10}$$

При таком выборе лагранжиана скорость $\mathbf{v}$ задается через переменные Клебша λ и μ:

$$\rho_0\mathbf{v} = \lambda\nabla\mu + \nabla\varphi\,, \tag{9.11}$$

уравнения для которых имеют вид (4.9) и (4.13). Функция ψ вводится аналогично потенциальным течениям:

$$\varphi\Big|_{z=\eta} = \psi\,. \tag{9.12}$$

Эта функция канонически сопряжена η. Уравнение движения для ψ имеет вид уравнения (9.7), в котором скорость $\mathbf{v}$ следует заменить на (9.11).

Что касается неканонических скобок Пуассона для течений жидкости со свободной поверхностью, то впервые они были приведены в [64]. Скобка представляет собой комбинацию скобки Захарова [24, 25] для потенциальных течений и скобки (5.7), описывающей течение в объеме жидкости:

$$\{F,G\} = \int\left(\operatorname{rot}\mathbf{v}, \left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r} +$$
$$+ \int_\Sigma\left(\frac{\delta F}{\delta\Sigma}\,\frac{\delta G}{\delta\psi} - \frac{\delta G}{\delta\Sigma}\,\frac{\delta F}{\delta\psi}\right)\mathrm{d}s\,. \tag{9.13}$$

Здесь F и G есть функционалы от скорости $\mathbf{v}$ ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) и свободной поверхности Σ; $\mathrm{d}s$ — элемент поверхности. Вариационные производные в (9.13) $\delta F/\delta\mathbf{v}$ и $\delta G/\delta\mathbf{v}$ считаются бездивергентными. Потенциальная часть скорости вводится с помощью разложения (единственного, как это показано в [65]):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \nabla\Phi\,.$$

Здесь поле $\mathbf{w}$ имеет нулевую дивергенцию и касательно свободной границе. Потенциал Φ определяется из решения уравнений

$$\Delta\Phi = 0\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = v_\mathrm{n}\,.$$

Его предельное значение на границе есть ψ. Уравнения движения: уравнение Эйлера и кинематическое условие —

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p\,, \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial t} = v_\mathrm{n}$$

с двумя условиями:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0\,, \qquad p\Big|_\Sigma = \sigma\kappa\,,$$

где κ — средняя кривизны поверхности, с помощью скобки (9.13) записываются в виде уравнений Гамильтона:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \{\mathbf{v}, H\}\,, \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial t} = \{\Sigma, H\}\,.$$

Отметим, что к скобке (9.13) можно также прийти путем пересчета скобки, выраженной через канонические переменные λ и μ, ψ и η, используя замену (9.11).

Несколько другой способ введения "поверхностных" канонических переменных был приведен в [23].

Точно так же, как и (9.11), вводятся канонические переменные в стратифицированной жидкости, учитывающие "непотенциальные" переменные λ и μ. Не представляет также труда введение канонических переменных для описания взаимодействия внутренних и поверхностных волн. Для этого случая лагранжиан представляет собой комбинацию лагранжианов (9.1) и (9.5).

Следует также упомянуть интересную работу [69], в которой получено каноническое гамильтоновское описание системы взаимодействующих вихревых нитей со свободной поверхностью. В частности, канонические переменные, введенные в этой работе, можно извлечь исходя из общей скобки Пуассона (9.13) путем предельного перехода к вихревым нитям.

Введение канонических переменных для внутренних и поверхностных волн возможно и для более сложных систем: например, для поверхностных волн диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле или феррожидкости в магнитостатическом поле, либо для волн, распространяющихся вдоль границы раздела двух жидкостей [68]. Для этих систем гамильтониан совпадает со свободной энергией во внешнем электрическом (магнитном) поле, а канонические переменные остаются теми же, что и в отсутствии поля.

10. Гамильтоновский формализм для плазмы и магнитной гидродинамики

Простейшие гидродинамические модели плазмы относятся к типу (4.1), (4.2). Рассмотрим гидродинамику электронов, взаимодействующих с потенциальным электрическим полем в плазме без магнитного поля:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0\,,$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\left[\frac{e}{m}\,\varphi+\frac{3T}{m\rho_0}\,\delta\rho\right], \tag{10.1}$$

$$\Delta\varphi=-4\pi e\,\frac{\delta\rho}{m}\,,\qquad \delta\rho=\rho-\rho_0\,.$$

Здесь e, m — соответственно заряд и масса электрона, а T — температура.

Внутренняя энергия такой системы складывается из электростатической энергии

$$\mathcal{E}_{\mathrm{es}}=\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\varphi)^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{e^2}{2m^2}\int\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'$$

и газокинетической

$$\mathcal{E}_T=\frac{3}{2}\,\frac{T}{m\rho_0}\int\delta\rho^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Очевидно, что

$$\frac{e}{m}\,\varphi=\frac{e^2}{m^2}\int\frac{\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\frac{\delta\mathcal{E}_{\mathrm{es}}}{\delta\rho}\,,$$

$$\frac{3T}{m\rho_0}\,\delta\rho=\frac{\delta\mathcal{E}_T}{\delta\rho}\,. \tag{10.2}$$

Формула (10.2) показывает, что система (10.1) принадлежит к типу (4.1), (4.2) с $\mathcal{E}_{\mathrm{in}}$ общего вида (4.6). Диагонализующее преобразование H в этом случае имеет вид (4.4), в котором следует положить $\omega_k^2=\omega_{\mathrm{p}}^2+3k^2T/m$ ($\omega_{\mathrm{p}}^2=4\pi_0e^2/m^2$ — квадрат плазменной частоты), а коэффициенты U и V определяются из формулы (4.5), в которой следует положить $g=0$.

Рассмотрим теперь гидродинамику медленных движений неизотермической плазмы, температура электронов T_{e} которой существенно превосходит температуру ионов. Под медленными мы будем подразумевать движения с фазовыми скоростями ω/k, много меньшими тепловой электронной скорости $v_{T\mathrm{e}}$, но большими по сравнению с тепловой ионной. В этом случае можно считать, что электроны распределены по Больцману $\rho_{\mathrm{e}}=\rho\exp(e\phi/T_{\mathrm{e}})$, а ионным тепловым давлением можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0\,,\qquad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{e}{M}\,\nabla\varphi\,,$$

$$\Delta\varphi=\frac{4\pi e}{M}\left(\rho-\rho_0\exp\frac{e\varphi}{T_{\mathrm{e}}}\right), \tag{10.3}$$

где M — масса ионов.

Данная система также сохраняет энергию:

$$H=\int\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}\,\mathrm{d}\mathbf{r}+\mathcal{E}_{\mathrm{in}}\,. \tag{10.4}$$

Здесь $\mathcal{E}_{\mathrm{in}}$ — внутренняя энергия, равная сумме электростатической энергии $\mathcal{E}_{\mathrm{es}}=(1/8\pi)\int(\nabla\varphi)^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}$ и тепловой энергии электронного газа

$$\mathcal{E}_T=\frac{T_{\mathrm{e}}}{M}\int\rho_0\left[\left(\frac{e\varphi}{T_{\mathrm{e}}}-1\right)\exp\frac{e\varphi}{T_{\mathrm{e}}}+1\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Вычисляя вариационную производную от $\mathcal{E}_{\mathrm{in}}$ по плотности ионов ρ, получим

$$\frac{\delta\mathcal{E}_{\mathrm{in}}}{\delta\rho}=\int\varphi(\mathbf{r}')\left\{-\frac{1}{4\pi}\,\Delta\,\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}')}{\delta\rho(\mathbf{r})}+\frac{e^2\rho_0}{M}\exp\frac{e\varphi}{T_{\mathrm{e}}}\,\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}')}{\delta\rho(\mathbf{r})}\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}'\,.$$

С другой стороны, варьируя уравнение Пуассона, найдем

$$-\frac{1}{4\pi}\,\Delta\,\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}')}{\delta\rho(\mathbf{r})}+\frac{e^2\rho_0}{M}\exp\frac{e\varphi}{T_{\mathrm{e}}}\,\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}')}{\delta\rho(\mathbf{r})}=\frac{e}{M}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,.$$

Сравнивая оба выражения, приходим к

$$\frac{\delta\mathcal{E}_{\mathrm{in}}}{\delta\rho}=\frac{e}{M}\,\varphi\,.$$

Отсюда следует, что система (10.3) также принадлежит к типу (4.1), (4.2).

Отметим, что для длинноволновых ($kr_{\mathrm{d}}\ll 1$, где $r_{\mathrm{d}}=(T_{\mathrm{e}}/4\pi n_0e^2)^{1/2}$ — дебаевский радиус) колебаний малой амплитуды из (10.3) следует система уравнений Буссинеска. Легко видеть, что в этом пределе из уравнения Пуассона определяется потенциал

$$\frac{e\varphi}{T_{\mathrm{e}}}\approx\frac{\delta\rho}{\rho_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2+rd^2\Delta\,\frac{\delta\rho}{\rho_0}\,.$$

Подстановка этого выражения в (10.4) приводит к следующему виду внутренней энергии (ср. с (4.6)):

$$\mathcal{E}_{\mathrm{in}}=\int\frac{\rho_0c_{\mathrm{s}}^2}{2}\left[\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^3-rd^2\left(\nabla\,\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

$$c_{\mathrm{s}}^2=\frac{T_{\mathrm{e}}}{M}\,.$$

Перейдем теперь к рассмотрению релятивистской газодинамики электронов, взаимодействующих с произвольным, не обязательно потенциальным, электромагнитным полем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0\,,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{p}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]-3T\nabla\,\frac{\delta\rho}{\rho_0}\,,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\,\frac{e\rho}{m}\,\mathbf{v}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi e\,\frac{\delta\rho}{m}\,.$$

Для электромагнитного поля введем скалярный и векторный потенциалы φ и $\mathbf{A}$, причем для $\mathbf{A}$ выберем кулоновскую калибровку: $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$.

Как известно, при кулоновской калибровке векторный потенциал является канонической переменной, если перейти от обычного к обобщенному импульсу $\mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}_1-\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\,.$$

При этом $\mathbf{p}_1$ подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial t}+\nabla(m^2c^4+p^2c^2)^{1/2}-[\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{p}_1]+e\nabla\varphi=-3T\nabla\,\frac{\delta\rho}{\rho_0}\,.$$

Канонически сопряженным к $\mathbf{A}$ оказывается вектор

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi c}\left(\nabla\varphi+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=-\frac{\mathbf{E}}{4\pi c}\,.$$

Другие переменные вводятся по аналогии с разделом 4:

$$\frac{\mathbf{p}_1}{m}=\frac{\lambda}{\rho}\,\nabla\mu+\nabla\varphi\,.$$

При этом $(\lambda,\mu),(\rho,\varphi),(\mathbf{B},\mathbf{A})$ являются канонически сопряженными величинами:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\mu}\,,\quad \frac{\partial\mu}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\lambda}\,,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\varphi}\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\rho}\,,$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta\mathbf{B}}\,,\quad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta\mathbf{A}}\,,$$

с гамильтонианом

$$H=\int\left[\frac{\rho}{m}(p^2c^2+m^2c^4)^{1/2}+\frac{3}{2}\,T\,\frac{\delta\rho^2}{m\rho_0}+\frac{1}{8\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\right]\mathrm{d}\mathbf{r}+ \\ +\int\left[2\pi c^2B^2-c(\mathbf{B}\nabla\varphi)+\frac{1}{4\pi}\,\varphi\Delta\varphi\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,,\tag{10.5}$$

совпадающим с полной энергией системы при соблюдении условия, тождественного уравнению Пуассона.

Отметим, что аналогичным образом вводятся канонические переменные для двухжидкостной модели плазмы. Более подробное изложение этих результатов можно найти в [34, 35].

Другой широко принятой в физике плазмы моделью являются уравнения МГД, описывающие низкочастотные (гидродинамические) движения плазмы как целого. Эти уравнения, в частности, могут быть получены из уравнений двухжидкостной модели плазмы.

Для баротропных течений уравнения МГД имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0\,,$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla\,\frac{\delta\varepsilon}{\delta\rho}+\frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}]\,,\tag{10.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\,.$$

Для этой системы так же, как для уравнений гидродинамики, переход к каноническим переменным можно осуществить, используя лагранжев подход. Для этого будем исходить из известного выражения лагранжиана жидкости, взаимодействующей с электромагнитным полем в МГД приближении. Последнее означает, что в лагранжиане следует отбросить малые члены порядка v/c. Так, например, в МГД приближении следует пренебречь вкладом от электрического поля $(E\sim(v/c)H)$ по сравнению с соответствующим вкладом от магнитного поля.

Обратим внимание также на одно важное следствие уравнений (10.6) — на факт вмороженности магнитного поля [70], согласно которому вектор $\mathbf{H}/\rho$ двигается вместе с жидкой линией. Это обстоятельство позволяет считать, что магнитное поле $\mathbf{H}$ и плотность ρ выступают в качестве обобщенных координат.

Таким образом, лагранжиан в МГД приближении с учетом связей записывается в следующем виде:

$$L=\int\left[\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}-\varepsilon(\rho)-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}+\mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\right)+ \right. \\ \left. +\varphi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}\right)+\psi\operatorname{div}\mathbf{H}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Варьируя L по переменным $\mathbf{v}$, ρ и $\mathbf{H}$, получим

$$\rho\mathbf{v}=[\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}]+\rho\nabla\varphi\,,\tag{10.7}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\varphi-\frac{\mathbf{v}^2}{2}+\omega(\rho)=0\,,\tag{10.8}$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}+\frac{\mathbf{H}}{4\pi}-[\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}]+\nabla\psi=0\,.\tag{10.9}$$

Отсюда видно, что неопределенные множители Лагранжа выступают в качестве обобщенных импульсов. Соответствующий переход к этим переменным осуществляется по формуле (10.7), а их эволюция определяется из уравнений (10.8), (10.9). Входящая сюда калибровочная функция ψ выбирается из соображений удобства. При естественном условии $\operatorname{div}\mathbf{S}=0$

$$\psi=\Delta^{-1}\operatorname{div}[\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{S}]+\psi_0\,,$$

где ψ_0 — произвольное решение уравнения Лапласа $\Delta\psi_0=0$. В частности, для финитных движений плазмы в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ величину $\mathbf{S}$ удобно выбирать так, чтобы $\mathbf{S}\to 0$ при $r\to\infty$. Очевидно тогда

$$\psi_0=\frac{(\mathbf{H}_0\mathbf{r})}{4\pi}\,.$$

Эквивалентность полученной системы уравнений и МГД уравнений проверяется непосредственной подстановкой скорости в уравнение движения (10.6).

Переходя далее к гамильтоновскому описанию, получим [33]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\varphi}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\rho}\,, \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\mathbf{S}}\,, \qquad \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\mathbf{H}}\,,$$

где гамильтониан

$$H = \int\left[\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \psi\,\mathrm{div}\,\mathbf{H}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}$$

также совпадает по величине с полной энергией системы.

Другой способ введения канонических переменных в МГД был предложен в [71]. В этой работе как скорость, так и магнитное поле параметризуется через переменные типа Клебша:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi + \rho^{-1}(\mu\boldsymbol{\nabla}\lambda + M\boldsymbol{\nabla}\Lambda)\,,$$
$$\mathbf{H} = [\,\boldsymbol{\nabla}\lambda\times\boldsymbol{\nabla}\Lambda\,]\,.$$

При этом переменные λ и μ, Λ и M, ρ и ϕ образуют пары канонически сопряженных величин. Можно показать, что данная параметризация $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ сводится при определенном выборе калибровки вектора $\mathbf{S}$ к замене (10.7).

Для несжимаемой жидкости каноническими переменными являются $\mathbf{H}$ и $\mathbf{S}$ — потенциал φ исключается с помощью уравнения непрерывности

$$\Delta\varphi = -\mathrm{div}\,\frac{1}{\rho_0}[\,\mathbf{H}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{S}\,]\,,$$

а гамильтониан имеет вид

$$H = \int\left[\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} + \psi\,\mathrm{div}\,\mathbf{H}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Для баротропных течений переменные (ρ,ϕ) и $(\mathbf{H},\mathbf{S})$ задают каноническую скобку Пуассона:

$$\{F,G\} = \int\left[\left(\frac{\delta F}{\delta\rho}\frac{\delta G}{\delta\varphi} - \frac{\delta F}{\delta\varphi}\frac{\delta G}{\delta\rho}\right) + \left(\frac{\delta F}{\delta\mathbf{H}}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{S}} - \frac{\delta F}{\delta\mathbf{S}}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{H}}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{10.10}$$

Эта скобка допускает, как и в случае гидродинамики, пересчет к естественным переменным: скорости $\mathbf{v}$, плотности ρ и магнитному полю $\mathbf{H}$. В результате неканоническая скобка представляет собой комбинацию скобки (5.6) и дополнительного члена, содержащего вариационные производные от магнитного поля [15]:

$$\begin{aligned}\{F,G\} = &\int\left[\left(\boldsymbol{\nabla}\,\frac{\delta F}{\delta\rho},\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right) - \left(\boldsymbol{\nabla}\,\frac{\delta G}{\delta\rho},\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r} + \\ &+\int\left(\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{v}}{\rho},\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\times\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r} + \\ &+\int\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho},\left[\mathrm{rot}\,\frac{\delta F}{\delta\mathbf{H}}\times\frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\right] - \left[\mathrm{rot}\,\frac{\delta G}{\delta\mathbf{H}}\times\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}.\end{aligned} \tag{10.11}$$

При отказе от баротропности к этой скобке добавляется слагаемое (ср. с [15]):

$$\int\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{\rho},\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta G}{\delta S} - \frac{\delta G}{\delta\mathbf{v}}\frac{\delta F}{\delta S}\right]\right)\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{10.12}$$

Скобка (10.11), (10.12) оказывается, как и в чисто гидродинамическом пределе ($\mathbf{H}=0$), вырожденной.

Простейшие аннуляторы скобки были, по-видимому, впервые указаны в [73]:

$$C = \int\rho f\left(S,\frac{\mathbf{H}\boldsymbol{\nabla}}{\rho}\,S,\left(\frac{\mathbf{H}\boldsymbol{\nabla}}{\rho}\right)^2 S,\ldots\right)\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{10.13}$$

При этом лагранжевы инварианты, порождающие интеграл (10.13), записываются в виде

$$I_n = \left(\frac{\mathbf{H}\boldsymbol{\nabla}}{\rho}\right)^n S\,. \tag{10.14}$$

Однако эти интегралы — всего лишь одна из возможных серий эйлеровых интегралов движения. Существует рекуррентная формула построения интегралов такого типа, которая может быть получена исходя из лагранжевых инвариантов I, поля вмороженности $\mathbf{B}$, плотности ρ и поля типа плотности импульса Лэмба $\mathbf{p}$ [74, 29]. Эти величины определяются соответственно с помощью уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})I = 0\,, \tag{10.15}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} = (\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\,, \tag{10.16}$$

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{p} + (\mathbf{p}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + [\,\mathbf{p}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = 0\,. \tag{10.17}$$

Рекуррентная процедура построения лагранжевых инвариантов состоит из нескольких этапов.

На первом этапе легко убедиться, что определение полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{p}$ посредством уравнений (10.16) и (10.17) остается неизменным после их умножения на I:

$$\mathbf{B}' = I\mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{p}' = I\mathbf{p}\,, \tag{10.18}$$

т.е. $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{p}'$ подчиняются тем же уравнениям, что $\mathbf{B}$ и $\mathbf{p}$.

На следующем этапе по заданным I, $\mathbf{p}$, $\mathbf{B}$ строим новый набор величин I', $\mathbf{p}'$, $\mathbf{B}'$, обладающих теми же свойствами:

$$\mathbf{p}' = \boldsymbol{\nabla}I\,, \qquad \mathbf{B}' = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{p}'\,, \qquad I' = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{B})\,. \tag{10.19}$$

На третьем шаге, подставляя (10.18) в (10.19), получаем

$$I' = (\mathbf{v}\mathbf{B})\,, \qquad \mathbf{B}' = \frac{1}{\rho}[\,\mathbf{p}\times\mathbf{p}'\,]\,, \qquad \mathbf{B}' = \frac{1}{\rho}[\boldsymbol{\nabla}I\times\boldsymbol{\nabla}I']\,. \tag{10.20}$$

Дальнейшая рекурренция дает соотношения:

$$\mathbf{p} = \rho[\mathbf{B}\times\mathbf{B}']\,, \qquad I = \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{p},[\boldsymbol{\nabla}I'\times\boldsymbol{\nabla}I'']\right)\,,$$

$$I = \frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{\nabla}I'[\boldsymbol{\nabla}I''\times\boldsymbol{\nabla}I''']\right)\,. \tag{10.21}$$

Поскольку произвольная функция лагранжевых инвариантов есть снова лагранжев инвариант, то это совместно с (10.18)–(10.21) задает рецепт размножения лагранжевых инвариантов. Так, лагранжевы инварианты первого поколения, составленные из величин ρ, $\mathbf{p}$, $\mathbf{B}$ и трех лагранжевых инвариантов (заданных изначально плюс недостающие, которые строятся с помощью (10.18) – (10.21)), могут быть представлены в виде [29]:

$$I'_0 = \mathbf{p} \times \mathbf{B}\,, \qquad I'_{ik} = \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{p}[\boldsymbol{\nabla} I_i \times \boldsymbol{\nabla} I_k]\right),$$

$$I'_k = (\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla})I_k\,, \qquad I' = \frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{\nabla} I_1[\boldsymbol{\nabla} I_2 \times \boldsymbol{\nabla} I_3]\right). \tag{10.22}$$

Используя эту процедуру многократно, мы получаем следующие поколения лагранжевых инвариантов.

Весьма интересен вопрос о строении лагранжевых инвариантов в двумерном случае. Здесь для построения бесконечной иерархии инвариантов достаточно иметь всего два исходных инварианта. Как было показано в [82], полный набор сохраняющихся величин в двумерном случае образует весьма сложную алгебру Ли, содержащую очень красивые подалгебры, в частности, алгебру петель со слоем в алгебре сохраняющих площадь диффеоморфизмов плоскости.

Применим теперь изложенный выше подход к уравнениям МГД. В случае МГД с произвольным уравнением состояния $p = p(\rho, S)$ в качестве I следует рассматривать энтропию S, вместо векторного поля $\mathbf{B}$ — $\mathbf{H}/\rho$, а в качестве поля $\mathbf{p}$ следует взять векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A}$ ($\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$), наложив калибровку [72]:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = [\mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}] - \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{vA}) \equiv -(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - [\operatorname{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{A}]\,.$$

Легко видеть тогда, что для МГД преобразование (10.19) записывается в виде:

$$\mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} S\,, \qquad \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{H}}{\rho}\,, \qquad I' = 0\,.$$

Первое соотношение отражает калибровочную свободу векторного потенциала, вторая формула есть определение вмороженного поля.

Если теперь в третьей формуле (10.19) вместо $\mathbf{B}$ взять его преобразованное значение из (10.18), то в результате получим второй (вслед за S) лагранжев инвариант:

$$I_2 = \frac{(\mathbf{H}\boldsymbol{\nabla})S}{\rho}\,.$$

По своей структуре он подобен инварианту Эртеля для гидродинамических течений. Многократное применение этого преобразования дает инварианты (10.14):

$$I_n = \left(\frac{\mathbf{H}\boldsymbol{\nabla}}{\rho}\right)^n S\,.$$

Преобразование (10.20) порождает другой лагранжев инвариант

$$I_3 = \frac{(\mathbf{AH})}{\rho}\,.$$

Интегрирование I_3 с помощью формулы (6.1) приводит к интегралу движения

$$I_k = \int (\mathbf{AH})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

характеризующему степень зацепления силовых линий магнитного поля [57].

Задание трех инвариантов $I_1 = S$, I_2 и I_3, а также магнитного поля $\mathbf{H}$ и его векторного потенциала $\mathbf{A}$ позволяет, используя формулу (10.22), найти все серии лагранжевых инвариантов, а вместе с ними и эйлеровы интегралы движения

$$C = \int \rho f(I_1, I_2, \ldots)\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{10.23}$$

В случае баротропных течений рекурренция (10.22) претерпевает изменения. Во-первых, следует исключить энтропию S, как невходящую в уравнения движения. Таким образом, из лагранжевых инвариантов I_i ($i = 1, 2, 3$) первого поколения, явно выражающихся через $\mathbf{H}$ и ρ, остается только один $I_2 = (\mathbf{AH})/\rho$. С его помощью вся серия интегралов движения записывается в виде [48]:

$$C = \int \rho f\left(I_2, \frac{\mathbf{H}\boldsymbol{\nabla}}{\rho} I_2, \ldots\right)\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{10.24}$$

Во-вторых, в баротропном случае к этому интегралу добавляется также топологический инвариант

$$C_{\mathrm{t}} = \int (\mathbf{v}, \mathbf{H})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

характеризующий степень взаимного зацепления линий магнитного поля и скорости.

Можно показать, что все приведенные выше интегралы являются казимирами по отношению к скобке (10.11), (10.12).

Таким образом, мы показали, как вводятся канонические переменные для гидродинамических моделей плазмы. Эти переменные в той или иной степени обобщают переменные Клебша для идеальной гидродинамики. Их различие проявляется в том, что, во-первых, число канонических переменных увеличилось — само электромагнитное поле выступает в качестве дополнительных канонических переменных, и, во-вторых, благодаря этому изменяется (усложняется) гамильтоновская структура уравнений, что отчетливо видно на примере МГД.

11. Гамильтоновский формализм в кинетике

Введем гамильтоновскую структуру в бесстолкновительные кинетические уравнения самосогласованного типа. Рассмотрим наиболее простой и достаточно содержательный в смысле обобщений пример — кинетическое уравнение Власова для функции распределения f, описывающее потенциальные (электрическое поле $E = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$) колебания электронов относительно однородного ионного фона с плотностью n_0:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})f - \boldsymbol{\nabla}\varphi\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0\,,$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\left[\int f\,\mathrm{d}\mathbf{v} - n_0\right] \qquad (e = m = 1)\,. \tag{11.1}$$

Кинетические уравнения такого вида также следует отнести к системам гидродинамического типа. В фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ уравнение (11.1) описывает движения несжимаемой "жидкости", плотность которой f переносится вместе с "жидкостью". Поведение системы здесь во многом подобно ситуации, которая имеет место в стратифицированной жидкости. Для того, чтобы перейти к каноническим переменным, введем лагранжеву координату ξ, которую определим из условия равенства функции распределения f равновесной (не обязательно максвелловской) функции распределения $f_0(\xi)$:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\xi) \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, \xi, t)\,.$$

Такое представление может быть записано в интегральном виде:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int F(\mathbf{r}, \xi, t)\delta\left[\mathbf{v} - \mathbf{V}(\mathbf{r}, \xi, t)\right] \mathrm{d}\xi\,. \tag{11.2}$$

Подстановка (11.2) в (11.1) приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{V}) = 0\,, \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla\varphi\,, \tag{11.4}$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\left[\iint F(\xi, \mathbf{r}, t)\,\mathrm{d}\xi - n_0\right]. \tag{11.5}$$

Внутренняя энергия системы (11.3)–(11.5) является функционалом от "плотности" F:

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = \frac{1}{8\pi}\int(\nabla\varphi)^2\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = \frac{1}{2}\int\frac{\left[\int F(\xi, \mathbf{r})\,\mathrm{d}\xi - n_0\right]\left[\int F(\xi', \mathbf{r}')\,\mathrm{d}\xi' - n_0\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\,.$$

Поэтому согласно разделу 4 уравнения (11.3)–(11.5) принадлежат к типу (4.1), (4.2).

Канонические переменные для (11.3)–(11.5) вводятся стандартным образом. Для "потенциальных" течений $\mathbf{V} = \nabla\Phi$ уравнения движения имеют вид гамильтоновских уравнений [1]:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta F}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Phi}\,,$$

где

$$H = \int\frac{F\mathbf{v}^2}{2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mathbf{r} + \mathcal{E}_{\text{in}}\,,$$

соответственно, скобка Пуассона имеет канонический вид:

$$\{S, T\} = \int \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mathbf{r}\left[\frac{\delta S}{\delta F}\frac{\delta T}{\delta\Phi} - \frac{\delta T}{\delta F}\frac{\delta S}{\delta\Phi}\right].$$

Она может быть пересчитана в терминах функции распределения f [1]. С помощью (11.2), после простых преобразований имеем скобку, впервые полученную в [16]:

$$\{S, T\} = \int f\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\frac{\delta S}{\delta f}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\delta T}{\delta f}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\delta S}{\delta f}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\frac{\delta T}{\delta f}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{v}\,.$$

Аналогичным образом вводятся канонические переменные в уравнения Власова–Максвелла, при этом каноническая скобка Пуассона допускает пересчет к скобке [16], локально зависящей от функции распределения и электромагнитного поля.

В заключение этого раздела приведем еще один важный пример, в котором имеет место аналогичная конструкция. Речь пойдет об уравнениях Бенни, описывающих поверхностные волны в приближении "мелкой" воды, когда течение жидкости не предполагается потенциальным:

$$h_t + \operatorname{div}\int_0^h \mathbf{U}\,\mathrm{d}z = 0\,, \tag{11.6}$$

$$\mathbf{U}_t + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} + W\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial z} + \nabla h = 0\,, \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} + \operatorname{div}\mathbf{U} = 0\,. \tag{11.8}$$

Здесь $h = h(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} = (x, y)$, $0 < z < h$) — граница свободной поверхности жидкости, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, z)$ — вектор горизонтальной скорости, $W = W(\mathbf{r}, z)$ — вертикальная компонента скорости, $g = 1$. Покажем, что система (11.6)–(11.8) может быть сведена к бесконечной системе двумерных гидродинамических уравнений.

Введем координату ξ ($0 < \xi < l$), которая нумерует каждый слой жидкости в равновесии в направлении z. Тогда координата в момент времени t каждого слоя будет задана функциями:

$$z = z(\mathbf{r}, \xi, t), \qquad h(\mathbf{r}, t) = z(\mathbf{r}, l, t)\,.$$

Ясно, что уравнение на функцию z аналогично (9.4):

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)z = W\,. \tag{11.9}$$

Полагая $\xi = l$, видим, что из (11.9) следует (11.6). При этом производные, взятые при постоянных ξ и z, связаны между собой формулами:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\xi - \frac{z_t}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\,, \qquad (\nabla)_z = (\nabla)_\xi - \frac{\nabla z}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\,. \tag{11.10}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\,, \tag{11.11}$$

где

$$\eta(\mathbf{r}, \xi, t) = \frac{\partial z}{\partial\xi}\,.$$

Дифференцируя соотношение (11.9) по ξ и используя формулы (11.10), (11.11), легко получить уравнение

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(\eta\mathbf{U}) = 0\,. \tag{11.12}$$

(Здесь и всюду ниже производные берутся при постоянном ξ.)

Применяя эти же формулы к (11.7), после преобразований получим

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} + \nabla h = 0\,, \tag{11.13}$$

где h и η связаны соотношением

$$h = \int_0^l \eta(\mathbf{r}, \xi, t)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{11.14}$$

Полученная система отличается от (11.3)–(11.5) лишь способом согласования (11.14). Поэтому канонические переменные для потенциальных (в плоскости x, y) течений ($\mathbf{U} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$) остаются прежними [30]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}\,, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\varphi}\,, \tag{11.15}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\eta(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,h^2\,.$$

Если течение зависит только от x, гамильтоновская структура может быть задана в переменных η и U:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta U}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta\eta}\,.$$

Следует добавить, что для одномерных течений в [32] был развит другой способ введения гамильтоновской структуры. Можно показать, что гамильтоновская структура, введенная в [32], эквивалентна структуре (11.15).

В заключении этого раздела укажем еще одну работу [76], в которой, по существу, используются те же идеи, что и для уравнений Власова и Бенни. В [76] Вирасоро предложил описывать течения стратифицированной жидкости, используя смешанное, лагранжево-эйлерово представление. Для двумерных течений независимыми переменными выступают горизонтальная координата x и лагранжева β, нумерующая линии уровня плотности ρ. Для двумерной гидродинамики, для которой также может быть использована данная схема, одна из координат, лагранжева, маркирует уровни завихренности Ω, а другая координата, декартова, — например, x. Вирасоро с самого начала исходит из вариационного принципа в форме Лагранжа (7.6), а затем осуществляет переход к новым переменным, вводя производящую функцию. Эта функция выступает в лагранжиане в качестве обобщенной координаты.

Примерно эти же идеи лежат в основе работ [38, 39], в которых для уравнения (5.12), описывающего волны Россби, из неканонической скобки выводится скобка Гаднера–Захарова–Фаддеева.

12. Классическая теория возмущений и редукция гамильтонианов

Если в предыдущих разделах шла речь о введении гамильтоновской структуры, то далее будем предполагать, что мы сумели тем или иным способом ввести канонические переменные, а вместе с ними нормальные переменные, диагонализующие квадратичный гамильтониан. Обратимся к классической теории возмущений для волновых гамильтоновских систем, в основе которой лежит предположение о малости амплитуд волн. Отличие волновых систем от конечномерных состоит в том, что применение теории возмущений приводит к появлению резонансных знаменателей не в отдельных точках, а на целых многообразиях. Классифицируя их, мы придем к целому ряду стандартных гамильтонианов и соответствующих им уравнений. К ним, в частности, относятся многие известные нелинейные уравнения, такие как нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), уравнение КДВ, уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) и т.д.

Предположим, что в среде существует один тип волн с законом дисперсии $\omega(k)$ и амплитудами $a(k)$, эволюция которых определяется из (3.7):

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -\mathrm{i}\,\frac{\delta H}{\delta a_k^*}\,, \tag{12.1}$$

где

$$H = H_0 + H_1 + \ldots\,,$$

$$H_0 = \int \omega_k |a_k|^2\,\mathrm{d}k\,, \tag{12.2}$$

$$H_1 = \int (V_{kk_1k_2} a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + \text{к.с.})\delta_{k-k_1-k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \\ + \frac{1}{3}\int (U_{kk_1k_2} a_k^* a_{k_2}^* a_{k_2}^* + \text{к.с.})\delta_{k+k_1+k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2\,. \tag{12.3}$$

Рассмотрим преобразование от переменных $a(k)$ к новым переменным $c(k)$ в виде интегростепенного ряда:

$$a_k = c_k + \int L_{kk_1k_2} c_{k_1} c_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \\ + \int M_{kk_1k_2} c_k c_{k_2}^* \delta_{k_2-k-k_1}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \\ + \int N_{kk_1k_2} c_k^* c_{k_1}^* \delta_{k+k_1+k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \ldots \tag{12.4}$$

Потребуем, чтобы такое преобразование исключало из гамильтониана члены третьего порядка и кроме того было каноническим. Последнее означает, что

$$\{c_k, c_{k'}^*\} = \delta_{k-k'}\,, \qquad \{c_k, c_{k'}\} = \{c_k^*, c_{k'}^*\} = 0\,.$$

Из этих двух требований можно после простых вычислений получить

$$a_k = c_k - \int \frac{V_{kk_1k_2} c_{k_1} c_{k_2}}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}}\,\delta_{k-k_1-k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \\ + 2\int \frac{V_{k_2kk_1}^* c_k c_{k_2}^*}{\omega_{k_2} - \omega_k - \omega_{k_1}}\,\delta_{k_2-k-k_1}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 - \\ - \int \frac{U_{kkk_2} c_k^* c_{k_1}^*}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}\,\delta_{k+k_1+k_2}\,\mathrm{d}\mathbf{k}_1\,\mathrm{d}\mathbf{k}_2 + \ldots \tag{12.5}$$

При этом первые два интегральные члена обеспечивают сокращение в H_1 вторых двух слагаемых, а последний член дает сокращение других двух, пропорциональных $a^*a^*a^*$ и aaa. Оба эти преобразования (исключение обеих пар в H_1) являются независимыми и могут быть выполнены по отдельности. Процедура последовательного исключения членов гамильтониана с помощью канонических преобразований называется классической теорией возмущений. При построении такой теории мы немедленно сталкиваемся с проблемой "малых знаменателей", связанной в данном случае с появлением неинтегрируемых особенностей вблизи многообразий

$$\omega_k + \ldots + \omega_{k_i} - \omega_{k_{i+1}} - \ldots - \omega_{k_n} = 0\,,$$
$$\mathbf{k} + \ldots + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1} - \ldots - \mathbf{k}_n = 0\,,$$

представляющих собой условие резонанса n-го порядка. Простейшие многообразия уже возникают при исключении трехволнового гамильтониана (3.8), когда (см. (12.5)):

$$\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = 0\,,$$
$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0 \qquad (12.6)$$

и

$$\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} = 0\,,$$
$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = 0\,. \qquad (12.7)$$

Выполнение первого из этих условий возможно, если в среде существуют волны с отрицательной энергией, при этом какая-нибудь из частот ω_k должна быть отрицательной. Такая ситуация, как правило, имеет место в неустойчивых средах, например, в плазме с током. Если в среде нет волн с отрицательной энергией, то из H_1 члены, пропорциональные $a^*a^*a^*$ и aaa, могут быть исключены с помощью канонического преобразования и в этом смысле они являются несущественными (нерезонансными).

Возможность существования решений у системы (12.7) зависит от вида функций. Для изотропных сред, у которых $\omega(\mathbf{k})$ зависит только от $|\mathbf{k}|$, решение не существует, если $\omega(0) = 0$ и $\omega''(k) < 0$. Такая ситуация, например, реализуется для поверхностных гравитационных волн. Для капиллярных волн условия резонанса (12.7) являются выполненными.

Если уравнения (12.6), (12.7) не имеют решения, то трехволновые члены исключаются. Среди членов четвертого порядка существенным является гамильтониан вида

$$H_3 = \int T_{k_1k_2k_3k_4} a^*_{k_1} a^*_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4} \prod \mathrm{d}\mathbf{k}_i\,, \qquad (12.8)$$

для которого условие резонанса

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} = 0\,,$$
$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = 0$$

выполняется вне зависимости от вида $\omega(k)$. При этом трехволновое взаимодействие приводит в (12.8) к перенормировке вершины $T_{kk_1k_2k_3}$ (см. [83]):

$$\begin{aligned} T_{kk_1k_2k_3} = T^{(0)}_{kk_1k_2k_3} &- 2\,\frac{U_{-k_2-k_3,k_2k_3} U^*_{-k-k_1,kk_1}}{\omega_{k+k_1} + \omega_k + \omega_{k_1}} + \\ &+ 2\,\frac{V_{k_2+k_3k_2k_3} V^*_{k+k_1kk_1}}{\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1}} - 2\,\frac{V_{kk_2k-k_2} V^*_{k_3k_1k_3-k_1}}{\omega_{k_3-k_1} + \omega_{k_1} - \omega_{k_3}} - \\ &- 2\,\frac{V_{k_1k_3k_1-k_3} V^*_{k_2kk_2-k}}{\omega_{k_2-k} + \omega_k - \omega_{k_2}} - 2\,\frac{V_{k_1k_2k_1-k_2} V^*_{k_3-kk_3-k}}{\omega_{k_3-k} + \omega_k - \omega_{k_3}} - \\ &- 2\,\frac{V_{kk_3k-k_3} V^*_{k_2k_1k_2-k_1}}{\omega_{k_2-k} + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}}\,. \end{aligned} \qquad (12.9)$$

Таким образом, получаем ряд стандартных гамильтонианов взаимодействия: гамильтониан

$$H_\mathrm{d} = \int (V_{kk_1k_2} a^*_k a_{k_1} a_{k_2} + \text{к.с.}) \delta_{k-k_1-k_2}\, \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{d}\mathbf{k}_1\, \mathrm{d}\mathbf{k}_2\,, \qquad (12.10)$$

ответственный за процесс распада $1 \to 2$ и обратный процесс — слияние $2 \to 1$; гамильтониан

$$H_\mathrm{ex} = \frac{1}{3} \int (U^*_{kk_1k_2} a^*_k a^*_{k_1} a^*_{k_2} + \text{к.с.}) \delta_{k+k_1+k_2}\, \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{d}\mathbf{k}_1\, \mathrm{d}\mathbf{k}_2\,, \qquad (12.11)$$

описывающий так называемую взрывную неустойчивость, при которой из вакуума одновременно рождаются три кванта волнового поля $(0 \to 3)$; гамильтониан

$$H_\mathrm{sc} = \int T_{kk_1k_2k_3} a^*_k a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \prod \mathrm{d}\mathbf{k}_i\,, \qquad (12.12)$$

ответственный за процессы $2 \to 2$; и т.д.

Если в среде существуют несколько типов волн, то список стандартных гамильтонианов значительно расширяется. Приведем один из них, ответственный за взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн:

$$H_\mathrm{int} = \int (V_{kk_1k_2} b_k a^*_{k_1} a_{k_2} + \text{к.с.}) \delta_{k-k_1-k_2}\, \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{d}\mathbf{k}_1\, \mathrm{d}\mathbf{k}_2\,. \qquad (12.13)$$

Гамильтониан типа (12.13) описывает взаимодействие света и звука в диэлектриках, ленгмюровских и ионнозвуковых волн в плазме и т.д.

Описывая систему нелинейных волн с помощью того или иного стандартного гамильтониана взаимодействия, мы естественно предполагаем, что уровень нелинейности, характеризующийся амплитудой волн, является малым. Несмотря на эти ограничения, возникающие явления достаточно богаты. Многие из них могут уже быть поняты, исходя из простейших моделей, возникающих в результате редукций стандартных гамильтонианов. В качестве первого примера рассмотрим взаимодействие трех спектрально узких пакетов волн с волновыми векторами, лежащими вблизи $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$. Такое взаимодействие является резонансным, если, например,

$$\omega(\mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3)\,,$$
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3\,.$$

Для этого случая $a(\mathbf{k})$ можно представить в виде:

$$a(\mathbf{k}) = a_1(\mathbf{k}) + a_2(\mathbf{k}) + a_3(\mathbf{k})\,,$$

где a_1, a_2, a_3 — амплитуды волн в каждом из трех пакетов. Характерные ширины этих пакетов κ_i предполагаются малыми по сравнению с $|\mathbf{k}_i|$. Для такого взаимодействия с помощью канонических преобразований (12.10) H_d редуцируется до вида:

$$H_\mathrm{int} = 2 \int \left[V a^*_1(k_1) a_2(k_2) a_3(k_3) + \text{к.с.} \right] \delta_{k_1-k_2-k_3} \prod \mathrm{d}\mathbf{k}_i\,.$$

Используя затем узость пакетов, в H_0 положим

$$\omega(\mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\kappa}) = \omega(\mathbf{k}_i) + (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{v}_i)\,, \qquad \mathbf{v}_i = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}_i}$$

и сделаем замену переменных: $c_i(x) = a_i(\kappa)\exp\left[\mathrm{i}\omega(k_i)t\right]$. В результате

$$H \to H - \sum \int \omega_i |c_i|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\,.$$

Совершая далее в этом гамильтониане обратное фурье-преобразование по формулам

$$\psi_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int c_i(\boldsymbol{\kappa}) \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\,,$$

получаем известные уравнения для резонансного взаимодействия [77]:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1\boldsymbol{\nabla})\psi_1 = -\frac{\mathrm{i}V}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi_2\psi_3\,, \qquad (12.14)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2\boldsymbol{\nabla})\psi_2 = -\frac{\mathrm{i}V^*}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi_1\psi_3^*\,, \qquad (12.15)$$

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial t} + (\mathbf{v}_3\boldsymbol{\nabla})\psi_3 = -\frac{\mathrm{i}V^*}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi_2\psi_3^*\,. \qquad (12.16)$$

Аналогичным образом получается система уравнений для описания взрывной неустойчивости трех пакетов волн. В этом случае гамильтониан взаимодействия пакетов возникает в результате редукции гамильтониана (12.11):

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1\boldsymbol{\nabla})\psi_1 = -\frac{\mathrm{i}U^*}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi_2^*\psi_3^*\,, \qquad (12.17)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2\boldsymbol{\nabla})\psi_2 = -\frac{\mathrm{i}U^*}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi_1^*\psi_3^*\,, \qquad (12.18)$$

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial t} + (\mathbf{v}_3\boldsymbol{\nabla})\psi_3 = -\frac{\mathrm{i}U^*}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi_2^*\psi_3^*\,. \qquad (12.19)$$

Следующий пример относится к редукции гамильтониана (12.12) для одного спектрально узкого пакета волн. Пусть центр пакета приходится на вектор $\mathbf{k}_0$, тогда, полагая

$$a(\mathbf{k}) = c(\kappa)\exp(-\mathrm{i}\omega_{k_0}t)\,, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \kappa\,,$$

$$H \to H - \omega(k_0)\int \left|c(\kappa)\right|^2 \mathrm{d}\kappa\,,$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0 + \kappa) = \omega(\mathbf{k}_0) + \kappa\mathbf{v}_{\mathrm{g}} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\,\kappa_\alpha\kappa_\beta\,,$$

получим для $\psi(\mathbf{r})$ НУШ:

$$\mathrm{i}(\psi_t + \mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla}\psi) + \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{T}{(2\pi)^3}\,|\psi|^2\psi = 0\,, \qquad (12.20)$$

где

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\,.$$

Уравнение (12.20) описывает самодействие спектрально-узкого волнового пакета в нелинейной среде. В изотропной среде, когда тензор

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{v_{\mathrm{g}}}{2k_0}(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) + \omega'' n_\alpha n_\beta \qquad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}\right),$$

это уравнение упрощается до вида

$$\mathrm{i}(\psi_t + v_{\mathrm{g}}\psi_x) + \frac{v_{\mathrm{g}}}{2k_0}\,\Delta_\perp\psi + \frac{\omega''}{2}\,\psi_{xx} + \frac{T}{(2\pi)^3}\,|\psi|^2\psi = 0\,, \qquad (12.21)$$

где ось x совпадает с направлением групповой скорости. В этом уравнении второе слагаемое ответственно за движение волнового пакета как целого с групповой скоростью v_{g} (этот член, очевидно, может быть исключен путем перехода в сопутствующую систему координат, двигающуюся с $\mathbf{v}_{\mathrm{g}}$); следующие два слагаемых описывают дисперсионное (продольное) и дифракционное (поперечное) расширение пакета; наконец, последнее слагаемое в (12.21) учитывает нелинейность.

Совершив в НУШ масштабирование по продольным и поперечным координатам, а также — амплитуды ψ, уравнение может быть представлено в канонической форме вида

$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta_\perp\psi + \sigma\psi_{xx} + \eta|\psi|^2\psi = 0\,, \qquad (12.22)$$

где $\sigma = \mathrm{sign}(\omega'' v_{\mathrm{g}})$ и $\eta = \mathrm{sign}(Tv_{\mathrm{g}})$. Это уравнение может быть рассмотрено как уравнение Шрёдингера движения частицы в самосогласованном потенциале $U = -\eta|\psi|^2$, с положительной поперечной массой и с продольной массой, знак которой совпадает с σ. Это означает, что характер взаимодействия в продольном и поперечном направлениях различен в зависимости от знаков σ и η. Если $\eta > 0$, то в поперечном направлении имеет место притяжение, и пакет в этом направлении должен сжиматься благодаря нелинейному взаимодействию. В обратном случае ($\eta < 0$) нелинейность помогает дифракционному расширению. Аналогично обстоит дело с продольным движением. Если $\sigma\eta = 1$, то имеет место сжатие пакета вдоль направления групповой скорости и расплывание пакета в обратном случае ($\sigma\eta = -1$). Существует единственный вариант $\sigma = \eta = 1$, когда одновременно нелинейность приводит к сжатию пакета по всем направлениям. Именно в этом случае возможен волновой коллапс (подробнее см. [84]).

Таким образом, в зависимости от σ и η существуют четыре канонических формы нелинейного уравнения Шрёдингера:

$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0\,, \qquad (12.23)$$

$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta_\perp\psi - \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0\,, \qquad (12.24)$$

$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta\psi - |\psi|^2\psi = 0\,, \qquad (12.25)$$

$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta_\perp\psi - \psi_{xx} - |\psi|^2\psi = 0\,. \qquad (12.26)$$

Все эти уравнения относятся к гамильтоновским, они записываются в виде

$$\mathrm{i}\psi_t = \frac{\delta H}{\delta\psi^*}\,, \qquad H = \int\left\{|\boldsymbol{\nabla}_\perp\psi|^2 + \sigma|\psi_x|^2 - \frac{\eta}{2}\,|\psi|^4\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \qquad (12.27)$$

При выводе уравнения (12.20) мы предполагали, что $T_{k_1k_2k_3k_4}$ является непрерывной функцией своих аргументов; фигурирующая в (12.9) вершина T есть значение этого ядра при $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0$. Однако эта ситуация не является типичной. В частности, это не так, если $\omega(0) = 0$. Согласно теореме Голдстоуна (см. [78]), обращается в нуль матричный элемент $V_{kk_1k_2}$, если один из волновых векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$ или $\mathbf{k}_2$ равен нулю. Таким образом, в выражении (12.9) для матричного элемента T при $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0$ ряд слагаемых имеют неопределенности. Для их раскрытия нужно вычислить предел типа

$$\lim_{k\to 0} \frac{|V_{k_0,\,k_0+k,\,-k}|^2}{\omega(k) - (\mathbf{k}\mathbf{v}_{\mathrm{g}})} \,.$$

Например, для поверхностных гравитационных волн бесконечной глубины

$$V_{kk_0k_0} \sim k^{3/4} \,, \qquad \omega(k) \sim k^{1/2} \,,$$

и все неопределенности обращаются в нуль. При конечной глубине $V_{kk_0k_0} \sim k^{1/2}$, $\omega(k) \sim k$, так что по каждому направлению этот предел конечен, при этом величина $T_{k_0k_0k_0k_0}$ остается неопределенной. Неопределенность этого типа связана с возбуждением вынужденных движений среды как целого. Такая ситуация имеет место для всех волн, у которых закон дисперсии ω_k приближается к линейному при $k \to 0$. Кроме рассмотренных выше поверхностных волн для жидкости конечной глубины, к таким волнам относятся ионнозвуковые волны в плазме, звуковые волны в твердом теле и т.д. В этой ситуации необходимы отдельные уравнения для описания вынужденных низкочастотных движений. Эта задача представляет собой частный случай более общей задачи — описания взаимодействия спектрально-узкого высокочастотного волнового пакета с низкочастотными колебаниями звукового типа. Гамильтониан такого взаимодействия может быть построен из общих принципов, основанных на классическом представлении об адиабатическом инварианте. (Разумеется, существует и прямой способ вычисления, основанный на редукции гамильтониана (12.13).) Напомним, что для осциллятора с частотой ω имеет место следующее замечательное соотношение между энергией E и адиабатическим инвариантом I:

$$\frac{E}{\omega} = I \,.$$

В данном случае адиабатическими инвариантами являются величины $\left|c(k)\right|^2$, так что

$$H_0 \approx \omega(k_0) \int \left|c(k)\right|^2 \mathrm{d}\mathbf{k} = \int \omega(k_0) |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{r} \,.$$

Нелинейное взаимодействие с низкочастотными движениями не нарушает адиабатичности и поэтому

$$H_{\mathrm{int}} = \int \delta\omega |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{r} \,,$$

где $\delta\omega$ есть изменение частоты за счет вариаций локальных характеристик среды — плотности $\delta\rho$ и скорости $\mathbf{v}$:

$$\delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\,\delta\rho + (\mathbf{k}_0\mathbf{v})$$

(второе слагаемое соответствует эффекту Доплера).

Полагая $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ и вспоминая, что $\delta\rho$ и φ являются канонически сопряженными функциями для сжимаемой жидкости (см. раздел 4), получим уравнения [66, 79]:

$$\mathrm{i}(\psi_t + \mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla}\psi) + \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho_i}\,\delta\rho + \mathbf{k}_0\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)\psi + \frac{T}{(2\pi)^3}\,|\psi|^2\psi = 0 \,, \tag{12.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta\rho + \rho_0\Delta\varphi + (\mathbf{k}_0\boldsymbol{\nabla})|\psi|^2 = 0 \,, \tag{12.29}$$

$$\rho_0\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c_{\mathrm{s}}^2\delta\rho + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\,|\psi|^2 = 0 \,, \tag{12.30}$$

где T — регулярная часть матричного элемента $\tilde{T}_{k_0k_0k_0k_0}$, не имеющая особенностей.

Гамильтониан этой системы представляет собой комбинацию гамильтонианов для уравнений (12.20) и (4.3):

$$H_{\mathrm{c}} = \int \Bigg[-\mathrm{i}\psi^*\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{1}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\beta} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\,\delta\rho + \mathbf{k}_0\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)|\psi|^2 + \frac{1}{2}\,\frac{T}{(2\pi)^3}\,|\psi|^4 + c_{\mathrm{s}}^2\,\frac{\delta\rho^2}{2\rho_0} + \rho_0\,\frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2}{2} \Bigg] \,\mathrm{d}\mathbf{r} \,. \tag{12.31}$$

В зависимости от соотношений между групповой скоростью v_{g} и скоростью звука c_{s}, уравнения (12.29), (12.30) допускают ряд упрощений. Если $v_{\mathrm{g}} < c_{\mathrm{s}}$ и $v_{\mathrm{g}}\Delta k \gg T|\psi|^2$, где Δk — ширина по k высокочастотного пакета, то в уравнениях (12.29), (12.30) можно заменить $\partial/\partial t$ на $\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla}$:

$$\begin{aligned} &-\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla}\delta\rho + \rho_0\Delta\varphi + (\mathbf{k}_0\boldsymbol{\nabla})|\psi|^2 = 0 \,, \\ &-\rho_0(\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla})\varphi + c_{\mathrm{s}}^2\delta\rho + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\,|\psi|^2 = 0 \,. \end{aligned} \tag{12.32}$$

Для изотропных сред возникшая система уравнений, записанная в системе координат, двигающейся с групповой скоростью, переходит в уравнения Дэви–Стюартсона:

$$\mathrm{i}\psi_t + \frac{v_{\mathrm{g}}}{2k_0}\,\Delta_\perp\psi + \frac{\omega''}{2}\,\psi_{xx} + \left[\frac{\partial\omega}{\partial\rho_0} + \frac{k_0c_{\mathrm{s}}^2}{\rho_0 v_{\mathrm{g}}}\right]\delta\rho\psi + \left[\frac{T}{(2\pi)^3} + \frac{k_0}{\rho_0 v_{\mathrm{g}}}\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\right]|\psi|^2\psi = 0 \,, \tag{12.33}$$

$$\left(v_{\mathrm{g}}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\delta\rho - \frac{k_0}{v_{\mathrm{g}}}\,|\psi|^2\right) = \Delta\left(c_{\mathrm{s}}^2\delta\rho + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\,|\psi|^2\right) . \tag{12.34}$$

Эти уравнения впервые были получены для гравитационных волн на поверхности жидкости конечной глубины [80].

В этой системе уравнения (12.32) или (12.34) имеют смысл связей между $\delta\rho$, φ и $|\psi|^2$; соответственно гамильтониан для (12.33) строится с учетом этих связей. Явное выражение для него легко получить, если представить уравнения связи в виде

$$-(\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla})\delta\rho = \frac{\delta H}{\delta\varphi} \,, \qquad -(\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{\nabla})\varphi = \frac{\delta H}{\delta\rho}$$

с $H = H_{\mathrm{c}}$ (12.31). Тогда гамильтониан для уравнения Дэви–Стюартсона H_{DS} получается из H_{c} по следующему правилу:

$$H_{\rm DS} = H_{\rm c} - \int \delta\rho(\mathbf{v}_{\rm g}\nabla)\varphi\,{\rm d}\mathbf{r} + {\rm i}\int \psi^*(\mathbf{v}_{\rm g}\nabla)\psi\,{\rm d}\mathbf{r}\,,$$

а уравнения движения имеют вид

$${\rm i}\psi_t = \frac{\delta H_{\rm DS}}{\delta\psi^*}\,.$$

Если $v_{\rm g} > c_{\rm s}$, то в уравнениях (12.29), (12.30) ни при каком уровне нелинейности нельзя заменить $\partial/\partial t$ на оператор $(-\mathbf{v}_{\rm g}\nabla)$. Это легко понять, если переписать уравнения (12.29), (12.30) в фурье-представлении. Если далее совершить такую замену, то мы наталкиваемся на резонансный знаменатель вида

$$kc_{\rm s} = (\mathbf{k}\mathbf{v}_{\rm g})\,,$$

который соответствует условию (12.7) распада высокочастотной волны на высокочастотную и звуковую волны. При условии $v_{\rm g} \gg c_{\rm s}$, соответствующем, например, взаимодействию света и звука в диэлектриках, вклад в $\delta\omega$ за счет эффекта Доплера является слабым по сравнению с рассеянием на длинноволновых флуктуациях плотности $\delta\rho$ по параметру $c_{\rm s}/v_{\rm g}$. Уравнения (12.28)–(12.30) в этом случае упрощаются до вида:

$${\rm i}\psi_t + \frac{\omega''}{2}\,\psi_{xx} + \frac{v_{\rm g}}{2k_0}\,\Delta_\perp\psi + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\,\delta\rho + \frac{T}{(2\pi)^3}\,|\psi|^2\right)\psi = 0\,,$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_{\rm g}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - c_{\rm s}^2\Delta_\perp\right]\delta\rho = \frac{\partial\omega}{\partial\rho_0}\,\Delta|\psi|^2\,.$$

К простейшим редукциям следует также отнести редукцию уравнения Буссинеска к уравнению КДВ. Для модели Буссинеска закон дисперсии близок к линейному. Это означает, что в гамильтониане H_1 с коэффициентами вида (4.5) следует оставить члены, пропорциональные a^*aa и aa^*a^*, а остальные члены исключить с помощью канонических преобразований, при этом в квадратичном гамильтониане в $\omega(k)$ сохранить линейный по дисперсии ν член: $\omega(k) = kc_{\rm s}\left[1 + (\nu\rho_0 k^2/2c_{\rm s}^2)\right]$. Совершая затем замену переменных a_k к $u(x)$ по формулам:

$$a_k = \frac{u_k}{\sqrt{k}}\,,\qquad u = \int_0^\infty \left[u_k\exp({\rm i}kx) + u_k^*\exp(-{\rm i}kx)\right]{\rm d}k\,,$$

приходим к уравнению КДВ:

$$u_t + c_{\rm s}u_x + \beta u u_x + c_{\rm s}\gamma u_{xxx} = 0\,, \tag{12.35}$$

где

$$\gamma = -\frac{\nu\rho_0}{2c_{\rm s}^2}\,,\qquad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{c_{\rm s}}{\rho_0}\right)^{1/2}(1+g)\,.$$

Естественным обобщением уравнения КДВ на многомерный случай является уравнение КП [85], которое следует из редукции гамильтониана (4.5) для узкого углового распределения звуковых волн со слабой дисперсией. Полагая, что основное направление распространения совпадает с осью x, для амплитуды пакета u можно записать уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + c_{\rm s}u_x + \beta u u_x + c_{\rm s}\gamma u_{xxx}) = \frac{c_{\rm s}}{2}\,\nabla_\perp^2 u\,. \tag{12.36}$$

В уравнении (12.36) левая часть описывает дифракцию акустических волн в перпендикулярном к оси x направлении. Необходимо подчеркнуть, что все члены в этом уравнении малы по отношению к слагаемому $c_{\rm s}u_x$, ответственному за распространение пакета как целого со звуковой скоростью. В этом смысле вывод уравнения КП, так же как и уравнения КДВ представляет собой один из вариантов метода усреднения, когда можно выделить два различных типа движений — медленное и быстрое.

Представленные примеры, естественно, не исчерпывают всех возможных редукций гамильтонианов. Мы остановились на наиболее ярких, продемонстрировав их универсальность. Примечательной чертой этой универсальности является то, что многие рассмотренные в данном обзоре модели допускают применение метода обратной задачи рассеяния.

Благодарности
Авторы благодарят И. Помо (Y. Pomeau), Л. Берже (L. Bergé) и В.В. Янькова за ряд полезных замечаний. Один из авторов (Е.К.) выражает благодарность лаборатории статистической физики ENS (Ecole Normale Superieur), где эта работа частично выполнялась, за теплое гостеприимство и финансовую поддержку в рамках соглашения Landau–CNRS. Эта работа также была поддержана INTAS, РФФИ и Государственной программой России "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики".

Список литературы

1. Zakharov V E, Kuznetsov E A *Sov. Sci. Rev.* (Ed. S P Novikov) **91** 1310 (1986)
2. Захаров В Е, Львов В С *Изв. вузов Радиофиз.* **18** 1470 (1975)
3. Захаров В Е *Изв. вузов Радиофиз.* **17** 431 (1974)
4. Musher S L, Rubenchik A M, Zakharov V E *Phys. Rep.* **129** 285 (1985)
5. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974)
6. Kuznetsov E A, Rubenchik A M, Zakharov V E *Phys. Rep.* **142** 103 (1986)
7. Holm D et al. *Phys. Rep.* **123** 1 (1985)
8. Арнольд В И *ДАН СССР* **162** 773 (1965)
9. Арнольд В И *УМН* **24** (3) 225 (1969)
10. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1974)
11. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И, в сб. *Итоги науки и техники Сер. Современные проблемы математики* Т. 3 (М.: ВИНИТИ, 1985)
12. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **11** 592 (1941)
13. Dzyaloshinskii I E, Volovik G E *Ann. Phys.* **125** 67 (1980)
14. Novikov S P *Sov. Sci. Rev.* **91** 1 (1986)
15. Morrison P J, Greene J M *Phys. Rev. Lett.* **45** 790 (1980)
16. Morrison P J *Phys. Lett. A* **80** 383 (1980)
17. Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932)
18. Kuznetsov E A, Mikhailov A V *Phys. Lett. A* **77** 37 (1980)
19. Bateman H *Proc. R. Soc. London Ser. A* **125** 598 (1929); *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1944)
20. Давыдов Б.И *ДАН СССР* **89** 165 (1949)
21. Халатников И М *ЖЭТФ* **23** 169 (1952)
22. Seliger R L, Whitham G B *Proc. R. Soc. London Ser. A* **305** 1 (1968)

23. Конторович В М, Кравчик Х, Тиме В "Гамильтоновское описание непотенциального течения в присутствии свободной границы в обычной и магнитной гидродинамике" Препринт 3-158, ИРЭ АН УССР (Харьков, 1980)
24. Захаров В Е, Филоненко Н Н *ДАН СССР* **70** 1292 (1966)
25. Захаров В Е *ПМТФ* (2) 86 (1968)
26. Воронович А Г *Изв. АН СССР Сер. ФАО* **15** 82 (1979)
27. Гончаров В П *Изв. АН СССР Сер. ФАО* **16** 473 (1980)
28. Миропольский Ю З *Динамика внутренних гравитационных волн в океане* (Л.: Гидрометеоиздат, 1981)
29. Гончаров В П, Павлов В И *Проблемы гидродинамики в гамильтоновском описании* (М.: Изд-во МГУ, 1993)
30. Zakharov V E *Physica D* **3** 193 (1981)
31. Захаров В Е *Функ. анал. прилож.* **14** (2) 15 (1980)
32. Купершмидт Б А, Манин Ю И *Функ. анал. прилож.* **11** (3) 31 (1977); **12** (1) 25 (1978)
33. Захаров В Е, Кузнецов Е А *ДАН СССР* **194** 1288 (1970)
34. Захаров В Е *ЖЭТФ* **60** 1714 (1971)
35. Кузнецов Е А *ЖЭТФ* **62** 584 (1972)
36. Кириллов А А *Элементы теории представлений* (М.: Наука, 1978)
37. Kostant B, *Proc. U.S.–Japan Seminar on Differential Geometry* (*Kyoto 1965*) (Tokyo, 1966)
38. Захаров В Е, Монин А С, Питербарг Л И *ДАН СССР* **289** 1061 (1987); Захаров В Е, Питербарг Л И *ДАН СССР* **295** 816 (1987)
39. Piterbarg L I *Phys. Lett. A* **205** 149 (1996)
40. Захаров В Е и др. *Теория солитонов* (М.: Наука, 1980)
41. Salmon R, in *Conf. Proc. Am. Inst. Phys.* **88** 127 (1982)
42. Ertel H *Meteorol. Z.* **59** 277 (1942)
43. Salmon R *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** 225 (1988)
44. Eckart C *Phys. Rev.* **54** 920 (1938); *Phys. Fluids* **3** 421 (1960)
45. Eckart C *Phys Fluids* **6** 1037 (1963)
46. Newcomb W A, in *Proc. Symp. Appl. Math.* **18** 152 (1967)
47. Захаров В Е, Кузнецов Е А "Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа" Препринт № 186, Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР (Новосибирск, 1982)
48. Padhye N, Morrison P J *Phys. Lett. A* **219** 287 (1996)
49. Boozer A H *Magnetic Field Line Hamiltonian* Princeton Plasma Phys. Lab. Rep. No. PPPLR-2094R
50. Lin C C, in *Liquid Helium, Proceedings of the Enrico Fermi International School of Physics, Course XXI* (New York: Academic, 1963)
51. Яньков В В *Письма в ЖЭТФ* **58** 516 (1993); Яньков В В *ЖЭТФ* **107** 414 (1995)
52. Uby L, Isichenko M B, Yankov V V *Phys. Rev. E* **52** 932 (1996)
53. van Saarloos W *Physica A* **108** 557 (1981)
54. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988)
55. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1965)
56. Moreau J J *C.R. Acad. Sci.* **252** 2810 (1961)
57. Moffatt H K *J. Fluid Mech.* **35** 117 (1969)
58. Faddeev L D *Math. Phys. Lett.* **1** 289 (1976)
59. Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т *Современная геометрия* (М.: Наука, 1979)
60. Whitehead J H C *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **33** (5) 115 (1947)
61. Воловик Г Е, Минеев В П *ЖЭТФ* **72** 2256 (1977)
62. Абрашкин А А, Зенькович Д А, Якубович Е И *Изв. вузов Радиофиз.* **XXXIX** 783 (1996)
63. Abarbanel H D I et al. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **318** 349 (1986)
64. Lewis D, Marsden J, Montgomery R *Physica D* **18** 391 (1986)
65. Ebin D, Marsden J *Ann. Math.* **92** 102 (1970)
66. Карпман В И *Нелинейные волны в диспергирующих средах* (М.: Наука, 1973)
67. Kuznetsov E A, Spector M D, Zakharov V E *Phys. Rev. E* **48** 1283 (1994)
68. Кузнецов Е А, Спектор М Д *ЖЭТФ* **71** 262 (1976)
69. Rouhi A, Wright J *Phys. Rev. E* **48** 1850 (1993)
70. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London Ser. A* **212** 330 (1952)
71. Frenkel A, Levich E, Shtilman L *Phys. Lett. A* **88** 461 (1982)
72. Гордин В А, Петвиашвили В И *Физ. плазмы* **13** 509 (1987)
73. Henyey F, in *Conf. Proc. Am. Inst. Phys.* **88** 85 (1982)
74. Моисеев С С и др. *ЖЭТФ* **83** 215 (1982)
75. Гаврилин Б Л, Заславский М М *ДАН СССР* **192** 48 (1982)
76. Virasoro M A *Phys. Rev. Lett.* **47** 1181 (1981)
77. Bloembergen N *Nonlinear Optics* (Ed. W A Benjamin) (Mass.: Reading, 1965)
78. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1976)
79. Захаров В Е, Рубенчик А М *ПМТФ* (5) 84 (1972)
80. Davey A, Stewartson K *Proc. R. Soc. London Ser. A* **338** 101 (1974)
81. Гончаров В П *ДАН СССР* **313** 27 (1990)
82. Захаров В Е *Функ. анал. прилож.* **23** 24 (1989)
83. Красицкий В П *ЖЭТФ* **98** 1644 (1990)
84. Захаров В Е *Основы физики плазмы* (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Атомиздат, 1984)
85. Кадомцев Б Б, Петвиашвили В И *ДАН СССР* **192** 753 (1970)

Hamiltonian formalism for nonlinear waves

V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov
Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 117334 Moscow, Russia
E-mail: *zakharov@itp.ac.ru, kuznetso@itp.ac.ru*

The Hamiltonian description of hydrodynamic type systems for application to plasmas, hydrodynamics, and magnetohydrodynamics is reviewed with emphasis on the problem of introducing canonical variables. The relation to other Hamiltonian approaches, in particular natural-variable Poisson's brackets, is pointed out. It is shown that the degeneracy of noncanonical Poisson's brackets relates to the special type of symmetry, the relabeling transformations of fluid-particle Lagrangian markers, from which all known vorticity conservation theorems, such as Ertel's, Cauchy's, Kelvin's, as well as the vorticity frozenness and the topological Hopf invariant, derive. The application of canonical variables to collisionless plasma kinetics is described. The Hamiltonian structure of Benney's equations and of the Rossby wave equation is discussed. Davey – Stuartson's equation is given the Hamiltonian form. A general method for treating weakly nonlinear waves is presented based on classical perturbation theory and the Hamiltonian reduction technique.

PACS numbers: **52.30.–q**, 52.35.Ra, 52.55.Fa

Bibliography — 85 references

Received 5 June 1997