

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Физика бесстолкновительной плазмы

Ю.Л.Климонтович

Обзор работ, посвященных двум альтернативным способам описания неравновесных процессов в полностью ионизованной плазме. На примере явления "затухание Ландау" показано, что в кинетической теории плазмы остается нерешенным ряд принципиальных вопросов. Они возникают из-за нечеткого описания перехода от обратимых уравнений механики заряженных частиц и поля к необратимым уравнениям сплошной среды в статистической теории плазмы. Преодоление этих трудностей оказывается возможным благодаря согласованности определения структуры сплошной среды и характеристик динамической неустойчивости движения частиц плазмы. В результате возникают обобщенные необратимые уравнения, на основе которых проводится единое описание неравновесных процессов в плазме на кинетических и гидродинамических масштабах.

PACS numbers: 52.20.-j, 52.25.-b, 52.90.-z

Содержание

1. Введение (23).
2. Исходные уравнения статистической теории плазмы (26).
 - 2.1. Микроскопические уравнения для кулоновской плазмы.
 - 2.2. Основные параметры кулоновской плазмы.
 - 2.3. Физически бесконечно малые масштабы для газа и плазмы.
3. Усреднение микроскопических уравнений для плазмы (30).
 - 3.1. Приближение вторых моментов.
 - 3.2. Приближение вторых корреляционных функций.
4. Два альтернативных приближения в статистической теории плазмы (31).
 - 4.1. Традиционный и нетрадиционный способы описания неравновесных процессов в газе Больцмана.
 - 4.2. Сглаживание по объему точки сплошной среды.
 - 4.3. Метод адиабатического включения взаимодействия.
5. Кинетические уравнения для полностью ионизованной плазмы. Традиционное приближение (34).
 - 5.1. Спектральные плотности флуктуаций в кулоновской плазме.
 - 5.2. Кинетические уравнения для разреженной кулоновской плазмы.
 - 5.3. Интеграл столкновений Ландау.
 - 5.4. Приближение первых моментов. Уравнения Власова.
 - 5.5. Волны в бесстолкновительной кулоновской плазме. Затухание Ландау.
 - 5.6. Электрическая проницаемость и затухание Ландау в кинетической теории флуктуаций.

6. Нетрадиционное описание неравновесных процессов в плазме (39).
 - 6.1. Первый шаг к необратимым уравнениям физики открытых систем.
 - 6.2. Обобщенное кинетическое уравнение для разреженной кулоновской плазмы.
 - 6.3. Свойства обобщенных кинетических уравнений.
 7. Роль столкновений в бесстолкновительной плазме (45).
 - 7.1. Что же такое бесстолкновительная плазма?
 - 7.2. Свободно-молекулярные течения в полностью ионизованной ограниченной плазме.
 - 7.3. Возможно ли бесстолкновительное приближение в неограниченной плазме?
 - 7.4. Столкновительная природа затухания Ландау.
 8. Законы сохранения вещества и заряда в кулоновской плазме (47).
 - 8.1. Поток вещества и средняя скорость в микроскопической теории.
 - 8.2. Поток вещества и средняя скорость в кинетической теории.
 - 8.3. Уравнение непрерывности для плазмы.
 9. Электронная плазма (50).
 - 9.1. Обобщенное кинетическое уравнение для электронной плазмы.
 - 9.2. Уравнение непрерывности для заряда. Электрический ток.
 - 9.3. Самодиффузия в электронной плазме.
 - 9.4. Волновые свойства электронной плазмы. Столкновительное затухание Ландау.
 10. Заключение (54).
- Список литературы (55).

1. Введение

Возраст кинетической теории плазмы можно отсчитывать от года опубликования работы Л.Д.Ландау "Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия" [1]. Основой для вывода служило кинетическое уравнение Больцмана для разреженного газа, для которого с большой точностью (в силу короткодействующего взаимодействия атомов) можно ограничиться учетом столкновений лишь пар частиц газа.

Ландау обратил внимание, что для плазмы, когда взаимодействие заряженных частиц определяется законом Кулона и, следовательно, очень медленно убывает с

Ю.Л.Климонтович. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы, Россия
Тел. (095) 939-38-25
Факс (095) 932-88-20
E-mail: ylklim@hklim.phys.msu.ru

Статья поступила 13 июня 1996 г.,
после доработки 10 октября 1996 г.

расстоянием, интеграл столкновений в уравнении Больцмана расходится на больших расстояниях между частицами. Это означает, что столкновения заряженных частиц играют существенную роль на больших расстояниях, когда изменения импульсов малы. Есть, таким образом, основание провести в интеграле столкновений Больцмана разложение по малым отклонениям импульсов. В результате очень сложное выражение Больцмана сводится к существенно более простому выражению для интеграла столкновений, которое описывает диффузию в пространстве импульсов.

Такой способ получения интеграла столкновений для плазмы не является, однако, последовательным, поскольку в ней одновременно взаимодействует большое число заряженных частиц. Это проявилось в том, что выражение Ландау содержит интеграл, расходящийся (логарифмически) на больших, а также и на малых расстояниях. Положение облегчается тем, что при больших значениях аргумента логарифм малочувствителен к изменению аргумента. По этой причине возможен приближенный выбор границ области интегрирования. При этом в качестве верхнего предела выбирается радиус Дебая, который определяет область взаимодействия заряженных частиц. Поскольку в сфере радиусом Дебая в разреженной плазме находится много частиц, то в отличие от газа Больцмана взаимодействие в плазме является коллективным. Это и показывает, что выбор "старта" при установлении кинетического уравнения не является физически оправданным.

Несмотря на такую непоследовательность вывода интеграл столкновений Ландау, как мы увидим, наилучшим образом описывает диссипацию за счет перераспределения заряженных частиц плазмы. Это и дает основание считать 1936–1937 гг. началом кинетического описания "столкновительной плазмы". Последние слова взяты в кавычки, так как взаимодействие частиц в плазме является коллективным. Этому названию противопоставляется термин "бесстолкновительная плазма". Он означает, что взаимодействия, определяющие диссипацию и, следовательно, установление равновесного состояния, во внимание не принимаются.

Началом статистической теории бесстолкновительной плазмы является знаменитая работа А.А. Власова [2]. В ней впервые было сформулировано кинетическое уравнение для функции распределения электронов полностью ионизованной плазмы без учета вклада взаимодействия, определяющего диссипацию — столкновения. Таким образом, все взаимодействие заряженных частиц в нем определяется лишь через среднее поле. Оправданием, хотя, как мы увидим, недостаточным, служило то, что характерные частоты электронной плазмы в типичных ситуациях значительно больше частоты электрон-электронных столкновений.

В определенном смысле приближения Ландау и Власова отвечают двум предельным случаям. Действительно, Ландау учитывает лишь тот вклад взаимодействия, который определяет диссипацию. Эффекты, обусловленные действием внутреннего поля, не учитываются. Напротив, в уравнении Власова взаимодействие проявляется лишь через среднее поле. По этой причине уравнения Власова являются обратимыми. При этом остается, однако, открытым вопрос о роли столкновений вблизи резонансов (для частиц, скорости которых близки к фазовой скорости электронных волн в плазме).

Прошло восемь лет, прежде чем появилась знаменитая работа Л.Д. Ландау [3], посвященная этому вопросу.

Исходным в этой работе служит уравнение Власова для функции распределения электронов и среднего электрического поля, т.е. снова обратимое кинетическое уравнение. Приступая к решению задачи о колебаниях плазмы, Ландау пишет:

"Эти уравнения применены к изучению колебаний плазмы А.А. Власовым, однако большая часть полученных им результатов является ошибочной. Власов искал решения вида $\text{const} \times \exp(-i\omega t + ikr)$ и определял зависимость частоты ω от волнового вектора k . Выражение, определяющее эту зависимость, получалось у него содержащим расходящийся интеграл, что уже указывает на математическую некорректность применяемого им метода. Власов обходит эту трудность взятием главного значения интеграла, для чего, однако, нет никаких оснований... Для того чтобы получить правильное решение уравнений Власова, необходимо рассматривать задачу в той или иной конкретной постановке; мы рассмотрим две такие задачи".

Таким образом, предполагается, что отмеченная трудность, обусловленная наличием расходящегося интеграла, связана лишь с недостаточно последовательным решением обратимых уравнений Власова. Вопрос о модификации самих уравнений не ставится.

Одна из двух решенных в работе Ландау задач — исследование временной эволюции начального распределения по линеаризованному относительно равновесного распределения Максвелла уравнению Власова. Для решения начальной задачи используется метод Лапласа. Чтобы придать смысл расходящемуся интегралу вместо строго гармонического колебания $\exp(-i\omega t)$ используется способ адиабатического включения поля (включение поля при $t = -\infty$). Такое включение поля соответствует добавлению к действительной частоте ω бесконечно малой положительной мнимой части, т.е. замене $\omega \rightarrow \omega + i\delta$, где $\delta \rightarrow +0$. Таким образом, правило обхода полюса в расходящемся интеграле определяется заменой: $\omega \rightarrow \omega + i0$.

В книге [4] на с. 154 авторы пишут:

"К обоснованию предложенного Ландау правила обхода полюса можно подойти также и с другой точки зрения. Именно, можно ввести в линеаризованное кинетическое уравнение Власова малый диссипативный член — $\nu f_1(r, p, t)$ ".

При решении кинетического уравнения методом Фурье наличие такого диссипативного члена приведет к замене действительной частоты $\omega \rightarrow \omega + i\nu$. В окончательных формулах осуществляется предельный переход $\nu \rightarrow 0$. Таким путем удастся получить то же выражение для коэффициента затухания Ландау.

Итак, имеются, казалось бы, два различных подхода к решению задачи определения затухания плазменных колебаний. Первый из них основывается на формальном математическом приеме регуляризации расходимости в интеграле типа Коши. При этом физическая природа затухания не обсуждается. Исходное уравнение остается обратимым. При втором способе исходное обратимое уравнение заменяется с самого начала диссипативным уравнением. Хотя диссипация и предполагается малой, но предельный переход $\nu \rightarrow 0$ проводится лишь в окончательных формулах. Тем самым выделяется резонансный вклад, ширина которого пренебрежимо мала по сравне-

нию с шириной (дисперсией) распределения по скоростям. Если же осуществить предельный переход $v \rightarrow 0$ в самом кинетическом уравнении, т.е. вернуться к обратимому уравнению Власова, то получить затухание Ландау невозможно.

Второй способ введения затухания Ландау представляется более естественным. Он показывает, что столкновения играют все же принципиальную роль. Именно такая точка зрения проводится в § 16 гл. 15 книги [5]. Однако более полное решение этого вопроса может быть проведено, как мы увидим, лишь на основе сформулированного ниже обобщенного кинетического уравнения.

Вернемся снова к работе Ландау. Второй способ получения результата Ландау основан на "испорченном" уравнении Власова — в него вводится малый диссипативный член. Это давало, казалось бы, основание считать, что затухание Ландау является следствием столкновений заряженных частиц. Однако в работе [4] авторы делают иной вывод. Именно, в § 30 на с. 157 читаем:

"Таким образом, диссипация возникает уже в бесстолкновительной плазме; это явление было предсказано Л.Д. Ландау (1946) и о нем говорят как о затухании Ландау. Не будучи связано со столкновениями, оно принципиально отличается от диссипации в обычных поглощающих средах: бесстолкновительная диссипация не связана с возрастанием энтропии, потому представляет собой термодинамически обратимый процесс".

Такого рода вывод повторяется, с очень небольшими вариациями, почти во всех монографиях и учебных пособиях по теории плазмы. Ограничимся лишь одним примером:

"... но наиболее неожиданный и важный эффект, относящийся к физике ленгмюровских колебаний, был предсказан Л.Д. Ландау. Он обнаружил, что даже в отсутствие столкновений (т.е. сил трения) электронные колебания затухают" [6], с. 12.

Мы убедимся, что физическая природа затухания Ландау не столь загадочна. Именно, затухание Ландау — один из диссипативных процессов, описание которого невозможно без учета столкновений. В этом смысле затухание Ландау естественным образом укладывается в общую схему термодинамики и кинетики необратимых процессов.

В связи с историей этого вопроса интересно одно из высказываний П.Л. Капицы. Оно приведено в воспоминаниях о семинарах Капицы, написанных М.П. Рютовой для юбилейного выпуска журнала "Успехи физических наук" (т. 194, № 12, 1994), который посвящен 100-летию со дня рождения П.Л. Капицы. На с.1326 этого выпуска читаем:

"Я хотел бы обратить внимание на интересную работу Ландау о поглощении электрических волн в плазме, — повернул вдруг разговор Петр Леонидович во время одного из заседаний по защите диссертации. — Эта работа, которая играет большую роль, была сделана довольно давно, в 1946 г., почти 16 лет назад. Ландау разработал новый вид поглощения в плазме.

Власов раньше стал работать над теорией плазмы, но работы Власова вызвали большую реакцию со стороны физиков-теоретиков, искавших в них скрытые ошибки. Однако в результате этих работ возникла работа Ландау, которая играет теперь такую роль.

Это еще один случай, который доказывает, что надо публиковать и неправильные работы как стимуляторы правильных работ. Самое страшное в работе — это тривиальность. Самое важное в работе — это вовсе не правильность, а то, что в ней заключается новая идея. Нельзя никогда упускать публикацию новых идей. И Власов подошел с новыми идеями к теории плазмы, может быть, частью неправильно, но он все же сделал большой шаг вперед, без него работа Ландау не существовала бы".

1946 г. знаменателен и тем, что в этом году была опубликована монография Н.Н. Боголюбова [7]. В ней, наряду с обоснованием кинетической теории Больцмана для газов, заложены основы и статистического обоснования кинетических уравнений для плазмы. Боголюбов указал те условия, при которых на основе динамических уравнений могут быть получены кинетические уравнения Ландау и Власова. Более того, в этой книге заложены и основы статистической теории, позволяющей более последовательно учесть характер коллективного взаимодействия частиц в плазме. Это открыло путь для построения кинетических уравнений с учетом поляризации плазмы. Соответствующие уравнения независимо были установлены в 1960 г. в работах Р. Балеску [8] и А. Ленарда [9]. В результате было получено выражение для интеграла столкновений Балеску–Ленарда. Оно отличается от результата Ландау учетом динамической поляризации плазмы или, иными словами, более полным учетом коллективного взаимодействия заряженных частиц при расчете диссипативного члена в кинетическом уравнении — интеграла столкновений.

Тем самым был завершен определенный этап в развитии кинетической теории плазмы. Изложению этой теории и многочисленным ее приложениям посвящено много оригинальных работ, обзоров, монографий и учебных пособий. Отметим здесь лишь некоторые монографии и учебные пособия: [4–7, 10–30], на которые мы будем ссылаться в дальнейшем изложении.

Естественно, что в последующие за указанными выше годы происходило дальнейшее развитие кинетической теории плазмы по пути не только расширения круга конкретных приложений, многие из которых рассматриваются в перечисленных работах, но и решения ряда принципиальных вопросов теории. Отметим лишь некоторые из них.

Первоначально статистическая теория как разреженных газов, так и разреженной плазмы развивалась на основе цепочки уравнений для последовательности функций распределения координат и импульсов заряженных частиц — уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (уравнений BBGKY). В [12] показана возможность построения кинетической теории как нерелятивистской, так и релятивистской плазмы на основе уравнений для микроскопической фазовой плотности заряженных частиц в шестимерном фазовом пространстве координат и импульсов и уравнений Лоренца для микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей. Была установлена эквивалентность этого метода с методом Боголюбова — с методом BBGKY.

Метод микроскопической фазовой плотности оказался весьма эффективным и широко используется в работах по теории как классической, так и квантовой плазмы (см., например, [5, 18, 19, 21–23, 26, 27, 29]. Этот

метод положен и в основу статистической теории плазменно-молекулярных систем, примером которых может служить частично ионизованная плазма [5, 21, 31].

Кинетические уравнения Ландау и Балеску – Ленарда для разреженной плазмы построены в приближении, когда взаимодействие частиц определяет диссипативные процессы, но не дает вклада в термодинамические функции. С точки зрения термодинамики эти уравнения справедливы лишь для идеальной плазмы.

В последние годы интенсивно проводится экспериментальное и теоретическое исследование процессов в неидеальной плазме [28, 32]. Естественно, что на первом этапе необходимо было развить кинетическую теорию слабо неидеальной плазмы [21].

Кинетические уравнения Ландау, Власова и Балеску – Ленарда — уравнения для детерминированных (неслучайных) функций распределения. Для описания многих явлений необходим учет флуктуаций функций распределения. В связи с этим возникла необходимость развития кинетической теории флуктуаций [4, 21 – 33].

Современная теория неравновесных процессов плазмы является основой для описания многочисленных явлений. Это не означает, что все принципиальные проблемы уже решены. В последнее время большое значение приобретает теория пространственно-временных диссипативных структур в плазме при наличии в ней источников энергии — в активной плазме. Это стимулирует развитие статистической теории открытых систем [33]. При этом оказался необходимым пересмотр некоторых основных представлений и понятий кинетической теории плазмы. Возникла, в частности, необходимость конкретного определения структуры сплошной среды, для которой проводится кинетическое описание. Учет этой структуры приводит в кинетическом уравнении к дополнительному интегралу столкновений, который определяет диссипацию за счет пространственной диффузии функции распределения. Благодаря этому оказывается возможным единое описание неравновесных процессов на кинетических и гидродинамических масштабах без привлечения теории возмущений по числу Кнудсена.

Использование такого обобщенного кинетического уравнения позволяет по-новому определить понятия бесстолкновительной и столкновительной плазмы. Это дает также и возможность трактовать затухание Ландау как диссипативный процесс в столкновительной плазме.

2. Исходные уравнения статистической теории плазмы

2.1. Микроскопические уравнения для кулоновской плазмы

Газовая плазма представляет собой многокомпонентный газ положительно и отрицательно заряженных, а также и нейтральных частиц. Простейшим примером служит электрон-ионная плазма, в которой заряд иона e_i равен заряду электрона e . В настоящей работе рассматривается лишь *кулоновская плазма*, когда можно перейти к пределу $\lim c \rightarrow \infty$.

Будем использовать следующие обозначения: a — индекс, отмечающий компоненту плазмы ($a = e, i$); e_a и m_a — заряд и масса частицы; N_a — полное число частиц типа a ; $n_a = N/V$ — средняя плотность частиц; $N_a = N$ и $n = N/V$. Условие электрической нейтральности плазмы

имеет вид

$$\sum_a e_a N_a = 0 \quad \text{или} \quad \sum_a e_a n_a = 0. \quad (2.1)$$

Исходной будет служить система уравнений для микроскопической фазовой плотности каждой компоненты плазмы в шестимерном фазовом пространстве $x = (r, p)$

$$N_a(x, t) = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_{ia}(t)), \quad x = (r, p), \quad (2.2)$$

и микроскопической напряженности электрического поля $E^m(r, t)$. Уравнения для функций (2.2) и микроскопической напряженности поля имеют вид [5, 12]

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + v \frac{\partial N_a}{\partial r} + e_a E^m(r, t) \frac{\partial N_a}{\partial p} = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{rot } E^m = 0, \quad \text{div } E^m = 4\pi \sum_a e_a \int N_a(r, p, t) dp. \quad (2.4)$$

Взаимодействие между заряженными частицами описывается законом Кулона.

Для кулоновской плазмы уравнения поля могут быть записаны и в другой, чем (2.4), форме:

$$\text{rot } E^m = 0, \quad \frac{\partial E^m}{\partial t} = 4\pi \sum_a e_a \int v N_a(r, p, t) dp. \quad (2.5)$$

Для перехода от одной формы к другой надо использовать уравнение непрерывности для микроскопической плотности электрического заряда $q^m = \sum_a e_a \times \int N_a(r, p, t) dp$:

$$\frac{\partial q^m}{\partial t} + \text{div } j^m = 0. \quad (2.6)$$

Здесь $j^m = \sum_a e_a \int v N_a(r, p, t) dp$ — микроскопическая плотность тока.

Рассмотрим необходимые для дальнейшего характерные параметры полностью ионизованной плазмы. Они вводятся на основе простейших примеров процессов в плазме. При этом опускаем детали, которые можно найти в учебных пособиях, например в [25], [5, гл. 15].

2.2. Основные параметры кулоновской плазмы

2.2.1. Собственные колебания плазмы. Частота Ленгмюра.

Рассмотрим приближение, когда можно пренебречь тепловым движением заряженных частиц. Тогда движение плазмы можно описывать уравнениями для средней плотности частиц n_a , средней скорости u_a каждой компоненты плазмы, а также средней напряженности электрического поля E .

Такая система уравнений имеет частное решение, при котором скорости u_a и поле E равны нулю, а плотности электронов и ионов постоянны: $n_a = n_a^0$. При этом равна нулю и плотность электрического заряда $q^0 = \sum_a e_a n_a^0$. При малом отклонении от этого состояния уравнение для плотности заряда сводится к уравнению для гармонического осциллятора

$$\frac{\partial^2 q^1}{\partial r^2} + \omega_L^2 q^1(r, t) = 0. \quad (2.7)$$

Квадрат собственной частоты — частоты Ленгмюра определяется выражением

$$\omega_L^2 = \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{m_a}. \quad (2.8)$$

Наряду с частотой Ленгмюра ω_L плазмы можно рассматривать также собственные частоты для отдельных ее компонент — для электронов и ионов. Соответствующие периоды колебаний являются характерными временными параметрами плазмы.

2.2.2. Экранирование внешнего поля в плазме. Длина Дебая. Рассмотрим полуограниченную плазму. Пусть на границе задан электрический потенциал φ_0 , а на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$.

Если плазма находится в состоянии равновесия, то функция $n_a(x)$ определяется распределением Больцмана. Отсюда при условии $e_a \varphi(x) \ll kT$ из уравнений поля получаем линейное уравнение для электрического потенциала

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{1}{r_D^2} \varphi(x) = 0. \quad (2.9)$$

При граничных условиях $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\varphi(\infty) = 0$ решение записывается в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right). \quad (2.10)$$

Здесь использовано обозначение

$$r_D^2 = \frac{kT}{\sum_a 4\pi e_a^2 n_a} \quad (2.11)$$

для квадрата характерного расстояния, на котором происходит экранирование поля плазмой. Это и есть *длина (или радиус) Дебая* r_D .

Наряду с длиной r_D вводятся также соответствующие длины для отдельных компонент плазмы. Все эти величины являются характерными параметрами плазмы.

2.2.3. Пространственная корреляция заряженных частиц. Корреляционный радиус. Введем обозначения для одночастичной f_a и двухчастичной f_{ab} функций распределения. В равновесном состоянии при отсутствии внешнего поля одночастичные функции распределения $f_a = 1$, и поэтому двухчастичные функции распределения f_{ab} связаны с двухчастичными корреляционными функциями g_{ab} равенствами

$$f_{ab}(|r - r'|) = 1 + g_{ab}(|r - r'|). \quad (2.12)$$

Сопоставим соотношения основных характерных параметров длины, а также структуру корреляционных функций, для разреженного газа и разреженной плазмы.

Разреженный газ. Представим атомы в виде упругих сфер диаметра r_0 . Тогда корреляционный радиус $r_{\text{cor}} \sim r_0$ (cor — от английского слова correlation). Второй характерной длиной является среднее расстояние между частицами $r_{\text{av}} \sim (1/n)^{1/3} \equiv (V/N)^{1/3}$ (av — от average).

Третьим характерным параметром служит длина свободного пробега $l \sim 1/nr_0^2$.

Газы, для которых безразмерный параметр $\varepsilon = nr_0^3 \ll 1$ — параметр плотности мал, называются *разреженными*. По порядку величины $r_0 \sim 10^{-8}$ см. При атмосферном давлении, когда $r_{\text{av}} \sim 10^{-6}$ см и длина свободного пробега $l \sim 10^{-4}$ см), параметр плотности $\varepsilon \sim 10^{-4}$ и имеют место неравенства

$$r_{\text{cor}} \sim r_0 \ll r_{\text{av}} \ll l. \quad (2.13)$$

Таким образом, корреляционный радиус определяется наименьшей характерной длиной r_0 .

Разреженная плазма. Выражение для двухчастичной корреляционной функции разреженной плазмы имеет вид

$$g_{ab}(r) = -\frac{e_a e_b}{kT} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad g_{ab} \ll 1. \quad (2.14)$$

Из него следует, что корреляционный радиус в плазме $r_{\text{cor}} \sim r_D$.

Чтобы выявить малый параметр разреженной плазмы, рассмотрим выражение для радиальной функции распределения

$$4\pi g_{ab}(r)r^2 = -4\pi \frac{e_a e_b}{kT} r \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right). \quad (2.15)$$

Абсолютное значение этой функции имеет максимум при $r = r_D$. При этом значении

$$|g_{ab}| \sim \frac{e^2}{kT r_D} \sim \frac{1}{nr_D^3} \sim \frac{1}{N_D} \equiv \mu. \quad (2.16)$$

Здесь введено обозначение μ для *плазменного параметра*. Для разреженной плазмы

$$\mu \sim \frac{1}{nr_D^3} \sim \frac{1}{N_D} \ll 1, \quad N_D \gg 1. \quad (2.17)$$

Итак, в разреженной плазме одновременно взаимодействует большое число частиц — взаимодействие носит коллективный характер. В этом отношении ситуация здесь обратна той, которая имеет место в разреженном газе.

2.2.4. Релаксационные корреляционные масштабы в плазме. Для электрон-ионной плазмы имеется четыре характерных времени релаксации τ_{ab} ($a = e, i$; $b = e, i$) или четыре их частоты столкновений $\nu_{ab} = 1/\tau_{ab}$, а также четыре длины релаксации — четыре длины свободного пробега. Для разреженной плазмы ($\mu \ll 1$) релаксационные масштабы электрон-электронных взаимодействий

$$\tau_{ee} \sim \frac{1}{\mu \omega_L} \sim \frac{T_L}{\mu} \gg T_L; \quad l_{ee} \sim \frac{r_D}{\mu} \ll r_D. \quad (2.18)$$

Из выражения (2.14) следует, что корреляционный радиус r_{cor} и соответствующая корреляционная длина l_{cor} определяются радиусом Дебая:

$$r_{\text{cor}} \sim l_{\text{cor}} \sim r_D. \quad (2.19)$$

Соответствующее время корреляции

$$\tau_{\text{cor}} \sim \frac{r_{\text{cor}}}{v_T} \sim \frac{r_D}{v_T} \sim \frac{1}{\omega_L} \sim T_L. \quad (2.20)$$

Определения (2.18)–(2.20) ведут к следующим неравенствам:

$$r_{\text{av}} \ll r_{\text{cor}} \sim r_D \ll l_{\text{ee}}; \quad \tau_{\text{av}} \ll \tau_{\text{cor}} \sim T_L \ll \tau_{\text{ee}} \sim \frac{T_L}{\mu}. \quad (2.21)$$

Мы видим, что соотношения между средним расстоянием r_{av} и соответствующими корреляционными длинами (r_0 и r_D) для газа и плазмы являются обратными.

2.3. Физически бесконечно малые масштабы для газа и плазмы

2.3.1. Разреженный газ. Кинетический уровень описания. Итак, разреженный газ и разреженная плазма характеризуются безразмерными параметрами

$$\varepsilon = nr_0^3 \ll 1, \quad \mu \sim \frac{1}{nr_D^3} \ll 1. \quad (2.22)$$

Эти параметры определяют и связь между физически бесконечно малыми масштабами τ_{ph} и l_{ph} (ph — от physical) и столкновительными параметрами $\tau \equiv \tau_{\text{rel}}$ и $l \equiv l_{\text{rel}}$ газа и плазмы (rel — от relaxation).

Число частиц в физически бесконечно малом объеме V_{ph} обозначаем $N_{\text{ph}} = nV_{\text{ph}}$. По определению физически бесконечно малых масштабов число частиц в объеме V_{ph} велико, а масштабы τ_{ph} и l_{ph} малы по сравнению с характерными масштабами T и L (τ и l для газа Больцмана и плазмы Дебая):

$$\tau_{\text{ph}} \ll T, \quad l_{\text{ph}} \ll L, \quad N_{\text{ph}} \gg 1. \quad (2.23)$$

Определение физически бесконечно малых масштабов не является универсальным. Оно зависит от выбранного уровня описания неравновесных процессов (кинетического, гидродинамического или диффузионного).

Газ Больцмана. Для разреженного газа имеют место следующие соотношения между характерными длинами:

$$r_0 \ll r_{\text{av}} \ll l, \quad \varepsilon = nr_0^3 \ll 1. \quad (2.24)$$

Время перехода к локальному распределению по скоростям определяется временем столкновений τ . Соответствующий масштаб длины — время свободного пробега l . Таким образом, для кинетического этапа релаксации в формулах (2.23) надо произвести замену

$$T \rightarrow \tau, \quad L \rightarrow l. \quad (2.25)$$

Теперь можно выбрать физически бесконечно малые масштабы τ_{ph} и l_{ph} , которые удовлетворяют неравенствам (2.23) при (2.25).

Представление разреженного газа в виде сплошной среды, на первый взгляд, представляется парадоксальным. Чтобы показать, что это не так, поступим следующим образом.

Разделим величину τ , интервал между двумя последовательными столкновениями любой выделенной частицы, на число частиц N_{ph} . Соответствующий временной интервал определяет промежуток времени, через

который испытывает столкновение одна (любая!) из частиц, находящихся в объеме V_{ph} . Этот интервал естественно принять за определение величины τ_{ph} . При кинетическом описании используем также соотношение $\tau_{\text{ph}} = l_{\text{ph}}/v_T$. В результате имеем два уравнения

$$\frac{\tau}{N_{\text{ph}}} \sim \frac{\tau}{nl_{\text{ph}}^3} = \tau_{\text{ph}}; \quad \tau_{\text{ph}} = \frac{l_{\text{ph}}}{v_T}, \quad (2.26)$$

из которых, используя определения $\tau = l/v_T$ и ε , получаем конкретные оценки физически бесконечно малых масштабов [34]:

$$\tau_{\text{ph}} \sim \sqrt{\varepsilon} \tau \ll \tau, \quad l_{\text{ph}} \sim \sqrt{\varepsilon} l \ll l \quad \text{и} \quad N_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \gg 1. \quad (2.27)$$

Для разреженного газа, когда справедливы неравенства (2.24), эти значения удовлетворяют общим условиям (2.23).

2.3.2. Газ Больцмана. Гидродинамическое описание [5, 33].

В гидродинамике времена релаксации выражаются через внешний параметр L и один из трех диссипативных коэффициентов: диффузии D , вязкости ν и температуропроводности χ . Все эти процессы диффузионного типа. Коэффициент диффузии D представляет здесь один из трех коэффициентов D , ν и χ . Тогда время релаксации определяется выражением

$$\tau_D = \frac{L^2}{D}, \quad (2.28)$$

где $D = D, \nu$ или χ . Для диффузионных процессов связь между физически бесконечно малыми масштабами определяется (вместо кинетического соотношения $\tau_{\text{ph}} = l_{\text{ph}}/v_T$) соответствующим газодинамическим (G — от Gas-dynamic) соотношением

$$\tau_{\text{ph}}^G = \frac{(l_{\text{ph}}^G)^2}{D}, \quad (2.29)$$

где $D = D, \nu$ или χ . Тем самым "следы" диффузионного (гидродинамического) движения сохраняются и в физически бесконечно малом объеме V_{ph} , т.е. в "точке" сплошной среды.

В результате, используя определения (2.28), (2.29), получаем конкретные оценки физически бесконечно малых масштабов при газодинамическом описании:

$$\tau_{\text{ph}}^G \sim \frac{\tau_D}{N^{2/5}} \ll \tau_D, \quad l_{\text{ph}}^G \sim \frac{L}{N^{1/5}} \ll L, \quad N_{\text{ph}}^G \sim N^{2/5} \gg 1. \quad (2.30)$$

Здесь использовано определение $nL^3 = N$.

Мы видим, что в отличие от формул (2.27) для кинетического описания теперь физически бесконечно малые масштабы связаны с внешним масштабом L . Это показывает, сколь существенно зависит определение физически бесконечно малых масштабов и, следовательно, само определение "точка" сплошной среды от принятого уровня описания.

2.3.3. Физическое число Кнудсена. Итак, мы определили понятие "точка" для кинетического и газодинамического описания неравновесных процессов. Естественно, что

газодинамическое описание является более грубым, чем кинетическое, и "точка" сплошной среды в газовой динамике больше, т.е. $V_{ph} \leq V_{ph}^G$. Переход от кинетического описания к более грубому газодинамическому описанию проводится традиционно следующим образом.

Вводится безразмерный параметр, называемый *число Кнудсена*,

$$Kn = \frac{l}{L}. \quad (2.31)$$

Для приближенного решения кинетического уравнения используется теория возмущений по малому числу Кнудсена (методы Гильберта, Чепмена–Энскога и Грэда). При использовании такой теории возмущений возникают, однако, серьезные трудности [33, 35, 36], связанные с тем, что параметр Kn не отражает в достаточной мере структуру сплошной среды.

Вместо числа Кнудсена естественно использовать другой безразмерный параметр, который в приближении сплошной среды всегда является малым. Это *физическое число Кнудсена*. При кинетическом описании оно определяется выражением

$$K_{ph} = \frac{l_{ph}}{L}. \quad (2.32)$$

Малость этого параметра следует из того, что $N_{ph} \gg 1$.

Для области свободномолекулярного течения, когда характерный параметр длины L (например, диаметр трубы) много больше длины свободного пробега l , для использования приближения сплошной среды необходимо выполнение неравенств

$$l_{ph} \ll L \ll l. \quad (2.33)$$

В случае газодинамического описания физически бесконечно малые масштабы определяются формулами (2.30), поэтому физическое число Кнудсена определяется выражением

$$K_{ph}^G = \frac{l_{ph}^G}{L} \sim \frac{1}{(N_{ph}^G)^{1/2}}. \quad (2.34)$$

Малость этого параметра обеспечивается условием $N_{ph}^G \gg 1$.

2.3.4. Согласование кинетического и гидродинамического определений сплошной среды. Соотношение между двумя физически бесконечно малыми объемами V_{ph} и V_{ph}^G можно выразить через параметр плотности ε и число Кнудсена Kn :

$$\frac{V_{ph}}{V_{ph}^G} \sim \varepsilon^{3/10} Kn^{6/5} \leq 1. \quad (2.35)$$

Знак равенства отвечает здесь наибольшему значению числа Кнудсена (соответственно наименьшему значению внешнего параметра L_{min}), при котором еще возможно единое кинетическое и газодинамическое описание сплошной среды.

Используя определения (2.27), из (2.33) находим, что

$$L_{min} \sim \sqrt{N_{ph}} l_{ph} \sim \frac{l}{\sqrt{N_{ph}}}, \quad Kn_{max} \sim \sqrt{N_{ph}}. \quad (2.36)$$

Мы видим, что минимальная длина L_{min} — минимальный размер точки, при котором сохраняются следы диффузионного движения и еще возможно гидродинамическое описание движения, меньше длины свободного пробега l , но больше физически бесконечно малого масштаба l_{ph} при кинетическом описании.

Таким образом, единое описание кинетических и гидродинамических процессов возможно в широкой области значений числа Кнудсена без использования теории возмущений по параметру Kn .

Соответствующий характерный временной масштаб определяется выражением

$$(\tau_{ph}^G)_{min} \sim \frac{L_{min}^2}{D} \sim \sqrt{\varepsilon} \tau \sim \tau_{ph}, \quad (2.37)$$

и, следовательно, его величина порядка физически бесконечно малого интервала при кинетическом описании. Мы используем этот результат при выводе обобщенного кинетического уравнения для единого описания кинетических и гидродинамических процессов в разреженном газе и в разреженной плазме.

Итак, возможно общее определение точки сплошной среды. Из приведенных выше соотношений следует оценка числа частиц в точке

$$N_{min} = nL_{min}^3 \sim \varepsilon^{-5/4}. \quad (2.38)$$

При нормальных условиях, когда $\varepsilon \sim 10^{-4}$, получается следующая оценка числа частиц в точке: $N_{min} \approx 10^5$.

2.3.5. Разреженная кулоновская плазма. Покажем, что для разреженной плазмы возможности единого описания кинетических и гидродинамических процессов еще шире, чем для разреженного газа. Это оказывается возможным благодаря коллективному характеру взаимодействия заряженных частиц. Следствием этого является замена неравенств (2.24) соответствующими неравенствами для плазмы:

$$r_{av} \ll r_D \ll l; \quad \tau_{av} \ll \frac{1}{\omega_L} \sim T_L \ll \tau_{ee} \sim \frac{1}{\mu\omega_L} \sim \frac{T_L}{\mu};$$

$$\mu = \frac{1}{nr_D^3} \ll 1. \quad (2.39)$$

Число частиц в сфере Дебая

$$N_D \sim \frac{1}{\mu} = nr_D^3 \gg 1. \quad (2.40)$$

Для разреженной плазмы существуют две возможности определения физически бесконечно малых масштабов [33, 35]. Первый аналогичен кинетическому определению (2.26) для разреженного газа. В этом случае имеем соотношения

$$l_{rel} = l = \frac{r_D}{\mu}, \quad \tau_{ph} = \frac{\tau_{rel}}{N_{ph}} \sim \frac{\tau_{rel}}{nl_{ph}^3}, \quad \tau_{ph} \sim \frac{l_{ph}}{v_T}. \quad (2.41)$$

Мы получили, таким образом, оценки для физически бесконечно малых масштабов разреженной плазмы:

$$\tau_{ph} \sim \mu\tau_{ee} \sim \frac{1}{\omega_L} \ll \tau_{ee}, \quad l_{ph} \sim r_D \ll l,$$

$$N_{ph} \sim N_D \sim \frac{1}{\mu} \gg 1. \quad (2.42)$$

Эти определения удовлетворяют общим условиям (2.23). Они, однако, недостаточно отражают физическое различие газа Больцмана и плазмы Дебая.

Действительно, радиус Дебая определяет расстояние взаимодействия заряженных частиц и число частиц в дебаевской сфере $N_D \gg 1$. Таким образом, взаимодействие заряженных частиц в плазме носит коллективный характер. Чтобы учесть это свойство разреженной плазмы, надо использовать параметр r_D для определения длины l_{ph} , а физически бесконечно малый временной интервал определить как время диффузии заряженных частиц в области радиусом Дебая:

$$l_{ph} \sim r_D \ll l, \quad \tau_{ph} \sim \frac{r_D^2}{D}, \quad D \sim v_T l. \quad (2.43)$$

Здесь по определению, как и в разреженном газе, предполагается, что три кинетических коэффициента: диффузии D , вязкости ν и температуропроводности χ одинаковы.

Мы видим, что теперь физически бесконечно малые интервалы связаны газодинамическим соотношением

$$\tau_{ph} \sim \frac{l_{ph}^2}{D}. \quad (2.44)$$

Таким образом, для разреженной плазмы существует широкая (более широкая, чем для разреженного газа!) область значений параметров, когда возможно единое описание кинетических и газодинамических процессов. Теперь роль длины L_{min} (см. формулы (2.36)) играет радиус Дебая. Физический параметр Кнудсена и максимальное значение обычного числа Кнудсена (см. выражения (2.32), (2.31)) определяются для плазмы следующими формулами:

$$K_{ph} = \frac{l_{ph}}{L} \sim \frac{r_D}{L}, \quad Kn_{max} = \frac{l}{r_D} = \frac{1}{\mu} \gg 1. \quad (2.45)$$

Последнее неравенство открывает возможность единого описания кинетических и гидродинамических процессов в плазме для области $L > r_D$! Известны, однако, примеры, когда имеется не один, а два радиуса Дебая. В таких случаях необходимо изменить неравенство (2.45).

В неизотермической плазме, когда $T_e > T_i$, можно ввести два радиуса Дебая для электронов и ионов:

$$r_{De}^2 = \frac{kT_e}{4\pi e^2 n}, \quad r_{Di}^2 = \frac{kT_i}{4\pi e^2 n}, \quad r_e \gg r_i, \quad (2.46)$$

и определить физически бесконечно малую длину через радиус Дебая для ионов.

Подведем итоги.

Физически бесконечно малые масштабы для разреженного газа выражаются через основные масштабы кинетической теории газов — время свободного пробега τ и длину свободного пробега l . Величины τ и l , а также и соответствующие физически бесконечно малые масштабы связаны через тепловую скорость. Однако при переходе к газодинамическому описанию эта связь меняется. В последнем случае основные масштабы длины и времени и соответствующие физически бесконечно малые масштабы связаны "диффузионными" соотношениями. По этой причине для единого описания кинетических и гидродинамических процессов возникает необходимость согласования кинетического и гидродинамиче-

ского определения сплошной среды — использования формул (2.35) для единого определения размера точки сплошной среды.

В случае разреженной плазмы кроме основных релаксационных параметров τ и l существуют меньшие, но макроскопические параметры $T_L = 1/\omega_L$ и r_D , которые характеризуют процессы в плазме. Они, как и соответствующие релаксационные параметры, связаны через тепловую скорость. В результате мы приходим к формулам (2.41).

Для плазмы, однако, более естественна связь между физически бесконечно малыми масштабами τ_{ph} и l_{ph} диффузионным соотношением. Такое определение структуры сплошной среды открывает широкие возможности для единого описания кинетических и гидродинамических процессов в разреженной плазме.

Мы имеем уже достаточно информации о структуре разреженной плазмы, представляемой в виде сплошной среды, чтобы перейти к конструированию соответствующих кинетических уравнений.

3. Усреднение микроскопических уравнений для плазмы

3.1. Приближение вторых моментов

Проведем усреднение микроскопических уравнений для кулоновской плазмы по ансамблю Гиббса. Используем при этом следующие определения функций распределения и среднего электромагнитного поля:

$$\langle N_a(x, t) \rangle = n_a f_a(x, t), \quad \langle E^m(r, t) \rangle = E(r, t), \quad (3.1)$$

а также равенство

$$\langle E^m N_a \rangle = E n f_a + \langle \delta E \delta N_a \rangle_{x, x', t}. \quad (3.2)$$

В результате получим уравнение для функции распределения f_a . Его удобно записать здесь в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial r} + e_a E(r, t) \frac{\partial f_a}{\partial p} = -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial p} \langle \delta F_a \delta N_a \rangle \equiv I_a(r, p, t). \quad (3.3)$$

Проведем усреднение микроскопических уравнений поля для кулоновской плазмы. В результате получим уравнения для среднего поля:

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a(r, p, t) dp. \quad (3.4)$$

Система уравнений для усредненных функций $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$ не является замкнутой, так как включает также коррелятор — интеграл столкновений

$$-\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial p} \langle \delta F_a \delta N_a \rangle \equiv I_a(r, p, t). \quad (3.5)$$

Он определяется корреляторами флуктуаций

$$\delta N_a = N_a - n_a f_a, \quad \delta E = E^m - E. \quad (3.6)$$

Термин "интеграл столкновений" используется, чтобы подчеркнуть аналогию с кинетическим уравне-

нием Больцмана для газа. Однако эта аналогия лишь внешняя, так как в разреженной плазме каждая заряженная частица взаимодействует одновременно с большим числом окружающих частиц. По этой причине модель Больцмана парных столкновений не является здесь удовлетворительной.

Найдем теперь уравнения для флуктуаций. Уравнения для функций $\delta N_a(r, p, t)$ получаем с помощью уравнений (2.3), (3.3):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + e_a \delta E(r, t) \frac{\partial}{\partial p} \right] \delta N_a + \delta F_a \frac{\partial f_a}{\partial p} = -e_a \frac{\partial}{\partial p} [\delta E \delta N_a - \langle \delta E \delta N_a \rangle]. \quad (3.7)$$

Соответствующие уравнения для флуктуаций поля имеют вид

$$\text{rot } \delta E = 0; \quad \text{div } \delta E = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a(r, p, t) dp. \quad (3.8)$$

Трудности расчета флуктуаций обусловлены тем, что уравнения (3.7) являются нелинейными. Из-за этого для моментов флуктуаций возникает, как и в разреженных газах, цепочка связанных уравнений. Однако теперь проблема значительно сложнее, так как необходимо знать функции распределения не только частиц, но также и электромагнитного поля.

Ситуация существенно упрощается для разреженной плазмы. В этом случае, как мы уже знаем, можно ввести физически бесконечно малые масштабы длины и времени в соответствии с неравенствами в формулах (2.41)–(2.44). Тогда число частиц в физически бесконечно малом объеме V_{ph} определяется выражением (2.42). Для разреженной плазмы, когда плазменный параметр $\mu \ll 1$, число частиц $N_{ph} \gg 1$. Это условие и дает основание считать флуктуации δN_a малыми. При выполнении этого условия правую часть уравнения (3.7) можно считать равной нулю. В результате для кулоновской плазмы имеем следующее уравнение для флуктуаций в *приближении вторых моментов*:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + e_a E(r, v, t) \frac{\partial}{\partial p} \right] \delta N_a + e_a n_a \delta E \frac{\partial f_a}{\partial p} = 0. \quad (3.9)$$

3.2. Приближение вторых корреляционных функций

Рассмотренного приближения недостаточно для конструирования кинетических уравнений, т.е. уравнений для одночастичных (точнее, одноточечных) функций распределения f_a . Это обусловлено тем, что в приближении вторых моментов плазма представляется в виде сплошной среды. Чтобы принять во внимание структуру плазмы как системы заряженных частиц, используем приближение, которое называется *приближение вторых корреляционных функций*. Это дает возможность пренебречь тройными и высшими корреляционными функциями, а также считать, что двухчастичные корреляционные функции g_{ab} малы. Последнее условие означает, что

$$g_{ab}(x, x', t) \ll f_a(x, t) f_b(x', t). \quad (3.10)$$

Чтобы выявить различие между приближениями вторых моментов и вторых корреляционных функций, рассмотрим соотношение между функциями $\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}$ и

$g_{ab}(x, x', t)$. Оно определяется выражением

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t} = n_a n_b g_{ab}(x, x', t) + n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (3.11)$$

Второй член в правой части появляется вследствие того, что двухчастичная корреляционная функция (по самой своей природе) характеризует статистическую связь между различными частицами. Чтобы принять во внимание это различие (и тем самым учесть структуру плазмы как системы заряженных частиц), представим флуктуацию δN_a в виде суммы двух частей (ind — от induced и от source — источник):

$$\delta N_a(x, t) = \delta N_a^{\text{ind}}(x, t) + \delta N_a^{(s)}(x, t). \quad (3.12)$$

Второй член правой части $\delta N_a^{(s)}(x, t)$ введен для учета структуры плазмы как системы заряженных частиц. Второй одновременный момент этих флуктуаций (*флуктуаций источника "s"*) определяется вторым членом в правой части равенства (3.11). Таким образом, имеем

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t}^{(s)} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (3.13)$$

Второй член в правой части (3.12)

$$\delta N_a^{\text{ind}}(x, t) = \delta N_a(x, t) - \delta N_a^{(s)}(x, t) \quad (3.14)$$

определяется частным решением неоднородного уравнения (3.9), которое удобно теперь записать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + e_a E(r, v, t) \frac{\partial}{\partial p} \right] [\delta N_a(x, t) - \delta N_a^{(s)}(x, t)] = -e_a n_a \delta E \frac{\partial f_a}{\partial p} = 0. \quad (3.15)$$

Индекс ind указывает, что правая часть уравнения пропорциональна флуктуации поля δE . Вследствие этого флуктуации (3.14) в решении неоднородного уравнения (3.15) обусловлены (индуцируются) флуктуациями поля.

Чтобы рассчитать флуктуации $\delta N_a^{(s)}(x, t)$ (*флуктуации источника*), надо использовать следующее уравнение для двухвременного коррелятора флуктуаций:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + e_a E(r, v, t) \frac{\partial}{\partial p} \right] \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t, t'}^{(s)} = 0. \quad (3.16)$$

Выражение (3.13) играет здесь роль начального ($t = t'$) условия при решении этого уравнения. Таким образом, имеем

$$\langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{x, x', t, t'}^{(s)} \Big|_{t=t'} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (3.17)$$

Теперь мы можем произвести расчет флуктуаций в полностью ионизованной кулоновской плазме.

4. Два альтернативных приближения в статистической теории плазмы

4.1. Традиционный и нетрадиционный способы описания неравновесных процессов в газе Больцмана

Традиционно используются два уровня описания неравновесных процессов в разреженном газе. Первый из них основан на кинетическом уравнении Больцмана, а вто-

рой — на уравнениях газовой динамики. Последние получаются путем приближенного решения кинетического уравнения с использованием теории возмущений по числу Кнудсена. В результате строится замкнутая теория для описания неравновесных процессов в разреженных газах на кинетических и гидродинамических масштабах.

Казалось бы, все готово для решения конкретных задач с помощью полученных уравнений. Однако ситуация не столь проста по следующим причинам. Оба, как кинетическое, так и газодинамическое, описания проводятся без конкретного определения сплошной среды. В то же время сплошные среды в случае кинетического и газодинамического описаний различны.

В главе 13 работы [33] показано, что учет структуры сплошных сред существенно изменяет вид необратимых уравнений статистической теории неравновесных процессов. Было установлено обобщенное кинетическое уравнение, которое служило основой для единого описания неравновесных процессов как на кинетических, так и газодинамических масштабах.

Переход от кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики осуществлялся при этом без использования теории возмущений по числу Кнудсена. Это делает возможным развитие единого кинетического описания неравновесных процессов не только в пассивных, но и в активных средах. Ниже это будет показано на примере кулоновской плазмы.

4.2. Сглаживание по объему "точки" сплошной среды

В теории плазмы также используются два возможных уровня описания неравновесных процессов. Первый из них базируется на кинетических уравнениях Власова, Ландау или Балеску – Ленарда. Второй же — на соответствующих уравнениях газовой динамики. Последние получаются в результате приближенного решения кинетических уравнений с использованием теории возмущений по малому числу Кнудсена. Как кинетическое, так и газодинамическое описание плазмы проводится в рамках модели сплошной среды. Структура сплошной среды в случае кинетического и газодинамического описания и здесь различна.

Для плазмы определение физически бесконечно малых масштабов дается формулами (2.42), (2.43), в которых основой служит диффузионное соотношение между временем τ_{ph} и длиной l_{ph} . Такое определение структуры сплошной среды открывает, как было уже отмечено, широкую возможность для единого описания кинетических и гидродинамических процессов в разреженной плазме. В последующих разделах получены соответствующие обобщенные кинетические уравнения. Они могут служить основой для единого описания неравновесных процессов в разреженной плазме как на кинетических, так и на гидродинамических масштабах.

Первая задача в осуществлении этой программы состоит в нахождении спектральных плотностей флуктуаций $\delta N_a^{(s)}$ и δE для неравновесных состояний на основе последних двух уравнений.

Вернемся к неравенствам (2.21), (2.38), (2.41), которые характеризуют соотношения между основными параметрами дебаевской плазмы. Как и в теории газов, на основе этих неравенств можно провести деление флуктуаций на мелкомасштабные и крупномасштабные (кинетические). Мелкомасштабные флуктуации выде-

ляются условиями

$$\tau_{cor} \leq \tau_{ph} \leq \tau_{rel}; \quad r_{cor} \leq l_{ph} \leq l_{rel}. \quad (4.1)$$

До сих пор исходными служили обратимые уравнения (2.3), (2.4) для микроскопических фазовых плотностей $N_a(r, p, t)$ заряженных частиц и напряженности микроскопического электрического поля $E^m(r, t)$. Рассмотрим теперь, как проводится переход к необратимому кинетическому уравнению с учетом структуры сплошной среды.

На первом шаге перехода к необратимым уравнениям, как и в теории газа Больцмана (см. (13.3.1) в [33]), в уравнение (2.3) для микроскопической фазовой плотности кулоновской плазмы введем релаксационный член (ср. с (13.3.1) в [33]). Он описывает "подстройку" микроскопической фазовой плотности частиц $N_a(r, p, t)$ к соответствующему сглаженному по объему точки сплошной среды распределению $N_a(r, p, t)$. В результате вместо (2.3), (2.4) получим следующие необратимые уравнение для фазовой плотности $N_a(r, p, t)$ и микроскопического электрического поля:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + v \frac{\partial N_a}{\partial r} + e_a E^m \frac{\partial N_a}{\partial p} = -\frac{1}{\tau_{ph}^{(a)}} [N_a(r, p, t) - \widetilde{N_a(r, p, t)}], \quad (4.2)$$

$$\text{rot } E^m = 0, \quad \text{div } E^m = 4\pi \sum_a e_a \int N_a(r, p, t) dp. \quad (4.3)$$

Последний член в уравнении (4.3) содержит сглаженную (по объему точки сплошной среды) микроскопическую фазовую плотность

$$N_a(r, \widetilde{p}, t) = \int N_a(r - \rho, p, t) F_a(\rho) d\rho. \quad (4.4)$$

Конкретное определение функции сглаживания $F_a(\rho)$ зависит от ряда факторов, включающих и природу среднего поля $E(r, t)$. Будем использовать здесь простейшее выражение в виде распределения Гаусса со средним значением, пропорциональным силе $e_a E(r, t)$:

$$F_a(\rho) = \frac{1}{[2\pi l_{ph}^{(a)2}]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\rho - \langle \rho \rangle_a)^2}{2l_{ph}^{(a)2}} \right], \quad (4.5)$$

$$\langle \rho \rangle_a = b_a \frac{e_a}{m_a} E(r, t) \tau_{ph}^{(a)}.$$

Дисперсия в нем определяется размером точки l_{ph} . Коэффициент $b = \tau_{rel}^{(a)}$ характеризует подвижность под действием средней силы. Подвижность определяется временем столкновений (временем релаксации). Наконец, $\langle \rho \rangle$ — соответствующее среднее смещение за время τ_{ph} .

Проведем усреднение по ансамблю Гиббса, чтобы получить уравнение для функции распределения $f_a(r, p, t)$ с учетом структуры сплошной среды. Тогда вместо (4.2), (4.3) получим для кулоновской плазмы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial r} + e_a E \frac{\partial f_a}{\partial p} = & -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} \langle \delta E \delta N_a \rangle - \\ & - \frac{1}{\tau_{ph}^{(a)}} [f_a(r, p, t) - \widetilde{f_a(r, p, t)}], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} E = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a(r, p, t) dp. \quad (4.7)$$

Эта система уравнений не является замкнутой, поскольку содержит не только первые моменты $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$ соответствующих микроскопических функций, но также и коррелятор $\langle \delta E \delta N_a \rangle$ флуктуаций δN_a , δE . По сравнению с традиционными уравнениями (см. гл. 15 в [5]) имеется также дополнительный релаксационный член, который учитывает структуру сплошной среды!

При расчете мелкомасштабных флуктуаций функции распределения $f_a(r, p, t)$ и электрическое поле $E(r, t)$ являются в соответствии с правым неравенством (4.1) медленноменяющимися функциями координат и времени. Степень медленности определяется соотношениями

$$\frac{\tau_{\text{ph}}}{\tau_{\text{rel}}} \sim \mu^2 \ll 1, \quad \frac{l_{\text{ph}}}{l_{\text{rel}}} \sim \mu \ll 1. \quad (4.8)$$

В нулевом приближении по этим параметрам можно при расчете мелкомасштабных флуктуаций полностью пренебречь пространственным и временным изменениями функций $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$. При этом условии коррелятор по переменным r, t, r', t'

$$\langle (\delta N_a \delta N_b) \rangle_{r, t, r', t'} = \langle \delta N_a \delta N_b \rangle_{r-r', t-t', p, p'}, \quad (4.9)$$

т.е. зависит только от разности времен и координат. Зависимость же от r и t входит лишь через функции $f_a(r, p, t)$. Ее изменение не принимается во внимание при расчете флуктуаций.

Уравнения (4.2)–(4.7) будут служить для вывода обобщенных кинетических уравнений для разреженной плазмы. Для этого надо сначала установить мост между традиционной и нетрадиционной кинетической теориями плазмы. Для этого мы должны вернуться к приближенным уравнениям (3.15), (3.16) для флуктуаций микроскопической фазовой плотности δN_a .

Чтобы отделить флуктуации в точке сплошной среды (отделить мелкомасштабные флуктуации), в уравнения для пространственных компонент Фурье введем следующие диссипативные члены:

$$-\Delta_a \delta N_a(k, p, t), \quad -\Delta_a (\delta N_a \delta N_b)_{t-t', k, p, p'}; \quad \Delta_a = \frac{1}{\tau_{\text{ph}}^{(a)}}. \quad (4.10)$$

В результате из уравнений (3.15), (3.16) получаем уравнения для соответствующих компонент Фурье:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_a + ikv + e_a E \frac{\partial}{\partial p} \right) [\delta N_a(k, p, t) - \delta N_a^{(s)}(k, p, t)] = -e_a n_a \delta E(k, t) \frac{\partial f_a}{\partial p} \quad (4.11)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_a + ikv + e_a E \frac{\partial}{\partial p} \right) (\delta N_a \delta N_b)_{t-t', k, p, p'}^{(s)} = 0. \quad (4.12)$$

Дополняющие их начальные условия имеют вид

$$(\delta N_a \delta N_b)_{t-t', k, p, p'}^{(s)} \Big|_{t=t'} = n_a \delta_{ab} \delta(p - p') f_a. \quad (4.13)$$

Напомним, что эти уравнения получены в приближении, когда при расчете мелкомасштабных флуктуаций полностью пренебрегается пространственными и временными изменениями функций $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$. В результате имеем следующее выражение для пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций (см. § 15.5 в [5]):

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, p, p'}^{(s)} = n_a \delta_{ab} \delta(p - p') \frac{\Delta_a}{(\omega - kv)^2 + \Delta_a^2} f_a(r, p, t). \quad (4.14)$$

Получена спектральная линия, ширина которой определяется наименьшим временным интервалом $\tau_{\text{ph}}^{(a)} = 1/\Delta_a$. Эта линия много шире, чем соответствующие спектральные линии, ширины которых определяются частотой столкновений $1/\tau_{\text{rel}}^{(a)}$ или диффузионным процессом.

В нулевом приближении по параметрам $1/\Delta \tau_{\text{rel}}^{(a)}$ можно считать ширину полученной спектральной линии бесконечной. Это дает возможность ввести понятие "белый шум", которое широко используется в теории броуновского движения при введении так называемого источника Ланжевена. Таким образом, в нулевом приближении спектральная плотность флуктуаций случайного источника одинакова на всех частотах и, следовательно, представляет белый шум.

Соответствующие временные корреляционные функции пропорциональны функции $\delta(t - t')$. Реальная ширина этой временной функции, разумеется, не равна нулю. Она определяется минимальным временным параметром. В рассматриваемой здесь теории это есть физически бесконечно малый временной интервал τ_{ph} . Тогда имеет место равенство $\delta(t - t')|_{t=t'} = 1/\tau_{\text{ph}}$. Соответствующий временной спектр близок к белому шуму.

Из изложенного следует, что для расчета флуктуаций в плазме и вывода соответствующих кинетических уравнений можно использовать результаты теории броуновского движения. При броуновском движении интенсивность источника в нулевом приближении не зависит от частоты (белый шум). Однако развитие теории неравновесных процессов в плазме до недавнего времени шло иным путем! Покажем, в чем суть различия этих двух подходов

4.3. Метод адиабатического включения взаимодействия

В основе традиционной теории лежит формальный математический метод регуляризации выражений для спектров вблизи резонансов. Необходимость подобной регуляризации проявляется в различных областях математики, физики и механики как классической, так и квантовой.

Впервые такая проблема возникла при использовании теории возмущений в задаче трех тел. Развитие этой теории базировалось в большой мере на работах Анри Пуанкаре. Это и послужило причиной введения нового термина *резонансы Пуанкаре*. Один из математических способов преодоления этих трудностей базируется на методах теории функций комплексных переменных — регуляризации расходимостей. Она осуществляется путем перехода в комплексную область и выбором знака обхода полюса (точки, в которой имеет место расходимость) в согласии с принципом причинности. В

физике такой метод регуляризации используется в теории излучения. Знак обхода полюса определяется условием расходимости волн.

В теории плазмы подобная проблема возникает, например, при введении так называемого *бесстолкновительного коэффициента затухания Ландау*. Ниже будет дана физическая интерпретация этого явления.

Соответствующие "трудности" возникают и в квантовой механике при расчете вероятностей перехода под действием переменных полей (см., например, гл. 6 в [37]).

Наряду с математическим методом, который в физике получил название *золотое правило Ферми*, используется и другой метод вывода формул для вероятностей перехода. Он основан на допущении включения переменного поля не в начальный момент времени $t = 0$, а при $t = -\infty$. Таким образом, поле медленно (адиабатически) возрастает по экспоненциальному закону $\exp(\lambda_a t)$ с положительным λ_a . В конечных формулах осуществляется предельный переход $\lambda_a \rightarrow 0$. Тем самым вводится временной интервал $1/\lambda_a$, который превосходит все остальные характерные масштабы рассматриваемой системы.

Метод адиабатического включения взаимодействия широко используется в статистической теории неравновесных процессов. На нем базируются выводы кинетических уравнений для самых разных систем. На нем, в частности, основывается и весьма популярный так называемый *метод функций Грина*.

При всем разнообразии конкретных способов расчета общим для них является формальный переход от обратимых уравнений классической и квантовой механики к необратимым уравнениям статистической теории. Однако физические основания для такого перехода остаются "за экраном".

Итак, преодоление трудностей, связанных с существованием резонансов, приводит к необратимым уравнениям. Тем самым, хотя и неявным образом, в теорию вводится диссипация. Необходимость введения диссипации при наличии резонансов стала очевидной уже давно. Так, например, Л.И. Мандельштам в своем замечательном курсе "Лекции по теории колебаний", который он прочитал на физическом факультете Московского университета в 1930 г., говорил:

"Отсюда видно, что достаточно близко от резонанса мы обязаны при рассмотрении установившегося колебания принимать во внимание затухание, как бы оно ни было мало".

И далее:

"Но как мы видели, чем меньше λ_a , тем медленнее устанавливаются колебания. Когда λ_a стремится к нулю, амплитуда колебаний стремится к бесконечности, но и стационарный режим устанавливается через бесконечное время, т.е. не устанавливается никогда".

Итак, метод адиабатического включения взаимодействия недостаточен для построения теории неравновесных процессов, так как не описывает реальный переход к необратимым уравнениям.

Действительно, переход к кинетическим уравнениям означает переход от обратимых уравнений движения к необратимым уравнениям сплошной среды. Такой переход к более простому описанию становится возможным и практически неизбежным благодаря прежде всего сложности движения рассматриваемой гамильтоновой системы. Эта сложность проявляется, в частности, в

наличии динамической неустойчивости движения и, как следствие, в перемешивании траекторий в фазовом пространстве. Последнее и оправдывает введение физически бесконечно малых элементов с последующим сглаживанием по физически бесконечно малому объему — по объему точки сплошной среды. При этом теряется информация о движении в точках сплошной среды. По этой причине соответствующие уравнения статистической теории становятся необратимыми [31, 33, 38–41].

Таким образом, физически бесконечно малые масштабы являются, естественно, наименьшими среди характерных масштабов уравнений в приближении сплошной среды. В этом отношении ситуация противоположна той, которая имеет место в теории, базирующейся на адиабатическом включении взаимодействия, когда время включения больше всех характерных временных параметров полученных таким путем уравнений.

В [33] нетрадиционный метод описания неравновесных процессов был детально рассмотрен на примере газа Больцмана. Здесь аналогичный метод будет использован для описания неравновесных процессов в существенно отличной системе — в полностью ионизованной плазме. Подобный метод построения статистической теории возможен и для квантовых открытых систем. Рассмотрение этого вопроса было начато в последней главе книги [33].

Сделанные замечания не отрицают, конечно, полезность традиционной статистической теории неравновесных процессов в плазме. Естественным является разумное сочетание *старого* и *нового*. Основываясь на такой позиции, мы рассмотрим сначала кратко некоторые наиболее важные результаты традиционной кинетической теории плазмы.

5. Кинетические уравнения для полностью ионизованной плазмы. Традиционное приближение

5.1. Спектральные плотности флуктуаций в кулоновской плазме

Для перехода к адиабатическому приближению надо изменить смысл параметра Δ_a в уравнениях (4.10)–(4.14). Именно, вместо параметра Δ_a введем параметр адиабатической теории λ_a . Таким образом, делаем замену $\Delta_a \rightarrow \lambda_a$. В результате выражение (4.14) примет вид

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, p, p'}^{(s)} = n_a \delta_{ab} \delta(p - p') \frac{2\lambda_a}{(\omega - kv)^2 + \lambda_a^2} f_a(r, p, t), \quad \lambda_a \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Используя определение δ -функции

$$\lim_{\lambda_a \rightarrow 0} \frac{\lambda_a}{(\omega - kv)^2 + \lambda_a^2} = \pi \delta(\omega - kv), \quad (5.2)$$

получаем окончательный результат, который в явном виде не зависит от λ_a ,

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, p, p'}^{(s)} = n_a \delta_{ab} \delta(p - p') 2\pi \delta(\omega - kv) f_a(r, p, t). \quad (5.3)$$

В рассматриваемом приближении — это наиболее общее выражение для спектральной плотности флуктуа-

ций, определяемых молекулярной структурой плазмы. Используя уравнения поля, получим соотношение между компонентами Фурье функций δE , δN_a :

$$\delta E(\omega, k) = -\frac{ik}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a(\omega, k, p) dp. \quad (5.4)$$

Из уравнения (4.11) следует второе соотношение между компонентами Фурье флуктуаций δE , δN_a :

$$\delta N_a(\omega, k, p) = \delta N_a^{(s)}(\omega, k, p) - \frac{ie_a}{\omega - kv + i\lambda_a} \delta E(\omega, k) \frac{\partial(n_a f_a)}{\partial p}, \quad \lambda_a \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

Теперь можно исключить функцию $\delta N_a(\omega, k, p)$ из двух последних уравнений. Результирующее уравнение удобно записать в виде

$$\varepsilon(\omega, k) \delta E(\omega, k) = -\frac{ik}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a^{(s)}(\omega, k, p) dp. \quad (5.6)$$

Здесь введено обозначение для диэлектрической проницаемости кулоновской плазмы

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{k \partial f_a / \partial p}{\omega - kv + i\lambda_a} dp, \quad \lambda_a \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

Используя эти уравнения, находим пространственно-временную спектральную плотность флуктуаций поля в *приближении адиабатического включения взаимодействия*:

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k} = \frac{1}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2}{k^2} n_a \int 2\pi \delta(\omega - kv) f_a dp. \quad (5.8)$$

Из него следует выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций поля в кулоновской плазме:

$$(\delta E \delta E)_k = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{f_a}{|\varepsilon(kv, k)|^2} dp, \quad (5.9)$$

которая через $\varepsilon(\omega, k)$ зависит от поляризационных свойств плазмы.

Отметим еще раз, что приведенные результаты расчета флуктуаций получены в *приближении адиабатического включения взаимодействия*. В этом приближении диссипативный фактор λ_a (и, как следствие, ширина спектральной линии флуктуаций (5.1)) стремится к нулю. В результате соответствующее время корреляции стремится к бесконечности.

Таким образом, в *традиционной теории флуктуаций "началом" служит наиболее когерентное состояние*, время жизни которого больше всех характерных времен рассматриваемой системы.

Такой способ, однако, не отражает физической сущности возникновения необратимости. Действительно, переход к необратимым уравнениям сплошной среды обусловлен исключением движений частиц в физически бесконечно малых объемах. Иными словами, диссипативные члены в кинетических уравнениях определяются мелкомасштабными флуктуациями, а их время корреляции — наименьшим характерным временным интервалом. Мы имеем *две противоположные исходные позиции*

для начала перехода от обратимых уравнений для частиц к необратимым кинетическим уравнениям. Если мы используем в качестве начальных уравнения (4.2)–(4.7), то первый шаг к необратимым кинетическим уравнениям состоит в *исключении наиболее неупорядоченного (некогерентного) движения внутри точек* с размерами порядка $l_{ph}^{(a)}$. Оно характеризуется наименьшими временами корреляции $\tau_{ph}^{(a)}$ для компонент разреженной кулоновской плазмы.

Как мы видели, в традиционной кинетической теории стартуют с противоположной позиции. Исходное состояние здесь является наиболее когерентным, *так как соответствующее время корреляции больше всех характерных времен плазмы*.

Эти два способа описания, конечно, не эквивалентны. Чтобы иметь возможность сравнивать результаты двух приближений, необходимо напомнить основные результаты традиционной кинетической теории плазмы.

5.2. Кинетические уравнения

для разреженной кулоновской плазмы

Мы можем найти теперь выражение для более общей спектральной плотности $(\delta N_a \delta E)_{\omega, k}$. Реальная часть этой спектральной плотности определяет вид "интеграла столкновений" $I_a(r, p, t)$ в кинетическом уравнении (3.3), так как его можно представить в виде

$$I_a(r, p, t) = -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} \int \text{Re}(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, r, p, t} \frac{d\omega dk}{(2\pi)^4}. \quad (5.10)$$

Необходимое выражение для спектральной плотности флуктуаций найдем с помощью уравнений (5.5), (5.6). Зависимость от r и t входит неявно (лишь через функцию распределения $f_a(r, p, t)$). В результате находим интеграл столкновений:

$$I_a(r, p, t) = \sum_b 2e_a^2 e_b^2 n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{\delta(kv - kv')}{|\varepsilon(kv, k)|^2} \times \\ \times \left[\frac{\partial f_a(r, p, t)}{\partial p_i} f_b(r, p', t) - \frac{\partial f_b(r, p', t)}{\partial p_{ij}} f_a(r, p, t) \right] dk dp'. \quad (5.11)$$

Это выражение впервые было получено Балеску и Ленардом и носит название *интеграл столкновений Балеску–Ленарда*.

Вследствие зависимости электрической проницаемости $\varepsilon(\omega, k)$ от функций распределения, интеграл столкновений Балеску–Ленарда является чрезвычайно сложным. Поэтому полезно обсудить возможность упрощения этого уравнения.

5.3. Интеграл столкновений Ландау

Учет поляризации в интеграле столкновений ограничивает область интегрирования по k . Однако при больших значениях k подынтегральное выражение в интеграле столкновений пропорционально $1/k$. При интегрировании по k возникает логарифмическая расходимость. Это есть следствие нарушения условия применимости теории возмущений. По этой причине верхний предел интегрирования по k выбирается в виде

$$k < \frac{k_B T}{e^2} = \frac{1}{l_L}, \quad (5.12)$$

Теперь можно пойти дальше и положить $\varepsilon(kv, k) = 1$, но учесть вклад поляризации путем ограничения нижнего предела интегрирования по k условием $k > 1/r_D$. В результате верхний и нижний пределы интегрирования по k определяются равенствами

$$k = \frac{1}{r_D}, \quad k = \frac{1}{l_L}, \quad (5.13)$$

и интегрирование по k приводит к появлению множителя — кулоновского логарифма

$$L = \ln \frac{r_D}{l_L} \sim \ln \frac{1}{\mu}, \quad \mu \ll 1. \quad (5.14)$$

Такое более простое выражение и было установлено, но иным путем в работе Ландау [1]. Оно будет использовано ниже при формулировке обобщенного кинетического уравнения для плазмы.

5.4. Приближение первых моментов.

Уравнения Власова

Напомним, что система уравнений для первых моментов $\langle N_a(x, t) \rangle = n_a f_a(x, t)$, $\langle E^m(r, t) \rangle = E(r, t)$ соответствующих микроскопических функций не является замкнутой, так как содержит интеграл столкновений I_a . Он определяется коррелятором флуктуаций микроскопической фазовой плотности и микроскопического электромагнитного поля.

Простейший случай, когда мы имеем замкнутую систему уравнений для первых моментов, отвечает нулевому приближению по флуктуациям. Тогда интеграл столкновений равен нулю, и мы приходим к уравнениям Власова (1938 г.). Для кулоновской плазмы они имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial r} + e_a E(r, t) \frac{\partial f_a}{\partial p} = 0, \quad (5.15)$$

$$\text{rot } E = 0, \quad (5.16)$$

$$\text{div } E = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a(r, p, t) dp. \quad (5.17)$$

Уравнения Власова обратимы. Это проявляется в том, что энтропия для замкнутой системы в процессе временной эволюции остается неизменной. Уравнения Власова по форме идентичны точным уравнениям для микроскопических функций $N_a(x, t)$, $E^m(r, t)$. Однако они являются приближенными уравнениями для детерминированных (неслучайных) функций $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$, когда электрон-ионная плазма представляется в виде сплошной среды.

Как и соответствующие микроскопические уравнения, уравнения Власова обратимы. Обратимость уравнений Власова является, однако, иллюзорной. Действительно, времена и длины релаксации для плазмы имеют конечные значения. Переход к уравнениям Власова можно приближенно осуществить лишь при условии, что релаксационные длины l_{ee} много больше, чем размер системы L , при выполнении неравенства $l_{ee} \gg L$. Отсюда следует, что рассматриваемая система ограничена и, следовательно, при решении уравнений Власова необходимо использовать граничные условия. Для реальных систем они всегда диссипативны. Таким образом, уравнения Власова совместно с граничными условиями

представляют собой диссипативные уравнения. Диссипация может быть учтена путем введения в обратимые уравнения Власова (в уравнение (5.16)) эффективного интеграла столкновений. При этом возникает вопрос: каким образом следует ввести в уравнения Власова диссипативный член? Этот вопрос можно выразить другими словами: как следует проводить регуляризацию обратимого уравнения Власова, чтобы принять во внимание реальную диссипацию в плазме?

Возможны два существенно различных способа такой регуляризации. Первый был использован впервые в статье Л.Д. Ландау [3] при введении *бесстолкновительного затухания Ландау*. Ландау ввел это затухание формально, путем решения обратимого уравнения Власова методом преобразования Лапласа. Тот же результат можно получить, используя эквивалентную процедуру. Именно, мы можем ввести в уравнение Власова малый диссипативный член, пропорциональный некоторой частоте столкновений ν_a . В конечных (!) результатах $\nu_a \rightarrow 0$.

Таким образом, для преодоления трудностей, связанных с наличием резонансов, вводится, хотя и формально, диссипация.

Переход от обратимых уравнений движения к кинетическим уравнениям, как уже говорилось, означает переход к необратимым уравнениям сплошной среды. Для этого необходимо сглаживание по объемам точек сплошной среды. Физически бесконечно малые масштабы являются, естественно, наименьшими среди характерных масштабов уравнений сплошной среды.

В этом отношении ситуация противоположна той, которая имеет место в традиционной теории при использовании так называемого *бесстолкновительного приближения*. Для выявления этого различия напомним некоторые результаты традиционной теории.

5.5. Волны в бесстолкновительной

кулоновской плазме. Затухание Ландау

5.5.1. Электрическая восприимчивость кулоновской плазмы. Дисперсионное уравнение. Выделим два случая.

1. Волновые свойства неограниченной кулоновской плазмы при условии, что столкновения не играют существенной роли. Для этого должны быть выполнены следующие условия:

$$\lambda \ll l_{ee} \ll L, \quad \omega \gg \nu_{ee} \gg \frac{1}{T}. \quad (5.18)$$

В них $\lambda = 1/k$ — длина волны, ω — соответствующая частота, L — минимальный характерный размер системы и T — соответствующий временной параметр. Нулевое приближение по параметрам λ/l_{ee} и ν_{ee}/ω (*предельный переход совершается в конечных формулах (!)*) соответствует *бесстолкновительному приближению* для плазмы.

2. Релаксационные масштабы, определяемые взаимодействием между частицами плазмы, много больше характерных параметров системы. В этом случае имеют место следующие неравенства:

$$\lambda \ll L \ll l_{ee}, \quad \omega \gg \frac{1}{T} \gg \nu_{ee}. \quad (5.19)$$

В такой ситуации уравнения Власова должны быть дополнены граничными условиями, которые в общем случае являются диссипативными. Диссипация может

быть обусловлена разными причинами: неидеальностью условий отражения, конечностью времени пролета и т.д.

В некотором смысле случай, когда выполняются неравенства (5.18), является более простым. Действительно, при этом диссипация определяется интегралами столкновений, общие свойства которых нам хорошо известны. В то же время трудно предложить общую форму эффективного интеграла столкновений, который характеризует диссипативные граничные условия при выполнении неравенств (5.19).

В бесстолкновительном приближении можно предположить, что конкретный вид интеграла столкновений не существен. Это дает основание для использования простейшего так называемого v -приближения для интеграла столкновений:

$$I_a = -v_a [f_a(r, p, t) - f_a^{(0)}(p)]. \quad (5.20)$$

Здесь $f_a^{(0)}(p)$ — распределение Максвелла. В результате обратимое уравнение Власова (5.15) заменится необратимым кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial r} + e_a E \frac{\partial f_a}{\partial p} = -v_a [f_a(r, p, t) - f_a^{(0)}(p)]. \quad (5.21)$$

Это уравнение (в отличие от уравнения Власова!) имеет равновесное решение в виде распределения Максвелла. При этом поле $E = 0$. Рассмотрим решение $f_a^{(1)}(r, p, t)$, $E^{(1)}(r, t)$, близкое к равновесному. В линейном приближении решение соответствующих уравнений для компонент Фурье приводит к следующему уравнению для поля:

$$\varepsilon(\omega, k) E^{(1)}(\omega, k) = 0. \quad (5.22)$$

Электрическая проницаемость определяется выражением

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{k \partial f_a^{(0)} / \partial p}{\omega - kv + i v_a} dp, \quad v_a \rightarrow 0. \quad (5.23)$$

Условие существования ненулевого решения приводит к *дисперсионному уравнению*

$$\varepsilon(\omega, k) = 0. \quad (5.24)$$

Для неограниченной плазмы волновое число является действительным. Комплексную частоту представляют в виде $\omega = \omega' - \gamma$ и рассматривают случай малого затухания, когда $\gamma \ll \omega'$. В первом приближении по параметру γ/ω' получаем следующие выражения:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega', k) = 0, \quad \gamma = \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', k)}{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega', k)} \omega'. \quad (5.25)$$

Первое из этих соотношений определяет частотную дисперсию колебаний — зависимость $\omega = \omega(k)$, а второе — коэффициент затухания. Он пропорционален мнимой части диэлектрической проницаемости.

Реальная и мнимая части диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega', k)$ определяются хорошо известными формулами:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega', k) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} n_a P \int \frac{k \partial f_a^{(0)} / \partial p}{\omega' - kv} dp \quad (5.26)$$

и

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', k) = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2}{k^2} n_a \int \delta(\omega' - kv) k \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p} dp. \quad (5.27)$$

Символ P указывает, что надо брать главное значение соответствующего интеграла.

Рассмотрим теперь пример.

5.5.2. Волны в электронной плазме. Затухание Ландау. Основное состояние характеризуется распределением Максвелла для электронов, а ионы считаются неподвижными — холодными:

$$f_e^{(0)}(p) = \frac{1}{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e k_B T}\right) \quad \text{и} \quad f_i(p) = \delta(p). \quad (5.28)$$

Для фазовых скоростей $\omega'/k \gg v_T$ в нулевом приближении по m_e/m_i получаем известные результаты:

$$\omega'^2 = \omega_{Le}^2 (1 + 3r_{De}^2 k^2), \quad (5.29)$$

$$\gamma = \frac{\omega_{Le}}{2} \operatorname{Im} \varepsilon(\omega', k) = -\frac{\omega_{Le}}{2} \frac{4\pi^2 e_a^2}{k^2} n_a \int \delta(\omega' - kv) k \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p} dp. \quad (5.30)$$

В этих формулах ω_{Le} — частота Ленгмюра и r_{De} — радиус Дебая для электронов.

Пусть вектор $k \parallel x$, тогда можно проинтегрировать последнее выражение по p_y, p_z . В результате имеем

$$\gamma = -\omega_{Le} \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a m_e}{2k^2} \frac{\partial f_e^{(0)}(p_x)}{\partial p_x} \Big|_{v_x=\omega'/k} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{Le} \frac{1}{r_{De}^3 k^3} \exp\left(-\frac{1}{2r_{De}^2 k^2} - \frac{3}{2}\right). \quad (5.31)$$

Полученное таким путем выражение для γ и представляет *коэффициент затухания Ландау*.

На столкновительную природу затухания Ландау указывает тот факт, что величина γ равна нулю, если частота столкновений v_a тождественно равна нулю в исходном уравнении (5.21). Мы вернемся к этому вопросу в следующем разделе.

5.6. Электрическая проницаемость и затухание Ландау в кинетической теории флуктуаций

5.6.1. Кинетическая теория. Мы описали волновые свойства кулоновской разреженной плазмы в бесстолкновительном приближении на основе кинетического уравнения. Все результаты были получены путем решения дисперсионного уравнения (5.24). Диэлектрическая проницаемость (5.23) следует из решения уравнения (5.21) и уравнений поля. Уравнение (5.21) можно рассматривать как результат регуляризации уравнения Власова для функций распределения $f_a(r, p, t)$ — первых моментов микроскопической фазовой плотности $N_a(r, p, t)$.

В кинетическом уравнении (5.21) член в правой части представляет "карикатуру" на интеграл столкновений, так как не обладает присущими последнему общими свойствами. Он используется лишь для регуляризации решения уравнения Власова вблизи резонансов. Это,

однако, лишь формальное математическое решение проблемы, эквивалентное использованному в классической работе [3]. Теперь пришло время выяснить физическую сущность проблемы. Отметим еще раз, что процедура регуляризации не однозначна. При этом различные варианты регуляризации с физической точки зрения не эквивалентны.

Действительно, в уравнении (5.21) величина v_a постоянна. Это означает, что временное запаздывание и пространственная нелокальность во внимание не принимаются. В результате этого ширина спектральной линии в выражении (5.23) также постоянна (не зависит от частоты ω и волнового числа k) и в конечных формулах $v_a \rightarrow 0$.

Можно использовать выражения (5.23) для диэлектрической проницаемости и при конечных значениях v_a , т.е. до выполнения предельного перехода $v_a \rightarrow 0$. Оно после интегрирования по p_y и p_z приводит к следующему выражению для мнимой части электрической проницаемости:

$$\text{Im } \varepsilon(\omega', k) = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{v_a}{(\omega' - kv_x)^2 + v_a^2} k \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_x} dp_x. \quad (5.32)$$

Под интегралом стоит произведение двух функций. Первая представляет собой линию Лоренца с учетом доплеровского смещения kv_x . Результат интегрирования по p_x зависит от безразмерного параметра

$$\frac{v_a}{kv_T} \quad \text{или} \quad \frac{1}{kl_a}. \quad (5.33)$$

Здесь l_a — длина свободного пробега заряженных частиц плазмы.

В нулевом приближении по этому параметру мы имеем бесконечно узкую линию Лоренца и получаем после интегрирования по p_x доплеровский контур. В этом случае волны $1/k$ много меньше l_a . Это и дает некоторое основание для термина "бесстолкновительное приближение". Ему отвечает результат Ландау. Однако, если частота столкновений v_a тождественно равна нулю, то и результат равен нулю, так как исчезает сама линия Лоренца и просто нечего усреднять!

Мы столь подробно остановились на этом вопросе, так как понятие "затухание Ландау" играет важную роль в физике плазмы.

5.6.2. Теория флуктуаций. Все приведенные результаты получены на основе кинетического уравнения для непрерывной среды. Однако впервые диэлектрическая проницаемость была введена в теории мелкомасштабных флуктуаций. Именно эти флуктуации и определяют диссипативные члены в кинетических уравнениях. В частности, было получено уравнение (5.5) для флуктуаций электрического поля. Приведем снова соответствующее выражение диэлектрической проницаемости для флуктуаций

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{k \partial f_a / \partial p}{\omega - kv + i\lambda_a} dp, \quad \lambda_a \rightarrow 0. \quad (5.34)$$

Напомним также выражение для пространственно-временной спектральной плотности источника флуктуа-

ций электрического поля в приближении адиабатического включения взаимодействия

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k}^{(s)} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{2\lambda_a}{(\omega - kv)^2 + \lambda_a^2} f_a dp, \quad \lambda_a \rightarrow 0, \quad (5.35)$$

и выражение для пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций поля δE

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k} = \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, k}^{(s)}}{|\varepsilon(\omega, k)|^2}. \quad (5.36)$$

Мы видим, что в приближении адиабатического включения взаимодействия ширина линии Лоренца в выражениях (5.35), (5.36) равна нулю. Это означает, что соответствующее время корреляций флуктуаций бесконечно и, следовательно, мы имеем полностью когерентное состояние.

Таким образом, снова, как и в бесстолкновительном приближении, в кинетической теории имеется противоречие с естественным (но не традиционным) представлением о начале перехода от обратимых микроскопических уравнений к необратимым уравнениям кинетической теории. Следовательно, мы можем еще раз отметить, что имеются два противоположных описания возникновения необратимости. Одно из них является традиционным. В этом случае начало необратимости характеризуется когерентными флуктуациями с бесконечными временами корреляций (или бесконечно узкими спектральными линиями — бесконечно узкими резонансами). В кинетической теории это отвечает бесстолкновительному приближению. При другом, более физическом, но не традиционном описании переход к необратимым уравнениям неизбежен при использовании модели сплошной среды. Здесь, однако, необратимость есть следствие полностью хаотического движения частиц в физически бесконечно малых объемах — в пределах точек сплошной среды. Тем самым, начало необратимости и диссипативные члены в кинетических уравнениях определяются не когерентными, но мелкомасштабными флуктуациями. Время их корреляции определяется наименьшим характерным временным параметром плазмы.

Из формулы (5.36) следует, что уравнение

$$\varepsilon(\omega, k) = 0, \quad \lambda_a \rightarrow 0, \quad (5.37)$$

которое подобно дисперсионному уравнению (5.24), играет важную роль и в адиабатической теории флуктуаций. Мы можем и здесь ввести аналог затухания Ландау. Действительно, из (5.34) следует выражение мнимой части диэлектрической проницаемости

$$\text{Im } \varepsilon(\omega, k) = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2}{k^2} n_a \int \frac{\lambda_a}{(\omega - kv_x)^2 + \lambda_a^2} k \frac{\partial f_a}{\partial p_x} dp_x, \quad \lambda_a \rightarrow 0. \quad (5.38)$$

Она определяет ширину спектральной линии флуктуаций поля $\delta E(\omega, k)$ при данном значении волнового вектора k .

Из формул (5.32), (5.38) следует, что проблема расчета мнимой части диэлектрической проницаемости для кинетического уравнения (5.21) в бесстолкновительном приближении аналогична проблеме, возникающей при решении соответствующего уравнения при расчете

мелкомасштабных флуктуаций. В обоих случаях затухание Ландау возникает, когда безразмерный параметр (5.33) много меньше единицы:

$$\frac{v_a}{kv} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{kl_a} \ll 1. \quad (5.39)$$

Это означает, что длина волны $\lambda = 1/k$ много меньше, чем средняя длина свободного пробега:

$$\lambda = \frac{1}{k} \ll l_a, \quad (5.40)$$

т.е. для бесстолкновительной области длин волн.

Однако как на уровне расчета флуктуаций, так и при решении диссипативного кинетического уравнения в бесстолкновительном приближении вывод о наличии затухания Ландау не является обоснованным. Действительно, в теории флуктуаций это затухание есть следствие подмены широкой линии в спектре флуктуаций бесконечно узкой линией при адиабатическом включении взаимодействия. Иными словами, "белый шум" заменяется бесконечно узким резонансом. Это отвечает бесстолкновительному приближению при расчете флуктуаций.

При использовании же кинетического уравнения (5.21) в бесстолкновительном приближении имеется произвол в выборе вида интеграла столкновений. Сделанный выбор отвечает весьма частному способу регуляризации обратимого уравнения Власова. Такая регуляризация позволяет устранить расхожимость в выражении для диэлектрической проницаемости. Она, как мы увидим, не отражает в полной мере реальной роли диссипации.

В связи с этим и возникает вопрос, во-первых, о более последовательном расчете флуктуаций, определяющих интегралы столкновений в кинетических уравнениях для плазмы, и, во-вторых, о более последовательном учете диссипации при исследовании, например, волновых свойств плазмы.

Мы увидим, что на первом шаге перехода к необратимым кинетическим уравнениям (при выводе кинетических уравнений) необходимо принять во внимание пространственную нелокальность, обусловленную конечностью размера точек сплошной среды. В результате и появится возможность избежать произвола в выборе способа регуляризации при переходе к необратимым уравнениям статистической теории неравновесных процессов в плазме.

6. Нетрадиционное описание неравновесных процессов в плазме

6.1. Первый шаг к необратимым уравнениям физики открытых систем

Напомним, что на первом шаге перехода к необратимым уравнениям сплошной среды в микроскопическое уравнение (2.3) был введен член, характеризующий релаксацию точного динамического распределения $N_a(r, p, t)$ к сглаженному по объему точки сплошной среды. Тем самым был произведен переход от точных динамических уравнений (2.3), (2.4) к приближенным уравнениям (4.2), (4.3). Приближенность этих уравнений обусловлена потерей информации о движении частиц в пределах точек сплошной среды. Оправданием процедуры сглаживания

может служить перемешивание траекторий в фазовом пространстве вследствие динамической неустойчивости движения. Путем их усреднения по ансамблю Гиббса была получена система уравнений (4.6), (4.7) для функции распределения $f_a(r, p, t)$ (первого момента микроскопической функции $N_a(r, p, t)$) и среднего электрического поля. Эта система уравнений не замкнутая, так как в нее входит коррелятор флуктуаций фазовой плотности и поля. Поэтому возникает задача расчета флуктуаций. Уравнения для флуктуаций являются нелинейными, а для последовательности моментов флуктуаций получается бесконечная цепочка связанных уравнений. При использовании модели сплошной среды число частиц в точке велико. Это дает основание считать флуктуации малыми и оборвать цепочку. В результате для флуктуаций фазовой плотности было получено линейное уравнение (4.10).

Чтобы выделить мелкомасштабные флуктуации, в уравнение (4.11) был введен диссипативный член, в котором согласно (4.10) диссипативный коэффициент Δ_a обратно пропорционален физически бесконечно малому временному интервалу. Такое выделение мелкомасштабных флуктуаций, конечно, весьма грубое. Оно было введено для сопоставления с традиционным методом расчета флуктуаций, определяющих интегралы столкновений в кинетических уравнениях для плазмы. Ниже учет роли мелкомасштабных флуктуаций проведен более обоснованно при выводе обобщенного кинетического уравнения. На его основе возможно единое описание неравновесных процессов на кинетических и гидродинамических масштабах.

Продолжим краткий "экскурс в прошлое".

На основе уравнения (4.11) было получено выражение (4.14) для спектральной плотности источника флуктуаций, который отражает молекулярную структуру сплошной среды. Ширина этой спектральной линии обратно пропорциональна физически бесконечно малому временному интервалу — наименьшему из всех характерных времен плазмы. Таким образом, в приближении сплошной среды ширина линии бесконечна и, следовательно, молекулярная структура точки проявляется как белый шум. Это делает задачу расчета флуктуаций в плазме подобной, хотя и значительно более сложной, задаче расчета флуктуаций в теории броуновского движения.

Традиционная теория расчета флуктуаций в плазме, как мы видели, не принимает в расчет это обстоятельство и "стартует" с противоположных позиций. Именно, она базируется на методе адиабатического включения взаимодействия. В результате вместо (4.14) для спектральной плотности флуктуаций источника используется выражение (5.1). Тем самым в основном приближении ширина линии стремится к нулю, и мы приходим к выражению (5.3). Это означает, что исходным служит полностью когерентное состояние, так как соответствующее время корреляции оказывается бесконечным. Именно на такой основе и построены приведенные выше кинетические уравнения для описания неравновесных процессов в плазме.

Быть может, несмотря на некоторые шероховатости вывода этих уравнений, все обстоит достаточно благополучно и нет оснований "ломать копья" с целью более последовательного вывода основных уравнений для описания неравновесных процессов в плазме? Покажем, что все же есть достаточно глубокие основания для

развития нетрадиционной статистической теории неравновесных процессов в плазме.

Напомним в связи с этим, что аналогичная проблема уже возникала в кинетической теории газов. В разделе 13.1 работы [33] сделаны некоторые замечания, показывающие необходимость поиска возможности единого описания неравновесных процессов на кинетическом и гидродинамическом масштабах. В результате (благодаря учету структуры сплошной среды) удалось установить соответствующее обобщенное кинетическое уравнение для разреженного газа. В нем (см. раздел 13.3 в [33]) по сравнению с кинетическим уравнением Больцмана имеется дополнительный диссипативный член (13.3.10). Он учитывает роль пространственной диффузии функции распределения. На уровне газодинамического описания вследствие диффузии функции распределения появляются три диссипативных процесса диффузионного типа — самодиффузия вещества, обусловленная градиентом плотности, вязкое трение и теплопроводность.

Покажем, что аналогичное обобщенное кинетическое описание не только возможно, но и необходимо для описания широкого круга явлений в плазме.

6.2. Обобщенное кинетическое уравнение для разреженной кулоновской плазмы

Вернемся к изложенному в разделе 4.2. В нем были указаны изменения, которые надо произвести в исходных динамических уравнениях для микроскопической фазовой плотности каждой компоненты плазмы и напряженности поля. Для кулоновской плазмы — это уравнения (2.3), (2.4).

Сглаживание этих уравнений по точке сплошной среды приводит к уравнениям (4.2), (4.3). Дополнительный член в первом из них описывает "подстройку" микроскопической фазовой плотности — динамического распределения к соответствующей сглаженной по объему точки функции (4.4). Функция сглаживания была определена распределением Гаусса (4.5). Дисперсия в нем определяется радиусом Дебая — размером точки в кулоновской плазме. Подстройка к сглаженному распределению происходит за физически бесконечно малый временной интервал (2.43) — время диффузии по объему радиусом Дебая. Возможна и другая физическая интерпретация физически бесконечно малого временного масштаба для плазмы.

Напомним, что в выражении для интеграла столкновений Ландау интегрирование по волновым числам проводится по области (см. (5.13))

$$k_{\min} = \frac{1}{r_D} \quad \text{и} \quad k_{\max} = \frac{1}{l_L}. \quad (6.1)$$

Эти неравенства показывают, что максимальный масштаб длины совпадает с радиусом Дебая и, следовательно, с размером точки сплошной среды. Учет более мелких масштабов определяет влияние структуры самой точки или, иными словами, специфики взаимодействия по закону Кулона. При этом минимальный масштаб определяется длиной Ландау

$$l_L = \frac{e^2}{k_B T}. \quad (6.2)$$

Поскольку отношение длин l_L , r_D , как нетрудно убедиться, определяется плазменным параметром μ , то

имеется цепочка соотношений для характерных времен электронов плазмы

$$\tau_{ph} \sim \frac{r_D^2}{D} \sim \mu \frac{1}{\omega_L} \sim \mu \frac{r_D}{v_T} \sim \frac{l_L}{v_T}. \quad (6.3)$$

Таким образом, физически бесконечно малый временной интервал в μ раз меньше периода собственных колебаний и соответственно времени пролета расстояния r_D , определяющего размер точки. Он определяется меньшими масштабами: либо временем диффузии по области точки, либо временем пролета минимального масштаба взаимодействия — длины Ландау.

После этого отступления продолжим преобразование основных уравнений.

Напомним, что после усреднения уравнений (2.3), (2.4) по ансамблю Гиббса мы получили систему уравнений (4.6), (4.7) для одночастичных функций распределения и напряженности среднего электрического поля. Эта система уравнений не является замкнутой. Она содержит не только первые моменты $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$ соответствующих микроскопических функций, но также и коррелятор $\langle \delta E \delta N_a \rangle$ флуктуаций δN_a , δE .

Во втором члене правой части уравнения (4.6) проведем разложение по физическому числу Кнудсена каждой компоненты плазмы. В результате получим следующее выражение для диссипативного члена в кинетическом уравнении, который определяется пространственной диффузией и подвижностью заряженных частиц плазмы:

$$I_a^{(r)}(r, p, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(D_{(a)} \frac{\partial f_a}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau_{rel}^{(a)}}{m_a} e_a E f_a \right). \quad (6.4)$$

Коэффициент пространственной диффузии связан с характерными релаксационными параметрами соотношениями

$$D_{(a)} \sim \frac{l_{rel}^{(a)2}}{\tau_{rel}^{(a)}} \sim v_{T_a} l_{rel}^{(a)} \sim \tau_{rel}^{(a)} \frac{k_B T}{m_a}. \quad (6.5)$$

Выражение аналогично (13.3.7) в [33].

Итак, установлена форма одного из диссипативных членов в кинетическом уравнении, которое получено с учетом структуры сплошной среды. Осталось установить структуру второго диссипативного члена в правой части уравнения (4.6), который определяется коррелятором флуктуаций поля и фазовой плотности. Введем для него специальное обозначение

$$I_a^{(v)}(r, p, t) = -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} \langle \delta E \delta N_a \rangle. \quad (6.6)$$

Заметим, что мы уже встречались с подобным определением интеграла столкновений (см. тождество в правой части уравнения (3.3)). Расчет этого коррелятора в приближении вторых корреляционных функций привел нас к выражениям для интегралов столкновений Балеску–Ленарда и Ландау.

С рассматриваемой здесь позиции выражение Балеску–Ленарда не является физически оправданным, поскольку его вывод основан на методе адиабатического включения взаимодействия. Тем самым для "старта" выбирается когерентное состояние. Более адекватным

при ином подходе, когда "стартом" является наиболее хаотическое состояние, оказывается выражение Ландау. В оригинальной работе Ландау оно было получено на основе уравнения Больцмана, но с существенным дополнением. Именно, была выделена основная область масштабов (или волновых чисел), определяющих интеграл столкновений. Любопытно, что при традиционном изложении выражение Ландау является менее общим, чем предложенное Балеску и Ленардом. Действительно, в нем не учтена роль динамической поляризации плазмы. Однако с развиваемой здесь точки зрения оценка относительной роли этих выражений противоположная.

Ввиду важности вопроса остановимся на нем более подробно.

Действительно, область масштабов (волновых чисел) в интеграле Ландау определяется условиями (5.13). Мы видим, что наибольшее расстояние определяется радиусом Дебая и, следовательно, размером точки сплошной среды. Тем самым обеспечивается исключение именно тех масштабов, которые были отнесены к мелкомасштабным.

Более того, выражение Ландау может быть получено на основе уравнений Ланжевена для заряженных частиц. При этом ширина δ -функции в корреляторе источника Ланжевена определяется временным интервалом, который был принят выше за физически бесконечно малый.

Здесь введено обозначение для *кулоновского логарифма*

$$L = \ln \frac{r_D}{l_L} \sim \ln \frac{1}{\mu} \quad \text{при} \quad \mu \ll 1. \quad (6.7)$$

В результате выражение для интеграла столкновений кулоновской плазмы, которое было установлено, правда, совсем иным путем в классической работе Ландау в 1936 г., определяет второй диссипативный член в обобщенном кинетическом уравнении для кулоновской плазмы. При этом наиболее естественна именно та форма для этого интеграла столкновений, которая была предложена в оригинальной работе Ландау. Запишем его в этой форме:

$$I_a^{(v)}(r, p, t) = \sum_b C_{ab} \frac{\partial}{\partial p_i} \int V_{ij}(v - v') \times \\ \times \left(\frac{\partial f_a(r, p, t)}{\partial p_j} f_b(r, p', t) - \frac{\partial f_b(r, p', t)}{\partial p'_j} f_a(r, p, t) \right) dp'. \quad (6.8)$$

Здесь использованы обозначения для тензора разности скоростей

$$V_{ij}(v - v') = \frac{(v - v')^2 \delta_{ij} - (v - v')_i (v - v')_j}{|v - v'|^3} \quad (6.9)$$

и комбинации констант

$$C_{ab} = 2\pi e_a^2 e_b^2 n_b L, \quad B_{ab} = n_a C_{ab}. \quad (6.10)$$

Здесь введено также обозначение для *кулоновского логарифма*

$$L = \ln \frac{r_D}{l_L} \sim \ln \frac{1}{\mu} \quad \text{при} \quad \mu \ll 1. \quad (6.11)$$

В обозначении интеграла столкновений введен верхний индекс (v) . Он указывает на то, что в обобщенном кинетическом уравнении интеграл Ландау будет лишь одним из двух интегралов столкновений, который определяется перераспределением (броуновским движением) заряженных частиц по скоростям.

Запишем, наконец, уравнение (4.6) в форме, когда в правой части стоит сумма двух интегралов столкновений:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial r} + e_a E(r, t) \frac{\partial f_a}{\partial p} = I_a^{(v)}(r, p, t) + I_a^{(r)}(r, p, t). \quad (6.12)$$

Первый из них представляется выражением Ландау (6.8) и определяет, как уже было отмечено, диссипацию, которая обусловлена изменением скоростей частиц кулоновской плазмы в процессе их взаимодействия. Вторым интегралом столкновений описывается выражением (6.4) и определяет диссипацию, которая обусловлена пространственной диффузией функции распределения.

Естественно, что эти кинетические уравнения надо решать совместно с уравнениями Максвелла для кулоновской плазмы

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a(r, p, t) dp. \quad (6.13)$$

В результате мы получили кинетические уравнения для разреженной кулоновской плазмы с учетом структуры сплошной среды, моделирующей рассматриваемую систему. Как следствие этого, в кинетическом уравнении возник дополнительный диссипативный член. Он обусловлен "подстройкой" динамических и статистических распределений к сглаженным по объему точки сплошной среды. Это дает основание назвать их *обобщенными кинетическими уравнениями для кулоновской плазмы*.

В заключение этого раздела отметим следующее.

Обобщенные кинетические уравнения можно рассматривать как пример уравнений теории нелинейного броуновского движения [33, 42] и записать соответствующие нелинейные уравнения Ланжевена. При этом корреляторы источников Ланжевена будут характеризоваться двойным набором переменных. Это прежде всего корреляции на физически бесконечно малых масштабах. Эти масштабы определяют "ширины" δ -функций в формулах для корреляторов источников. Интенсивности источников Ланжевена для плазмы будут определяться функциями распределения $f_a(r, p, t)$, которые мало изменяются на физически бесконечно малых пространственно-временных масштабах. Такого рода уравнения чрезвычайно сложны, поэтому преимущества метода Ланжевена здесь не столь заметны, как в случае более простых систем. По этой причине основные усилия лучше направить на решение самих кинетических уравнений.

Есть уже возможность рассмотреть ряд конкретных следствий и свойств этого обобщенного кинетического уравнения.

6.3. Свойства обобщенных кинетических уравнений

6.3.1. Равновесное пространственно однородное распределение частиц плазмы. Диффузия в пространстве импульсов. При отсутствии внешних полей система уравнений для функций $f_a(r, p, t)$, $E(r, t)$ имеет частное решение,

когда заряженные частицы распределены однородно по пространству, распределение по импульсам — распределение Максвелла и электрическое поле равно нулю. Чтобы убедиться в существовании такого решения, надо использовать условие электронейтральности плазмы (это приводит к равенству нулю плотности заряда) и убедиться, что интеграл столкновений $I_a^{(v)}(r, p, t)$ Ландау обращается в нуль при подстановке в него распределения Максвелла. В этом нетрудно убедиться, если использовать свойства тензора компонент относительной скорости.

Вернемся к выражению (6.8) для интеграла столкновений Ландау и представим его в форме Фоккера–Планка, принятой в теории броуновского движения:

$$I_a^{(v)}(r, p, t) = \sum_b C_{ab} \left[\frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij}^{(a)}(v) \frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i} A_i^{(a)}(v) f_a \right]. \quad (6.14)$$

Здесь введены обозначения для тензора диффузии в пространстве скоростей и соответствующего вектора, характеризующего диссипацию:

$$D_{ij}^{(a)}(v) = \sum_b C_{ab} \int V_{ij}(v - v') f_b(p') dp', \quad (6.15)$$

$$A_i^{(a)}(v) = \sum_b C_{ab} \int V_{ij}(v - v') \frac{\partial f_b(p')}{\partial p_j} dp'. \quad (6.16)$$

Найдем соотношение между этими коэффициентами для равновесного состояния. Для этого подставим в последние две формулы распределение Максвелла. В результате с учетом свойств (6.12) получим равенство

$$D_{ij}^{(a)}(v) v_j = A_i^{(a)}(v) k_B T. \quad (6.17)$$

Это есть соотношение Эйнштейна в теории нелинейного броуновского движения [4, 33, 42]. Отличие состоит лишь в том, что нелинейными являются не только уравнения Ланжевена для частиц, но и кинетические уравнения. Вследствие этого тензор диффузии и вектор трения сами зависят от функции распределения.

6.3.2. Равновесное состояние во внешнем поле. Распределение Больцмана. Предположим, что плазма находится во внешнем электрическом поле. Рассмотрим равновесное состояние. Тогда распределение по скоростям определяется формулой Максвелла, а распределение по координатам подлежит определению. Перейдем от кинетического к уравнениям для плотностей частиц

$$n_a(r, t) = n_a \int f_a(r, p, t) dp. \quad (6.18)$$

Для равновесного состояния получаем следующую систему уравнений для функций $n_a(r)$, $E(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(D_{(a)} \frac{\partial n_a(r)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau_a}{m_a} e_a E n_a(r) \right) = 0, \quad (6.19)$$

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 4\pi \sum_a e_a n_a(r). \quad (6.20)$$

Из уравнений Максвелла (6.20) следует, что электрическое поле является потенциальным: $E(r) = -\text{grad } \varphi(r)$.

С учетом этого решение уравнения (6.19) является распределением Больцмана:

$$n_a(r) = n_a \exp \left[-\frac{e_a \varphi(r)}{k_B T} \right]. \quad (6.21)$$

6.3.3. Экранирование внешнего поля равновесной плазмой.

Предположим, что на границе плазмы задан потенциал внешнего постоянного электрического поля. Поле предполагается слабым. Это означает, что потенциальная энергия много меньше кинетической — выполняется неравенство

$$e_a \varphi(r) \ll k_B T. \quad (6.22)$$

В результате приходим к линейному уравнению для электрического потенциала

$$\Delta \varphi(r) - \frac{1}{r_D^2} \varphi(r) = 0. \quad (6.23)$$

Здесь использовано обозначение (2.11) для радиуса Дебая. В одномерном случае это уравнение совпадает с уравнением (2.9). Его решение (2.10) описывает экранирование внешнего поля равновесной плазмой.

Проведенное здесь описание экранирования поля плазмой более последовательное. Действительно, существование распределения Больцмана ранее постулировалось. Теперь же оно является равновесным решением обобщенного кинетического уравнения. Наличие в последнем двух диссипативных членов позволяет описать установление как равновесного распределения по скоростям — распределения Максвелла, так и распределения Больцмана. Соответствующие времена релаксации определяются временами столкновений τ_{ee} , τ_{ii} для электронов и ионов и характерными временами пространственной диффузии $\tau_{D_a} \sim L^2/D_a$.

Рассмотрим подробнее вопрос о соотношении этих характерных времен и, как следствие, о возможности описания временной эволюции на основе диффузионных уравнений.

6.3.4. Коэффициенты пространственной диффузии. Амбиполярная диффузия в полностью ионизованной плазме. Из приведенных выше определений характерных масштабов для разреженной плазмы находим отношения времен столкновений и диффузии:

$$\frac{\tau_a}{\tau_{D_a}} \sim \frac{v_{T_a} l_a}{L^2} \frac{l_a}{v_{T_a}} \sim \frac{l_a^2}{L^2} \sim \frac{1}{\mu^2} \frac{r_D^2}{L^2} \sim \frac{1}{\mu^2} \frac{l_{ph}^2}{L^2}. \quad (6.24)$$

Из этой цепочки соотношений следуют важные выводы.

Во-первых, в задаче экранирования поля равновесной плазмой характерной длиной является радиус Дебая, т.е. $L \sim r_D$, и, следовательно, характерное время диффузии в μ^2 раз меньше времени столкновений. В свою очередь время диффузии при $L \sim r_D$ порядка физически бесконечно малого временного интервала.

Это означает, что равновесное распределение Больцмана на масштабах порядка радиуса Дебая устанавливается значительно быстрее, чем распределение Максвелла. Отсюда, казалось бы, следует, что нет оснований описывать на основе уравнений пространственной диф-

фузии временную эволюцию. Заметим, однако, что сделанный вывод не зависит от соотношения масс электронов и ионов.

Возможна, однако, и иная ситуация.

Пусть в начальный момент распределение по скоростям является распределением Максвелла и допустим (это, во всяком случае, оправдано при использовании линейного приближения — приближения слабого поля), что оно сохраняется в процессе эволюции к равновесному состоянию. Подстановка в кинетическое уравнение (6.12) распределения Максвелла обращает в нуль первый диссипативный член в правой части. В результате после интегрирования по импульсам приходим к временным уравнениям для пространственной диффузии:

$$\frac{\partial n_a(r, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_{(a)} \frac{\partial n_a(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\tau_{\text{rel}}^{(a)} e_a \frac{\partial \varphi}{\partial r} n_a(r, t) \right) = 0. \quad (6.25)$$

Уравнения поля сохраняют прежний вид:

$$\Delta \varphi = 4\pi \sum_a e_a n_a(r, t). \quad (6.26)$$

Мы видим, что даже в простейшем случае временная эволюция плазмы описывается достаточно сложными нелинейными уравнениями. По форме они совпадают с соответствующими уравнениями слабоионизованной плазмы (см. формулы (25.4)–(25.6) в [4]). Физическое же содержание этих уравнений существенно отличается.

Именно, в слабоионизованной плазме основным является процесс столкновений заряженных частиц с атомами. Столкновения между заряженными частицами столь редки, что во внимание не принимаются. В полностью же ионизованной плазме, напротив, отсутствуют столкновения заряженных частиц с атомами. Диссипация определяется взаимодействием заряженных частиц. В рассматриваемом сейчас приближении она определяется процессами самодиффузии в каждой из компонент плазмы. Имеется, разумеется, и диссипация за счет взаимодействия разных компонент плазмы. Она, однако, не проявляется, когда распределение частиц по скоростям максвелловское.

Обратим внимание на то, что длины свободного пробега электронов и ионов не зависят от отношения масс электронов и ионов, так как выражаются одинаковым образом через радиус Дебая и плазменный параметр:

$$l_{\text{ee}} \sim l_{\text{ii}} \sim \frac{r_D}{\mu}. \quad (6.27)$$

Отношение же коэффициентов диффузии и соответствующих времен релаксации зависит, напротив, от отношения масс электронов и ионов:

$$\frac{D_e}{D_i} \sim \frac{v_{T_e}}{v_{T_i}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \gg 1, \quad (6.28)$$

$$\frac{\tau_{D_e}}{\tau_{D_i}} \sim \frac{D_i}{D_e} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1. \quad (6.29)$$

Мы видим, что диффузионное время релаксации электронов значительно меньше соответствующего временного интервала для ионов. Это дает основание выделить два этапа в установлении равновесного распределения частиц и поля.

Таково же положение и в теории слабоионизованной плазмы. Там наличие малого параметра, определяемого отношением масс электронов и ионов, используется для выделения более медленного процесса, обусловленного лишь диффузией ионов. Это так называемая *амбиоплярная диффузия*. При этом процесс релаксации к равновесному состоянию описывается линейным уравнением диффузии. Покажем, что аналогичный процесс возможен и в полностью ионизованной плазме. Благодаря существенному различию времен диффузионной релаксации электронов и ионов, можно выделить два этапа релаксации к равновесному состоянию.

На первом этапе за время диффузии электронов τ_{D_e} происходит релаксация электронов и для них устанавливается распределение, удовлетворяющее стационарному уравнению (6.25) при $a = e$. В результате электроны успевают "подстраиваться" под ионы и для них устанавливается распределение Больцмана. Таким образом, на этапе "быстрой" релаксации выравниваются концентрации электронов и ионов — плазма становится *квазинейтральной*. Они определяются следующим выражением:

$$n_e(r, t) = n_i(r, t) = n \exp \left[-\frac{e_a \varphi(r, t)}{k_B T} \right]. \quad (6.30)$$

Таким образом, сама концентрация ионов при этом измениться не успевает — распределение ионов, а следовательно, и электронов, остается еще неравновесным, отличным от средней концентрации n . Вследствие этого электрическое поле еще отлично от нуля. Из последней формулы следует, что электрический потенциал выражается через функцию $n_i(r, t)$:

$$e_a \varphi(r, t) = -k_B T \ln \frac{n_i(r, t)}{n}. \quad (6.31)$$

Подставляем это выражение в диффузионное уравнение (6.25) для концентрации ионов. В результате приходим к выводу, что на втором этапе релаксации эволюция ионов описывается уравнением *амбиоплярной диффузии в полностью ионизованной плазме*:

$$\frac{\partial n_i(r, t)}{\partial t} = 2D_i \Delta n_i(r, t). \quad (6.32)$$

Это уравнение и формула (6.31) описывают временную эволюцию распределения частиц и поля к равновесному состоянию.

Естественно, что время релаксации по этому уравнению зависит от характерного масштаба задачи L ($\tau_{D_i} \sim L^2/D_i$). Наименьшее значение L определяется радиусом Дебая. Даже при этом условии процесс амбиоплярной диффузии является "медленным". Это следует из соотношений (6.29) для коэффициентов диффузии и соответствующих времен релаксации. Мы видим, что характерное время на втором этапе в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз больше, чем на первом.

Напомним, что при расчете сделаны два допущения: температура и распределение Максвелла по скоростям в процессе временной эволюции неизменны. Такое приближение не всегда может быть оправдано. Так, при расчете электрической проводимости результат, основанный на локальном распределении Максвелла, примерно в 2 раза меньше, чем при более точном расчете Спитцера. Соответствующее уточнение может быть проведено и при расчете амбиоплярной диффузии.

6.3.5. Свойства интеграла столкновений Ландау. Напомним, что свойства интегралов столкновений Балеску – Ленарда и Ландау подобны общим свойствам интеграла столкновений Больцмана в кинетической теории газов.

Рассмотрим интеграл

$$I(r, t) = \sum_a n_a \int \varphi_a(p) I_a^{(v)}(r, p, t) dp. \quad (6.33)$$

Подставим в правую часть выражение (6.8), проинтегрируем по частям по p и произведем симметризацию по переменным (ap) и (bp') . В результате получим выражение, из которого следуют равенства

$$I(r, t) = \sum_a n_a \int \varphi_a(p) I_a^{(v)}(r, p, t) dp = 0$$

при $\varphi_a(p) = 1, p, \frac{p^2}{2m_a}$. (6.34)

Эти свойства обеспечивают для замкнутой системы выполнение законов сохранения вещества, полной энергии и полного импульса.

6.3.6. Н-теорема при пространственно однородном распределении плазмы. Функционал Ляпунова. Если функция $\varphi_a(p)$ выбрана в виде

$$\varphi_a(p) = -k_B \ln f_a, \quad (6.35)$$

то, используя обозначение

$$A = \frac{\partial \ln f_a}{\partial p} - \frac{\partial \ln f_b}{\partial p'}, \quad (6.36)$$

можем переписать выражение (6.33) в виде

$$I(r, t) = k_B \sum_{ab} D_{as} \int \left\{ (v - v')^2 A^2 - [(v - v')A]^2 \right\} f_a f_b dp dp'. \quad (6.37)$$

Поскольку подынтегральное выражение положительно для произвольных функций распределения, то имеем следующее свойство:

$$I(r, t) \geq 0 \quad \text{для} \quad \varphi_a(p) = -k_B \ln f_a. \quad (6.38)$$

Знак равенства отвечает равновесному состоянию, когда интеграл столкновений $I_a^{(v)}$ равен нулю.

Свойство (6.38) служит основой доказательства Н-теоремы Больцмана для разреженной пространственно однородной плазмы. Действительно, для этого случая с помощью кинетического уравнения, в котором теперь отличен от нуля лишь один интеграл столкновений $I_a^{(v)}(p, t)$ (см. (6.14)), можно установить, что суммарная энтропия плазмы

$$S(t) = -k_B V \sum_a n_a \int \ln(n_a f_a) f_a dp \quad (6.39)$$

для замкнутой системы в процессе временной эволюции либо возрастает, либо остается неизменной, т.е.

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (6.40)$$

Знак равенства соответствует равновесному состоянию.

Как и для разреженного газа, в случае пространственно однородной плазмы Н-теорему можно сформулировать в виде неравенств для функционала Ляпунова, который определяется разностью энтропий равновесного и неравновесного состояний

$$A_S = S_0 - S(t). \quad (6.41)$$

С учетом условий нормировки функций распределения выражение (6.41) можно представить в виде

$$A_S = S_0 - S(t) = \sum_a n_a \int \ln \frac{f_a(r, p, t)}{f_a^{(0)}(p)} f_a(r, p, t) dr dp \geq 0. \quad (6.42)$$

Неотрицательность интеграла устанавливается с помощью неравенства $\ln a \geq 1 - 1/a$ при $a = f_a/f_a^{(0)}$.

Величина A_S представляет собой функционал Ляпунова лишь при условии, что в процессе временной эволюции для производной функции A_S справедливо противоположное неравенство

$$\frac{d}{dt} A_S = \frac{d}{dt} (S_0 - S(t)) \leq 0, \quad (6.43)$$

которое является прямым следствием результата (6.40), выражающего Н-теорему Больцмана для плазмы.

Таким образом, для пространственно однородной плазмы при равном нулю среднем электрическом поле Н-теорему можно свести к утверждению существования функционала Ляпунова, который определяется разностью значений энтропии равновесного и неравновесного состояний. Такая формулировка является более общей. Действительно, в ней содержится не только утверждение о возрастании энтропии в процессе временной эволюции к равновесному состоянию, но также и утверждение, что равновесное состояние устойчиво (устойчивость по Ляпунову). При этом существенно, что переход к такой формулировке возможен лишь благодаря условию (6.41) — условию сохранения полной средней энергии частиц в процессе эволюции к равновесному состоянию.

Для пространственно неоднородной плазмы при наличии среднего электрического поля средняя энергия в процессе эволюции не сохраняется. По этой причине Н-теорема Больцмана перестает быть справедливой и функционал Ляпунова, определяемый разностью энтропий, уже не существует. Вследствие этого возникает проблема поиска иного функционала Ляпунова. Она возникала и в кинетической теории газа. Такой функционал существует. Однако он определяется разностью не энтропий, а соответствующим образом определенных свободных энергий.

На основе уравнения баланса локальной энтропии можно найти выражение для производства и потока энтропии и, в частности, дать определение вектора теплового потока в электрон-ионной разреженной плазме через градиент энтропии.

Отметим, наконец, что приведенные выше свойства интеграла столкновений используются при выводе уравнений газовой динамики для плазмы.

Вернемся теперь к вопросу о физической природе затухания Ландау. Мы увидим, что на основе сформулированного выше обобщенного кинетического уравнения можно дать иное представление о сущности этого одного из интереснейших явлений физики плазмы.

7. Роль столкновений в бесстолкновительной плазме

7.1. Что же такое бесстолкновительная плазма?

Вернемся к разделу 5.4. Будем, как и раньше, через L , T обозначать характерные параметры задачи. Рассмотрим, как и в кинетической теории газов, два предельных случая (см. § 7, гл. 9 в [5] и раздел 6.6 в [33]).

Один из них отвечает в кинетической теории приближению свободномолекулярного течения. Для разреженной полностью ионизованной плазмы такие течения имеют место при выполнении двойных неравенств

$$\tau_{ph}^{(a)} \ll T \ll \tau_a; \quad l_{ph}^{(a)} \ll L \ll l_a. \quad (7.1)$$

Первая пара неравенств дает возможность использовать приближение сплошной среды. Вторая пара неравенств позволяет в нулевом приближении по соответствующим малым параметрам использовать понятие "бесстолкновительная плазма".

В этом приближении релаксация, обусловленная столкновениями, в расчет не принимается — релаксационные масштабы τ_a , l_a бесконечны. Это дает основание считать в кинетических уравнениях для функций $f_a(r, p, t)$ интегралы столкновений равными нулю. В результате мы приходим к системе уравнений Власова для полностью ионизованной кулоновской плазмы. Таким образом, применимость уравнений Власова ограничена набором двойных неравенств.

Обратимость уравнений Власова проявляется, в частности, в том, что энтропия плазмы в этом приближении остается неизменной. Иными словами, по уравнению Власова заданная в начальный момент неопределенность состояния — степень хаотичности в процессе эволюции (при условии замкнутости) остается неизменной.

В гидродинамике подобным свойством обладает уравнение Эйлера, в котором, в отличие от более общего уравнения Навье–Стокса, диссипативные процессы (за счет вязкости и теплопроводности) считаются несущественными. Формально переход к уравнению Эйлера осуществляется путем предельного перехода $\nu \rightarrow 0$. Здесь ν — коэффициент вязкости. Такой переход, однако, качественно меняет как математическую структуру уравнения, так и физическое его содержание.

Изменение математической структуры связано с некорректностью предельного перехода, когда к нулю стремится коэффициент при старшей (второй в уравнении Навье–Стокса) производной. С физической точки зрения такой переход означает стремление к бесконечности числа Рейнольдса $Re = UL/\nu$. В этом приближении ламинарные течения, для описания которых и предназначено уравнение Эйлера, оказываются невозможными.

Имеется и иной физический аргумент против такого предельного перехода. Напомним, что коэффициент вязкости связан с тепловой скоростью и длиной свободного пробега соотношением

$$\nu \sim v_T l, \quad l \sim \frac{1}{nr_0^2} = \frac{r_0}{\varepsilon}. \quad (7.2)$$

Таким образом, нулевому значению коэффициента вязкости отвечает нулевое значение длины свободного пробега или, что эквивалентно, бесконечное значение

параметра плотности. Такое состояние для разреженного газа, естественно, невозможно.

Можно, разумеется, возразить, что уравнение Эйлера, несмотря на столь "жесткие" ограничения, все же широко используется в гидродинамике для решения многих задач. Это возможно лишь для ограниченной области масштабов. Выход за пределы этой области приводит ко многим известным парадоксам.

Подобная же ситуация имеет место и для уравнения Власова. Оно широко используется, например, в электронике. На его основе проводятся многочисленные расчеты различных процессов в термоядерных установках, например в токамаках. И все же использование бесстолкновительного приближения — описание неравновесных процессов в сплошной среде на основе обратимых уравнений Власова не является оправданным.

Во всех реальных задачах производится фактически подмена обратимых уравнений более общими необратимыми. Такая подмена скрывается "за завесой" математического формализма. Именно так обстояло дело в классической работе Ландау "О колебаниях электронной плазмы", опубликованной в 1946 г. В последующих физических работах математическая "завеса" сменяется "физической завесой". Затухание Ландау при этом трактуется как обратимый процесс, как результат резонансного взаимодействия частиц и поля в бесстолкновительной плазме. Об этом уже говорилось во введении. При этом предается забвению тот фундаментальный факт, что само понятие резонанса имеет смысл лишь в диссипативной системе. Это с предельной четкостью было сформулировано в приведенном выше отрывке из курса "Лекции по колебаниям", который был прочитан Л.И. Мандельштамом на физическом факультете Московского университета еще в 1930 г.

Таким образом, для описания, например, резонансных явлений при взаимодействии частиц и плазменных волн, а также в теории нелинейных волновых процессов обратимые уравнения Власова недостаточны и необходимо использовать более общие диссипативные уравнения. При этом надо иметь в виду, что возможны две предельные ситуации, в которых источники диссипации должны учитываться по-разному. Рассмотрим их.

7.2. Свободномолекулярные течения в полностью ионизованной ограниченной плазме

Предположим, что выполнены двойные неравенства (7.1). Это приводит нас к уравнениям Власова (5.15). Однако сами по себе эти уравнения еще недостаточны для описания явлений в плазме. Необходимо дополнить их начальными и граничными условиями.

Конкретизируем смысл характерных параметров.

Допустим, что состояние плазмы является стационарным и плазма ограничена. Пусть, например, имеет место поток плазмы в трубе. При этом за характерный параметр примем радиус трубы R . Таким образом, $L \sim R$. Тогда радиус трубы много больше радиуса Дебая и, следовательно, много больше радиуса экранирования плазмой внешнего поля. Это дает основание считать среднее поле в плазме (при стационарном течении плазмы) равным нулю. В результате кинетическое уравнение принимает вид

$$v \frac{\partial f_a}{\partial r} = 0. \quad (7.3)$$

Оно совпадает с соответствующим уравнением для свободномолекулярного течения газа (см. § 7, гл. 9 в [5] и раздел 6.6 в [33]). Его также надо дополнить граничным условием, которое существенно зависит от характера взаимодействия заряженных частиц с внутренней поверхностью трубы. Поскольку все реальные граничные условия диссипативны, то и (7.3) с реальным граничным условием описывает диссипативный процесс.

Предположим, как и в случае свободномолекулярного течения в газе, что заряженные частицы отражаются от стенки диффузно. Тогда масса плазменного потока через трубу определяется формулой, которая по форме совпадает с соответствующим выражением для течения Пуазейля. Основное различие состоит в замене длины свободного пробега (в выражении (7.2) для коэффициента вязкости) радиусом трубы: $l \rightarrow R$. В результате двойное неравенство (7.1) для параметров длины заменяется одним неравенством

$$l_{\text{ph}}^{(a)} \ll L \sim R, \quad l_a \rightarrow R. \quad (7.4)$$

Диссипативные граничные условия для свободномолекулярного течения плазмы можно учесть путем введения в кинетическое уравнение Власова некоторого эффективного интеграла столкновений. В результате задача описания неравновесных процессов и здесь сводится к решению соответствующего диссипативного кинетического уравнения, однако с некоторым эффективным интегралом столкновений.

Итак, обратимые уравнения Власова недостаточны для описания неравновесных процессов в ограниченной плазме даже тогда, когда длина свободного пробега значительно превышает характерные размеры системы. Это вновь возвращает нас к диссипативному кинетическому уравнению. Однако имеется и существенная разница. Именно, в эффективном интеграле столкновений длина релаксации определяется не длиной свободного пробега частиц плазмы, а характерным размером системы.

Остался открытым вопрос о том, насколько бесстолкновительное приближение может быть полезным при описании неравновесных процессов в неограниченной плазме.

7.3. Возможно ли бесстолкновительное приближение в неограниченной плазме?

В неограниченной плазме длина и время свободного пробега имеют конечные значения вследствие конечности плотности частиц и температуры. В качестве характерных параметров T и L могут выступать параметры волновых процессов в плазме, например период собственных или вынужденных колебаний ω и длина волны λ . Это дает новую возможность определения понятия "бесстолкновительная плазма".

Такое название оправдано, если длина волны λ — характерная длина рассматриваемого процесса много меньше длины свободного пробега l_a . Надо, однако, принять во внимание и соответствующее соотношение временных параметров.

Естественно, казалось бы, считать плазму бесстолкновительной, если частота столкновений ν_a много меньше характерной частоты колебаний плазмы ω (время свободного пробега τ_a много больше периода колебаний). Таким образом, понятие "бесстолкновительная плазма" в неограниченной плазме предста-

вляется, казалось бы, оправданным при выполнении неравенств

$$l_{\text{ph}}^{(a)} \ll \lambda \ll l_a; \quad \tau_{\text{ph}}^{(a)} \ll \frac{1}{\omega} \ll \tau_a. \quad (7.5)$$

Однако, как уже неоднократно отмечалось выше, роль диссипации, возникающей за счет столкновений, может быть определяющей даже при выполнении сильных неравенств (7.1). Это имеет место всегда вблизи резонансов. По этой причине, например, затухание Ландау, которое, по широко распространенному мнению, не является диссипативным и тем самым не сопровождается ростом энтропии, на самом деле исчезает, если диссипативные члены считаются равными нулю в исходных уравнениях. Более подробному рассмотрению этого принципиального для теории плазмы вопроса и посвящен следующий раздел.

7.4. Столкновительная природа затухания Ландау

Обратим внимание еще на одно существенное обстоятельство, связанное с физической трактовкой затухания Ландау. Оно в какой-то мере оправдывает термин "бесстолкновительное затухание" для формулы Ландау. Вернемся к формуле (5.23) для диэлектрической проницаемости при конечных значениях диссипативной константы ν_a .

Рассмотрим снова случай электронной плазмы, когда масса ионов полагается равной бесконечности. Направим вектор k вдоль оси x и выполним интегрирование по двум компонентам импульса p_y и p_z . В результате получим выражение для диэлектрической проницаемости электронной плазмы при малом отклонении от равновесного состояния. Нам понадобится здесь выражение лишь для мнимой части этой комплексной функции.

Под интегралом в нем стоит произведение двух функций — линии Лоренца и распределения Максвелла. Ширины (дисперсии) этих функций для электронной плазмы определяются отношением скоростей v/k и v_T . Результат Ландау (5.30) следует в нулевом приближении по параметру v/kv_T , т.е. при бесконечно узком резонансе — при замене линии Лоренца на δ -функцию. Для электронной плазмы частота $\omega = \omega_L$, т.е. определяется частотой Ленгмюра, а коэффициент затухания $\gamma \ll \omega_L$ и, следовательно, длина волны $\lambda = 1/k$ много больше радиуса Дебая r_D . Таким образом, формула Ландау справедлива лишь при выполнении двух сильных неравенств

$$r_D \ll \lambda = \frac{1}{k} \ll \frac{v_T}{v} = l. \quad (7.6)$$

Левое неравенство обеспечивает малость коэффициента затухания Ландау, а также условие применимости приближения сплошной среды, так как радиус Дебая характеризует и размер ее точки (ср. с левым неравенством (7.5)). В связи с этим отметим, что в работе [3] рассмотрен и другой предельный случай коротких волн, когда выполняется неравенство $kr_D \gg 1$. Однако такие масштабы лежат в пределах точки сплошной среды и поэтому не играют роли в образовании среднего поля.

Вернемся к неравенствам (7.6). Правое из них показывает, что рассматриваемые длины волн много меньше длины свободного пробега — длины релаксации. Это и дает повод использовать для затухания Ландау термин "бесстолкновительное затухание".

Наконец, еще одно замечание.

При выводе формулы Ландау в уравнение Власова был введен малый диссипативный член — модельный интеграл столкновений (5.21). Он определяется постоянной частотой столкновений ν_a . В конечных формулах $\nu_a \rightarrow 0$ и результаты не зависят от частоты столкновений. Это, однако, лишь один из возможных способов введения диссипации в обратимое уравнение Власова — простейший способ регуляризации решения этого уравнения, которое содержит расходящиеся интегралы. Такого рода регуляризация не является однозначной процедурой. Физически обоснованный ее выбор может быть сделан лишь на основе кинетического уравнения. При этом, как мы увидим, константа ν_a заменяется функцией, которая при использовании обобщенного кинетического уравнения зависит как от скорости, так и от волнового числа. Это приводит к замене обычной линии Лоренца спектральной линией более сложной структуры

$$\frac{v(v, k)}{(\omega - kv)^2 + \nu^2(v, k)}. \quad (7.7)$$

Естественно, что в результате изменится не только условие применимости формулы для коэффициента затухания, но и физическая трактовка этого явления. Возникнут дополнительные основания для замены термина "бесстолкновительное затухание Ландау" на термин "столкновительное затухание Ландау". Для их выявления в разделе 9 мы обратимся к обобщенному кинетическому уравнению и конкретизируем его для случая электронной плазмы.

Прежде, однако, надо рассмотреть еще один принципиальный вопрос, который не возникает в традиционной кинетической теории, но становится весьма существенным при использовании обобщенного кинетического уравнения. Речь пойдет об изменении определения потоков вещества и электрического заряда при учете структуры сплошной среды

8. Законы сохранения вещества и заряда в кулоновской плазме

8.1. Поток вещества и средняя скорость в микроскопической теории

Напомним, что в качестве исходных уравнений теории полностью ионизованной кулоновской плазмы были использованы уравнения для микроскопической фазовой плотности каждой компоненты $N_a(r, p, t)$ и уравнения для микроскопической напряженности электрического поля $E^m(r, t)$.

Если система замкнута, то потоки вещества, импульса и энергии через поверхность, окружающую рассматриваемую систему, равны нулю. Этим условиям можно удовлетворить, если выполняются граничные условия по координатам

$$N_a(r, p, t)|_{r_\alpha = \pm\infty} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (8.1)$$

и аналогичное граничное условие в пространстве импульсов

$$N_a(r, p, t)|_{p_\alpha = \pm\infty} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (8.2)$$

Через микроскопическую фазовую плотность можно выразить более простые микроскопические характеристики, например плотность вещества $\rho_a^m(r, t)$ и плотность потока вещества $J_a^m(r, t)$ каждой компоненты плазмы:

$$\rho_a^m(r, t) = m_a \int N_a(r, p, t) dp, \quad (8.3)$$

$$J_a^m(r, t) = \rho_a^m(r, t) u_a^m(r, t) = m_a \int v N_a(r, p, t) dp. \quad (8.4)$$

Второе из этих выражений можно рассматривать как определение средней микроскопической скорости в координатном пространстве $u_a^m(r, t)$. Очень существенно для дальнейшего, что здесь даны фактически *два независимых определения средней скорости*. Одно из них — левое равенство — через поток вещества. Будем называть его *гидродинамическим*. Второе — правое равенство — выражает среднюю скорость через первый момент импульса $p = m_a v$ микроскопической фазовой плотности $N_a(r, p, t)$. Будем называть его *статистическим* определением скорости $u_a^m(r, t)$. В микроскопической теории оба определения, естественно, эквивалентны, так как они являются прямым следствием определения скорости в механике.

Действительно, на микроскопическом уровне уравнение непрерывности вещества имеет вид

$$\frac{\partial \rho_a^m(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial J_a^m(r, t)}{\partial r} = 0. \quad (8.5)$$

В то же время уравнение для плотности $\rho_a^m(r, t)$ может быть получено с помощью уравнения для $N_a(r, p, t)$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial \rho_a^m(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a^m(r, t) u_a^m(r, t)}{\partial r} = 0. \quad (8.6)$$

При этом использовано статистическое определение средней скорости. Из сопоставления двух последних уравнений и следует вывод об эквивалентности двух определений скорости $u_a^m(r, t)$.

Напомним и микроскопические определения плотности электрического заряда и тока:

$$q^m(r, t) = \sum_a e_a \int N_a(r, p, t) dp = \sum_a e_a n_a^m(r, t), \quad (8.7)$$

$$j^m(r, t) = \sum_a e_a \int v N_a(r, p, t) dp = \sum_a e_a n_a^m(r, t) u_a^m(r, t). \quad (8.8)$$

Плотность электрического тока для каждой компоненты

$$j_a^m(r, t) = e_a n_a^m(r, t) u_a^m(r, t) \quad (8.9)$$

и, следовательно, пропорциональна произведению микроскопической плотности и скорости.

Теперь можно записать микроскопическое уравнение непрерывности для плотности электрического заряда. Оно следует из уравнения непрерывности (8.5) и имеет вид

$$\frac{\partial q^m(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial j^m(r, t)}{\partial r} = 0. \quad (8.10)$$

Все приведенные в этом разделе функции и уравнения являются прямым следствием уравнений движения.

Возможен и обратный переход к уравнениям движения частиц. Они инвариантны по отношению к преобразованию

$$t \rightarrow -t, \quad r_i \rightarrow r_i, \quad p_i \rightarrow -p_i, \quad (8.11)$$

и, следовательно, описываемое ими движение является обратимым. Можно, таким образом, сказать, что уравнения движения обладают *временной симметрией обратимых процессов*.

При преобразовании (8.11) микроскопическая фазовая плотность и микроскопическая напряженность поля также обладают временной симметрией обратимых процессов:

$$N_a(r, p, t) = N_a(r, -p, -t); \quad E^m(R, t) = E^m(r, -t). \quad (8.12)$$

При этом надо, конечно, иметь в виду, что понятие "направление времени" есть понятие более первичное, чем понятия "обратимость" и "необратимость". Замена $t \rightarrow -t$ в природе невозможна. Речь может идти лишь о "возвращении домой" — о возвращении частиц через удвоенный промежуток времени $2(t - t_0)$ в исходные положения, но с обратными скоростями при условии, что в момент $t - t_0$ производится изменение знаков скоростей частиц. С учетом этого вместо (8.11) следует использовать равенства

$$N_a(r, p, t_0) = N_a(r, -p, 2(t - t_0)); \\ E^m(R, t_0) = E^m(r, 2(t - t_0)). \quad (8.13)$$

Приведенные определения средней скорости представляются столь очевидными, что они переносятся (без достаточных на то оснований) в кинетическую теорию и в гидродинамику. Тем самым предполагается, что они остаются неизменными и при описании необратимых процессов.

Прежде чем рассмотреть необратимые уравнения для усредненных макроскопических функций, убедимся в эквивалентности двух форм записи микроскопических уравнений поля для кулоновской плазмы, которые следуют из уравнений Лоренца для микроскопических напряженностей поля. До сих пор для микроскопического поля $E^m(r, t)$ использовались уравнения (2.5). Уравнения для поля $E^m(r, t)$ могут быть записаны в иной форме:

$$\text{rot } E^m = 0, \quad \frac{\partial E^m}{\partial t} = -4\pi \sum_a e_a \int v N_a(r, p, t) dp. \quad (8.14)$$

Обе формы записи эквивалентны в силу уравнения непрерывности (8.10) для плотности заряда.

Итак, существуют две эквивалентные формы записи уравнений для микроскопической фазовой плотности $N_a(r, p, t)$ и микроскопической напряженности поля $E^m(r, t)$. Возникает естественный вопрос: сохраняется ли эта эквивалентность при переходе к кинетическому описанию?

В традиционной кинетической теории плазмы такого вопроса удастся избежать. Это оказывается возможным благодаря тому, что при использовании кинетического уравнения Ландау необратимость не мешает переносу приведенных выше двух определений скорости $u_a^m(r, t)$ и на определение средней скорости $u_a(r, t)$. Однако ситуа-

ция меняется при использовании обобщенного кинетического уравнения.

8.2. Поток вещества и средняя скорость в кинетической теории

Кинетические уравнения являются диссипативными. По этой причине функции распределения $f_a(r, p, t)$ в общем случае не обладают временной симметрией обратимых процессов. На этом вопросе следует остановиться более подробно.

Напомним, что функция распределения $f_a(r, p, t)$ и средняя напряженность поля $E(r, t)$ связаны с соответствующими микроскопическими функциями $N_a(r, p, t)$ и $E^m(r, t)$ соотношениями (3.1). Перепишем их еще раз:

$$n_a f_a(r, p, t) = \langle N_a(r, p, t) \rangle; \quad E(r, t) = \langle E^m(r, t) \rangle. \quad (8.15)$$

Итак, функция распределения определяется средним значением по ансамблю Гиббса микроскопической фазовой плотности. Последняя, как мы знаем, обладает временной симметрией обратимого процесса. Почему же при усреднении эта симметрия нарушается?

Это связано с определением самого понятия ансамбль Гиббса для неравновесных процессов. Напомним, что Гиббс использовал усреднение по ансамблю одинаковых систем лишь для равновесного состояния и для квазистатически обратимых процессов.

При построении статистической теории возможны два различных определения ансамбля Гиббса для неравновесных процессов (см. [33]).

1. Микросостояния систем ансамбля неодинаковы из-за того, что начальные значения переменных задаются неточно — дается лишь функция распределения начальных условий для частиц и поля. При этом само уравнение для многочастичной функции распределения — уравнение Лиувилля или уравнение для микроскопической фазовой плотности и микроскопического поля остаются неизменными. Однако при этом усреднение по начальным данным оставляет неизменной временную симметрию обратимых процессов. По этой причине при выводе необратимых кинетических уравнений в теории ББГКИ производится, как правило, неявно переопределение ансамбля Гиббса для неравновесных процессов.

2. На первом шаге перехода от обратимых уравнений к необратимым производится сглаживание по физически бесконечно малым объемам — по объемам точек сплошной среды. Такое сглаживание оправдано благодаря динамической неустойчивости движения частиц и, как ее следствию, стохастизирующему действию даже весьма малых неконтролируемых внешних воздействий. Различие микросостояний систем ансамбля Гиббса при этом обусловлено отсутствием информации о движении частиц в пределах точек сплошной среды. Необратимость кинетических уравнений в такой ситуации становится неизбежной.

Таким образом, имеется возможность определения ансамбля Гиббса для неравновесных процессов. При таком выборе ансамбля определение (8.15) приводит к функциям распределения, временная симметрия которых отлична от временной симметрии обратимых процессов.

Представим введенную таким способом функцию распределения в виде суммы двух частей:

$$f_a(r, p, t) = f_a^{(\text{dyn})}(r, p, t) + f_a^{(\text{dis})}(r, p, t), \quad (8.16)$$

где первая — динамическая (dyn) имеет временную симметрию обратимого процесса:

$$f_a^{(\text{dyn})}(r, p, t_0) = f_a^{(\text{dyn})}(r, -p, 2(t - t_0)), \quad (8.17)$$

а вторая — диссипативная (dis) не имеет симметрии обратимого процесса:

$$f_a^{(\text{dis})}(r, p, t_0) \neq f_a^{(\text{dis})}(r, -p, 2(t - t_0)). \quad (8.18)$$

Условие нормировки выполняется, естественно, лишь для суммарной функции распределения:

$$n_a \int f_a(r, p, t) dp dr = N. \quad (8.19)$$

Обратимся теперь к вопросу определения средней скорости в кинетической теории.

Плотность вещества описывается выражением

$$\rho_a(r, t) = \rho_a \int f_a(r, p, t) dp; \quad \rho_a = m_a n_a, \quad (8.20)$$

а средняя скорость — равенством

$$\rho_a(r, t) u_a(r, t) = \rho_a \int v f_a(r, p, t) dp. \quad (8.21)$$

Поясним смысл этого выражения. Учитывая определение плотности, (8.21) можно переписать в виде

$$\rho_a \int [v - u_a(r, t)] f_a(r, p, t) dp = 0. \quad (8.22)$$

Определение скорости $u_a(r, t)$ равенством (8.21) означает, что она представляет собой первый момент скорости для функции распределения $f_a(r, p, t)$. На этом основании определение средней скорости равенством (8.21) можно назвать *статистическим*.

Напомним, что в микроскопической теории имеются два эквивалентных определения скорости $u_a^m(r, t)$, которые представляются равенствами (8.4). Левое выражает среднюю скорость через поток вещества, а второе — через микроскопическую фазовую плотность (через микроскопическое распределение).

При описании необратимых процессов наряду со статистическим можно дать определение $u_a(r, t)$ через поток вещества:

$$J_a(r, t) = \rho_a(r, t) u_a(r, t), \quad (8.23)$$

которое можно назвать гидродинамическим.

Однако эквивалентность этих двух определений средней скорости при необратимых процессах в сплошной среде не является, разумеется, очевидной. Если эти определения не эквивалентны, то какое из них более естественно с физической точки зрения?

Напомним, что этот вопрос уже рассматривался в гл. 13, 14 работы [33]. Мы видели, что при использовании уравнения Больцмана кинетическое и гидродинамическое определения средней скорости $u_a(r, t)$ действительно эквивалентны. Таково же положение и в теории плазмы при использовании кинетических уравнений Власова, Ландау и Балеску — Ленарда.

При использовании же обобщенного кинетического уравнения эта эквивалентность нарушается и связь потока вещества и средней скорости определяется более общим соотношением

$$J_a(r, t) = \rho_a(r, t) u_a(r, t) + J_a^{(\text{dis})}(r, t). \quad (8.24)$$

Индекс dis в дополнительном члене подчеркивает, что он полностью определяется диссипативными процессами — обращается в нуль, когда макроскопические процессы описываются обратимыми уравнениями. В гидродинамике примером может служить уравнение Эйлера.

8.3. Уравнение непрерывности для плазмы

Вернемся к обобщенному кинетическому уравнению (6.12). По сравнению с кинетическим уравнением Ландау оно содержит дополнительный диссипативный член, который отражает структуру сплошной среды и определяется "подстройкой" микроскопической функции распределения к микроскопической функции, сглаженной по объему точки сплошной среды.

Наличие дополнительного члена, казалось бы, усложняет и без того чрезвычайно сложную задачу решения кинетического уравнения. Однако учет диссипации, обусловленной перераспределением частиц в пространстве, делает кинетическое уравнение более регулярным и, в частности, позволяет более полно учесть роль необратимости при определении потока вещества и потока тепла.

Напомним еще раз, что в теории газов для перехода от кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики достаточно было предположить, что функция распределения представляет собой локальное распределение Максвелла, — предположить существование локального термодинамического равновесия.

Допустим, что функции распределения электронов и ионов определяются локальным распределением Максвелла (5.28). Чтобы получить уравнение для плотности, надо умножить кинетическое уравнение (6.12) на постоянную $\rho_a = m_a n_a$ и выполнить интегрирование по импульсам. При этом вклад от интеграла Ландау равен нулю. Рассмотрим вклады остальных членов.

Первый член дает временную производную плотности. Второй член при локальном распределении Максвелла приводит к выражению $\text{div } \rho_a u_a$ и определяет вклад динамической части потока вещества. Наконец, второй диссипативный член определяет диссипативную часть потока вещества. В результате приходим к уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_a(r, t)}{\partial t} + \text{div } J_a(r, t) = 0. \quad (8.25)$$

Поток вещества определяется здесь суммой трех вкладов:

$$J_a(r, t) = \rho_a(r, t) u_a(r, t) - D_a \frac{\partial \rho_a(r, t)}{\partial r} + \frac{\tau_a}{m_a} e_a E(r, t) \rho_a(r, t). \quad (8.26)$$

Первый определяет конвективную (динамическую) часть потока вещества, второй — перенос вещества за счет самодиффузии и третий — за счет подвижности.

Коэффициент пространственной диффузии D_a связан с временем релаксации τ_a соотношением Эйнштейна:

$D_a = \tau_a k_B T / m_a$, поэтому достаточно дать определение одного из кинетических коэффициентов, например коэффициента пространственной диффузии D_a . Для этого напомним, что дополнительный диссипативный член (6.4) в обобщенном кинетическом уравнении (6.12) возник благодаря сглаживанию по физически бесконечно малым объемам соответственно для электронов и ионов (см. уравнение (4.6) и формулы (6.5)). При таком способе сглаживания коэффициенты пространственной диффузии D_a ($a = e, i$) характеризуют самодиффузию электронов и ионов. Тем самым времена релаксации τ_a определяются частотами электрон-электронных и ион-ионных столкновений.

Условием замкнутости системы является равенство нулю полного потока вещества через поверхность, окружающую плазму. В равновесном состоянии, которое возможно лишь при постоянном поле $E = -\text{grad } \varphi$, средняя скорость равна нулю, а распределение плотности определяется распределением Больцмана:

$$u_a = 0; \quad \rho_a(r) = \rho_a \exp \left[-\frac{e_a \varphi(r)}{k_B T} \right]. \quad (8.27)$$

Относительная роль динамического и диффузионного вкладов в полный поток вещества определяется диффузионным числом Рейнольдса

$$\text{Re}^D = \frac{uL}{D}. \quad (8.28)$$

Его можно представить как отношение двух характерных времен — времени диффузии τ_D и времени τ_{pas} прохождения потоком характерного расстояния L :

$$\text{Re}^D = \frac{\tau_D}{\tau_{\text{pas}}}; \quad \tau_D = \frac{L^2}{D}; \quad \tau_{\text{pas}} = \frac{L}{u}. \quad (8.29)$$

Теперь у нас все подготовлено для описания на основе обобщенного кинетического уравнения диффузионных и волновых процессов в электронной плазме.

9. Электронная плазма

9.1. Обобщенное кинетическое уравнение для электронной плазмы

Покажем, что учет пространственной диффузии позволяет выявить более полно условия, когда резонансы, возникающие при решении кинетического уравнения, являются узкими. Это дает возможность найти область существования столкновительного затухания Ландау.

Мы уже приводили аргументы, по которым затухание Ландау всегда является столкновительным. Так обстоит дело даже в ограниченной бесстолкновительной плазме, когда характерные размеры системы, например радиус трубы, меньше длины свободного пробега. Здесь речь пойдет о неограниченной плазме, во всяком случае, такой, когда размеры системы много больше длины свободного пробега. При этом возможны волновые процессы, для которых длины волн много больше длины свободного пробега, но много меньше характерных размеров системы:

$$l \ll \lambda \ll L. \quad (9.1)$$

При этих условиях, наряду с гидродинамическим малым параметром $\text{Kn} = l/L$ — числом Кнудсена, можно ввести и волновое число Кнудсена $\text{Kn}_\lambda = l/\lambda$, которое также является малым.

Напомним, что в теории газов переход от обобщенного кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики проводился без использования теории возмущений по числу Кнудсена (см. гл. 13, 14 в [33]). Для перехода к уравнениям газовой динамики достаточно было предположить, что функция распределения является локальным распределением Максвелла. Рассмотрим соответствующее приближение для электронной плазмы.

Полагаем, что функции $f_a(r, p, t)$ определяются локальными распределениями Максвелла. В этом приближении интегралы электрон-электронных и ион-ионных столкновений равны нулю.

Рассмотрим *электронную плазму*. Тем самым масса ионов считается бесконечной, и их роль сводится лишь к созданию положительно заряженного фона. Этим обеспечивается электрическая нейтральность плазмы в целом.

Функцию распределения электронов обозначим $f(r, p, t)$. В рассматриваемом приближении кинетическое уравнение (6.12) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + eE(r, t) \frac{\partial f}{\partial p} = I_{\text{ei}}^{(v)} + I^{(r)}. \quad (9.2)$$

Первый член в правой части определяется электрон-ионным взаимодействием, а второй — пространственной диффузией функции распределения электронов. Для электронной плазмы в приближении локального равновесия оба члена существенно упрощаются.

Поскольку роль ионов сводится лишь к созданию положительно заряженного фона, то функцию распределения ионов можно представить в виде δ -функции:

$$f_i(r, p, t) = \delta(p), \quad (9.3)$$

а функция распределения электронов представляется в виде локального распределения Максвелла:

$$nf(r, p, t) = \frac{n(r, t)}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[p - mu(r, t)]^2}{2mk_B T} \right\}. \quad (9.4)$$

Вернемся к интегралу столкновений Ландау (6.8). Для электронной плазмы второй член в правой части равен нулю, поскольку масса ионов полагается бесконечной, а в первом члене (с учетом вида функции распределения ионов (9.3)) можно выполнить интегрирование по импульсам ионов. В результате для интеграла электрон-ионных столкновений получаем относительно простое выражение:

$$I_{\text{ei}}^{(v)} = C_{\text{ei}} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(V_{ij}(v) \frac{\partial f(r, p, t)}{\partial p_j} \right). \quad (9.5)$$

Выражения для тензора V_{ij} и константы C_{ei} следуют из формул (6.9), (6.10). Теперь они записываются как

$$V_{ij}(v) = \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{|v|^3}; \quad V_{ij} v_j = v_i V_{ij} = 0, \quad (9.6)$$

$$C_{\text{ei}} = 2\pi e^4 nL \quad (\text{и ниже } D = nC_{\text{ei}}). \quad (9.7)$$

Интеграл столкновений $I_{ei}^{(v)}$ в рассматриваемом приближении линейно зависит от функции распределения электронов. Сама же она представляется теперь в виде локального распределения Максвелла (9.4). Это позволяет провести дальнейшее упрощение интеграла столкновений.

В следующем разделе на основе приведенного кинетического уравнения исследованы волновые процессы в электронной плазме. Естественно начать с анализа линейного приближения. Для этого достаточно рассмотреть кинетическое уравнение для малых отклонений от равновесного состояния. Будем равновесные функции отмечать индексом 0 и представим функцию распределения электронов и поле $E(r, t)$ в виде

$$f(r, p, t) = f_0(p) + f_1(r, p, t), \quad f_1 \ll f_0, \quad (9.8)$$

$$E(r, t) = E_1(r, t), \quad E_0 = 0. \quad (9.9)$$

Здесь $f_0(p)$ — распределение Максвелла:

$$f_0(p) = \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right). \quad (9.10)$$

Функция распределения $f(r, p, t)$ представляется в виде локального распределения Максвелла (9.4). Входящие в него газодинамические функции при малом отклонении от равновесного состояния могут быть записаны как

$$\begin{aligned} n(r, t) &= n + n_1(r, t); \quad T(r, t) = T + T_1(r, t); \\ u(r, t) &= u_1(r, t), \quad u_0 = 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Отсюда следует, что функция $f_1(r, p, t)$ представляется в виде линейной комбинации трех функций распределения:

$$f_1(r, p, t) = f_1^{(n)}(r, p, t) + f_1^{(u)}(r, p, t) + f_1^{(T)}(r, p, t). \quad (9.12)$$

В правой части каждый член пропорционален соответственно одной из функций $n_1(r, t)$, $u_1(r, t)$, $T_1(r, t)$, а также распределению Максвелла $f_0(p)$. Это и позволяет провести дальнейшее упрощение выражения (9.5) для интеграла столкновений.

С учетом свойств тензора $V_{ij}(v)$, которые выражаются последними равенствами в (9.6), члены, пропорциональные функциям $n_1(r, t)$, $T_1(r, t)$, не дают вклада в интеграл столкновений (9.5). Таким образом, достаточно учесть лишь вклад, пропорциональный функции $u(r, t)$ (индекс 1 опускаем). Это дает основание представить неравновесную часть функции распределения в виде

$$f_1(r, p, t) = \frac{\mathbf{u}(r, t) \mathbf{v}}{v_T^2} f_0(v), \quad (9.13)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор гидродинамической скорости, f_0 — распределение Максвелла — функция, зависящая лишь от модуля скорости.

При подстановке функции распределения (9.8) в выражение (9.5) для интеграла столкновений вклад от функции $f_0(p)$ равен нулю. Таким образом, достаточно произвести вычисления при подстановке в выражение (9.5) функции распределения $f_1(r, p, t)$. Используя равен-

ство (9.13), после несложных преобразований получаем следующее выражение для интеграла столкновений:

$$I_{ei}(r, p, t) = -v_{ei}(v) f_1^{(u)}(r, p, t). \quad (9.14)$$

При этом частота столкновений зависит от скорости и определяется выражением

$$v_{ei}(v) = \frac{4\pi e^4 n}{m^2 v^3} L. \quad (9.15)$$

Здесь, как и выше, L — кулоновский логарифм. Мы видим, что частота столкновений быстро убывает с ростом скорости. Такая зависимость оказывается весьма существенной при описании волновых свойств электронной плазмы. Это будет показано в следующем разделе.

Рассмотрим выражение для второго диссипативного члена в кинетическом уравнении для электронной плазмы. В общем случае он определяется выражением (6.4), которое сохраняется и для электронной плазмы (убираем лишь индекс a),

$$I^{(r)}(r, p, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{m} e E f \right). \quad (9.16)$$

В линейном приближении оно упрощается и принимает вид

$$I^{(r)}(r, p, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) - e \frac{\tau}{m} \frac{\partial E}{\partial r} f_0(p). \quad (9.17)$$

В последнем члене учтено, что в равновесном состоянии поле равно нулю — нет внешнего статического поля. Коэффициент самодиффузии электронов связан с частотой электрон-электронных столкновений $\nu_{ee} = 1/\tau$ соотношением Эйнштейна $D = \tau k_B T / m$ (ср. с (6.5)).

Итак, обобщенное кинетическое уравнение для электронной плазмы в линейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial r} + e E(r, t) \frac{\partial f_0}{\partial p} = I_{ei}^{(v)} + I^{(r)}. \quad (9.18)$$

Интегралы столкновений в нем определяются выражениями (9.14), (9.15) и (9.17). Его надо дополнить соответствующими уравнениями для поля:

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 4\pi e n \int f_1(r, p, t) dp. \quad (9.19)$$

В результате мы имеем замкнутую линеаризованную систему уравнений для неравновесной составляющей функции распределения электронов и электрического поля для состояний, близких к равновесному.

9.2. Уравнение непрерывности для заряда. Электрический ток

Используем другую форму записи уравнений поля для электронной плазмы:

$$\text{rot } E = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a(r, p, t) dp \equiv 4\pi j(r, t). \quad (9.20)$$

Здесь введено обозначение для вектора плотности электрического тока $j(r, t)$, причем для электронной плазмы

$$j(r, t) = q(r, t)u_a(r, t) - D_a \frac{\partial q(r, t)}{\partial r} + \frac{\tau_a}{m_a} e_a E(r, t) q(r, t). \quad (9.21)$$

Выражение (9.21) и определяет теперь плотность тока в уравнении поля (9.20). Оно же входит и в уравнение непрерывности плотности заряда:

$$\frac{\partial q(r, t)}{\partial t} + \text{div} j(r, t) = 0. \quad (9.22)$$

Итак, плотность электрического тока определяется не только конвективным переносом заряда, но также диффузией плотности заряда и подвижностью зарядов в электрическом поле. Изменение структуры выражения для тока, как и структуры самого кинетического уравнения, обусловлено учетом структуры сплошной среды в теории плазмы. Покажем, как эти изменения сказываются на волновых свойствах электронной плазмы. При этом откроется, в частности, возможность для иной физической интерпретации затухания Ландау.

Начнем с простейших частных случаев.

9.3. Самодиффузия в электронной плазме

Предположим, что средняя скорость равна нулю и температура постоянна. Интегрированием по импульсам из кинетического уравнения (9.18) получаем уравнение самодиффузии для функции $n_1(r, t)$:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_1}{\partial r^2} - en \frac{\tau}{m} \frac{\partial E(r, t)}{\partial r}, \quad (9.23)$$

которое надо решать совместно с уравнениями поля

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 4\pi en_1(r, t). \quad (9.24)$$

Эти уравнения являются частным случаем более общей системы диффузионных уравнений для электрон-ионной плазмы. Соответствующие уравнения для пространственно-временных компонент Фурье имеют вид

$$(-i\omega + Dk^2)n_1(\omega, k) = -ien \frac{\tau}{m} (kE(\omega, k)); \quad \tau \equiv \frac{1}{v}, \quad i(kE(\omega, k)) = 4\pi en_1(\omega, k). \quad (9.25)$$

Эта система уравнений сводится к одному уравнению для поля:

$$\varepsilon(\omega, k)(kE(\omega, k)) = 0. \quad (9.26)$$

Здесь введено обозначение комплексной диэлектрической проницаемости плазмы для диффузионного этапа релаксации:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{mv} \frac{1}{-i\omega + Dk^2}, \quad D = \frac{k_B T}{mv}. \quad (9.27)$$

Рассмотрим соответствующее дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\omega, k) = 0. \quad (9.28)$$

При $\omega = 0$

$$\text{Re } \varepsilon(\omega = 0, k) = 1 + \frac{1}{r_{De}^2 k^2} = 0, \quad \text{Im } \varepsilon(\omega = 0, k) = 0. \quad (9.29)$$

Здесь использовано обозначение для радиуса Дебая электронной плазмы.

Пусть поле направлено вдоль оси x . Тогда заданное на границе $x = 0$ поле экранируется на расстоянии порядка радиуса Дебая r_{De} .

9.4. Волновые свойства электронной плазмы. Столкновительное затухание Ландау

Итак, мы рассмотрели простейшую модель релаксации, когда диссипация обусловлена самодиффузией электронов плазмы. При этом характер диссипации не зависит от распределения электронов по скоростям. Постараемся теперь учесть это влияние.

Напомним, что решение обобщенного кинетического уравнения для электронной плазмы было задано в виде локального распределения Максвелла (9.4). Уравнения для входящих в него трех функций $\rho(r, t)$, $u(r, t)$, $T(r, t)$ — уравнения газовой динамики для электронов плазмы — могут быть получены на основе обобщенного кинетического уравнения (9.2). Для исследования волновых свойств плазмы их можно заменить линеаризованными уравнениями для функций $\rho_1(r, t)$, $u_1(r, t)$, $T_1(r, t)$. Уравнения для этих функций могут быть получены непосредственно из линеаризованного кинетического уравнения (9.18) с интегралами столкновений (9.14).

Однако кинетическое уравнение дает возможность учесть более полно распределение по скоростям, в частности влияние скоростей, много больших тепловой. Эти "детали" не могут быть учтены уравнениями газовой динамики — уравнениями для первых пяти моментов распределения частиц по скоростям. В связи с этим напомним, что именно "хвостом" распределения Максвелла определяется затухание Ландау.

Сузим задачу еще больше. Именно, будем использовать линеаризованное кинетическое уравнение (9.18) при условии, что локальное распределение Максвелла задается лишь одной функцией $\rho_1(r, t)$, а $u_1(r, t) = 0$ и $T_1(r, t) = 0$. Предполагаем тем самым, что средняя скорость электронов равна нулю, а температура постоянна. В результате линеаризованное кинетическое уравнение (9.18) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial r} + eE(r, t) \frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) - e \frac{\tau}{m} \frac{\partial E}{\partial r} f_0(p). \quad (9.30)$$

Здесь использовано выражение (9.17).

Отсюда путем интегрирования по импульсам находим линеаризованное уравнение непрерывности. С учетом равенства $u_1(r, t) = 0$ оно имеет вид

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_1}{\partial r^2} - en \frac{\tau}{m} \frac{\partial E(r, t)}{\partial r} \quad (9.31)$$

и совпадает с диффузионным уравнением (9.23). Рассмотрим ту дополнительную информацию, которая содержится в кинетическом уравнении.

Произведем в линейном кинетическом уравнении временное и пространственное разложение Фурье. В

результате получим систему уравнений для пространственно-временных компонент Фурье функции распределения и поля. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} [-i(\omega - kv) + Dk^2] f_1(\omega, k, p) = \\ = -eE(\omega, k) \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} - ie \frac{\tau}{m} (kE(\omega, k)) f_0(v), \\ [kE(\omega, k)] = 0; \quad i(kE(\omega, k)) = 4\pi en \int f_1(\omega, k, p) dp. \end{aligned} \quad (9.32)$$

В первом уравнении (9.32) все члены с функцией $f_1(\omega, k, p)$ сгруппированы в левой части. В правую часть отнесены члены, которые пропорциональны функции распределения $f_0(v)$ и напряженности электрического поля $E(\omega, k)$.

С помощью первого уравнения выразим функцию распределения $f_1(\omega, k, p)$ через напряженность электрического поля:

$$\begin{aligned} f_1(\omega, k, p) = \frac{-i}{(\omega - kv) + iDk^2} \times \\ \times \left[eE(\omega, k) \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} + ie \frac{\tau}{m} (kE(\omega, k)) f_0(v) \right]. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Решение системы уравнений для поля представим в виде

$$E(\omega, k) = -i \frac{k}{k^2} 4\pi en \int f_1(\omega, k, p) dp. \quad (9.34)$$

Подстановка выражения для функции $f_1(\omega, k, p)$ в правую часть последнего равенства позволяет записать уравнение для поля $E(\omega, k)$ в виде

$$\varepsilon(\omega, k)(kE(\omega, k)) = 0. \quad (9.35)$$

Здесь снова использовано выражение для диэлектрической проницаемости плазмы, но теперь с учетом распределения электронов по скоростям:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{k^2} \int k \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} \frac{dp}{(\omega - kv) + iDk^2} + \\ + \frac{4\pi e^2 n}{mv} \int \frac{i}{(\omega - kv) + iDk^2} f_0(v) dp. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Относительная роль произведения двух функций под интегралами характеризуется безразмерным параметром

$$\frac{v_T}{Dk} \sim \frac{v_{ee}}{Dk^2} \sim \frac{1}{kl} \sim \frac{\lambda}{l}. \quad (9.37)$$

Он определяет отношение "ширин" функций в формуле для $\varepsilon(\omega, k)$ — распределения Максвелла и спектральной линии Лоренца (по скоростям, частотам, длинам). Здесь, как и выше, l — длина свободного пробега, λ — длина волны.

Рассмотрим ряд частных случаев.

9.4.1. Неограниченная плазма. Большие числа Кнудсена: $\lambda \ll l$. Это условие соответствует бесстолкновительному волновому приближению для выделенной области значений длин волн (значений волновых чисел).

Именно в таком приближении в разделе 5.5.2 было получено выражение для коэффициента затухания Ландау. При этом ширина линии Лоренца определялась частотой столкновений v_{ee} или соответствующей скоростью v_{ee}/k . Вследствие этого линия Лоренца с увеличением k (с уменьшением длины волны) становилась уже.

Здесь же имеет место обратная ситуация — в нулевом приближении распределение Максвелла $f_0(v)$ можно заменить на δ -функцию:

$$f_0(v) \rightarrow \delta(v). \quad (9.38)$$

Это дает возможность в формуле (9.36) выполнить интегрирование по импульсам. В результате выражение для диэлектрической проницаемости принимает вид

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{mv} \frac{i}{\omega + iDk^2}, \quad D = \frac{k_B T}{mv} \quad (9.39)$$

и совпадает с формулой (9.27).

Таким образом, в нулевом приближении по параметру (9.37), т.е. без учета движения электронов плазмы, мы возвращаемся к результатам, которые были получены на основе диффузионного уравнения (9.23).

Заметим еще, что малость параметра (9.37) означает также, что частота столкновений в электронной плазме много меньше диффузионной ширины линии Dk^2 . Таким образом, "старый" термин "бесстолкновительное приближение" теперь меняет смысл — при фиксированном значении тепловой скорости диффузионная частота столкновений Dk^2 растет с ростом волнового числа k . Тем самым диссипация определяется не столкновениями, а самодиффузией.

Существенно также, что малость параметра (9.37) ограничена снизу. Это ограничение связано со структурой сплошной среды. Поскольку размер точки определяется радиусом Дебая, то рассматриваемое бесстолкновительное приближение справедливо при выполнении двойного неравенства

$$\frac{r_D}{l} \ll \frac{\lambda}{l} \ll 1. \quad (9.40)$$

Мы видим, что в рассматриваемом бесстолкновительном приближении мнимая часть определяется не затуханием Ландау, а диссипацией, обусловленной диффузией.

Рассмотрим теперь второй случай, когда имеет место затухание Ландау. Оно, однако, будет носить столкновительный характер.

9.4.2. Неограниченная плазма. Малые числа Кнудсена: $l \ll \lambda$. При этом условии ширина распределения Максвелла много больше ширины Dk линии Лоренца (в единицах скорости). В нулевом приближении по этому параметру в формуле (9.36) возможна замена

$$\frac{1}{(\omega - kv) + iDk^2} \rightarrow P \frac{1}{(\omega - kv)} - i\pi\delta(\omega - kv). \quad (9.41)$$

В результате получаем следующее выражение для действительной части диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{k^2} P \int k \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} \frac{dp}{\omega - kv} + \\ + \frac{4\pi e^2 n}{mv} \int \delta(\omega - kv) f_0(v) dp. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Последний член в этом выражении экспоненциально мал. Действительно, после интегрирования по p его можно представить в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_L \frac{1}{r_D k} \exp\left(-\frac{1}{2r_D^2 k^2}\right). \quad (9.43)$$

Поскольку для электронной плазмы выполняются два условия:

$$\omega \sim \omega_L, \quad kr_D \ll 1, \quad (9.44)$$

то сделанное предположение об экспоненциальной малости этого члена оправдано. В результате выражение для реальной части диэлектрической проницаемости упрощается:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{k^2} P \int k \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} \frac{dp}{\omega - kv}. \quad (9.45)$$

Для электронной плазмы оно совпадает с полученным ранее выражением (5.26).

Рассмотрим теперь соответствующее выражение для мнимой части диэлектрической проницаемости электронной плазмы. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k) = & -\frac{4\pi e^2 n}{k^2} \int \delta(\omega - kv) \left(k \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} \right) dp + \\ & + \frac{4\pi e^2 n}{mv} \int \frac{\omega - kv}{(\omega - kv)^2 + (Dk^2)^2} f_0(v) dp. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Первый член в правой части совпадает для электронной плазмы с выражением для затухания Ландау. Обозначим его $(\operatorname{Im} \varepsilon)_L$. Теперь, однако, в формуле $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k)$ имеется дополнительный член. Обозначим его $(\operatorname{Im} \varepsilon)_D$, так как его происхождение связано с наличием в кинетическом уравнении диффузионного диссипативного члена. Покажем, что он ограничивает область волновых чисел, для которой затухание Ландау является основным диссипативным членом.

Зафиксируем значение фазовой скорости ω/k и выделим область резонанса в распределении по скоростям

$$|\omega - kv| \sim Dk^2. \quad (9.47)$$

Сравним отношение двух вкладов в мнимую часть диэлектрической проницаемости:

$$\frac{(\operatorname{Im} \varepsilon)_L}{(\operatorname{Im} \varepsilon)_D} \sim \frac{\lambda^2}{r_D l}. \quad (9.48)$$

Мы видим, что относительная роль затухания Ландау определяется безразмерной комбинацией трех характерных длин. Пусть отношение λ к r_D задано, тогда вклад затухания Ландау зависит лишь от отношения λ к l . В таком случае с уменьшением отношения λ/l , т.е. при переходе к волновому бесстолкновительному приближению, вклад затухания Ландау уменьшается. Ситуация обратна той, которая имеет место в традиционной теории волновых процессов в плазме.

Таким образом, для неограниченной плазмы затухание Ландау подавляется значительно большей диффузионной диссипацией.

9.4.3. Ограниченная плазма. Затухание Ландау. Пусть L — характерный размер системы. Предположим, что движение плазмы является свободномолекулярным. Это означает, что длина свободного пробега много больше размера системы, т.е. справедливо неравенство $l \gg L$.

Расчеты свободномолекулярного течения следует проводить с учетом диссипативных граничных условий [5, 14, 33]. Это эквивалентно, во всяком случае на качественном уровне, введению в кинетическое уравнение эффективного интеграла столкновений. При этом можно предположить, что он имеет прежнюю структуру, но с заменой длины свободного пробега на характерный размер системы:

$$l \rightarrow L, \quad l \gg L. \quad (9.49)$$

Покажем, что при свободномолекулярном течении существует область значений длин волн (значений волнового числа), для которых в выражении (9.46) вклад, отвечающий затуханию Ландау, является основным. Из формул (9.46), (9.48) видно, что для этого необходимо выполнение неравенств

$$r_D \ll \lambda \ll \sqrt{r_D L}, \quad r_D \ll L \ll l. \quad (9.50)$$

При этих условиях вместо (9.46) получаем более простое выражение для мнимой части диэлектрической проницаемости электронной плазмы

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k) = -\frac{4\pi^2 e^2 n}{k^2} \int \delta(\omega - kv) k \frac{\partial f_0(v)}{\partial p} dp. \quad (9.51)$$

Для электронной плазмы оно совпадает с формулой (5.27) и, следовательно, приводит к выражениям (5.30), (5.31) для коэффициента затухания Ландау.

Итак, описание волновых процессов в электронной плазме на основе обобщенного кинетического уравнения позволяет выявить физическое содержание понятия "затухание Ландау" и установить условия, при которых это затухание доминирует.

Подобное рассмотрение может быть проведено и при других условиях, например для неизотермической плазмы.

10. Заключение

Сделаем в заключение некоторые замечания.

Напомним, что краткая история развития кинетической теории волновых процессов в плазме была изложена во введении к настоящей работе. Из изложенного следует, что эта история далека от своего завершения. Использование обобщенных кинетических уравнений открывает при этом большие возможности для проведения дальнейших исследований неравновесных процессов в плазме при самых различных условиях. В частности, может оказаться эффективным описание неравновесных процессов в установках для термоядерного синтеза легких элементов.

Плазма в этих установках является бесстолкновительной в том смысле, что длина свободного пробега для заряженных частиц во много раз превышает размеры установок. Вместе с тем радиус Дебая мал. Это означает, что плазма в хорошем приближении может рассматриваться как сплошная среда. В силу диссипативности

граничных условий при этом открываются широкие возможности для использования диссипативных кинетических уравнений. Соответствующие интегралы столкновений будут отражать диссипативные процессы на стенках, ограничивающих область существования плазмы.

Выше рассматривалась лишь полностью ионизованная плазма. Одно из возможных и важных обобщений изложенной теории состоит в расширении базовой микроскопической модели — переходе к статистической теории плазменно-молекулярных открытых систем [22]. Такого рода системы включают как предельные случаи полностью ионизованную плазму и газы из нейтральных частиц.

Объединяющей является модель частично ионизованной плазмы. Она состоит, как минимум, из четырех компонент: электронов, ионов, атомов и электромагнитного поля. Естественно, что анализ таких систем в значительной мере основывается на квантовой теории открытых систем.

Пользуюсь возможностью, чтобы поблагодарить А.А. Рухадзе и участников семинара В.Д. Шафранова за обсуждение работы и замечания.

Список литературы

1. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **7** 203 (1937); *Phys. Zs. Sowiet.* **10** 154 (1936)
2. Власов А А *ЖЭТФ* **8** 291 (1938)
3. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **16** 203 (1936)
4. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
5. Климонтович Ю Л *Статистическая физика* (М.: Наука, 1982)
6. Арцимович Л А, Сагдеев Р З *Физика плазмы для физиков* (М.: Атомиздат, 1989)
7. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.: Гостехиздат, 1946)
8. Balescu R, Taylor H S *Phys. Fluids* **4** 85 (1961)
9. Lenard A *Ann. Phys.* **10** 390 (1960)
10. Власов А А *Теория многих частиц* (М.: Гостехиздат, 1950)
11. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Атомиздат, 1961)
12. Климонтович Ю Л *Статистическая теория неравновесных процессов в плазме* (М.: Изд-во МГУ, 1964)
13. Балеску Р *Статистическая механика заряженных частиц* (М.: Мир, 1967)
14. Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Наука, 1971)
15. *Проблемы теории плазмы 1–10* (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Гостехиздат, 1963–1980)
16. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1976)
17. Ахиезер А И и др. *Электродинамика плазмы* (М.: Наука, 1974)
18. Ecker G *Theory of Fully Ionized Plasma* (New York: Academic Press, 1972)
19. Ichimaru S *Basic Principles of Plasma Physics* (New York: Benjamin, 1973)
20. Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Волны в магнитоактивной плазме* (М.: Наука, 1975)
21. Климонтович Ю Л *Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы* (М.: Наука, 1975)
22. Климонтович Ю Л *Кинетическая теория электромагнитных процессов* (М.: Наука, 1980)
23. Ситенко А Г *Физика плазмы* **1** 45 (1975)
24. Ebeling W, Kremp D, Kraeft W *Theory of Bound States and Ionization Equilibrium in Plasmas and Solids* (Berlin: Akademie-Verlag, 1976) [М.: Мир, 1979]
25. Александров А Ф, Богданкевич Л С, Рухадзе А А *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая школа, 1978)
26. Notholson D R *Plasma Theory* (New York: John Wiley and Sons, 1983)
27. Nishikawa K, Wakatani M *Plasma Physics* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1994)
28. Kraeft W D et al. *Quantum Statistics of Charged Particle Systems* (New York: Plenum, 1986)
29. Schram P *Kinetic Theory of Gases and Plasmas* (Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1991)
30. Климонтович Ю Л *Турбулентное движение и структура хаоса* (М.: Наука, 1990)
31. Klimontovich Yu L et al. *Phys. Rep.* **175** 263 (1989)
32. Ebeling W et al. *Thermophysical Properties of Hot Dense Plasmas*. (Stuttgart, Leipzig: Teubner, 1991)
33. Климонтович Ю Л *Статистическая теория открытых систем* (М.: Янус, 1995)
34. Климонтович Ю Л *ТМФ* **9** 107 (1971)
35. Klimontovich Yu L *Phys. Lett. A* **197** 434 (1992)
36. Klimontovich Yu L *TMF* **92** 312 (1992)
37. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Наука, 1974)
38. Крылов Н С *Работы по обоснованию статистической физики* (М.: Наука, 1950)
39. Кадомцев Б Б *УФН* **165** 967 (1995)
40. Prigogine I *From Being to Becoming* (San Francisco: W H Freeman and Company, 1980)
41. Prigogine I *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **5** 3 (1995)
42. Климонтович Ю Л *УФН* **164** (8) 811 (1994)

Physics of collisionless plasma

Yu.L. Klimontovich

*Department of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 939-38 25
Fax (7-095) 143-85 47
E-mail: ylklim@hklim.phys.msu.su*

Work concerning two alternative descriptions of nonequilibrium processes in a completely ionized plasma is reviewed. Taking Landau attenuation as an example, it is shown that a number of fundamental questions remain unresolved in the kinetic theory of plasma. The reason is the lack of a clear picture of the change from the reversible equations of charged particles – field mechanics to the irreversible equations of continuum in the statistical theory of plasma. The problem proves to be solvable due to continuum structure being defined in a consistent way with the dynamic instability characteristics of plasma particle motion. As a result, generalized irreversible equations arise, enabling nonequilibrium plasma processes on both the kinetic and hydrodynamic scales to be described in a unified manner.

PACS numbers: **52.20.-j, 52.25.-b, 52.90.-z**

Bibliography — 42 references

Received 13 June 1994, revised 10 October 1996