Май 1996 г. *Том 166, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства-времени

Б.Л. Альтшулер, А.О. Барвинский

Рассматриваются элементы общей теории переходов с изменением сигнатуры пространства-времени в квантовой теории гравитации и космологии, предложенной в одной из пионерских работ А.Д. Сахарова. В отличие от обычно применяемого формального метода континуального интегрирования отправной точкой является операторное квантование Дирака–Уилера–ДеВитта и его редукция к квантованию в переменных Арновитта–Дезера–Мизнера. Показано, что мотивацией к рассмотрению евклидово-лоренцевых переходов является отсутствие глобальной однозначности физической редукции на фазовом пространстве теории (гравитационный аналог проблемы копий Грибова). Эта неоднозначность приводит, в частности, к неопределенности знака физического внутреннего произведения квантовых состояний и к концепции третичного квантования. В качестве возможной альтернативы этой концепции рассматривается квантование в калибровке Йорка и в специальных переменных конформного суперпространства. В качестве примера применения общей теории рассматривается проблема происхождения ранней инфляционной вселенной путем гравитационного туннелирования в квантовых состояниях Хартла–Хокинга и Виленкина. Представлен механизм, посредством которого петлевые эффекты могут генерировать нормируемую функцию распределения ансамбля хаотических инфляционных вселенных. В модели с большой константой неминимального взаимодействия скалярного инфлатона этот механизм порождает острый вероятностный пик при субпланковском значении постоянной Хаббла, что находится в хорошем соответствии с современным наблюдательным статусом теории космологической инфляции.

PACS numbers: 0.4.60.Ds, 98.80.Bp, 98.80.Cq, 98.80.Hw

Содержание

Б.Л. Альтшулер, А.О. Барвинский. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Ленинский просп. 53
Тел. (095) 135-83-39
E-mail: altshul@lpi.ac.ru, barvin@rq2.fian.msk.su

Статья поступила 19 февраля 1996 г.

1. Введение

Среди разнообразных научных интересов А.Д. Сахарова теория гравитации и космология занимали особое место. В недавно вышедшем полном (за вычетом еще не рассекреченных "ядерных" отчетов) собрании его научных трудов [1] эти темы представлены 17 статьями: индуцированная гравитация, объяснение барионной асимметрии Вселенной, многолистная вселенная, космологические модели с поворотом стрелы времени и, наконец, квантовая космология: написанная в 1984 г. в ссылке работа "Космологические переходы с изменением сигнатуры метрики" [2]. (Основополагающие статьи А.Д. Сахарова опубликованы также в специальном посвященном его 70-летию выпуске УФН [3].)

Настоящая работа не является обзорной, хотя во введении мы приводим краткий и заведомо субъективный перечень существующих проблем и подходов к квантованию гравитации. В течение 12 лет, прошедших после опубликования статьи [2], наука не стояла на месте. ("Это чудо науки. Хотя я и не верю в возможность скорого создания (или создания вообще?) всеобъемлющей теории, но я вижу гигантские, фантастические достижения на протяжении даже только моей жизни и жду, что этот поток не иссякнет, а наоборот, будет шириться и ветвиться". А.Д. Сахаров в книге [4], с. 22.) И хотя, как нам кажется, "гигантские, фантастические достижения" в квантовой гравитации все еще принадлежат труднопредсказуемому будущему, мы постарались обсудить с современной точки зрения идеи статьи [2], а некоторым эвристическим гипотезам Сахарова дать, насколько это возможно, строгую математическую формулировку.

О возможности объединения общей теории относительности (ОТО) и квантовой физики размышляет не одно поколение физиков. В последние 10–20 лет квантовая гравитация и ее естественное приложение — квантовая космология — развиваются чрезвычайно бурно, однако остаются неразрешенными некоторые важнейшие концептуальные проблемы. И это не случайно. "Время", "прошлое и будущее", "причинность", "унитарность", "система отсчета", "событие" — каждому из этих слов в ОТО и квантовой теории соответствуют ясные физические понятия либо первопринципы. Но все они требуют того или иного доопределения, как только мы начинаем квантовать метрический тензор, т.е. объявляем квантовыми объектами пространственно-временные интервалы.

Допустив квантовые флуктуации метрического тензора и следуя мощным аналогиям с теорией струн, мы можем сделать следующий шаг — включить в квантовый ансамбль многообразия различной топологии, размерности, сигнатуры. Квантовое функциональное усреднение по пространственно-временным диффеоморфизмам ("квантование системы отсчета") "размазывает" калибровочно-неинвариантные объекты, а таковыми в ОТО являются любые наблюдаемые с ограниченным пространственно-временным носителем. Стандартная процедура фиксации калибровки устраняет "размазывание", но делает квантовые предсказания калибровочно-зависимыми. Использование же только калибровочно-инвариантных объектов (топологические числа, интегралы по всему пространству-времени,...) ставит проблему описания на этом языке локальной геометрии.

Требование инвариантности квантовых наблюдаемых, квантовой "волновой функции Вселенной" относительно общих преобразований координат означает наложение связей. В частности, поскольку вся динамическая эволюция может быть имитирована репараметризацией времени, время вообще выпадает из квантового описания гравитации. Эта хорошо известная проблема времени в квантовой гравитации ставит очень глубокие вопросы: как ввести физическое время? Можно ли сделать это непротиворечиво, объявив "часами" некую подсистему квантовой системы? Что значит квантование системы, в которой все наблюдения только "внутренние" и имеет смысл говорить только об относительных, условных вероятностях? Эти и им подобные вопросы породили в последние годы целые направления исследований. Обсудим кратко некоторые методы квантования и направления мысли, по возможности отсылая читателя к первоисточникам и обзорам.

1.1. Каноническое квантование

Каноническое, нековариантное квантование классической эйнштейновской ОТО было развито в пионерских работах Дирака, Уилера, ДеВитта [5–7] (см., например, обзор [8]). Основной результат процедуры квантования — формальная утрата пространства-времени, волновая функция, удовлетворяющая уравнению связи Уилера–ДеВитта (00-компонента уравнений Эйнштейна)

$$\hat{H}_{\mathbf{x}}\Psi(q^i) = 0, \tag{1.1}$$

зависит только от точки суперпространства:

$$q^i \equiv \{g_{ab}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\} \tag{1.2}$$

и не зависит от времени. Трехмерная метрика $g_{ab}(\mathbf{x})$ и заданные на этом трехмерном многообразии поля материи $\varphi(\mathbf{x})$ являются первичным языком теории. Время, а тем самым и 4-мерность, и световой конус возникают в этом подходе, *как это общепринято считать*, лишь в квазиклассическом приближении для решений уравнения (1.1).

Можно, однако, с самого начала пойти более естественным, физическим путем и постулировать, что квантуются только физические степени свободы (для свободной гравитации в четырех измерениях — это только две поляризации гравитона, в трех измерениях число физических локальных гравитационных степеней свободы равно нулю). Этот подход, использующий унитарную калибровку и основанный на редукции Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ) [9] к физическим переменным, подробно изучен в обзоре [8]; его развитию посвящена также значительная часть данной статьи. Несмотря на то, что время, квантовомеханическое скалярное произведение, сохраняющиеся вероятности, физическое гильбертово пространство вводятся в методе квантовой редукции АДМ без каких-либо ссылок на квазиклассический режим, здесь возникают свои принципиальные трудности и вопросы: в какой мере физические предсказания зависят от выбора калибровочного условия (выбора системы отсчета)? Каков физический смысл возникающих копий Грибова? Эти проблемы обсуждаются ниже (раздел 3).

В рассматриваемом в данной работе методе операторного квантования, язык которого — суперпространство, возможность использовать одну из переменных q^i (1.2), или их комбинацию в качестве фиксируемых калибровочным условием классических часов традиционно связывается с отрицательностью сигнатуры одной из осей суперпространства (см. раздел 2). Однако на роль часов годится, в сущности, любая способная "монотонно меняться" координата. (Взятые в кавычки слова приобретают смысл лишь после того, как задана форма гамильтониана; по определению "монотонность" нарушается, когда обращается в нуль скобка Пуассона данной величины с гамильтонианом.) Сигнатура суперпространства и сигнатура пространства-времени *apriory* друг с другом не связаны. Проблема в другом — в неизбежном существовании гравитационного аналога копий Грибова, каустик суперпространства, не позволяющих использовать фиксирующую монотонно изменяющееся время калибровку глобально, во всем суперпространстве q^i. Это, в сущности, является основной побудительной причиной к переходу к третичному квантованию. Обсуждению этого круга вопросов посвящена значительная часть данной статьи.

1.2. Ковариантное квантование Баталина–Вилковыского–Фрадкина

Связующим звеном между каноническим и ковариантным методами квантования гравитации является конструкция обобщенного канонического квантования Баталина–Вилковыского–Фрадкина (БВФ) [10], соотношение которого с квантованиями Дирака–Уилера–ДеВитта и унитарной редукции подробно обсуждается в [8]. Суть метода БВФ в применении релятивистской калибровки, когда лагранжевы множители становятся квантуемыми динамическими переменными; при этом для компенсации лишних степеней свободы необходимо введение духов Фаддеева–Попова, а на векторы расширенного гильбертова пространства накладывается условие равенства нулю заряда (БРСТ) Бекки–Рюэ–Стора–Тютина (Becchi–Rouet–Stora–Tyutin) (см. обзор [11]). Этот подход очень удобен для построения S-матрицы, которая, как доказывается в общем виде, не зависит от калибровки на массовой оболочке. Однако в космологическом контексте, когда отсутствует понятие in-предела на асимптотически плоской бесконечности пространства-времени, этот метод либо сводится к проблематике квантования Дирака–Уилера–ДеВитта, либо подразумевает другие типы операторного квантования, которые еще предстоит построить.

1.3. Интегрирование по траекториям

"Расщепление на три пространственных измерения и одно время, по-видимому, противоречит самому духу теории относительности. Более того, оно ограничивает топологию пространства-времени произведением действительной прямой на некоторое трехмерное многообразие, в то время как надо ожидать, что квантовая гравитация будет допускать все возможные топологии пространства-времени, включая и те, которые не являются прямыми произведениями". Так, критикуя каноническое квантование, писал Хокинг в статье для сборника [12], посвященного 100-летию Эйнштейна. В ковариантном, не каноническом методе основным инструментом является фейнмановский функциональный интеграл по пространственно-временным полям ("траекториям"):

$$K(q, q') = \int \exp\left\{ -\int_{q'(\partial M')}^{q(\partial M)} \sqrt{g}\, L\, \mathrm{d}^4 x \right\} [\mathrm{D} g_{\mu\nu} \mathrm{D}\varphi] \,. \qquad (1.3)$$

Здесь L — лагранжиан; $g = \det g_{\mu\nu}(x, t)$; калибровка и мера включены в символ $[\mathrm{D}g\,\mathrm{D}\varphi]$; q', q — поля (1.2) на ограничивающих 4-многообразие M гиперповерхностях $\partial M'$, ∂M. Ковариантная формула (1.3) согласована с методом канонического квантования, поскольку при соответствующем определении функционального интеграла в (1.3) ядро $K(q, q')$ является решением уравнения Уилера–ДеВитта (1.1) по каждой из переменных q, q' [13–16]. В частности, постулируя евклидов поворот $t \to \mathrm{i}t$, стягивая начальную гиперповерхность $\partial M'$ в точку и требуя регулярности всех полей в этой точке, Хартл и Хокинг получили свое знаменитое решение уравнения Уилера–ДеВитта — так называемую "no-boundary" волновую функцию Вселенной [17, 18]. Вместе с тем, аналогией квантово-гравитационного ядра (1.3) с фейнмановским ядром квантовой механики или квантовой теории поля следует пользоваться с осторожностью. Используемый в [17] стандартный закон композиции, основанный на интегрировании по всем концевым точкам q^i в данный момент времени, в этом случае не применим, поскольку $K(q, q')$ удовлетворяет уравнениям связи и наивный интеграл по q актуально бесконечен (см. обсуждение в разделах 2, 3).

1.4. Метод эффективного действия

Вместо амплитуды (1.3) допустимо формулировать теорию на языке явно ковариантного эффективного действия $\Gamma(\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\varphi})$, определяемого преобразованием Лежандра производящего функционала внешних токов. В древесном приближении Γ совпадает с исходным классическим действием, затем следует однопетлевой член порядка $\hbar$ и т.д. Сила и достоинство метода эффективного действия в том, что он позволяет работать не с квантовыми состояниями, а дает ковариантный вычислительный алгоритм, в том числе позволяет проводить ковариантную регуляризацию для квантовых средних, что и продемонстрировано в разделе 4, где этот формализм применяется к проблеме квантового рождения Вселенной и позволяет вычислить функцию распределения и получить масштаб инфляции. Вместе с тем аппарат эффективного действия не может заменить первопринципов операторного квантования. Форма Γ зависит от выбора асимптотики полей в функциональном интеграле (т.е. от выбора начального и конечного состояний); кроме того, при стандартном определении эффективного действия результаты расчетов меняются при репараметризации полей — аргументов функционального интеграла; вне массовой оболочки Γ зависит от выбора условия, фиксирующего калибровку. Существенный шаг к построению однозначного эффективного действия, основанный на чрезвычайно красивой идее геометризации пространства "траекторий", сделан Вилковыским и ДеВиттом [19, 20]. О применениях этого метода см., например, [21–24] и ссылки в этих работах.

В [23, 24] в континуальном представлении эффективного действия Вилковыского–ДеВитта проведен учет так называемых "остаточных", "больших" диффеоморфизмов (копий Грибова — "нулей" оператора Фаддеева–Попова релятивистской калибровки Ландау–ДеВитта), что физически эквивалентно требованию инвариантности наблюдаемых относительно этих диффеоморфизмов. Показано, что это требование нетривиально, накладывает сильные ограничения на допустимую фоновую метрику $\bar{g}_{\mu\nu}$ и приводит к "квантовому отталкиванию" от "свободных" (без внешних источников) решений классических динамических уравнений. Внешняя среда, внешние источники возникают в различных контекстах при попытках получить разумный классический предел в квантовой космологии.

1.5. Наблюдательный статус квантовой гравитации. Проблема классического предела

Существуют, как нам представляется, два возражения на, казалось бы, очевидное и часто повторяемое утверждение, что у квантовой гравитации нет и в обозримом будущем не может быть экспериментальной проверки, поскольку планковский масштаб $\sim 10^{-33}$ см совершенно недостижим.

Первая "экспериментальная площадка" — ранняя вселенная, проблема начального состояния. Подобно тому, как инфляционные теории жестко увязывают теоретические представления в области сверхвысоких масштабов энергии Великого объединения с весьма тонкими деталями структуры наблюдаемой Вселенной, так же и вопрос о выборе квантового начального состояния Вселенной может оказаться практически актуальным.

Второй "эксперимент" для квантовой космологии — это наш повседневный опыт, тот неоспоримый факт, что мы живем в практически классическом $(3+1)$-мерном римановом пространстве, пространственно-временные расстояния которого достаточно определены из-за того, что квантовая дисперсия метрики мала. Если в теории возникают трудности с "приготовлением" такого с узким пиком когерентного квантового состояния Вселенной, значит, надо ее (теорию) менять, и в случае необходимости пересматривать первопринципы. Проблема классического предела в квантовой гравитации стала серьезным испытанием для этой теории, дала новый импульс к переосмыслению самых основ квантовой теории (см. [25, 26] и сноски в этих работах). Практически во всех работах, посвященных проблеме классического предела, утверждается, что конструкции времени и классического пространства-времени невозможны из чистой волновой функции Вселенной: система должна быть открытой, нужны "внешние" степени свободы, усреднение по которым обращает в нуль недиагональные элементы матрицы плотности. Впрочем, не исключено, что всеобщее беспокойство по поводу первооснов в данном случае излишне. Хорошо известно, что в квантовой механике квазиклассичности волновой функции еще недостаточно для того, чтобы частица вела себя "классично". Для этого нужен пакет, когерентное состояние, предэкспоненциальный множитель, максимум которого движется по задаваемой уравнениями Гамильтона–Якоби классической траектории, а дисперсия около этой траектории мала, равно как мала и скорость расплывания пакета. Таким образом, вопрос о возникновении приближенно классического пространства-времени — это вопрос о приготовлении начального состояния Вселенной с малой дисперсией компонент метрического тензора в данной ветви решения уравнения Гамильтона–Якоби. В разделе 4 показано, что при квантовом рождении Вселенной (при туннелировании из состояния с евклидовой сигнатурой) подобное начальное состояние может возникнуть при учете петлевых квантово-гравитационных поправок, причем параметры этого начального состояния находятся в хорошем соответствии с наблюдательным статусом инфляционной вселенной.

Заметим также, что столь популярное требование декогерентизации различных квазиклассических эвереттовских ветвей эволюции Вселенной может оказаться излишним, поскольку мы — наблюдатели — заведомо принадлежим данной ветви, наблюдаем все изнутри и, значит, самим своим существованием осуществляем необходимую редукцию волнового пакета.

1.6. Смена топологии

Трехмерные гиперповерхности ∂M, $\partial M'$, ограничивающие многообразие M в (1.3), не обязательно односвязны; вполне допустимо рассматривать "многочастичное" ("многовселенное") состояние

$$q(\partial M) = \left\{g_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}_1)\,\varphi^{(1)}(\mathbf{x}_1)\ldots g_{ab}^{(n)}(\mathbf{x}_n), \varphi^{(n)}(\mathbf{x}_n)\right\}, \qquad (1.4)$$

когда $q(\partial M)$ есть совокупность значений полей на различных 3-многообразиях, число которых в $\partial M'$ и в ∂M, вообще говоря, может различаться. Идея возможных топологических переходов ("пространственно-временной пены") в квантовой гравитации восходит к Уилеру [27]. Включение в число аргументов ядра (1.3) многообразий сложной топологии, описание Мега-Вселенной, естественным образом требует перехода к третичному квантованию, когда волновая функция Вселенной $\Psi(q)$, удовлетворяющая уравнению Уилера–ДеВитта (1.1) (бесконечному числу — по числу точек 3-пространства — уравнений типа Клейна–Гордона), объявляется оператором. Новая физика возникает при рассмотрении процессов с изменением числа вселенных в (1.3), что, очевидно, требует введения взаимодействия между вселенными ("релятивистскими частицами"), т.е. введения нелинейных по $\Psi(q)$ членов в уравнение (1.1) [28, 29]. Ключевой вопрос: чем определяется это взаимодействие, можно ли его извлечь из действия Эйнштейна — исходного действия квантовой гравитации? Казалось бы, естественный способ (исходящий опять из аналогии с теорией струн) определить такие вершины порядка n следующим образом: на евклидовой 4-сфере вырезать n 4-"кружочков" и затем континуально усреднить по всем 4-геометриям, топологически эквивалентным сфере, с фиксированными значениями 3-геометрий на границе каждого вырезанного "круга" [17]. Эти удаленные 4-области могут рассматриваться как горловины кротовых нор, соединяющих евклидову 4-сферу с другими евклидовыми пространствами, либо при смене сигнатуры — с лоренцевыми вселенными. ("No-boundary" волновая функция Хартла–Хокинга — это "вершина" порядка 1; рождению лоренцевой вселенной "из ничего" соответствует смена сигнатуры при максимальном радиусе "вырезки", составляющей в этом случае полусферу, см. ниже рис. 3 и обсуждение в разделе 2.) Однако определенные таким образом в [17] амплитуды должны за счет функционального усреднения по функциям хода и сдвига удовлетворять уравнению Уилера–ДеВитта по каждому из своих "хвостов", т.е. на языке S-матрицы, находиться на "массовой оболочке" и, тем самым, не могут служить "затравочными" вершинами.

Особое направление — теория кротовых нор и развитие чрезвычайно смелой идеи [30] о перенормировке, а возможно, и динамической фиксации всех констант низкоэнергетической физики за счет существования в каждой точке большой "родительской" вселенной виртуальных кротовых нор, связывающих эту точку с какой-либо другой точкой той же вселенной, либо с "дочерними" вселенными. Для иллюстрации приведем выражения для метрики простейшей кротовой норы в n-мерном евклидовом пространстве в трех различных параметризациях радиальной координаты:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + (r^2+b^2)\,\mathrm{d}\Omega^{(n-1)} = \qquad (1.5а)$$

$$= \left(1+\frac{b^2}{4z^2}\right)^2\left[\mathrm{d}z^2 + z^2\,\mathrm{d}\Omega^{(n-1)}\right] = \qquad (1.5б)$$

$$= \frac{R^2}{R^2-b^2}\,\mathrm{d}R^2 + R^2\,\mathrm{d}\Omega^{(n-1)}. \qquad (1.5в)$$

Здесь $d\Omega^{(n-1)}$ — элемент $(n-1)$-мерной сферы единичного радиуса;

$$r = z - \frac{b^2}{4z} = \sqrt{R^2 - b^2}\,. \tag{1.6}$$

Выражение (1.5а) особенно наглядно: при $b = 0$ имеем плоскую метрику в сферической системе координат, тогда как при любом сколь угодно малом $b \neq 0$ налицо два асимптотически плоских бесконечных пространства, связанных горловиной радиусом b. Форма (1.5б) используется в работах [31], в которых высказано предположение о потере когерентности первоначально "чистого" квантовомеханического состояния за счет необратимой утечки информации через кротовые норы. Прямо противоположная гипотеза о когерентном влиянии кротовых нор высказана в [30]. В недавней работе Рубакова [32] роль квантовых переходов с изменением топологии изучается в теории струн, т.е. в двумерной гравитации; при этом рождение "дочерних" вселенных (струн) есть не что иное, как стандартное излучение гравитонов в D-мерном пространстве-времени ("пространстве мишеней"). В [32] показано, что имеют место оба явления, каждое в своей энергетической области: и потеря когерентности, и когерентная перенормировка констант феноменологического действия (т.е. полей в "пространстве-мишени").

Существенно, что для метрики (1.5)

$$S \sim \int R\sqrt{g}\; d^n x \sim b^{n-2}\,,$$

т.е. квантовая динамика слабо подавляет возникновение микроскопических кротовых нор в каждой точке "большой" вселенной. Формально вся наука о перенормировке констант кротовыми норами сводится к стандартной диаграммной технике, где линиям соответствуют специфические супернелокальные (не зависящие от точек "входа" и "выхода" кротовой норы) "функции Грина", а в вершинах стоят интегралы от различных локальных операторов по всему объему. В приближении "разреженного газа" (невзаимодействующих кротовых нор) это эффективно приводит к перенормировке наблюдаемых нами констант взаимодействия, причем в отличие от стандартной квантовой теории поля здесь главный вклад вносит не ультрафиолетовая, а, напротив, предельно инфракрасная область: свойства мира на больших расстояниях актуально влияют на наблюдаемую нами локальную физику.

На другом языке приближение разреженного газа для кротовых нор соответствует применению приближения среднего поля к решению уравнения Уилера–ДеВитта с нелинейными членами для третично-квантованной волновой функции Вселенной. При этом необходимо сказать, что эти, трудно понимаемые для 4-мерия слова и понятия, становятся достаточно ясными и недвусмысленными, как только мы начинаем говорить о струнах, т.е. о двумерии [33–35].

В настоящее время классические и квантовые кротовые норы изучаются чрезвычайно интенсивно (см. [36, 37], где приведена обширная библиография). Говоря о кротовых норах, нельзя не упомянуть также сравнительно недавно возникшее направление, ключевые слова которого "лоренцевы кротовые норы", "машина времени" со всеми сопутствующими путешествию назад по времени вопросами типа "что будет, если имярек убьет собственную бабушку?" [38, 39].

Для нас важно отметить, что существует глубокая связь между кротовой норой и сменой сигнатуры радиальной координаты, что становится очевидным при записи метрики кротовой норы в форме (1.5в), где R — масштабный фактор $(n-1)$-мерной сферы. Как видно, при $R^2 < b^2$ (область "классической недоступности" для метрики (1.5)) координата R становится времениподобной. Именно таким, полюсным, выражением для g_{00}-компоненты метрики пользуется Сахаров для иллюстрации идеи смены сигнатуры (см. ниже (1.7)).

1.7. Смена сигнатуры

В работе [2] Сахаров предложил рассматривать в функциональном интеграле (1.3) евклидовы и псевдоевклидовы геометрии с различным числом временных осей на равной основе, причем за счет множителя $\sqrt{g}$ в экспоненте в (1.3) для лоренцевой сигнатуры (нечетное число осей времени, $g < 0$) мнимая единица перед действием появляется автоматически. Идея дополнительных временных измерений высказывалась и ранее. (См. литературу в [40] и комментарии И.Д. Новикова, В.П. Фролова, В.А. Рубакова, И.Я. Арефьевой и И.В. Воловича к статье [2] в книге [1], с. 309–313.)

Главную идею статьи [2] — о возможности квантовых туннельных переходов между пространствами разной сигнатуры — Сахаров иллюстрирует простым примером смены знака g_{00}-компоненты метрического тензора за счет перехода через полюс при изменении координаты x_0, ортогональной границе раздела евклидовой и лоренцевой областей:

$$g_{00} = \frac{l}{x_0 - c}\,. \tag{1.7}$$

При $x_0 > c$ имеем евклидову метрику, а при $x_0 < c$ — лоренцеву, и, как отмечает Сахаров, в каждом из этих миров можно ввести собственное время, определяемое преобразованиями координат:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x_0 > c \quad x_0 - c = \frac{\tau^2}{4l}, \qquad g_{00} \to g'_{00} = 1\,, \\ &\text{при} \quad x_0 < c \quad c - x_0 = \frac{t^2}{4l}, \qquad g_{00} \to g'_{00} = -1\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Как показано в разделе 3 настоящей статьи, полюсный вид метрики (1.7) естественно возникает в точке "отскока", т.е. на границе евклидово-лоренцева перехода, в системе координат, соответствующей параметризации времени масштабным фактором Вселенной. Появление особенности типа (1.7) мы уже продемонстрировали выше формулой (1.5); в отличие от кротовой норы (1.5) деситтеровская вселенная с "отскоком" является лоренцевой при больших значениях масштабного фактора и евклидовой — при малых.

Заявленная в заглавии тема смены сигнатуры пространства-времени подробно обсуждается в данной статье лишь в квантово-космологическом аспекте, в задаче о рождении лоренцевой вселенной Де Ситтера из евклидовой 4-сферы. Равноправное рассмотрение всех собственных значений метрического тензора, как комплексифицированных динамических переменных проводится в [41, 42]. В [42] предпринята попытка сформулировать динамический принцип, способный предсказать как размерность нашей Вселенной, так и ее сигнатуру $(-+++)$. Немалое число авторов изучают также меняющие сигнатуру решения классических уравнений (см. [43–45] и сноски в этих работах). В [46] пространственно-временные многообразия различной сигнатуры рассматривались на языке супермембран.

1.8. Принципиально иные подходы к квантованию гравитации

До сих пор, обсуждая пути квантования гравитации, мы предполагали, что действие Эйнштейна (либо иное гравитационное действие) является первичным исходным элементом теории. Однако наиболее обещающим, по всей видимости, является совсем иной взгляд на проблему (восходящий к идее Сахарова индуцированной гравитации [47] и в максимальной степени реализуемый в теории струн [48, 49]), когда гравитационное действие, равно как и сам пространственно-временной континуум, возникают лишь в феноменологическом длинноволновом пределе более фундаментальной теории. С этими не ограниченными разложением по теории возмущений и вполне революционными воззрениями на пространство-время и гравитацию перекликаются исчисление Редже, метод динамической триангуляции, матричные модели, использование переменных Аштекара, рассмотрение квантовой гравитации, как топологической квантовой теории поля (см., например, специальный выпуск *J. Math. Phys.* [50]). Пока еще эти направления исследований находятся в той стадии, когда главной задачей является определение таких фундаментальных понятий и величин, как топологическая окрестность, хаусдорфова размерность, введение в скейлинг-пределе концепции расстояния и т.п. Ни один из этих подходов пока не удалось применить к космологии.

Подробная библиография работ по квантовой гравитации до 1990 г. приведена в [51]. См. также недавнюю обзорную лекцию Айшема [52]. Квантовой гравитации было посвящено немало докладов на Первой международной сахаровской конференции по физике (Москва, ФИАН, 21–31 мая 1991г., см. [53]). Мы надеемся, что это направление будет достаточно авторитетно представлено и на Второй сахаровской конференции (Москва, ФИАН, май, 1996).

В настоящей работе мы ограничились рассмотрением наиболее традиционного канонического квантования АДМ теории Эйнштейна. В разделе 2 вводятся уравнения связей, изучается специфика внутреннего произведения волновых функций, удовлетворяющих этим уравнениям, показана неизбежность возникновения проблемы времени и перехода к третичному квантованию при квантовании гравитации методом Дирака–Уилера–ДеВитта. В разделе 3 квантование проводится методом редукции АДМ, т.е. в унитарной калибровке, когда четыре произвольные функции координат суперпространства, параметризованных числом t, исключаются из квантового ансамбля. Рассмотрена проблема копий Грибова, а также возможность применения калибровок, где эта проблема отсутствует, что, в принципе, может исключить необходимость перехода к третичному квантованию. Раздел 4 посвящен построению в однопетлевом приближении волновой функции нашей Вселенной, "родившейся" из евклидовой области, т.е. из состояния с положительной сигнатурой. В заключении обсуждаются возможные направления дальнейших исследований, а также соотношение "антропного" и "динамического" подходов к объяснению свойств наблюдаемой Вселенной.

2. Гравитационные связи, проблема времени и третичное квантование

Этот раздел мы начнем с краткого изложения специфики эйнштейновской теории гравитации, которая порождает известную проблему времени и фактически образует фундамент для теории квантовых гравитационных переходов с изменением сигнатуры пространства-времени. Каноническое действие теории на фазовом пространстве трехмерных метрических коэффициентов g_{ab}, материальных полей φ и сопряженных им импульсов p^{ab}, p_φ $(a, b, \ldots = 1, 2, 3)$ имеет вид [6, 9, 54]

$$\boldsymbol{S}[g_{ab},\, p^{ab},\, \varphi,\, p_\varphi,\, N^\perp,\, N^a] = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3x\, [p^{ab}\dot g_{ab} + p_\varphi\dot\varphi - N^\perp H_\perp - N^a H_a]. \tag{2.1}$$

При этом функции хода $N^\perp = (-^4g^{00})^{-1/2}$ и сдвига $N^a = g^{ab\,4}g_{0b}$ входят в это выражение без производных по времени и, тем самым, являются лагранжевыми множителями при гравитационных связях — супергамильтониане и суперимпульсах:

$$H_\perp(g_{ab},\, \varphi,\, p^{ab},\, p_\varphi) = \frac{1}{2}\, G_{ab,\,cd}\, p^{ab}p^{cd} - \sqrt{g}\; {}^3R + H_\perp^{\mathrm{mat}}(g_{ab},\, \varphi,\, p_\varphi), \tag{2.2}$$

$$H_a(g_{ab},\, \varphi,\, p^{ab},\, p_\varphi) = -2g_{ab}\nabla_c p^{bc} + H_a^{\mathrm{mat}}(g_{ab},\, \varphi,\, p_\varphi), \tag{2.3}$$

где $G_{ab,\,cd} = g^{-1/2}(g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd})$ — локальная матрица суперметрики ДеВитта, а $H_\perp^{\mathrm{mat}}$ и H_a^{mat} — вклады материальных полей, конкретный вид которых зависит от выбора материи. Это действие порождает варьированием по фазовым переменным канонические уравнения движения для координат и импульсов, в то время как варьирование лагранжевых множителей порождает нединамические уравнения — связи

$$H_\perp = 0, \qquad H_a = 0 \tag{2.4}$$

— и оставляет неопределенными значения $N^\perp$ и N^a. Этот произвол эквивалентен инвариантности гравитационного действия относительно 4-мерных диффеоморфизмов. Для фазовых переменных они генерируются каноническими преобразованиями с гравитационными связями $(H_\perp, H_a)$ в качестве генераторов локальных инфинитезимальных диффеоморфизмов соответственно нормальных $(\perp)$ и касательных (a) к поверхностям постоянного времени. Связи (2.2), (2.3) принадлежат по терминологии Дирака [5] первому классу и находятся в инволюции относительно скобки Пуассона $\{\ldots,\ldots\}$ на фазовом пространстве [6, 9, 54]:

$$\begin{gathered}
\{H_\perp(\mathbf{x}),\, H_\perp(\mathbf{x}')\} = g^{ab}(\mathbf{x})\, H_b(\mathbf{x})\, \partial_a\delta(\mathbf{x},\, \mathbf{x}') - (\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}')\,, \\
\{H_\perp(\mathbf{x}),\, H_a(\mathbf{x}')\} = -H_\perp(\mathbf{x}')\, \partial_a\delta(\mathbf{x}',\, \mathbf{x})\,, \\
\{H_a(\mathbf{x}),\, H_b(\mathbf{x}')\} = H_b(\mathbf{x})\, \partial_a\delta(\mathbf{x},\, \mathbf{x}') - (a,\, \mathbf{x} \leftrightarrow b,\, \mathbf{x}')\,.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Гамильтониан замкнутой космологической модели с действием (2.1) является линейной комбинацией связей и поэтому на их решениях обращается в нуль. Это свойство порождает известную проблему времени в классической и квантовой космологии. Классически эта проблема проявляется в особых свойствах гравитационной функции Гамильтона–Якоби $\boldsymbol{S}(t, g_{ab}, \varphi; t', g'_{ab}, \varphi')$ — действии (2.1), вычисленном на классической экстремали, соединяющей взятые в начальный и конечный моменты времени, t' и t, конфигурации (g'_{ab}, φ') и (g_{ab}, φ). В силу гравитационных связей функция $\boldsymbol{S}(t, g_{ab}, \varphi; t', g'_{ab}, \varphi')$ удовлетворяет системе уравнений Эйнштейна–Гамильтона–Якоби, получающейся из (2.4) заменой импульсов на функциональные градиенты $\boldsymbol{S}$:

$$H_{\perp}\left(g_{ab}, \varphi, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{ab}}, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta\varphi}\right) \equiv \frac{1}{2}\, G_{ab,cd}\, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{ab}}\, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{cd}} - \sqrt{g}\,{}^3R + H_{\perp}^{\mathrm{mat}}\left(g_{ab}, \varphi, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta\varphi}\right) = 0, \qquad (2.6)$$

$$H_a\left(g_{ab}, \varphi, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{ab}}, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta\varphi}\right) \equiv -2 g_{ab}\nabla_c\, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{bc}} + H_a^{\mathrm{mat}}\left(g_{ab}, \varphi, \frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta\varphi}\right) = 0, \qquad (2.7)$$

и, следовательно, обычное уравнение Гамильтона–Якоби для $\boldsymbol{S}(t, g_{ab}, \varphi; t', g'_{ab}, \varphi')$ сводится к независимости этой функции от t (и t'):

$$\boldsymbol{S}(t, g_{ab}, \varphi; t', g'_{ab}, \varphi') = \boldsymbol{S}(g_{ab}, \varphi; g'_{ab}, \varphi')\,. \qquad (2.8)$$

Таким образом, функция Гамильтона–Якоби не несет явной информации о времени, характеризующем динамику гравитационной системы.

На квантовом уровне проблема времени возникает в шрёдингеровской картине квантования Дирака–Уилера–ДеВитта. Последняя, как известно, заключается в следующем. В отличие от обычной некалибровочной теории в теории гравитации фазовые переменнные не являются независимыми и удовлетворяют связям (2.4). В квантовой теории *apriory* есть свобода учесть это обстоятельство двумя различными способами. Связи можно считать уравнениями для операторов g_{ab}, p^{ab}, φ, p_{φ}, которые при этом становятся, как и в классике, зависимыми и удовлетворяющими особым (дираковским) коммутационным соотношениям, совместным со связями [9, 55, 10]. Либо можно считать операторы фазовых переменных независимыми, а связи наложить в виде уравнений, выделяющих физические состояния $|\boldsymbol{\Psi}\rangle$ в полном пространстве представления этих операторов [5, 6]:

$$\hat{H}_{\perp}|\boldsymbol{\Psi}\rangle = 0, \qquad \hat{H}_a|\boldsymbol{\Psi}\rangle = 0. \qquad (2.9)$$

Второй способ представляет собой дираковскую схему квантования, в которой *независимые* канонические операторы удовлетворяют гейзенберговским коммутационным соотношениям. В координатном представлении ($|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \boldsymbol{\Psi}[g_{ab}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})]$) коммутационных соотношений

$$\hat{g}_{ab}(\mathbf{x}) = g_{ab}(\mathbf{x}), \qquad \hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}),$$

$$\hat{p}^{ab}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, \frac{\delta}{\delta g_{ab}(\mathbf{x})}, \qquad \hat{p}_{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} \qquad (2.10)$$

уравнения (2.9) принимают вид

$$''\left\{-\frac{\hbar^2}{2}\, G_{ab,cd}\, \frac{\delta^2}{\delta g_{ab}\delta g_{cd}} - \sqrt{g}\,{}^3R + H_{\perp}^{\mathrm{mat}}\left(g_{ab}, \varphi, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, \frac{\delta}{\delta\varphi}\right)\right\}'' \times \boldsymbol{\Psi}[g_{ab}, \varphi] = 0, \qquad (2.11)$$

$$''\left\{-2\, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, g_{ab}\nabla_c\, \frac{\delta}{\delta g_{bc}} + H_a^{\mathrm{mat}}\left(g_{ab}, \varphi, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, \frac{\delta}{\delta\varphi}\right)\right\}''\, \boldsymbol{\Psi}[g_{ab}, \varphi] = 0, \qquad (2.12)$$

где кавычки означают, что данные функциональные дифференциальные операторы являются символической операторной реализацией классических связей (2.2), (2.3), подразумевающей как расстановку некоммутирующих сомножителей, так и возможные квантовые поправки, пропорциональные $\hbar$.

Соотношения (2.11), (2.12) представляют собой основные динамические уравнения для физических состояний в канонической квантовой гравитации и космологии, и первое из них носит название уравнения Уилера–ДеВитта. Их прямым следствием является независимость физических состояний от времени:

$$\mathrm{i}\hbar\, \frac{\partial}{\partial t}\, |\boldsymbol{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, (N^{\perp}\hat{H}_{\perp} + N^a\hat{H}_a)\, |\boldsymbol{\Psi}\rangle = 0, \qquad (2.13)$$

что есть прямой аналог свойства (2.8) классической функции Гамильтона–Якоби.

С первого взгляда, это приводит к парадоксальному выводу, что в системе напрочь отсутствует динамика, поскольку наивно вычисляемые квантовые средние любого шрёдингеровского оператора $\hat{O}$, $\langle\boldsymbol{\Psi}|\hat{O}|\boldsymbol{\Psi}\rangle$, не будут зависеть от времени. Наивность такого вычисления, на самом деле, будет следовать хотя бы из того, что само квантовое среднее и соответствующее скалярное произведение физических состояний

$$\langle\boldsymbol{\Psi}_1|\boldsymbol{\Psi}_2\rangle = \int \prod_{\mathbf{x}}\, \mathrm{d}g_{ab}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\varphi(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\Psi}_1^*[g_{ab}, \varphi]\, \boldsymbol{\Psi}_2[g_{ab}, \varphi] \qquad (2.14)$$

плохо определены (расходятся) в силу квантовых связей (2.11), (2.12). Действительно, эти линейные однородные дифференциальные уравнения по (g_{ab}, φ) означают, что их решения не являются интегрируемыми с квадратом (уравнение (2.12), например, означает, что волновая функция является константой вдоль орбит трехмерных пространственных диффеоморфизмов в суперпространстве переменных (g_{ab}, φ), и интегрирование вдоль соответствующих направлений в этом бесконечном пространстве будет расходиться). Все это указывает на то, что приведенный выше формализм квантования Дирака–Уилера–ДеВитта не замкнут: он не содержит явно времени, и в нем отсутствует физически осмысленное внутреннее произведение квантовых состояний. Естественное предположение об источнике этих трудностей заключается в том, что физическое время спрятано (запараметризовано) среди переменных суперпространства 3-метрик и материальных полей или, возможно шире, среди переменных всего фазового пространства. Это предположение подкрепляется дополнительными соображениями о структуре уравнения Уилера–ДеВитта (2.11). Кинетический член в гамильтоновой связи

$$\frac{1}{2}\,G_{ab,\,cd}\,p^{ab}p^{cd} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(p_{ab}\,p^{ab} - \frac{1}{2}\,p^2\right),$$

$$p \equiv g_{ab}\,p^{ab}, \qquad p_{ab} \equiv g_{ac}\,g_{bd}\,p^{cd} \tag{2.15}$$

является знаконеопределенным, и суперметрика ДеВитта имеет гиперболическую сигнатуру

$$\mathrm{Sign}\,G_{ab,\,cd} = (-+++++) \tag{2.16}$$

с "времениподобным" знаком в секторе конформной моды 3-метрики, поэтому уравнение Уилера–ДеВитта может быть интерпретировано как гиперболическое дифференциальное уравнение, описывающее распространение волновых функций во времени, спрятанном в конформной моде суперпространства.

Такая интерпретация поднимает каноническое квантование Дирака–Уилера–ДеВитта на новый концептуальный уровень аналогично тому, как на заре квантовой теории поля замена уравнения Шрёдингера для релятивистской частицы уравнением Клейна–Гордона привела к вторичному квантованию и описанию процессов с переменным числом частиц. В случае квантовой гравитации такую процедуру принято называть третичным квантованием, которое призвано описывать процессы рождения и уничтожения множественных вселенных. По крайней мере качественно можно утверждать, что необходимость множественных вселенных в "клейн-гордоновской" трактовке уравнения Уилера–ДеВитта следует из свойств внутреннего произведения на пространстве его решений.

В силу гиперболического характера этого уравнения и по аналогии с релятивистской частицей сохраняющееся внутреннее произведение должно иметь вид потока через некоторую поверхность Σ в суперпространстве

$$(\boldsymbol{\Psi}_1|\boldsymbol{\Psi}_2) = \int_\Sigma \boldsymbol{\Psi}_1^{*}\,{}^{''}\left\{\prod_{\mathbf{x}} \mathrm{d}\Sigma^{ab}(\mathbf{x})\times \right.$$

$$\left.\times\left(G_{ab,\,cd}\,\frac{\hbar\overrightarrow{\delta}}{\mathrm{i}\delta g_{cd}(\mathbf{x})} - \frac{\hbar\overleftarrow{\delta}}{\mathrm{i}\delta g_{cd}(\mathbf{x})}\,G_{ab,\,cd}\right)\right\}^{''}\boldsymbol{\Psi}_2\,. \tag{2.17}$$

Аналогично формуле (2.11) кавычки обозначают здесь символический характер этого выражения, предложенного ДеВиттом в [6]. Правая часть этого уравнения должна строиться из соображения независимости потока от выбора поверхности Σ, основанного на локальном законе сохранения для квазиклейнгордоновского тока уравнения ДеВитта (2.11) и суперимпульсных связей (2.12). Однако в квантовой космологии даже вопрос о размерности Σ не является вполне тривиальным: эта поверхность не является гиперповерхностью и, следовательно, соответствующий закон сохранения базируется не на теореме Гаусса, а на теореме Стокса.

Обратим внимание, что уравнения (2.11), (2.12) образуют не одно уравнение типа Клейна–Гордона, а систему $1\times\infty^3$ уравнений Уилера–ДеВитта второго порядка (одно уравнение на каждую пространственную точку) и $3\times\infty^3$ суперимпульсных уравнений первого порядка. Очевидно, что совокупность этих $4\times\infty^3$ уравнений позволяет сформулировать такое же количество локальных законов сохранения типа уравнений непрерывности [56], а следовательно, в силу дуальности в суперпространстве 3-мерных метрик размерности $6\times\infty^3$ глобальный закон сохранения, основанный на теореме Стокса, может быть сформулирован для потока через поверхность размерности $6\times\infty^3 - 4\times\infty^3 = 2\times\infty^3$. Это число есть просто формальная размерность поверхности Коши для системы уравнений (2.11), (2.12), а саму поверхность Σ можно рассматривать как поверхность начальных данных.

Каждое из $1\times\infty^3$ уравнений Уилера–ДеВитта генерирует локальный сохраняющийся ток клейн-гордоновского типа, включающий первые производные волновой функции по суперпространственным координатам $\overleftrightarrow{\delta}/\delta g_{ab}(\mathbf{x})$, и это объясняет наличие произведения по точкам $\mathbf{x}$ таких сомножителей в (2.17). Сохраняющиеся токи суперимпульсных уравнений (2.12) не содержат производных по g_{ab}, поэтому их вклад ультралокален в суперпространстве и включен в определении (2.17) в меру $\mathrm{d}\Sigma^{ab}$. Формальный вид этой меры, как и описание самой поверхности Σ, будут даны ниже.

После этих обширных комментариев по поводу специфики внутреннего произведения (2.17), отличающей его от простейшего случая релятивистской частицы, остановимся на их общих свойствах. Главное, что объединяет формализм уравнений Уилера–ДеВитта и Клейна–Гордона, это знаконеопределенность их сохраняющихся токов: как и для релятивистской частицы, норма вещественной волновой функции равна нулю, а для комплексных волновых функций может быть отрицательной из-за наличия производных $\overleftrightarrow{\delta}/\delta g_{ab}(\mathbf{x})$ со структурой вронскиана в мере внутреннего произведения. В частности, для квазиклассических волновых функций вида

$$\boldsymbol{\Psi}_\pm = P_\pm\,\exp\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\boldsymbol{S}\right), \tag{2.18}$$

где $\boldsymbol{S}$ есть функция Гамильтона–Якоби, удовлетворяющая уравнениям (2.6), (2.7), действие этих производных приводит к возникновению в мере знаконеопределенного фактора

$$\left(\boldsymbol{\Psi}_\pm|\boldsymbol{\Psi}_\pm\right) = \int_\Sigma |P_\pm|^2 \prod_{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\Sigma^{ab}(\mathbf{x})\left(\pm G_{ab,\,cd}\,\frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{cd}(\mathbf{x})}\right), \tag{2.19}$$

что позволяет считать два состояния (2.18) обладающими нормами противоположного знака:

$$\left(\boldsymbol{\Psi}_+|\boldsymbol{\Psi}_+\right) > 0, \qquad \left(\boldsymbol{\Psi}_-|\boldsymbol{\Psi}_-\right) < 0, \tag{2.20}$$

и, следовательно, положительно- и отрицательно-частотными относительно такого выбора ориентации $\mathrm{d}\Sigma^{ab}$, при котором [1]

$$\mathrm{d}\Sigma^{ab}(\mathbf{x})\,G_{ab,\,cd}\,\frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{cd}(\mathbf{x})} > 0\,.$$

[1] Строго говоря, знак бесконечного произведения по континууму точек $\prod_{\mathbf{x}}(-1)$ плохо определен, что указывает на некорректность формализма в представлении функций непрерывного аргумента. Альтернативой ему служит переход к разложению $(g_{ab}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}))$ по дискретному базису некоторых пространственных гармоник, при котором функциональные аргументы суперпространства заменяются на счетные наборы коэффициентов такого разложения. При этом,

Отсутствие положительной определенности внутреннего произведения исключает возможность полноценной вероятностной интерпретации волновой функции $\boldsymbol{\Psi}[g_{ab}, \varphi]$, поскольку естественное в такой ситуации ограничение пространства решений уравнений Уилера–ДеВитта подмножеством положительно-частотных волновых функций приводит к отбрасыванию заведомо хороших с точки зрения классики состояний. Заметим, что квазиклассически два состояния (2.18) отличаются только тем, что описывают движение системы по одной и той же траектории в суперпространстве, но в хронологически противоположных направлениях. В отличие от случая релятивистской частицы суперпространство *apriory* не наделено никакой причинной структурой, поэтому оба направления движения классически допустимы. С другой стороны, суперпространство не имеет "времениподобных" киллинговых симметрий (т.е. суперметрика и потенциальный член уравнения Уилера–ДеВитта являются нетривиальными функциями координат суперпространства), которые могли бы выделить предпочтительные положительно-частотные решения, поэтому построение гильбертова пространства состояний с положительной нормой не единственно [57], что является дополнительным аргументом против ограничения полного пространства решений уравнений Уилера–ДеВитта. В связи с этим широко распространено мнение, что единственной остающейся возможностью является третичное квантование — аналог перехода от квантовой механики релятивистской частицы к квантовой теории поля. Главная прблема — неопределенность скалярного произведения космологических волновых функций — при этом решается автоматически: волновая функция Вселенной перестает быть квантовым состоянием, а становится оператором, действующим в более широком гильбертовом пространстве состояний, в котором мы вольны ввести положительно определенное внутреннее произведение. Это гильбертово пространство описывает не одну квантовую космологическую модель, а множество таковых, при этом операторы положительно-частотных решений уравнения Уилера–ДеВитта генерируют рождение новых вселенных, а отрицательно-частотные операторы — их уничтожение.

Идея третичного квантования помимо чисто технических трудностей сразу же сталкивается с концептуальными проблемами. Дело в том, что успех вторичного квантования существенным образом опирался на причинность и релятивистскую инвариантность теории уравнения Клейна–Гордона. Между тем, как уже отмечалось, теория уравнения Уилера–ДеВитта *apriory* лишена и того, и другого: суперпространство трехмерных метрик является искривленным, в нем существует аналог светового конуса, обусловленного гиперболической сигнатурой суперметрики[2] (2.16), однако этот конус не разделяет прошлого и будущего, и движение классических космологических систем возможно как в обоих направлениях вдоль "времениподобной" координаты, так и вне конуса в "пространственно-подобном" направлении, благо, знакопеременность потенциального члена уравнения Эйнштейна–Гамильтона–Якоби позволяет последнее.

Другая проблема в концепции третичного квантования — это введение взаимодействия, генерирующего квантовые переходы с изменением числа "частиц" — вселенных. Прямая аналогия релятивистской частицы подсказывает, что оно должно описываться нелинейностью в уравнении Уилера–ДеВитта, однако подход к построению этой нелинейности должен, очевидно, опираться не на неизвестные постулаты локальности и причинности в суперпространстве, а на геометрические свойства процессов рождения мини- и макровселенных. Эти процессы геометрически означают переходы с изменением топологии трехмерного пространства, т.е. такую геометрию четырехмерного пространства-времени, что связность его пространственного сечения (количество несвязных компонент или вселенных) может изменяться с ходом времени. Типичная ситуация — это геометрия четырехмерных штанов, погруженная в некое объемлющее многообразие большей размерноси и описывающая распад одной замкнутой вселенной ${}^3\boldsymbol{M}'$ на пару вселенных ${}^3\boldsymbol{M}_1 \cup {}^3\boldsymbol{M}_2$ (рис. 1) или отщепление от открытой вселенной ${}^3\boldsymbol{R}'$ замкнутой модели ${}^3\boldsymbol{M}$ (рис. 2). По крайней мере приближенно взаимодействие третично-квантованной теории должно строиться из квазиклассической

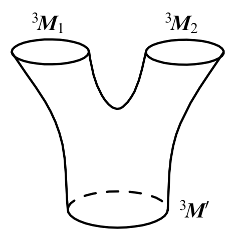

Рис. 1. Четырехмерная геометрия, погруженная в пространство большей размерности и описывающая распад одной замкнутой вселенной ${}^3\boldsymbol{M}'$ на пару вселенных ${}^3\boldsymbol{M}_1 \cup {}^3\boldsymbol{M}_2$.

по-видимому, можно строго показать, что частотность квантового состояния определяется однородной (константной в пространстве) гармоникой такого разложения, в то время как остальные моды, грубо говоря, входят парами и не вносят вклада в знак нормы состояния. Примером этого может являться двумерная модель струны в базисе спаренных право- $(n > 0)$ и лево-движущихся $(n < 0)$ мод и одной пространственно-однородной (нулевой) моды $(n = 0)$. Однородная мода в суперпространстве, как известно, описывает минисуперпространственную редукцию гравитационных систем, поэтому частотность квантовых космологических состояний, по-видимому, определяется минисуперпространственным сектором и квазиклассически зависит от общего знака фазы в (2.18). В действительности можно представить себе еще более сложную ситуацию, когда величина $\mathrm{d}\Sigma^{ab}(\mathbf{x})G_{ab,\,cd}\,\delta\boldsymbol{S}/\delta g_{cd}(\mathbf{x})$ знакопеременна в пространстве. В этом случае, однако, в силу непрерывности этой величины существуют точки, в которых она обращается в нуль, и полная мера в скалярном произведении будет обращаться в нуль из-за соответствующего сомножителя. Такая ситуация соответствует возникновению гравитационного аналога проблемы копий Грибова, о чем речь идет ниже.

[2] С первого взгляда может показаться, что уравнение Уилера–ДеВитта порождает дополнительную проблему, связанную с ультрагиперболическим характером функциональной суперметрики, имеющей сигнатуру (2.16) в каждой точке $\mathbf{x}$ и, следовательно, $1 \times \infty^3$ "времениподобных" координат и $5 \times \infty^3$ — "пространственноподобных". Однако следует иметь в виду, что уравнение Уилера–ДеВитта образует не одно уравнение, а ∞^3 уравнений, которые совместны друг с другом в силу коммутаторной инволюции с суперимпульсными уравнениями (см. (2.5) и ниже). Это эффективно устраняет многомерность "временнóй" координаты в гиперболическом дифференциальном уравнении и устраняет сложности постановки задачи Коши, присущие ультрагиперболическому случаю.

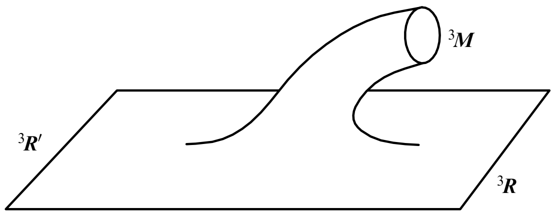

Рис. 2. Отщепление от открытой вселенной $^3\boldsymbol{R}'$ замкнутой модели $^3\boldsymbol{M}$.

амплитуды таких процессов. Однако, как известно, в классической теории с лоренцевой сигнатурой пространства-времени они приводят к нарушению причинности [58], а при квантовании материи запрещены энергетическими соображениями [59]. Поэтому топологические переходы можно надеяться описать такими амплитудами, но в пространстве с евклидовой сигнатурой

$$\exp\left(\mp\frac{1}{\hbar}\,\boldsymbol{I}\right) \tag{2.21}$$

в терминах евклидова гравитационного действия $\boldsymbol{I}$, вычисляемого на соответствующем 4-мерном пространстве-времени. В лагранжевом формализме это действие получается из его лоренцева аналога аналитическим продолжением к мнимому времени

$$t = -\mathrm{i}\tau, \tag{2.22}$$

что формально меняет сигнатуру метрики на положительно-определенную. Области евклидова пространства-времени, интерполирующие между классически разрешенными лоренцевыми 4-геометриями возможно разной топологии — вот физическая картина квазиклассической аппроксимации в теории третичного квантования, которая лежит в основе идеи Сахарова о космологических переходах с изменением сигнатуры метрики [2]. Эта идея реализуется в работах [17, 18, 60] по проблеме квантового происхождения Вселенной, в работах по проблеме гравитационной потери квантовой когерентности и физике кротовых нор [29, 31, 30] .

Итак, как видно, проблема времени в квантовой гравитации и космологии порождает концепцию третичного квантования, которая в свою очередь приводит к идее евклидово-лоренцевых переходов, описывающих в формализме мнимого времени эффекты гравитационного туннелирования. В следующем разделе мы рассмотрим возможные альтернативы этой конструкции.

3. Типы квантования гравитации и состояние искусства: квазиклассические методы

Предложенная в предыдущем разделе схема фактически только обрисовывает перспективы замкнутой физической теории с рабочим математическим аппаратом, который еще предстоит построить. Альтернативный подход (или подходы) может быть основан на более ортодоксальном методе квантования динамических систем со связями, позволяющем избежать принципиально новых концепций, а следовательно, не вставать перед необходимостью новых физических постулатов, идей множественности квантовых космологических вселенных, топологических переходов и т.д. Здесь мы остановимся на таких методах и фактически убедимся, что они в силу внутренних трудностей формализма снова приводят к необходимости или желательности третичного квантования. В главном эти трудности заключаются в отсутствии глобальной применимости теории на ее полном фазовом пространстве. Ограничение локальным или квазилокальным рассмотрением на конфигурационном или фазовом пространстве не позволяет выйти за пределы квазиклассического разложения, которое, как известно, пробует только инфинитезимальную окрестность решений классических уравнений. Это, в частности, объясняет, почему мы готовы ограничиться петлевым разложением, не говоря уже о том, что последнее является пока единственным методом, применимым к реалистическим задачам более или менее общего вида. Как мы увидим, взгляд с этой стороны позволяет, однако, разрешить ряд проблем, сформулированных выше, или сделать их постановку более ясной и строгой.

3.1. Метод квазиклассического времени

Исторически первый и, по-видимому, наиболее плодотворный с точки зрения приложений метод введения времени в квантовой космологии основан на квазиклассическом приближении по гравитационному полю [6, 61, 62]. В этом приближении волновую функцию ищут в виде

$$\boldsymbol{\Psi}[g_{ab},\,\varphi] = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\boldsymbol{S}[g_{ab}]\right)|\Psi[g_{ab}]\rangle\,, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{S}[g_{ab}]$ представляет собой функцию Гамильтона–Якоби чистого гравитационного поля, удовлетворяющую вакуумной системе уравнений (2.6), (2.7) без вкладов материи $H_\perp^{\mathrm{mat}}$ и H_a^{mat}, а дираковские бра-, кет-обозначения используются для квантовых состояний в гильбертовом пространстве только материальных полей (которое хорошо определено и обладает положительной нормой, поскольку представляет обычную квантовую теорию поля в искривленном пространстве). Подстановка (3.1) в уравнения Уилера–ДеВитта приводит к новым уравнениям для вектора состояния материальных полей $|\Psi[g_{ab}]\rangle$, параметрически зависящего от метрики:

$$''\left\{\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,G_{ab,\,cd}\,\frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta g_{ab}}\,\frac{\delta}{\delta g_{cd}} + \hat{H}_\perp^{\mathrm{mat}}(g_{ab}) + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\,G_{ab,\,cd}\,\frac{\delta^2\boldsymbol{S}}{\delta g_{ab}\delta g_{cd}} - {} - \frac{\hbar^2}{2}\,G_{ab,\,cd}\,\frac{\delta^2}{\delta g_{ab}\delta g_{cd}}\right\}''\,|\Psi[g_{ab}]\rangle = 0, \tag{3.2}$$

$$''\left\{-2\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,g_{ab}\nabla_c\,\frac{\delta}{\delta g_{bc}} + \hat{H}_a^{\mathrm{mat}}(g_{ab})\right\}''\,|\Psi[g_{ab}]\rangle = 0. \tag{3.3}$$

В квазиклассическом приближении по гравитационному полю и *при малой обратной реакции квантованной материи на метрический фон* эти уравнения можно решать итерациями по степеням слагаемых второго порядка по функциональным производным, что будет фактически представлять собой разложение по малому параметру отношения плотности энергии квантованной материи к планковской. В низшем порядке можно просто пренебречь третьим и четвертым слагаемыми в (3.2) и рассмотреть $|\Psi[g_{ab}]\rangle$ на решении классических вакуумных уравнений Эйнштейна $g_{ab}(\mathbf{x}, t)$, соответствующем функции Гамильтона–Якоби $\boldsymbol{S}[g_{ab}]$:

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi[g_{ab}(\mathbf{x}, t)]\rangle \,. \tag{3.4}$$

При некотором выборе функций хода и сдвига $(N^{\perp}, N^a)$ это решение удовлетворяет каноническим уравнениям

$$\dot{g}_{ab}(t) = N^{\perp} G_{ab,\,cd}\,\frac{\delta \boldsymbol{S}}{\delta g_{cd}} + 2\nabla_{(a}N_{b)}, \tag{3.5}$$

так что квантовое состояние материи (3.4) оказывается удовлетворяющим эволюционному уравнению, получаемому подстановкой (3.5) в

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\big|\Psi(t)\big\rangle = \int \mathrm{d}^3x\,\dot{g}_{ab}\,\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\,\big|\Psi[g_{ab}]\big\rangle \tag{3.6}$$

и учетом (3.2), (3.3). Результат в низшем порядке — уравнение Шрёдингера квантованных материальных полей во внешнем классическом гравитационном поле, определяющем введенное таким образом квазиклассическое время:

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\big|\Psi(t)\big\rangle = \int \mathrm{d}^3x\big\{N^{\perp}\hat{H}^{\mathrm{mat}}_{\perp} + N^a\hat{H}^{\mathrm{mat}}_a\big\}\big|\Psi(t)\big\rangle\,. \tag{3.7}$$

Такой способ вывода квантовой теории поля из уравнения Уилера–ДеВитта, восходящий на модельном уровне к классической работе ДеВитта [6] и для гравитационных систем общего вида, осуществленный Лапчинским и Рубаковым [61], является наиболее употребительным и фактически единственным в настоящее время удобным способом интерпретации космологической волновой функции. Он устанавливает мост между фундаментальной квантовой космологией и прикладной физикой ранней вселенной. Физически этот способ означает, что функцию временнóй переменной выполняет гравитационный фон, квантовыми свойствами которого пренебрегают, в то время как квантование всецело осуществляется в секторе материальных полей.

К сожалению, несмотря на прикладную значимость этого метода, он не является фундаментальным, поскольку не позволяет регулярным образом учитывать квантовые свойства гравитационного фона даже по теории возмущений. Дело в том, что попытка решения уравнений (3.2), (3.3) за пределами низшего порядка по квантово-гравитационным членам приводит к цепочке рекуррентных уравнений для квантовых поправок, которые уже не имеют вида однородного уравнения Шрёдингера и, следовательно, не имеют простой интерпретации в терминах унитарной эволюции [3]. Попытка последовательного унитарного квантования гравитации предлагается в следующем разделе и представляет собой квантование в редуцированном фазовом пространстве, рассмотренное впервые в гравитационном контексте Арновиттом, Дезером и Мизнером (АДМ) [9].

3.2. Квантование Арновитта–Дезера–Мизнера

Эйнштейновская квантовая гравитация является частным случаем общей теории систем со связями первого рода. Для последней существуют хорошо разработанные (и эквивалентные) методы квантования по крайней мере для построения пертурбативной матрицы рассеяния, удовлетворяющей условию унитарности [55, 10, 64]. Отправной точкой всех этих методов является редукция теории к физическим переменным в унитарной (канонической) калибровке. Эта процедура редукции, как и последующее квантование, предполагает сложный функциональный формализм. Чтобы его преодолеть, нам понадобятся конденсированные обозначения ДеВитта [6]. Суть их заключается в том, чтобы формально представить сложную полевую систему в терминах квантовомеханической модели с конечной размерностью фазового пространства и пространства локальных калибровочных преобразований, генерируемых связями. Это достигается введением таких обозначений для фазовых координат теории

$$q^i = \big(g_{ab}(\mathbf{x}),\, \varphi(\mathbf{x})\big), \qquad p_i = \big(p^{ab}(\mathbf{x}), p_{\varphi}(\mathbf{x})\big), \tag{3.8}$$

в которых конденсированный индекс i включает как дискретные изотопические индексы, так и трехмерную пространственную координату $\mathbf{x}$. Аналогичные обозначения для связей

$$H_{\mu}(q,\,p) = \big(H_{\perp}(\mathbf{x}),\, H_a(\mathbf{x})\big) \tag{3.9}$$

подразумевают, что калибровочный индекс μ "нумерует" супергамильтониан и суперимпульсы теории, а также их пространственные координаты. Заметим, что в этих обозначениях функциональная зависимость от полевых фазовых переменных представляется в виде функций на фазовом пространстве (q^i, p_i), а свертка конденсированных индексов наряду с дискретным суммированием по спиновым числам включает также и интегрирование по $\mathbf{x}$. В конденсированных обозначениях каноническое действие (2.1) имеет простой вид

$$\boldsymbol{S}[q,\,p,\,N] = \int \mathrm{d}t\,\big\{p_i\,\dot{q}^i - N^{\mu}H_{\mu}(q,p)\big\}, \tag{3.10}$$

а его система вариационных уравнений

$$\dot{q}^i = \{q^i,\,H_{\mu}\}\,N^{\mu}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H_{\mu}\}N^{\mu}, \tag{3.11}$$

$$H_{\mu}(q,\,p) = 0 \tag{3.12}$$

сохраняет связи во времени и оставляет совершенно произвольными лагранжевы множители N^{μ} — функции хода и сдвига, поскольку $H_{\mu}(q,\,p)$ являются связями первого класса. Их алгебра скобок Пуассона (2.5) в конденсированных обозначениях может быть записана как

$$\{H_{\mu},\,H_{\nu}\} = U^{\alpha}_{\mu\nu}\,H_{\alpha} \tag{3.13}$$

с некоторыми структурными функциями $U^{\alpha}_{\mu\nu} = U^{\alpha}_{\mu\nu}(q)$. Супергамильтонова и суперимпульсные связи

[3] Например, третий член в уравнении (3.2) $(\hbar/2\mathrm{i})$"$G_{ab,\,cd}\delta^2\boldsymbol{S}/\delta g_{ab}\delta g_{cd}$" эффективно порождает в уравнении Шрёдингера антиэрмитов вклад в гамильтониан [63], однако неунитарная интерпретация его была бы неверна: этот член отвечает за расхождение конгруенции классических гравитационных траекторий, описываемых функцией Гамильтона–Якоби $\boldsymbol{S}$, и может быть правильно (унитарно) учтен с помощью однопетлевого предэкспонециального фактора типа Паули–Ван Флека и правильной меры в скалярном произведении в *полном* пространстве полей. Однако такие поправки выходят за рамки метода квазиклассического времени и требуют квантования *всех* мод поля (см. следующий раздел).

$H_\mu = (H_\perp, H_a)$, соответственно квадратичная и линейные по фазовым импульсам p_i, в этих обозначениях имеют вид

$$H_\perp = \frac{1}{2}\, G_\perp^{ik} p_i p_k + V_\perp , \qquad H_a = \nabla_a^i p_i \, . \tag{3.14}$$

Здесь индексы $\perp = (\perp, \mathbf{x})$ и $a = (a, \mathbf{x})$ также предполагаются конденсированными, $G_\perp^{ik}$ представляет собой ультралокальный трехточечный объект, содержащий матрицу контравариантной суперметрики ДеВитта, $V_\perp$ обозначает потенциальный член супергамильтоновой связи, а ∇_a^i — генератор инфинитезимального пространственного диффеоморфизма переменной q^i. В секторе гравитационных переменных $G_\perp^{ik}$ и ∇_a^i имеют вид следующих δ-образных ядер:

$$G_\perp^{ik} = G_{ab,cd}\,\delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)\,\delta(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{x}_k) , \qquad i = (ab, \mathbf{x}_i) ,$$
$$k = (cd, \mathbf{x}_k) , \qquad \perp = (\perp, \mathbf{x}_\perp) , \tag{3.15}$$

$$\nabla_a^i = -2 g_{a(b}\nabla_{c)}\,\delta(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_i) ,$$
$$i = (bc, \mathbf{x}_i) , \qquad a = (a, \mathbf{x}_a) , \tag{3.16}$$

которые при подстановке в (3.14) и интегрировании по координатам дают локальные гравитационные связи [4].

Последовательное рассмотрение как квантовой, так и классической динамики в теории со связями первого рода заключается в наблюдении, что, во-первых, фазовые переменные теории не являются независимыми, а подчинены этим связям (3.12) и, во-вторых, являются предметом калибровочных преобразований, генерируемых связями, с локальным параметром $\mathcal{F}^\mu = \mathcal{F}^\mu(t)$:

$$\delta q^i = \{q^i, H_\mu\}\mathcal{F}^\mu , \qquad \delta p_i = \{p_i, H_\mu\}\,\mathcal{F}^\mu \, . \tag{3.17}$$

Поэтому истинных динамически независимых степеней свободы в теории много меньше, чем исходных пар фазовых переменных (q^i, p_i). Для их получения нужно решить связи и в оставшемся наборе переменных, отделить физические фазовые переменные (ξ^A, π_A) от чисто калибровочных степеней свободы. Если размерность исходного фазового пространства обозначить через $2n$ (в конечномерном контексте $i = 1, 2, \ldots, n$), а размерность пространства связей — через m, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, то размерность физического фазового пространства будет равна $2(n-m)$, $A = 1, 2, \ldots, n-m$. Технически переменные последнего получаются путем наложения на (q^i, p_i) m канонических дополнительных условий

$$\chi^\mu(q, p, t) = 0 \tag{3.18}$$

и решения полной системы $2m$ уравнений связей и калибровок относительно $2n$ неизвестных (q^i, p_i) в терминах физических координат и импульсов (ξ^A, π_A). Канонический характер последних гарантируется тем, что исходная симплектическая форма $p_i \dot{q}^i$ переходит в симплектическую форму на физическом фазовом пространстве $\pi_A \dot{\xi}^A$ плюс возможный вклад в гамильтониан, обусловленный нестационарностью канонического преобразования.

Условием выделения физического подпространства с помощью калибровки (3.18) является трансверсальность поверхности калибровки к орбите калибровочного преобразования (3.17). Это обеспечивается невырожденностью функциональной матрицы оператора Фаддеева–Попова:

$$J_\nu^\mu \equiv \{\chi^\mu, H_\nu\} , \qquad J = \det J_\nu^\mu \neq 0 \, . \tag{3.19}$$

Это же условие обеспечивает локальную разрешимость системы связей (3.12) и калибровок (3.18) при редукции к физическим переменным, а также единственность выбора лагранжевых множителей — функций хода и сдвига N^μ. Последние находятся из требования сохранения калибровок во времени, т.е. из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\chi^\mu = \{\chi^\mu, H_\nu\}\, N^\nu + \frac{\partial \chi^\mu}{\partial t} = 0 \, , \tag{3.20}$$

которое имеет единственное решение относительно N^μ при условии (3.19):

$$N^\mu = -J^{-1\mu}_{\ \ \nu}\, \frac{\partial \chi^\nu}{\partial t} \, , \tag{3.21}$$

где $J^{-1\mu}_{\ \ \nu}$ — обратный к J_ν^μ оператор.

Уравнения связей (3.12) и калибровок (3.18) выделяют в полном фазовом пространстве $2(n-m)$-мерное физическое подпространство, и это погружение, вообще говоря, нетривиально перемешивает координаты и импульсы. Такую ситуацию можно существенно упростить, выбирая функции калибровки (3.18) не зависящими от импульсов p_i:

$$\chi^\mu(q, t) = 0, \tag{3.22}$$

так что физические координаты ξ^A могут быть выбраны погруженными в n-мерное суперпространство координат q^i, а канонический характер переменных (ξ^A, π_A) просто следует из их построения. Действительно, уравнение (3.22) уже описывает погружение некоторого $(n-m)$-мерного подмногообразия Σ в n-мерное суперпространство, которое может быть параметризовано произвольными внутренними координатами ξ^A:

$$q^i = e^i(\xi^A, t) , \qquad \chi^\mu\big(e^i(\xi^A, t), t\big) \equiv 0. \tag{3.23}$$

Без ограничения общности их можно считать физическими конфигурационными координатами теории. При этом из преобразования симплектической формы

$$p_i \dot{q}^i = p_i\, \frac{\partial e^i(\xi, t)}{\partial \xi^A}\, \dot{\xi}^A + p_i\, \frac{\partial e^i(\xi, t)}{\partial t} \tag{3.24}$$

следует, что импульсы, сопряженные ξ^A, равны проекциям ковектора p_i на поверхность Σ:

$$\pi_A = p_i\, e_A^i , \qquad e_A^i \equiv \frac{\partial e^i\,(\xi, t)}{\partial \xi^A} \, , \tag{3.25}$$

а физический гамильтониан с точностью до знака численно совпадает со вторым слагаемым в (3.24), поскольку на решениях уравнений связи полный лагран-

[4] Заметим, что сам объект $G_\perp^{ik}$ не является суперметрикой ДеВитта, поскольку содержит по сравнению с последней дополнительную δ-функцию (см. (3.15)). Только функциональная свертка $G_\perp^{ik}$ с постоянной в пространстве функцией хода $N^\perp = 1$ превращает эту величину в ультралокальную метрику на суперпространстве $G_\perp^{ik} N^\perp = G^{ik} = G_{ab,cd}\,\delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)$.

жиан в действии (3.10) сводится к симплектической форме $p_i\,\dot q^i$.

Уравнения (3.25) определяют касательные проекции импульса p_i на поверхность Σ в терминах физических степеней свободы. Дополняя эти $n-m$ уравнений m уравнениями связей, мы получаем систему, которая может быть разрешена относительно всех компонент импульса $p_i=p_i(\xi^A,\,\pi_A,t)$, при этом условием такой разрешимости снова является невырожденность матрицы Фаддеева–Попова (3.19) [8]. Вместе с уравнениями (3.23) это завершает процедуру классической редукции к физическим степеням свободы. В физическом фазовом пространстве каноническое действие приобретает вид

$$S\left[\xi,\pi\right]=\int \mathrm{d}t\left[\pi_A\dot\xi^A-H_{\mathrm{phys}}(\xi,\pi,t)\right] \tag{3.26}$$

с физическим гамильтонианом

$$H_{\mathrm{phys}}(\xi,\pi,t)=-p_i\left(\xi^A,\pi_A,t\right)\frac{\partial e^i(\xi,t)}{\partial t}\,, \tag{3.27}$$

а все исходные фазовые переменные (q^i,p_i) и лагранжевы множители N^μ построены как функции физических координат и импульсов [8, 56]:

$$\begin{aligned} &q^i=e^i(\xi^A,t),\qquad p_i=p_i(\xi^A,\,\pi_A,\,t),\\ &N^\mu=-J^{-1\mu}_{\ \ \nu}\,\frac{\partial\chi^\mu}{\partial t}\bigg|_{q^i=e^i(\xi^A,\,t),\,p_i=p_i(\xi^A,\,\pi_A,\,t)}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Как видно, результатом редукции к физическим переменным является решение проблемы времени: действие (3.26) приобретает ненулевой гамильтониан, и это достигается ценой наложения канонической калибровки (3.22), *явно* зависящей от параметра времени t. Нестационарность калибровки генерирует движение физической поверхности $\Sigma(t)$ в суперпространстве: $q^i=e^i(\xi,t)$, и ненулевые значения функций хода и сдвига (3.28). Существует очень наглядная интерпретация этого явления. Геометрически инвариантный смысл функций хода $N^\perp$ и сдвига N^a заключается в том, что они являются нормальной и касательными проекциями четырехмерной скорости $\dot X^\alpha(t,\mathbf{x})\equiv \mathrm{d}X^\alpha(t,\mathbf{x})/\,\mathrm{d}t$, с которой пространственно-подобное сечение $x^\alpha=X^\alpha(t,\mathbf{x})$ движется в четырехмерном пространстве-времени с координатами x^α [54]:

$$N^\perp=-n_\alpha\dot X^\alpha(t,\mathbf{x}),\qquad N^a=g^{ab}e^\alpha_b\,{}^4g_{\alpha\beta}\dot X^\beta(t,\mathbf{x})$$

((n_α,e^α_b) образует базис нормали и тройки касательных векторов к гиперповерхности $t=\mathrm{const}$). Это означает, что нестационарная поверхность $\Sigma(t)$ отвечает за концепцию локального времени (many-fingered time) в суперпространстве переменных q^i: локальные вариации этой поверхности, параметризованные параметром t, локально генерируют вариации функций хода и сдвига, а следовательно, и локальные вариации гиперповерхности постоянного времени в четырехмерном пространстве. С точки зрения динамики, введение времени и ненулевого гамильтониана является результатом нестационарного контактного канонического преобразования от исходных переменных $(q^i,\,p_i)$ к физическим $(\xi^A,\,\pi_A)$. Эта процедура является обратной к хорошо известному каноническому преобразованию от текущих канонических переменных к постоянным во времени начальным данным, тривиальная динамика которых определяется нулевым гамильтонианом.

Формальное квантование теории, редуцированной к физическим переменным, не представляет труда. Фазовые переменные $(\xi^A,\,\pi_A)$ независимы и на квантовом уровне становятся операторами, удовлетворяющими гейзенберговским коммутационным соотношениям

$$[\hat\xi^A,\,\hat\pi_B]=\mathrm{i}\hbar\delta^A_B\,.$$

В терминах этих эрмитовых операторов должен быть эрмитово реализован квантовый гамильтониан $\hat H_{\mathrm{phys}}$, который будет определять унитарную динамику физических состояний $|\Psi(t)\rangle$ в гильбертовом пространстве представления гейзенберговских коммутационных соотношений:

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle=\hat H_{\mathrm{phys}}\left|\Psi(t)\right\rangle. \tag{3.29}$$

В координатном представлении $\left(\xi|\Psi(t)\right\rangle=\Psi(\xi,t)$, $\hat\xi=\xi$, $\hat\pi=\hbar\partial/\mathrm{i}\partial\xi$ положительно определенное скалярное произведение векторов состояний с единичной мерой интегрирования, $\mathrm{d}\xi=\prod_A\,\mathrm{d}\xi^A$

$$(\Psi_1|\Psi_2)=\int\mathrm{d}\xi\,\Psi_1^*(\xi)\,\Psi_2(\xi) \tag{3.30}$$

будет интегралом движения уравнения Шрёдингера. Знание операторной реализации исходных переменных теории (3.28) с нужными свойствами эрмитовости позволит тогда вычислять средние значения и матричные элементы всех необходимых наблюдаемых теории.

Квантование АДМ в физическом фазовом пространстве образует внутренне замкнутую теорию, по крайней мере с точностью до проблемы операторной реализации физического гамильтониана и других наблюдаемых. В некалибровочной теории общего вида, эта проблема не имеет внутреннего решения без апелляции к эксперименту. Строго говоря, в теории со связями ситуация аналогична, однако степень свободы в операторной реализации физического гамильтониана здесь ниже, поскольку калибровочная теория, даже будучи редуцированной к физическому сектору в некоторой калибровке, сохраняет следы локальной калибровочной инвариантности, явной в исходных переменных (q^i,p_i,N^μ). В первую очередь эта инвариантность проявляется в свойствах зависимости формализма квантования АДМ от выбора калибровки. Очевидно, что две схемы квантования в теориях, полученных редукцией одной и той же калибровочной теории в двух разных калибровках, должны давать физически эквивалентные результаты, поскольку изменение калибровки может быть имитировано калибровочным преобразованием. Это требование, тривиально выполняющееся в классическом приближении, очевидным образом накладывает некоторые ограничения на квантовые члены в операторной реализации гамильтониана и других наблюдаемых. Конструктивно это свойство было реализовано в калибровочных теориях в виде утверждения о независимости матрицы рассеяния от используемой при ее построении калибровки, однако оно было доказано не на языке редукции к физическому сектору, а в более широких схемах типа БРСТ (БВФ) [10] и преимущественно на языке формального континуального интеграла, игнорирующего расстановку локальных некоммутирующих операторов, взятых в одной точке. В следующем разделе мы дадим набросок того, как такая эквивалентность квантовых схем АДМ в разных калибровках может быть сформулирована (по крайней мере в однопетлевом приближении) в виде их унитарной эквивалентности одной схеме квантования Дирака–Уилера–ДеВитта со специальным скалярным произведением [65, 8, 56].

3.3. Унитарное отображение между схемами квантования Арновитта–Дезера–Мизнера и Дирака–Уилера–ДеВитта

Заметим, что поверхность физического пространства Σ в предыдущем разделе напоминает поверхность, рассмотренную в разделе 2 и использованную для построения сохраняющегося внутреннего произведения в пространстве решений уравнения Уилера–ДеВитта. Это наблюдение наводит на мысль, а не являются ли всевозможные схемы квантования АДМ своего рода проекциями единого (и не зависящего от выбора калибровок) формализма квантования Дирака–Уилера–ДеВитта в суперпространстве? Ответ на такой вопрос оказывается утвердительным в однопетлевом приближении и для квазиклассических состояний определенного типа.

Возвращаясь к содержанию раздела 2 в конденсированных обозначениях ДеВитта, отметим в первую очередь, что квантовые дираковские связи на физические состояния (2.11), (2.12)

$$\hat{H}_\mu|\boldsymbol{\Psi}\rangle = 0 \tag{3.31}$$

должны удовлетворять условиям совместности, которые являются квантовым обобщением алгебры скобок Пуассона (3.13):

$$[\hat{H}_\mu,\, \hat{H}_\nu] = \mathrm{i}\hbar \hat{U}^\lambda_{\mu\nu}\, \hat{H}_\lambda\,. \tag{3.32}$$

Замечательно то, что эти условия, рассматриваемые как уравнения для неизвестных операторов $\hat{H}_\mu$, $\hat{U}^\lambda_{\mu\nu}$, удовлетворяющих принципу соответствия с классикой, могут быть решены в сублидирующем приближении по постоянной Планка [56]. Ответ может быть представлен в виде нормального qp-упорядочения $\mathcal{N}_{qp}$ (импульсы стоят справа от координат) c-числовых символов, которые разлагаются по степеням $\hbar$:

$$\hat{H}_\mu = \mathcal{N}_{qp}\left\{H_\mu - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,\frac{\partial^2 H_\mu}{\partial q^i\,\partial p_i} + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,U^\nu_{\mu\nu} + O(\hbar^2)\right\}, \tag{3.33}$$

$$\hat{U}^\lambda_{\mu\nu} = \mathcal{N}_{qp}\left\{U^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,\frac{\partial^2 U^\lambda_{\mu\nu}}{\partial q^i\,\partial p_i} - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,U^{\lambda\sigma}_{\mu\nu\sigma} + O(\hbar^2)\right\}. \tag{3.34}$$

Этот результат справедлив для теорий с неприводимыми связями первого класса самого общего вида и включает высшие структурные функции $U^{\lambda\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ калибровочной алгебры [64], которые равны нулю в эйнштейновской теории гравитации.

Более того, в теории гравитации со связями вида (3.14), квадратичными и линейными по ипульсам, существует формальная операторная реализация, замыкающая коммутаторную алгебру (3.32) точно вне рамок теории возмущений по $\hbar$ [66]. Она совпадает с (3.33), (3.34) в однопетлевом приближении и получается из классических гравитационных связей (3.34) путем замены импульсов p_i на функциональные производные $\mathcal{D}_i$, ковариантные относительно римановой связности, построенной по суперметрике ДеВитта, и путем добавления в качестве антиэрмитовой части функционального следа структурных функций $\mathrm{i}\hbar U^\nu_{\mu\nu}/2$:

$$\hat{H}_\perp = -\frac{\hbar^2}{2}\,G^{ik}_\perp \mathcal{D}_i \mathcal{D}_k + V_\perp + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,U^\nu_{\perp\nu},$$
$$\hat{H}_a = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\nabla^i_a\,\mathcal{D}_i + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\,U^\nu_{a\nu}\,. \tag{3.35}$$

При этом в определении ковариантных производных предполагается, что волновая функция $\boldsymbol{\Psi}(q)$, на которую они действуют, является *скалярной плотностью веса 1/2*. В гравитационном секторе $q^i = g_{ab}(\mathbf{x})$ контравариантная суперметрика G^{ik} была определена в сноске, следующей за уравнениями (3.15), (3.16), что может быть переписано в конденсированных обозначениях (и в полном суперпространстве метрики и материи) в виде свертки, превращающей трехиндексный объект в двухиндексный:

$$G^{ik} = G^{ik}_\perp N^\perp\big|_{N^\perp=1}\,. \tag{3.36}$$

Как показано в [8, 66], вследствие замкнутой алгебры связей (3.35), эта суперметрика имеет в качестве векторов Киллинга на суперпространстве генераторы пространственных диффеоморфизмов ∇^i_a,

$$\mathcal{D}^i\nabla^k_a + \mathcal{D}^k\,\nabla^i_a = 0, \qquad \mathcal{D}^i = G^{ik}\,\mathcal{D}_k\,, \tag{3.37}$$

а в силу ее ультралокальности, $G^{ik} \sim \delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)$, ковариантная производная сохраняет не только саму метрику, но и трехиндексный объект $G^{ik}_\perp$: $\mathcal{D}_m G^{ik}_\perp = 0$. Поэтому кинетические члены операторных связей (3.35) не требуют дополнительных прескрипций упорядочения и, более того, являются эрмитовыми относительно *вспомогательного нефизического* внутреннего произведения волновых функций (2.14)

$$\big\langle\boldsymbol{\Psi}_1|\boldsymbol{\Psi}_2\big\rangle = \int \mathrm{d}q\,\boldsymbol{\Psi}^*_1(q)\boldsymbol{\Psi}_2(q)\,. \tag{3.38}$$

Связи (3.35) имеют, однако, также и антиэрмитову часть, пропорциональную следу структурных функций, которая играет важную роль в дальнейшем.

Рассмотрим теперь квазиклассическое приближение для физических квантовых состояний и будем искать решение уравнений Уилера–ДеВитта (3.31) в виде

$$\boldsymbol{\Psi}(q) = \boldsymbol{P}(q)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\boldsymbol{S}(q)\right]. \tag{3.39}$$

Здесь $\boldsymbol{S}(q)$ есть решение уравнений Гамильтона–Якоби, кратко представимых в конденсированных обозначениях как

$$H_\mu\left(q,\,\frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial q}\right) = 0, \tag{3.40}$$

а разложение предэкспоненциального фактора $\boldsymbol{P}(q)$ по степеням $\hbar$ начинается с однопетлевого вклада, которым мы и ограничимся. Знание операторной реализации квантовых связей за пределами древесного приближения позволяет выписать уравнения для этого однопетлевого префактора:

$$\mathcal{D}_i(\nabla^i_\mu \boldsymbol{P}^2) = U^\lambda_{\mu\lambda} \boldsymbol{P}^2\,, \tag{3.41}$$

$$\nabla^i_\mu \equiv \frac{\partial H_\mu}{\partial p_i}\bigg|_{p\,=\,\partial \boldsymbol{S}/\partial q}\,. \tag{3.42}$$

Они имеют вид m уравнений непрерывности, модифицированных ненулевой правой частью, происходящей от антиэрмитовых вкладов в квантовые связи.

Оказывается, что решение этих уравнений квазинепрерывности может быть выписано в замкнутом виде [65, 8, 56]. Наиболее простой вид оно имеет для двухточечного решения квантовых связей, играющего роль пропагатора физических состояний в суперпространстве:

$$\boldsymbol{K}(q,q') = \boldsymbol{P}(q,q') \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\boldsymbol{S}(q,q')\right], \tag{3.43}$$

где $\boldsymbol{S}(q,q')$ есть тоже функция Гамильтона–Якоби по обоим своим аргументам, являющаяся классическим действием (2.8), вычисленным на экстремали, соединяющей начальную q' и конечную q точки в суперпространстве. Искомое решение представляет собой обобщение известного квазиклассического детерминанта Паули–Ван Флека матрицы вторых производных этой функции по концевым точкам экстремали [8]:

$$\boldsymbol{S}_{ik'} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{S}(q,q')}{\partial q^i\,\partial q^{k'}}\,. \tag{3.44}$$

Детерминант этой матрицы равен нулю из-за ее вырожденности, обусловленной нуль-векторами (3.42)

$$\nabla^i_\mu \boldsymbol{S}_{ik'} = 0, \tag{3.45}$$

следующими из дифференцирования уравнений (3.40) по q' (и аналогичными правыми нуль-векторами $\nabla^{k'}_\nu$). Однако существует инвариантная процедура вычисления этого детерминанта на подпространстве невырожденности матрицы (3.44), эквивалентная однопетлевой процедуре фиксации калибровки Фаддеева–Попова, которая приводит к решению уравнения (3.41). Она состоит во введении произвольных ковариантных векторов χ^μ_i в точке q, имеющих невырожденную матрицу скалярных произведений с нуль-векторами ∇^i_μ, и аналогичных векторов $\chi^\nu_{k'}$ в точке q':

$$J^\mu_\nu = \chi^\mu_i \nabla^i_\nu, \qquad J \equiv \det J^\mu_\nu \neq 0,$$
$$J'^\mu_\nu = \chi^\mu_{i'} \nabla^{i'}_\nu, \qquad J' \equiv \det J'^\mu_\nu \neq 0. \tag{3.46}$$

С помощью дополнительной обратимой матрицы $c_{\mu\nu}$ эти векторы позволяют заменить нулевые блоки матрицы $\boldsymbol{S}_{ik'}$ "калибровочным членом", превратив ее в обратимый оператор

$$\boldsymbol{F}_{ik'} = \boldsymbol{S}_{ik'} + \chi^\mu_i c_{\mu\nu} \chi^\nu_{k'}, \tag{3.47}$$

и построить однопетлевой предэкспоненциальный фактор в терминах его детерминанта и детерминантов "Фаддеева–Попова" (3.46):

$$\boldsymbol{P} = \left[\frac{\det \boldsymbol{F}_{ik'}}{JJ' \det c_{\mu\nu}}\right]^{1/2}. \tag{3.48}$$

Это выражение не зависит от выбора вспомогательных объектов $(\chi^\mu_i, \chi^\nu_{k'}, c_{\mu\nu})$, фиксирующих калибровку, в силу некоторого аналога тождеств Уорда [8, 56] и является решением уравнений "непрерывности" (3.41).

Чтобы установить обещанное унитарное отображение между схемой квантования Дирака–Уилера–ДеВитта и квантованием АДМ, рассмотрим теперь проекцию построенного пропагатора (3.43) с предэкспоненциальным фактором (3.48) на физическое подпространство (3.23). Геометрия локального погружения Σ в суперпространство координат q^i детально рассмотрена в [8]. Здесь мы только отметим, что это погружение удобно описывать в специальных координатах на суперпространстве $\bar{q}^i = (\xi^A, \theta^\mu)$, в которых ξ^A являются внутренними координатами на Σ (физическими конфигурационными координатами АДМ), а θ^μ определяются уравнениями калибровок:

$$q^i \to \bar{q}^i = (\xi^A,\, \theta^\mu), \quad q^i = e^i(\xi^A,\, \theta^\mu), \quad \theta^\mu = \chi^\mu(q,t). \tag{3.49}$$

Уравнение поверхности в новых координатах тривиально: $\theta^\mu = 0$, а уравнение погружения (3.23) совпадает с этим уравнением репараметризации при $\theta^\mu = 0$, $e^i(\xi,t) = e^i(\xi,0,t)$. Из этой репараметризации следует связь между мерами интегрирования на суперпространстве $\mathrm{d}q = \mathrm{d}^n q$ и на Σ, $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}^{n-m}\xi$,

$$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}q\,\delta(\chi)\,M, \quad \delta(\chi) = \prod_\mu \delta\big(\chi^\mu(q,t)\big),$$
$$M = \big(\det\,[e^i_A,\, e^i_\mu]\big)^{-1}, \tag{3.50}$$

где якобиан преобразования построен из базиса векторов касательных и нормальных к поверхности Σ:

$$e^i_A = \frac{\partial e^i}{\partial \xi^A}, \qquad e^i_\mu = \frac{\partial e^i}{\partial \theta^\mu}\,.$$

Заметим, что m ковариантных векторов нормалей к Σ записываются как градиенты калибровки

$$\chi^\mu_i = \frac{\partial \chi^\mu}{\partial q^i}, \qquad \chi^\mu_i e^i_\nu = \delta^\mu_\nu, \tag{3.51}$$

с которыми без ограничения общности можно отождествить вспомогательные ковекторы, участвовавшие выше в построении однопетлевого предэкспоненциального фактора. В силу невырожденности оператора Фаддеева–Попова (3.19), совпадающего при таком отождествлении с (3.46), в качестве полного локального базиса можно также выбрать совокупность касательных к Σ векторов e^i_A и векторов (3.42), причем последние перераскладываются по базису (e^i_A, e^i_μ) согласно $\nabla^i_\mu = e^i_\nu J^\nu_\mu + e^i_A(\ldots)^A$, откуда следует соотношение для детерминанта матрицы векторов нового базиса (e^i_A, ∇^i_μ):

$$\det\,[e^i_A,\, \nabla^i_\mu] = \frac{J}{M}\,. \tag{3.52}$$

Проецирование ядра пропагатора (3.43) по своим двум аргументам q и q' на соответствующие два физических пространства $\Sigma(t)$ и $\Sigma(t')$ происходит с использованием очевидного соотношения между функциями Гамильтона–Якоби на суперпространстве $\boldsymbol{S}(q,q')$ и на пространстве физических переменных АДМ

$$S(t,\xi|t',\xi') = \boldsymbol{S}\big(e(\xi,t),\ e(\xi',t')\big) \tag{3.53}$$

и с использованием разложения матрицы $\boldsymbol{F}_{ik'}$ в базисе $(e^i_A,\ \nabla^i_\mu)$ [5]. Результатом проецирования

$$K(t,\xi|t',\xi') = \mathrm{const}\left(\frac{J}{M}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\,\boldsymbol{K}(q,q')\left(\frac{J'}{M'}\right)^{1/2}\bigg|_{q=e(\xi,t),\ q'=e(\xi',t')} \tag{3.54}$$

является однопетлевой унитарный пропагатор квантовой схемы АДМ, даваемый известной формулой Паули–Ван Флека [67]:

$$K(t,\xi|t',\xi') \equiv \left[\det\frac{\mathrm{i}}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial\xi^A\,\partial\xi^{B'}}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,S(t,\xi|t',\xi')\right]. \tag{3.55}$$

Он удовлетворяет уравнению Шрёдингера с эрмитовой операторной реализацией физического гамильтониана (3.27) [6].

Соотношение (3.54) и является искомым унитарным отображением между схемой квантования Дирака–Уилера–ДеВитта в суперпространстве и квантованием АДМ в физических переменных. Это отображение для пропагаторов очевидно переносится на отображение волновых функций $\boldsymbol{\Psi}(q)$ и $\Psi(t,\xi)$ этих двух схем,

$$\Psi(t,\xi) = \left(\frac{J}{M}\right)^{1/2}\boldsymbol{\Psi}(q)\bigg|_{q=e(\xi,t)}, \tag{3.56}$$

и действительно является унитарным при условии того, что физические скалярные произведения этих состояний совпадают в обеих схемах:

$$(\Psi|\Psi) = (\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{\Psi}). \tag{3.57}$$

Отправляясь от скалярного произведения АДМ (3.30) и подставляя в левую часть этого уравнения (3.56), получим в результате замены переменных интегрирования (3.50) выражение для *физического* внутреннего произведения дираковских волновых функций:

$$(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{\Psi}) = \int \mathrm{d}q\,\delta\big(\chi(q,t)\big)\,\boldsymbol{\Psi}^*(q)\,J\,\boldsymbol{\Psi}(q). \tag{3.58}$$

В уравнениях (3.55)–(3.58) заключена суть унитарной редукции от квантования Дирака–Уилера–ДеВитта к схеме квантования АДМ. Квантовые схемы АДМ в различных калибровках (и, следовательно, при различных выборах физического времени и/или в различные моменты одного и того же времени) получаются проецированием суперпространственной волновой функции $\boldsymbol{\Psi}(q)$, не зависящей от калибровок и ничего не знающей о них, на различные физические подпространства Σ. Непротиворечивость этой картины, в первую очередь, определяется независимостью физического внутреннего произведения (3.58) ни от времени, ни от калибровки. В силу унитарности квантовой схемы АДМ это внутреннее произведение не зависит от t, а следовательно, интеграл в правой части (3.58), фактически берущийся по поверхности $\Sigma(t)$ в суперпространстве, не должен зависеть от выбора этой поверхности. Очевидно, что в формализме квантования Дирака–Уилера–ДеВитта это свойство должно быть следствием квантовых связей (3.31) на волновые функции, не зависящим от конкретной редукции АДМ к физическому сектору. Это действительно так в рассматриваемом здесь однопетлевом приближении.

Чтобы показать это, заметим, что мера интегрирования по $\Sigma(t)$ в (3.58) нетривиальна и для квазиклассических состояний вида (3.39) в однопетлевом приближении дается зависящим от состояния определителем Фаддеева–Попова:

$$J = \det\left[\frac{\partial\chi^\mu(q,t)}{\partial q^i}\,\frac{\partial H_\nu(q,p)}{\partial p_i}\right]_{p\,=\,\partial\boldsymbol{S}/\partial q} = \det\,(\chi^\mu_i\nabla^i_\nu). \tag{3.59}$$

Используя то, что $\mathrm{d}q^i = e^i_A\,\mathrm{d}\xi^A$ на Σ и уравнения (3.50) и (3.52), легко переписать внутреннее произведение (3.58) в виде интеграла от внешней $(n-m)$-формы по ориентированной $(n-m)$-мерной поверхности Σ:

$$(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{\Psi}) = \int_\Sigma \omega^{(n-m)}, \tag{3.60}$$

$$\omega^{(n-m)} = \frac{\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}q^{i_{n-m}}}{m!(n-m)!}\times$$
$$\times\,\epsilon_{i_1\ldots i_n}\boldsymbol{\Psi}^*(q)\,\nabla^{i_{n-m+1}}_{\mu_1}\ldots\nabla^{i_n}_{\mu_m}\,\boldsymbol{\Psi}(q)\,\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_m}, \tag{3.61}$$

где $\epsilon_{i_1\ldots i_n} = \pm1$ и $\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_m} = \pm1$ являются полностью антисимметричными тензорными плотностями на n- и m-мерном пространствах соответственно [7]. Используя уравнения непрерывности (3.41) для предэкспоненциального фактора волновых функций и замкнутую алгебру скобок Ли векторных полей ∇^i_μ (следствие замкнутой алгебры связей [8, 56])

$$\nabla^i_\mu\mathcal{D}_i\nabla^n_\nu - \nabla^i_\nu\mathcal{D}_i\nabla^n_\mu = U^\alpha_{\nu\mu}\nabla^n_\alpha\,, \tag{3.62}$$

также легко показать замкнутость этой формы:

$$\mathrm{d}\omega^{(n-m)} = 0. \tag{3.63}$$

Отсюда в силу теоремы Стокса для $(n-m+1)$-мерной поверхности $\mathcal{D}$, осуществляющей кобордизм двух физических (противоположно ориентированных) пространств Σ и Σ' $(\partial\mathcal{D} = \Sigma\cup\Sigma')$,

$$\int_\Sigma\omega^{(n-m)} - \int_{\Sigma'}\omega^{(n-m)} = \int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}\omega^{(n-m)} = 0, \tag{3.64}$$

---

[5] Функция Гамильтона–Якоби системы, редуцированной к физическим переменным АДМ, очевидным образом совпадает с функционалом действия на экстремали, соединяющей точки ξ и ξ' в моменты времени t и t', и удовлетворяет обычному уравнению Гамильтона–Якоби $\partial S/\partial t + H_{\mathrm{phys}}(\xi,\partial S/\partial\xi) = 0$ с ненулевым физическим гамильтонианом (3.27).

[6] Эта реализация аналогична (3.33), (3.34) и удовлетворяет принципу соответствия классике [8, 56]: $\hat{H}_{\mathrm{phys}} = \mathcal{N}_{\xi\pi}[\,H_{\mathrm{phys}} - (\mathrm{i}\hbar/2)\times\times\partial^2 H_{\mathrm{phys}}/\partial\xi^A\partial\pi_A + O(\hbar^2)\,]$.

[7] В контексте бесконечномерного конфигурационного ($n = 6\times\infty^3$) и калибровочного ($m = 4\times\infty^3$) пространств эти тензорные плотности, конечно, носят формальный характер, а факториальные коэффициенты следует понимать как некоторые бесконечные нормировочные множители.

следует независимость внутреннего произведения от выбора Σ, и это простое свойство аккумулирует как унитарность, так и калибровочную независимость формализма квантования Дирака–Уилера–ДеВитта.

Этот интеграл движения уравнений Уилера–ДеВитта представляет собой не что иное, как квазиклассический закон сохранения их тока, обсуждавшийся выше в разделе 2. Сравнение (3.60), (3.61) с (2.17) и (2.19) основано на том, что во внешней форме (3.61) из альтернированного произведения ∇^i_μ, $\nabla^i_\mu = (\nabla^i_\perp, \nabla^i_a)$ можно выделить в качестве сомножителя произведение одних только величин $\nabla^i_\perp$. Если пределы изменения конденсированного индекса $\perp = \mathbf{x}$ условно обозначить как $\perp = 1, 2, \ldots, M$ (фактически $M = \infty^3$), то эта $(n-m)$-форма принимает тогда вид

$$\omega^{(n-m)} = \nabla^{i_1}_1 \ldots \nabla^{i_M}_M \, \mathrm{d}^{n-m} \Sigma_{i_1 \ldots i_M}, \tag{3.65}$$

где мера $\mathrm{d}^{n-m}\Sigma_{i_1\ldots i_M}$ содержит все остальное, включая все элементы фиксации калибровки для пространственных диффеоморфизмов. Учитывая далее, что $\nabla^i_\perp = G^{ik}_\perp \times \times \partial \boldsymbol{S}/\partial q^k$ мы можем в линейном по $\hbar$ приближении прийти к обоим представлениям (2.17) и (2.19) для скалярного произведения квазиклассических волновых функций вида (3.39), рассмотренным во втором разделе [8]:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Psi} | \boldsymbol{\Psi}) &= \int_\Sigma \left| P(q) \right|^2 \left(\prod_\perp G^{i_\perp k}_\perp \, \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial q^k} \right) \mathrm{d}^{n-m} \Sigma_{i_1 \ldots i_M} = \\ &= \int_\Sigma \boldsymbol{\Psi}^*(q) \prod_\perp \frac{\hbar}{2\mathrm{i}} \left(G^{i_\perp k}_\perp \, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q^k} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^k} \, G^{k i_\perp}_\perp \right) \times \\ &\quad \times \boldsymbol{\Psi}(q) \, \mathrm{d}^{n-m} \Sigma_{i_1 \ldots i_M} \,. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Итак, фактически мы показали, что, отправляясь от квантования в физических переменных, полученных редукцией АДМ, мы приходим к схеме квантования Дирака–Уилера–ДеВитта в суперпространстве 3-метрик и материальных полей. При этом, по крайней мере квазиклассически, физическое внутреннее произведение волновых функций АДМ (с тривиальной мерой) совпадает с сохраняющимся током уравнений Уилера–ДеВитта квазиклейнгордоновского типа. В силу сложного неабелевого характера гравитационного поля последний известен только в однопетлевом приближении, как и вся квантовая редукция от формализма Дирака–Уилера–ДеВитта к формализму АДМ. Очевидно, что вся эта операторная схема унитарной эквивалентности может обобщаться на высшие петлевые порядки, и уверенность в этом черпается в мощных теоремах о калибровочной независимости формального функционального интеграла в калибровочных теориях общего вида [9] [10, 64], но тут на сцену снова выступают трудности, обсуждавшиеся в разделе 2, которые, как мы сейчас увидим, снова служат в качестве мотивации к третичному квантованию.

3.4. Проблема копий Грибова, происхождение евклидовых областей и мотивация к третичному квантованию

Редукция АДМ к физическим переменным и интерпретация формализма Дирака–Уилера–ДеВитта в терминах средних (3.58) существенно опираются на невырожденность оператора Фаддеева–Попова как функции на фазовом пространстве (3.19) или как функции на суперпространстве (3.59) в квазиклассической теории Гамильтона–Якоби. Для суперпространственных калибровок вида (3.22) "столбец" этой матрицы $J^\mu_\perp$ линеен по импульсам,

$$J^\mu_\perp(q, p) = \frac{\partial \chi^\mu(q, t)}{\partial q^i} \, G^{ik}_\perp p_k \,, \tag{3.67}$$

и заведомо приводит к ее вырождению на некотором подмножестве, включающем $p_i = 0$. На этом подмножестве определитель $J = \det J^\mu_\nu$ обращается в нуль, а при переходе через него меняет знак. Это означает, что глобально на фазовом пространстве в калибровке такого типа процедура редукции АДМ не работает: нарушается единственность решения уравнений связей относительно импульсов p_i в (3.28), а соответствующие функции хода и сдвига приобретают сингулярность. Такое свойство является каноническим аналогом проблемы копий Грибова [68], когда система уравнений связей и калибровок не выделяет единственного представителя из класса калибровочно-эквивалентных конфигураций в фазовом пространстве. В гравитационном контексте, в котором наложение калибровки одновременно служит для введения времени, оно означает, что введенная временная переменная не покрывает глобально и однозначно динамическую эволюцию физических степеней свободы, т.е. не является функцией, монотонно изменяющейся вдоль классических (и квантовых) историй [10].

На квантовом уровне в однопетлевом приближении это же свойство означает знаконеопределенность внутреннего произведения (3.58), что, согласно обсуждению в разделе 2, приводит к концепции третичного квантования. Последняя, как известно, связана с евклидово-лоренцевыми переходами между состояниями с разной сигнатурой пространства-времени. Нашей целью будет сейчас показать, как переходы такого типа действительно происходят от глобальной неположительности определителя Фаддева–Попова, причем подмногообразия его нулей описывают сечения в пространстве-времени, на которых происходит смена сигнатуры метрики.

---

[8] Строго говоря, полное соответствие с эвристическими формулами (2.17) и (2.19), по-видимому, невозможно, поскольку факторизация меры по точкам пространства в виде $\mathrm{d}^{n-m}\Sigma_{i_1\ldots i_M} = \prod_\perp \mathrm{d}\Sigma_{i_\perp}$ либо недостижима вообще, либо существует в узком классе специальных калибровок.

[9] Заметим, что как в функциональном интеграле калибровочных полей, так и в выражении для внутреннего произведения (3.58) мера интегрирования включает одинаковым образом калибровку и определитель Фаддеева–Попова, а основным отличием является лишь функциональная размерность пространства интегрирования и этого определителя: пространство временных историй против пространства конфигурационных координат в фиксированный момент времени. Поэтому природа калибровочной независимости как независимости от выбора физического пространства, погруженного в более широкое пространство калибровочных полей, и там, и тут одинакова и требует при доказательстве сходных методов.

[10] В частности, при переходе через нуль определителя $J = \det J^\mu_\nu$, вообще говоря, меняется знак функции хода в (3.28), что означает при продолжающемся монотонном росте параметра t фактическое убывание физического времени сопутствующего наблюдателя: $N^\perp \, \mathrm{d}t < 0$. Переход из лоренцева в евклидов режим соответствует смене знака $N^{\perp 2}$, т.е. комплексификации $J^\mu_\perp$.

Из квантовой механики и теории инстантонов калибровочных полей хорошо известно, что формализм мнимого времени (2.22) (или евклидова пространства-времени) служит для описания подбарьерных эффектов квантового туннелирования, связанных с нахождением системы в классически запрещенных областях фазового пространства. Для квантовых состояний вида (3.39) классически запрещенная область в суперпространстве возникает, когда конгруенция экстремалей классических уравнений, определяемых функцией $\boldsymbol{S}(q)$, не достигает точек этой области и отражается от каустики, отделяющей ее от классически доступной части суперпространства. В контексте одномерного конфигурационного пространства это просто точка поворота, а в многомерных задачах каустикой является подмногообразие, которое может быть задано следующим образом. Пусть

$$q^i = q^i(t, \xi') \tag{3.68}$$

представляет поток классических траекторий в суперпространстве, описываемых функцией $\boldsymbol{S}(q)$ и начинающихся при $t = 0$ в точках $\xi' = \xi^{A'}$ начальной поверхности Коши Σ' (физическое пространство АДМ в начальный момент времени). Начальные физические координаты нумеруют отдельные траектории в их пучке (3.68) и производные по ним образуют систему векторов $q^i_{A'} = \partial q^i(t, \xi')/\partial \xi^{A'}$, трансверсальных пучку. Касательные же векторы к траекториям в силу канонических уравнений движения равны

$$\dot{q}^i(t, \xi') = N^\mu \left. \frac{\partial H_\mu}{\partial p_i} \right|_{p = \partial \boldsymbol{S}/\partial q} = N^\mu \nabla^i_\mu\,. \tag{3.69}$$

Каустика возникает, когда конгруенция траекторий сминается так, что касательный к ним вектор попадает в плоскость трансверсальных векторов $q^i_{A'}, \dot{q}^i(t, \xi) = v^A q^i_{A'}$, что означает линейную зависимость $q^i_{A'}$ и ∇^i_μ :

$$\det\,[q^i_{A'}, \nabla^i_\mu] = 0. \tag{3.70}$$

С другой стороны, погружение в суперпространство физического пространства $\Sigma(t)$, которому принадлежит точка (3.68), означает, что

$$q^i(t, \xi') = e^i\big(\xi(t, \xi'), t\big),$$

$$q^i_{A'} = e^i_B u^B_{A'}, \qquad u^B_{A'} \equiv \frac{\partial \xi^B(t, \xi')}{\partial \xi^{A'}}\,, \tag{3.71}$$

где $\xi(t, \xi')$ представляет собой конгруенцию классических траекторий в физическом пространстве АДМ, параметризованных начальными данными ξ', а обратимая матрица $u^B_{A'} = u^B_{A'}(t)$ образует систему базисных функций линеаризованных уравнений движения в редуцированной теории. Следовательно, уравнение огибающей семейства траекторий (3.70) приобретает с учетом (3.52) вид

$$\det\big[e^i_{A'}, \nabla^i_\mu\big]\det u^A_{B'} = \det u^A_{B'}\,\frac{J}{M} = 0. \tag{3.72}$$

Выбор физического погружения в суперпространство нетрудно сделать так, что якобиан M в (3.50) глобально невырожден, поэтому условие каустики в *суперпространстве* распадается на два: условие возникновения каустики в *физическом* конфигурационном пространстве

$$\det u^A_{B'}(t) = 0, \tag{3.73}$$

и/или условие возникновения копий Грибова

$$J = 0. \tag{3.74}$$

В отличие от теории без связей в квантовой гравитации имеется свобода, обусловленная отличием каустики в физическом пространстве Σ от таковой в суперпространстве. Рассмотрение конкретных примеров *многомерного* гравитационного туннелирования, и в частности, в модели квантового рождения хаотической инфляционной вселенной (см. раздел 4) показывает, что существуют каустики в суперпространстве, на которых нет особенностей (3.73), однако выполняется уравнение (3.74) [11], которое поэтому имеет инвариантное содержание и неразрывно связывает их с проблемой копий Грибова. На качественном уровне копии Грибова возникают здесь, когда физическое пространство пересекает классическую экстремаль как минимум дважды: одну ее ветвь до каустики и другую после отражения от каустики. Отсюда и возникает неоднозначность редукции АДМ и неопределенность знака нормы физического состояния, обусловленная тем, что эти ветви вносят вклады противоположных знаков.

Хорошо известно, что продолжение классических траекторий за каустику возможно ценой комплексификации временнóго аргумента в решениях уравнений, простейший пример который дается вращением Вика (2.22), и в общем случае комплексификацией самих конфигурационных переменных. Первый случай наиболее полно изучен в контексте подбарьерных явлений, описываемых инстантонами, в то время как комплексное туннелирование оставалось на втором плане, поскольку в обычных теориях негравитационного типа оно экспоненциально подавлено [69]. В гравитационном контексте "вещественное" туннелирование, которое носит название евклидовой квантовой гравитации, также интенсивно изучалось [70, 71] и служило основой для физики кротовых нор [30]. Им, однако, не исчерпывается теория гравитационного туннелирования [69], и одно из наиболее интересных приложений евклидовой квантовой гравитации — теория квантового происхождения инфляционной вселенной — сталкивается за пределами лидирующего приближения с комплексными полями и геометриями. Здесь мы не будем рассматривать комплексное туннелирование, элементы общей теории которого представлены в [69], а просто резюмируем основное утверждение этого раздела, что существует класс гравитационных копий Грибова, связанных с каустиками в теории Эйнштейна–Гамильтона–Якоби, уравнение которых определяется нулями детерминанта Фаддеева–Попова. Соответствующие точки в суперпространстве отображаются на сечения пространства-времени, на которых в случае вещественного туннелирова-

[11] Заметим, что от проблемы (3.73) можно избавиться, отождествляя физические переменные с начальными данными ξ', что подразумевает $u^A_{B'}(t) = \delta^A_{B'}$ и обращает $\det u^A_{B'}(t)$ в единицу. Это означает, что уравнения (3.68) рассматриваются как функции погружения физического пространства в суперпространство. Переход от $\xi(t)$ к ξ', очевидно, представляет собой нестационарное каноническое преобразование в переменных АДМ, которое снова обращает в нуль физический гамильтониан, полученный редукцией АДМ из параметризованной теории с гамильтонианом, исчезающим на гравитационных связях.

ния происходит смена сигнатуры, а в более сложном случае наступает также комплексификация самих классических экстремалей. И в том, и в другом случае функция Гамильтона–Якоби приобретает при этом мнимую часть:

$$\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S} + \mathrm{i}\boldsymbol{I}\,, \tag{3.75}$$

которую в случае вещественного туннелирования можно отождествить с евклидовым гравитационным действием, вычисляемым на областях с положительной сигнатурой и определяющим квазиклассическую амплитуду (2.21). Эта амплитуда характеризует (непертурбативные по $\hbar$) эффекты рождения вселенных, которые могут быть, по-видимому, последовательно интерпретируемы только в рамках третичного квантования. Таким образом, видно, что, отправляясь от последовательной схемы квантования гравитации путем предварительной редукции к физическому сектору АДМ, мы сталкиваемся с проблемой копий Грибова, которая нас вновь вводит в проблематику третичного квантования.

Теперь о формализме третичного квантования мы можем сказать существенно больше, чем в разделе 2. В частности, мы убедились вне рамок каких-либо модельных представлений, что в однопетлевом приближении для "положительно"-частотных ($J > 0$) решений вида (3.39) внутреннее произведение квантования АДМ совпадает с сохраняющимся "квазиклейнгордоновским" током уравнений Уилера–ДеВитта (3.58) или (3.66). Однако этот ток известен только в однопетлевом приближении и для общих квазиклассических состояний вида

$$\boldsymbol{\Psi}(q) = \sum_I \boldsymbol{P}_I(q)\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\boldsymbol{S}_I(q)\right], \tag{3.76}$$

включающих отрицательно-частотные компоненты, сохраняется только в форме (3.66), где импульсы в мере $J(q, \partial\boldsymbol{S}/\partial q)$ заменены на операторы типа вронскиана

$$p = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial q} \to \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\,\overleftrightarrow{\partial}_q = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right), \tag{3.77}$$

действующие на обкладки $\boldsymbol{\Psi}(q)$ и $\boldsymbol{\Psi}^*(q)$, что может быть с той же точностью переписано в виде [12]

$$(\boldsymbol{\Psi}\,|\,\boldsymbol{\Psi}) = \int \mathrm{d}q\,\delta\big(\chi(q,t)\big)\,\boldsymbol{\Psi}^*(q)\,J\bigg(q, \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\,\overleftrightarrow{\partial}_q\bigg) \times \\ \times\,\boldsymbol{\Psi}(q) + O(\hbar)\,. \tag{3.78}$$

При наличии отрицательных частот в суперпозиции (3.76) унитарное отображение (3.56) между квантовыми состояниями АДМ и состояниями Дирака–Уилера–ДеВитта теряет смысл уже в однопетлевом приближении. Это видно уже из фактора $(J/M)^{1/2}$ в (3.55), который будет мнимым для отрицательно-частотных составляющих волновой функции. Поэтому интерпретация уравнений Уилера–ДеВитта в терминах унитарной редукции к квантованию АДМ может быть справедливой лишь только на подклассе их решений ($J > 0$), либо быть приближенной концепцией, когда можно пренебречь взаимодействием, перемешивающим разночастотные секторы.

3.5. Релятивистская частица и вторичное квантование

Релятивистская частица представляет простой пример того, что квантовомеханическая проблема копий Грибова служит мотивацией к вторичному квантованию. Динамика релятивистской частицы выводится из действия

$$\boldsymbol{S}\left[x(t)\right] = -m\int \mathrm{d}t\big(-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\big)^{1/2}, \\ g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1), \qquad \alpha = 0,1,2,3, \tag{3.79}$$

порождающего в каноническом формализме супергамильтонову связь на фазовом пространстве координат $q^i = x^\alpha$ и импульсов $p_i = p_\alpha$,

$$H \equiv g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + m^2 = 0\,, \tag{3.80}$$

которая при дираковском квантовании становится уравнением Клейна–Гордона для волновой функции:

$$(-\hbar^2\Box + m^2)\,\boldsymbol{\Psi}(x) = 0. \tag{3.81}$$

Легко показать, что алгоритм (3.43)–(3.48) для двухточечных решений этого уравнения с двумя функциями Гамильтона–Якоби вида

$$\boldsymbol{S}(x,x') = \mp m\sqrt{-g_{\alpha\beta}(x^\alpha - x^{\alpha'})(x^\beta - x^{\beta'})} \tag{3.82}$$

приводит соответственно к положительно- и отрицательно-частотным функциям Вайтмана [8, 56]. Редукция АДМ в естественной калибровке

$$\chi\,(x,t) \equiv x^0 - t = 0 \tag{3.83}$$

отождествляет с физическими степенями свободы пространственные компоненты координат и импульсов $(\xi^A, \pi_A) = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ и неоднозначна — два физических гамильтониана являются двумя корнями супергамильтоновой связи:

$$H_{\mathrm{phys}}\,(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \pm\omega_{\mathbf{p}}, \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,. \tag{3.84}$$

Эта неоднозначность свидетельствует о наличии двух копий Грибова, разделенных нулями "детерминанта" Фаддеева–Попова:

$$J = 2p^0. \tag{3.85}$$

[12] Сохранение диагональных членов происходит по механизму, обсуждавшемуся выше. Для недиагональных членов — интегралов от произведений I-й и J-й компонент с $I \neq J$ в (3.76) — метод перевала приравнивает только касательные к Σ проекции I-го и J-го импульсов в точке стационарности (поскольку интеграл берется только по Σ), в то время как нормальные компоненты из решения уравнений связей приравниваются только по модулю. Однако в мере в результате действия вронскиана возникает сумма этих нормальных компонент, которые, следовательно, должны иметь один знак, иначе вклад будет равен нулю. Именно это свойство диктует необходимость операторной меры типа вронскиана для обеспечения ортогональности разночастотных компонент и сохранения нормы суперпозиций вида (3.76). Дальнейшее доказательство того, что недиагональные вклады с $\boldsymbol{S}_I(q) \neq \boldsymbol{S}_J(q)$ пертурбативно исчезают, стандартно: для разных функций Гамильтона–Якоби не может быть одинаковых вещественных экстремалей, удовлетворяющих одним и тем же данным Коши, поэтому точка перевала должна быть в комплексной плоскости и ее вклад — экспоненциально подавленным мнимой частью действия. Аналогичное доказательство сохранения (пертурбативного исчезновения) проходит и для матричных элементов разных квантовых состояний.

В отсутствие внешних полей для массивной частицы эти нули лежат в классически запрещенной области $\mathbf{p}^2 + m^2 = 0$, поэтому два сектора положительно- и отрицательно-частотных решений хорошо разделены. Положительно-частотные решения, в частности

$$\boldsymbol{\Psi}_{(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, a(\mathbf{p}) \exp\left[\mathrm{i}(-\omega_{\mathbf{p}} x^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\right], \quad (3.86)$$

унитарно отображаются на физические волновые функции Ньютона – Вигнера

$$\Psi_{(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, a(\mathbf{p}) \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \exp\left[\mathrm{i}(-\omega_{\mathbf{p}} x^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\right], \quad (3.87)$$

где $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$ представляет собой сомножитель $(J/M)^{1/2}$, $M = 1$, уравнения (3.55) в импульсном представлении. Внутреннее произведение на пространстве решений уравнения Клейна – Гордона для положительных частот положительно и совпадает с внутренним произведением состояний Ньютона – Вигнера:

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{(+)}|\boldsymbol{\Psi}_{(+)}\right) = -\frac{\hbar}{2\mathrm{i}} \int \mathrm{d}^4 x\, \delta(x^0 - t)\, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}^*_{(+)}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \boldsymbol{\Psi}_{(+)}(x) =$$

$$= \int \mathrm{d}^3 p\, (2\omega_{\mathbf{p}})\, \widetilde{a}^*(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) = \left(\widetilde{\Psi}|\Psi\right). \quad (3.88)$$

При включении нелинейности в уравнении Клейна–Гордона или во внешних полях, которые могут эффективно приводить к неположительности квадрата массы m^2, разделение положительно-частотных и отрицательно-частотных решений на две невзаимодействующие теории пропадает, и их объединение достигается в рамках вторичного квантования. Успех последнего критическим образом обусловлен причинной структурой пространства-времени, которая позволяет рождение и распространение физических наблюдаемых частиц только в одном направлении внутри светового конуса, а отрицательно-частотные моды, распространяющиеся "вспять" во времени, использует для описания эффектов их уничтожения.

3.6. Альтернатива: третичное квантование или формализм калибровок Йорка?

Эйнштейновская теория гравитации существенно отличается от теории релятивистской частицы тем, что динамика в суперпространстве $q^i = \left(g_{ab}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\right)$ — бесконечномерном аналоге пространства x^α — возможна во всех направлениях, в том числе и вне "светового" конуса суперметрики ДеВитта (в силу неположительности потенциального члена уравнения Уилера – ДеВитта). Поэтому отражение от каустики или точки поворота в суперпространстве, сопровождающееся изменением направления движения вдоль координаты, выбранной в качестве времени, не должно с необходимостью интерпретироваться как экзотическое явление типа уничтожения или рождения Вселенной. Просто выбор калибровки, выделяющей в суперпространстве эту временную координату, был неудачен: она не может глобально параметризовать движение на обеих ветвях траектории — до и после отскока. В классе калибровок, зависящих только от координат суперпространства (3.21), решение этой проблемы невозможно, поскольку, как было показано выше, каустики порождают вырождение оператора Фаддеева–Попова в классе таких калибровок и приводят к проблеме Грибова. Существует, однако, калибровка, включающая импульсы, которая решает эту проблему.

Эта калибровка была введена Йорком [72] и описывает расслоение пространства-времени семейством гиперповерхностей со средней внешней кривизной, постоянной на каждой из них. Постоянное значение этой средней кривизны можно отождествить с временем t и, поскольку след внешней кривизны совпадает с точностью до скалярного коэффициента веса 1 со следом гравитационного импульса, такая калибровка имеет вид

$$\chi^\perp(q, p, t) = \frac{2}{3}\, g^{-1/2} g_{ab}\, p^{ab} - t = 0\,. \quad (3.89)$$

Заметим, что эта калибровка является скаляром относительно пространственных диффеоморфизмов, генерируемых суперимпульсными связями, поэтому

$$J_a^\perp = \{\chi^\perp, H_a\} \sim \chi^\perp\,, \quad (3.90)$$

и детерминант Фаддеева – Попова факторизуется на уравнениях калибровки:

$$J\big|_{\chi^\perp = 0} = \det J_{\perp'}^\perp \det J_b^a\,. \quad (3.91)$$

Поскольку $J_b^a = \{\chi^a, H_b\}$ не вносит копий Грибова, связанных с проблемой времени, мы можем забыть о калибровках $\chi^a(q)$, фиксирующих пространственные диффеоморфизмы, и заняться только калибровкой (3.89).

Она замечательна тем, что временна́я переменная, вводимая ею на *фазовом* пространстве,

$$T = \frac{2}{3}\, g^{-1/2} g_{ab}\, p^{ab}\,, \quad (3.92)$$

по-видимому, осуществляет однозначную редукцию АДМ к физическому сектору и глобально покрывет классические и квантовые истории. Это свойство было доказано Йорком [72, 73] в специальной параметризации переменных фазового пространства, использующих конформные свойства метрики. Для простоты мы ограничимся чистой теорией гравитации без материальных источников, хотя этот формализм легко обобщается на случай наличия материи. Рассмотрим конформное разложение 3-мерной метрики и сопряженных ей импульсов

$$g_{ab} = \phi^4\, \widetilde{g}_{ab}\,, \quad (3.93)$$

$$p^{ab} = \phi^{-4}\, \widetilde{p}^{\,ab} + \frac{1}{2}\, \widetilde{g}^{\,1/2}\, \widetilde{g}^{\,ab} \phi^2 T\,, \qquad \widetilde{g}_{ab}\, \widetilde{p}^{\,ab} = 0\,, \quad (3.94)$$

где $\widetilde{g}_{ab}$ — конформно-инвариантная метрика, построенная в некоторой конформной калибровке и являющаяся функцией неких пяти независимых переменных, ϕ — конформный фактор, а $\widetilde{p}^{\,ab}$ — бесследовая часть импульса. Преобразование симплектической формы

$$p^{ab} \dot{g}_{ab} = \widetilde{p}^{\,ab} \dot{\widetilde{g}}_{ab} - \widetilde{g}^{\,1/2} \phi^6 \dot{T} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ldots) \quad (3.95)$$

показывает, что $\widetilde{p}^{\,ab}$ сопряжены компонентам конформной метрики $\widetilde{g}_{ab}$, а импульс, сопряженный T, равен

$$P_T = -\widetilde{g}^{\,1/2} \phi^6 = -g^{1/2}\,. \quad (3.96)$$

Подстановка (3.93), (3.94) в супергамильтонову связь приводит к уравнению Лихнеровича для конформного фактора в конформной трактовке задачи о начальных данных:

$$\widetilde{g}^{\,1/2}\left(\widetilde{\Delta}-\frac{1}{8}\,\widetilde{R}\right)\phi+\frac{1}{8}\,\frac{\widetilde{p}^{\,2}}{\widetilde{g}^{\,1/2}}\,\frac{1}{\phi^{7}}-\frac{3}{64}\,\widetilde{g}^{\,1/2}T^{2}\phi^{5}=0\,, \tag{3.97}$$

$$\widetilde{\Delta}=\widetilde{g}^{\,ab}\,\widetilde{\nabla}_a\widetilde{\nabla}_b\,,\qquad \widetilde{p}^{\,2}\equiv\widetilde{g}_{ac}\,\widetilde{g}_{bd}\,\widetilde{p}^{\,ab}\,\widetilde{p}^{\,cd}\,, \tag{3.98}$$

как показано в [72, 73], это уравнение имеет единственное ограниченное положительное решение "почти всюду", т.е. за исключением множества меры — нуль физически неприемлемых значений переменных [13] $\widetilde{g}_{ab}$, $\widetilde{p}^{\,ab}$. Единственность решения означает, что линейный оператор, получаемый варьированием (3.97) по ϕ, невырожден, а следовательно, невырожден диагональный блок оператора Фаддеева – Попова [14]:

$$J^{\perp}_{\perp'}\Big|_{H_\perp=0}=2\phi^{3}\left\{\widetilde{\Delta}-\frac{1}{8}\,\widetilde{R}-\frac{7}{8}\,\frac{\widetilde{p}^{\,2}}{\widetilde{g}}\,\frac{1}{\phi^{8}}-\frac{15}{64}\,T^{2}\,\phi^{4}\right\}\frac{\delta(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\phi^{3}}\,,$$

$$\perp=\mathbf{x}\,,\qquad \perp'=\mathbf{x}'\,, \tag{3.99}$$

что и является необходимым критерием однозначной редукции АДМ. Как следует из (3.95), (3.96), физический гамильтониан в переменных конформного фазового пространства $\widetilde{g}_{ab}$, $\widetilde{p}^{\,ab}$ получается подстановкой в (3.96) решения уравнения Лихнеровича $\phi\big[\widetilde{g}_{ab}(\mathbf{x}),\,\widetilde{p}^{\,ab}(\mathbf{x}),T(\mathbf{x})\big]$ и численно совпадает с трехмерным объемом Вселенной:

$$H_{\text{phys}}(t)\big[\widetilde{g}_{ab},\,\widetilde{p}^{\,ab}\big]=\int \mathrm{d}^3x\,\widetilde{g}^{\,1/2}\big(\phi[\widetilde{g}_{ab},\,\widetilde{p}^{\,ab},t]\big)^{6}=\int \mathrm{d}^3x\,g^{1/2}. \tag{3.100}$$

Остаточная редукция к физическим переменным в этом гамильтониане достигается путем наложения координатных калибровок на пять независимых компонент $\widetilde{g}_{ab}$ и их решения совместно с суперимпульсными связями, которые принимают в новых переменных (3.94) вид

$$\widetilde{\nabla}_a\,\widetilde{p}^{\,ab}=0\,, \tag{3.101}$$

что окончательно сводит систему к двум независимым степеням свободы.

Тот факт, что глобальное время (3.92) определено конформной частью гравитационного импульса, подсказывает, что и дираковское квантование можно проводить в новых фазовых переменных $(T,P_T;\,\widetilde{g}_{ab},\widetilde{p}^{\,ab})$, выбирая при этом в качестве координат "конформное" суперпространство переменных $(T,\,\widetilde{g}_{ab})$. Тогда уравнением связи будет уравнение Лихнеровича, в котором роль импульса, сопряженного T, будет играть конформный фактор $\phi=(-P_T/\widetilde{g}^{\,1/2})^{1/6}$. В силу существенной неполиномиальности по ϕ оно будет очень неудобно с точки зрения операторной реализации (напомним, что формальная операторная реализация, точно замыкающая алгебру квантовых связей, может быть построена в случае их квадратичности по импульсам, см. раздел 3.2 и работы [8, 66]). Оказывается, однако, что, домножая уравнение Лихнеровича на ϕ^7 и путем дополнительного контактного канонического преобразования переходя к переменным $(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Pi};\,\widetilde{g}_{ab},\,\widetilde{\pi}^{ab})$,

$$T=-\frac{2}{3}\,\widetilde{g}^{\,1/4}\,\frac{\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{\Pi}^{1/2}}\,,\qquad P_T=-\widetilde{g}^{\,-1/4}\boldsymbol{\Pi}^{3/2}\,, \tag{3.102}$$

$$\widetilde{p}^{\,ab}=\widetilde{\pi}^{ab}-\frac{1}{6}\,\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Pi}\widetilde{g}^{\,ab}\,, \tag{3.103}$$

супергамильтонову связь можно снова привести к виду, квадратичному по полному набору импульсов $(\boldsymbol{\Pi},\,\widetilde{\pi}^{ab})$:

$$\mathcal{H}_\perp\equiv\phi^4H_\perp=\frac{1}{\widetilde{g}^{1/2}}\left[2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\Delta}\boldsymbol{\Pi}-\frac{3}{2}(\widetilde{\nabla}\boldsymbol{\Pi})^2-\right.$$

$$\left.-\,\widetilde{R}\boldsymbol{\Pi}^2-\frac{1}{4}\,\boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{\Pi}^2\right]+\frac{\widetilde{\pi}^{ab}\,\widetilde{\pi}_{ab}}{\widetilde{g}^{1/2}}\,. \tag{3.104}$$

Как видно, это выражение не просто квадратично, но и однородно по импульсам, так что в конденсированных обозначениях для конформного суперпространства оно принимает вид "безмассового" уравнения [15]

$$\mathcal{H}_\perp(q,p)=\mathcal{G}^{ik}_\perp p_ip_k\,, \tag{3.105}$$

$$q^i=\big(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}),\,\widetilde{g}_{ab}(\mathbf{x})\big)\,,\qquad p_i=\big(\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}),\,\widetilde{\pi}^{ab}(\mathbf{x})\big)\,, \tag{3.106}$$

однако уже с неультралокальным $\boldsymbol{\Phi\Phi}$-сектором трехточечной функции

$$\mathcal{G}^{ik}_\perp=\operatorname{diag}\big[\boldsymbol{G}(\mathbf{x}_\perp|\,\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_k),\,g_{a(c}g_{bd)}\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x}_i)\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x}_k)\big]\,, \tag{3.107}$$

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{x}_\perp|\,\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{\widetilde{g}^{1/2}}\left[\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x})\widetilde{\Delta}\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x}')-\right.$$

$$-\frac{3}{2}\,\widetilde{g}^{\,ab}\widetilde{\nabla}_a\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x})\widetilde{\nabla}_b\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x}')-$$

$$\left.-\left(\widetilde{R}+\frac{1}{4}\boldsymbol{\Phi}^2\right)\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}_\perp,\mathbf{x}')\right]. \tag{3.108}$$

Операторная реализация гамильтоновой связи (3.105) в конформном суперпространстве координат $\big(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}),\,\widetilde{g}_{ab}(\mathbf{x})\big)$ не входит в цели данной статьи. Здесь мы только отметим, что в главном она сведется к замене импульса $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x})$ функциональной производной $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x})=\hbar\delta/\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$. Поскольку $\boldsymbol{\Pi}^2$-член в (3.105) отрицательно определен, результирующее уравнение снова будет гиперболического типа и у него, казалось бы, снова будут в наличии разночастотные решения. Однако квазиклассические отрицательно-частотные решения $(\boldsymbol{\Pi}<0)$ сразу же исключаются, поскольку область определения фазового импульса (конформный фактор)

$$\boldsymbol{\Pi}=\phi^4\widetilde{g}^{1/2} \tag{3.109}$$

[13] В полной квантовой теории это множество, по-видимому, попадает в область изменения виртуальных квантовых значений полей и поэтому требует особого рассмотрения.

[14] Заметим, что все члены этого оператора отрицательно-определенны, за исключением 3-мерной скалярной кривизны в конформном лапласиане $\widetilde{\Delta}-\widetilde{R}/8$, поэтому доказательство его невырожденности, тривиальное для $\widetilde{R}>0$, требует в противоположном случае более тонких методов конформного суперпространства [72, 73].

[15] Заметим, что это свойство однородности аналогично свойству гамильтоновой связи в переменных Аштекара [74], однако оно достигается здесь без обращения к комплексной триадной формулировке и без увеличения числа связей. При наличии материи однородность по импульсам, вообще говоря, исчезает. Так, в случае конформно-инвариантного электромагнитного поля супергамильтониан приобретает член, линейный по $\boldsymbol{\Pi}$.

принадлежит положительной полуоси. Это объясняет механизм квазиклассического отбора положительно-частотных решений уравнения Уилера–ДеВитта в конформном суперпространстве, который, по-видимому, может быть реализован и на непертурбативном уровне.

Таким образом, формализм калибровки Йорка и связанного с ним конформного суперпространства решает проблему времени как проблему гравитационных копий Грибова. Необходимость в третичном квантовании, казалось бы, отпадает, однако эта концепция и физика евклидово-лоренцевых переходов оказываются возможными по другому механизму. Действительно, описание классически запрещенного состояния с помощью мнимого времени означает комплексификацию конформного суперпространства:

$$T = -\mathrm{i}\mathcal{T} \tag{3.110}$$

(импульс и его след становятся мнимыми, а слоение евклидова пространства происходит гиперповерхностями постоянного евклидова времени $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \tau$). Эта комплексификация делает чисто мнимой переменную "конформного" времени

$$\boldsymbol{\Phi} = -\frac{3}{2}\,\phi^2 T = \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\phi^2\mathcal{T}$$

и очевидным образом превращает уравнение Уилера–ДеВитта из гиперболического в эллиптическое. Это является абсолютным аналогом перехода от гиперболического к эллиптическому уравнению Клейна–Гордона при виковском вращении. В обычном суперпространстве метрик эта аналогия была неявной и, в частности, переход к евклидову пространству не подразумевал смену сигнатуры суперметрики ДеВитта. Наоборот, в конформном суперпространстве переход в евклидову область пространства-времени неразрывно связан с его евклидизацией, достигаемой виковским вращением конформной моды:

$$\boldsymbol{\Phi} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}\,. \tag{3.111}$$

Квантование в конформном суперпространстве требует дальнейшего изучения. Этот формализм, как видно, не устраняет возможности третичного квантования и подбарьерных явлений с изменением сигнатуры пространства-времени. Однако эти явления здесь имеют другую природу и несколько другую интерпретацию. В первую очередь, эти отличия касаются поведения в окрестности возможных каустик в суперпространстве. В конформном суперпространстве каустики (если есть таковые) не порождают проблемы времени и не приводят к наивной интерпретации одной и той же Вселенной, взятой до и после отскока от каустики, как квантовой суперпозиции двух одновременно существующих состояний — поверхность постоянного (внешнего) времени (3.92) не пересекает квантовые истории более одного раза и не порождает копий Грибова.

3.7. Квантование Арновитта–Дезера–Мизнера простейшей минисуперпространственной модели

Рассмотренный выше пример релятивистской частицы (раздел 3.5) слишком прост; в нем отсутствуют многие важные черты реальных космологических моделей (в том числе возможность динамической смены сигнатуры).

Проиллюстрируем процедуру редукции АДМ к физическим переменным для двумерного минисуперпространства (a, φ), где $a(t)$ — масштабный фактор при пространственном элементе длины $\mathrm{d}l^2$ закрытой однородной Вселенной с метрикой

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\,\mathrm{d}t^2 + a^2\,\mathrm{d}l^2\,, \tag{3.112}$$

$\varphi(t)$ — пространственно-однородная мода скалярного поля с минимальной связью и потенциалом самодействия $U(\varphi)$. Эта теория — стандартное поле исследования моделей происхождения Вселенной (см. раздел 4); ее минисуперпространственное действие

$$S = m_{\mathrm{P}}^2 \int a^3 \left[-\frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} + \frac{1}{m_{\mathrm{P}}^2}\,\frac{\dot{\varphi}^2}{2N^2} - \left(H^2(\varphi) - \frac{1}{a^2}\right)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int \mathrm{d}t\,\left[p_a\,\dot{a} + p_\varphi\dot{\varphi} - N\mathcal{H}\right], \tag{3.113}$$

где m_{P} — масса Планка. Супергамильтонова связь

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{4m_{\mathrm{P}}^2 a} + \frac{p_\varphi^2}{2a^3} + m_{\mathrm{P}}^2 a^3\left(H^2(\varphi) - \frac{1}{a^2}\right) = 0\,. \tag{3.114}$$

Проведем редукцию АДМ к физическим переменным в двух различных калибровках (3.22):

1) "Часами" объявляется масштабный фактор Вселенной, либо некая его функция:

$$\chi = a - f(t) = 0\,. \tag{3.115}$$

По общим формулам раздела 3.2 детерминант Фаддеева–Попова $J_\perp^\perp \equiv J$, функция хода $N^\perp \equiv N$ и физический гамильтониан (3.27) выражаются через импульс p_a:

$$J = \pm\frac{1}{2m_{\mathrm{P}}^2 a}|p_a|\,, \tag{3.116}$$

$$N = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{J} = \pm\frac{2m_{\mathrm{P}}^2 a}{|p_a|}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3.117}$$

$$H_{\mathrm{phys}} = \pm\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}|p_a|\,, \tag{3.118}$$

где p_a — функция физических переменных, полученная решением уравнения связи (3.114) и с учетом (3.115):

$$|p_a| = \frac{\sqrt{2}m_{\mathrm{P}}}{f(t)}\sqrt{m^2(\varphi, t) + p_\varphi^2}\,, \tag{3.119}$$

$$m^2(\varphi, t) \equiv m_{\mathrm{P}}^2 f^4\left(H^2(\varphi) f^2 - 1\right). \tag{3.120}$$

Квантовая динамика определена действием (3.26) (координатам физического фазового пространства ξ и сопряженным им импульсам π в данном случае соответствует пара $(\varphi,\, p_\varphi)$)

$$S(\varphi,\, p_\varphi) = \int \mathrm{d}t\left[p_\varphi\dot{\varphi} - H_{\mathrm{phys}}\right] \tag{3.121}$$

и уравнением Шрёдингера (3.29)

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \pm\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\frac{\sqrt{2}m_{\mathrm{P}}}{f(t)}\sqrt{m^2(\varphi, t) + p_\varphi^2}\;|\Psi\rangle \tag{3.122}$$

для волновой функции $|\Psi\rangle$, норма которой (3.30) сохраняется. Мы не обсуждаем здесь вопрос об упорядочении φ, p_φ, операторов в (3.119); при обычно принимаемом предположении слабой зависимости $H(\varphi)$ от скалярного поля соответствующие поправочные члены — низшего порядка.

Принципиальное отличие от релятивистской частицы (раздел 3.5) здесь состоит в явной зависимости от времени параметров физического гамильтониана, в частности "массы" частицы (3.120). При $H^2a^2 < 1$ эта теория описывает частицу мнимой массы — тахион. Мы знаем, что решения классических динамических уравнений, полученных вариацией действия (3.113), дают после фиксации системы отсчета (3.115) строгую корреляцию между значениями φ и p_φ в каждый момент времени. Главные вопросы, с точки зрения соответствия наблюдениям, на которые квантовая гравитация обязана ответить утвердительно: как приготовить когерентное состояние $\Psi(\varphi, t)$ с малыми дисперсиями и соответствующей $(\varphi \leftrightarrow p_\varphi)$ корреляцией? какова скорость расплывания этого волнового пакета? Ответ на второй вопрос заключен в динамике системы. В частности, в момент времени, когда "масса" (3.120) обращается в нуль, следует ожидать очень сильного расплывания пакета даже в том случае, если среднее значение импульса $p_\varphi \neq 0$ и область $m^2 < 0$ классически доступна (подкоренное выражение в (3.119) остается положительным).

Уравнение Шрёдингера (3.122) обычно исследуется в квазиклассическом приближении. Квантовомеханическая задача (3.122) заслуживает, по-видимому, более детального изучения. Во всяком случае, при $\mathrm{d}m/\mathrm{d}\varphi = 0$, т.е. при сохранении импульса p_φ, она решается точно; физически нетривиальна в ней знаконеопределенность m^2.

Функция хода (3.117), а тем самым, и собственное время

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} N\,\mathrm{d}t = \int_{a_1}^{a_2} \frac{2m_\mathrm{P}^2 a}{|p_a|}\,\mathrm{d}a \tag{3.123}$$

между состояниями Вселенной с масштабными факторами a_1, a_2 (τ, будучи инвариантом, не зависит от выбора $f(t)$) являются операторами. При вычислении интеграла по времени в (3.123) φ, p_φ следует считать зависящими от времени гейзенберговскими операторами. В квазиклассическом режиме, когда $m^2 \gg p_\varphi^2$, квантовая дисперсия собственного времени мала, но, конечно, существенно возрастает вблизи "точки поворота". Если a_1, a_2 по разные стороны точки поворота, a_1 — в евклидовой, a_2 — в лоренцевой областях, то, как и следовало ожидать, τ состоит из двух слагаемых — мнимого и действительного:

$$\tau = \mathrm{i}\tau_\mathrm{E} + \tau_\mathrm{L}\,. \tag{3.124}$$

Отметим также, что выбор в этой модели в качестве переменной времени самого масштабного фактора ($a = t$, т.е. $f(t) = t$ в (3.115)) приводит, согласно (3.117), к выражению для g_{00}-компоненты метрики:

$$g_{00} = -N^2 = -J^{-2} = -\frac{2m_\mathrm{P}^2 a^4}{m^2 + p_\varphi^2}\,, \tag{3.125}$$

имеющему в пренебрежении p_φ^2 простой полюс

$$g_{00} \sim \frac{1}{a - H^{-1}(\varphi)} \tag{3.126}$$

вблизи классической точки поворота; именно такое выражение (см. введение, (1.7)) предложил Сахаров в качестве иллюстрации смены сигнатуры оси времени.

2) Возьмем теперь в качестве "часов" скалярное поле φ, т.е. положим

$$\chi = \varphi - t = 0\,. \tag{3.127}$$

Пользуясь уравнением связи (3.114) и следуя общим формулам (3.19), (3.21), (3.27), имеем

$$J = \pm\frac{|p_\varphi|}{a^3}\,, \tag{3.128}$$

$$N = J^{-1} = \pm\frac{a^3}{|p_\varphi|}\,, \tag{3.129}$$

$$H_\mathrm{phys} = \pm|p_\varphi|\,, \tag{3.130}$$

где

$$|p_\varphi| = \frac{a}{\sqrt{2}m_\mathrm{P}}\sqrt{p_a^2 - U(a,t)}\,, \tag{3.131}$$

$$U(a,t) \equiv 4m_\mathrm{P}^4 a^2\big(H^2(t)a^2 - 1\big)\,. \tag{3.132}$$

В данном случае в отличие от калибровки (3.115) наиболее существенна зависимость физического гамильтониана (3.130) не от "времени ", а от "координаты" a. При $U > 0$ имеем неустойчивую ситуацию типа "перевернутого" осциллятора: скатывание вниз квазиклассического пакета, центр которого движется вдоль классической траектории $a(t)$, соответствующей временнóй эволюции лоренцевой вселенной. Однако при этом нельзя считать, что области суперпространства, где $U > 0$, — лоренцева, а $U < 0$, — евклидова. Действительно, смена сигнатуры (т.е. смена знака N^2) происходит при изменении знака подкоренного выражения в (3.131), что непосредственно не связано с изменением знака $U(a,t)$.

Здесь, как и в случае калибровки Йорка, использование в качестве часов "монотонно" меняющейся переменной снимает проблему копий Грибова и требует иной интерпретации явления смены сигнатуры (см. раздел 3.6). Квантовомеханическая задача

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi(a,t)}{\partial t} = \frac{a}{\sqrt{2}m_\mathrm{P}}\sqrt{-\hbar^2\,\frac{\partial^2}{\partial a^2} - U(a,t)}\;\Psi(a,t) \tag{3.133}$$

нетривиальна. Что значит смена сигнатуры на языке решений уравнения (3.133) — это тема для дальнейших исследований.

В разделе 4 квантовое происхождение ранней вселенной изучается в теории типа (3.113) в калибровке (3.115) в предположении, что H слабо зависит от φ и что, согласно "no-boundary" прескрипции Хартла и Хокинга, начальное (при $a = 0$) состояние $\Psi(\varphi)$ есть состояние с нулевым импульсом p_φ, т.е. не зависит от φ.

4. Квантовое происхождение ранней вселенной

Наиболее продуктивной в настоящее время областью применения физики переходов с изменением сигнатуры пространства-времени является теория квантового происхождения ранней вселенной. Синтез идеи космологической инфляции [75, 40] с идеей квантового состояния [17, 18, 60], порождающего начальные условия для инфляционного сценария, послужил в начале восьмидесятых мощным толчком для развития квантовой космологии. Он привел в конечном итоге к возникновению евклидовой квантовой гравитации, восходящей до идей третичного квантования, физики кротовых нор и механизма фиксации космологической постоянной, предложенного Коулменом [30]. В этом разделе мы остановимся на квантовой космологии ранней вселенной, которая на конкретных примерах демонстрирует общий формализм и проблематику, обсуждавшиеся выше. Основной вопрос этой теории, который не затрагивался выше, заключается в нахождении состояния $\boldsymbol{\Psi}(q)$, которое могло бы претендовать на описание ранней существенно квантовой вселенной, эволюция которой приводит к современной крупномасштабной классической картине мира [16].

Конкретная проблема, которую может решить квантовая космология ранней вселенной, — это обоснование справедливости квазиклассического разложения на начальной квантовой стадии инфляции и вычисление ее энергетического масштаба. Инфляционная парадигма является тем более привлекательной, что она позволяет избежать зыбких предсказаний квантовой гравитации, опираясь на субпланковскую физику с характерным значением постоянной Хаббла $H = \dot{a}/a \sim 10^{-5} m_{\mathrm{P}}$ много ниже планковской массы $m_{\mathrm{P}} = G^{1/2}$. Предсказания теории инфляции существенно зависят от этого энергетического масштаба, который должен быть выбран так, чтобы обеспечить достаточно большой параметр экспоненциального расширения $\exp N \sim \exp(60)$ в течение инфляционной стадии, а также сгенерировать необходимый уровень возмущений, способных к образованию современной крупномасштабной структуры. Однако этот масштаб является в теории инфляции свободным параметром, и его, по-видимому, невозможно фиксировать не привлекая идей квантовой гравитации и космологии. Эти идеи подразумевают, что квантовое состояние Вселенной в квазиклассическом режиме порождает ансамбль инфляционных вселенных с различными значениями H, приближенно эволюционирующих в поздние времена согласно классическим уравнениям движения. Квантовое состояние позволяет найти функцию распределения такого ансамбля и проинтерпретировать ее вероятностный максимум (если таковой имеется) как генерирующий энергетический масштаб инфляции. Здесь мы покажем, что реализация такой идеи в древесном приближении квантовой космологии оказалась безуспешной [77, 78], однако возможна уже в однопетлевом порядке [79, 8, 80, 69], для чего, однако, приходится в полном объеме применять формализм квантовой гравитации, обсуждавшийся выше.

4.1. Квантовые состояния Хартла – Хокинга и Виленкина как источник инфляционной вселенной

В настоящее время широко признано, что инфляционная стадия в ранней вселенной хорошо объясняет проблему образования современной крупномасштабной структуры наблюдаемой части пространства-времени и его микроволнового фона [40, 75]. Инфляционная стадия представляет собой участок в динамике ранней вселенной, хорошо описываемый деситтеровской или квазидеситтеровской геометрией, порождаемой эффективной космологической постоянной Λ, которая, в свою очередь, генерируется другими слабопеременными полями. Так, в модели хаотической инфляции со скалярным инфлатонным полем ϕ, минимально взаимодействующим с метрическим тензором $G_{\mu\nu}$,

$$L(G_{\mu\nu}, \phi) = G^{1/2} \left\{ \frac{m_{\mathrm{P}}^2}{16\pi} R(G_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - U(\phi) \right\}, \quad (4.1)$$

в приближении медленного скатывания с потенциального барьера $U(\phi)$ (который предполагается монотонно растущим с ϕ), когда степень нестационарности ϕ много меньше скорости раздувания масштабного фактора a — постоянной Хаббла $H = \dot{a}/a$ — уравнения движения принимают вид

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{1}{3H} \frac{\partial U}{\partial \phi} \ll H\phi \,, \quad (4.2)$$

$$H = H(\phi) \simeq \sqrt{\frac{8\pi U(\phi)}{3 m_{\mathrm{P}}^2}} \,, \quad (4.3)$$

а эффективная космологическая постоянная $\Lambda = 3H^2$ определяется потенциалом инфлатонного поля. Он остается примерно постоянным в течение инфляционной стадии из-за слабого убывания ϕ и лишь в конце ее убывает настолько, что эффективная космологическая константа распадается на инфлатонные колебания, энергия которых уходит на разогрев материи во Вселенной и на ее переход в радиационно-доминированную, а затем и в материально-доминированную стадии. Задача квантовой космологии заключается в том, чтобы на квантовом уровне приготовить необходимые начальные данные для такой картины путем выбора соответствующего квантового состояния Вселенной $\boldsymbol{\Psi}(q)$, общая теория которого рассматривалась выше. Одна из плодотворных идей реализации этой задачи, восходящая к пионерским работам Хартла – Хокинга и Виленкина [17, 18, 60], состоит в том, что такие начальные данные возникают как результат квантового туннелирования, описываемого волновой функцией $\boldsymbol{\Psi}(q)$ и представляющего собой переход с изменением сигнатуры пространства-времени.

В контексте замкнутой космологии деситтеровское лоренцево пространство-время может рассматриваться как результат квантового туннелирования из классически запрещенной области, описываемой евклидовой деситтеровской геометрией. Простая картина туннелирующей геометрии, которая демонстрирует такой механизм, приведена на рис. 3. Деситтеровское решение уравнений Эйнштейна с космологической постоянной $\Lambda = 3H^2$

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{L}}^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + a_{\mathrm{L}}^2(t)\, c_{ab}\, \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^b \,, \quad (4.4)$$

$$a_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{H} \cosh(Ht) \quad (4.5)$$

описывает расширение сферической гиперповерхности с метрикой единичной 3-мерной сферы c_{ab} и масштабным фактором $a_{\mathrm{L}}(t)$. Его евклидов аналог с деситтеровской

[16] Возможность порождения начального спектра неоднородностей первичными квантовыми флуктуациями рассматривалась в пионерской работе А.Д. Сахарова [76].

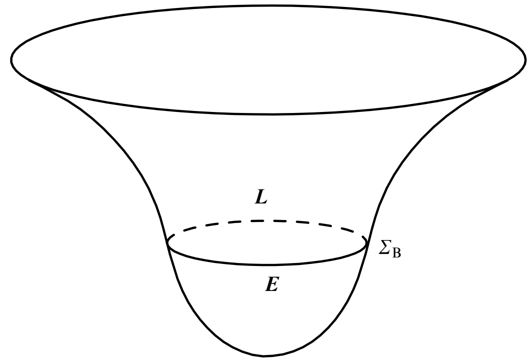

Рис. 3. Графическое изображение лоренцева пространства-времени $\boldsymbol{L}$, отщепляющегося на поверхности отскока Σ_B от евклидова многообразия $\boldsymbol{E}$ с топологией 4-мерного шара, участвующего в прескрипции Хартла–Хокинга для космологического квантового состояния.

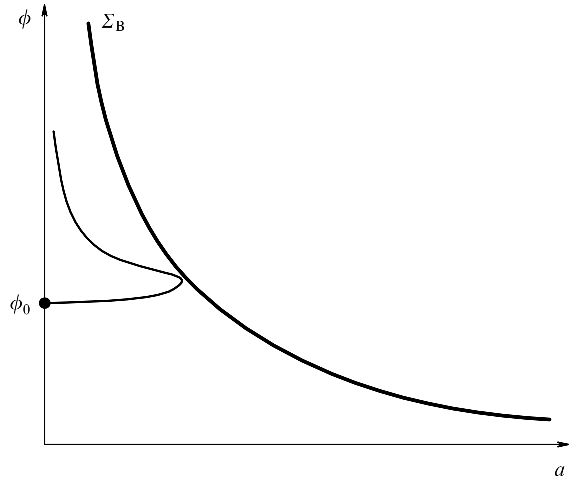

Рис. 4. Двумерное минисуперпространство масштабного фактора a и скалярного поля инфлатона ϕ в модели хаотической инфляции. Евклидовы экстремали (в приближении медленного скатывания) начинаются при $a=0$ и больших начальных значениях ϕ_0 с граничным условием Хартла–Хокинга $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}a|_{a=0}=0$ в виде траекторий, которые отражаются от каустики Σ_B, $a \simeq 1/H(\phi)$, и уходят в область $\phi \to \infty$, $a \to 0$. Их аналитическое продолжение в плоскость комплексного времени $\tau \simeq \pi/2H + \mathrm{i}t$ порождает классические траектории, описывающие лоренцево пространство-время. Каустика Σ_B в суперпространстве, являющаяся границей перехода с изменением сигнатуры пространства-времени, образована одномерным семейством нулей "детерминанта" Фаддеева–Попова $J=0$ и в калибровке (4.22) не содержит нулей уравнения (3.73) в полном соответствии с обсуждением в разделе 3.

метрикой положительной сигнатуры

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + a^2(\tau)\, c_{ab}\, \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^b\,, \tag{4.6}$$

$$a(\tau) = \frac{1}{H}\sin(H\tau) \tag{4.7}$$

описывает геометрию 4-мерной сферы радиуса $R = 1/H$ с 3-мерными сечениями параметризованными углом широты $\theta = H\tau$. Обе эти метрики связаны аналитическим продолжением в комплексную плоскость евклидова времени τ [81, 82]:

$$\tau = \frac{\pi}{2H} + \mathrm{i}t\,, \qquad a_{\mathrm{L}}(t) = a\left(\frac{\pi}{2H} + \mathrm{i}t\right). \tag{4.8}$$

Это аналитическое продолжение может быть интерпретировано как квантовое туннелирование лоренцева пространства-времени из евклидова и показано на рис. 3 как сшивка двух многообразий (4.4)–(4.7) по экваториальному сечению 4-мерной сферы $\tau = \pi/2H\ (t=0)$ — поверхности отскока Σ_B.

Два известных квантовых состояния, которые квазиклассически порождают такой механизм образования инфляционных вселенных, представляют собой волновую функцию Хартла–Хокинга [17, 18] и туннелирующую волновую функцию Виленкина [60]. В приближении двумерного минисуперпространства, состоящего из двух переменных — масштабного фактора a и инфлатонного скалярного поля ϕ,

$$q^i = (a, \phi)\,, \tag{4.9}$$

эти волновые функции $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{NB}}(a,\phi)$ и $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{T}}(a,\phi)$ удовлетворяют минисуперпространственно редуцированному уравнению Уилера–ДеВитта и квазиклассически являются его двумя линейно независимыми решениями:

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{NB}}(a,\phi) \sim \exp\left[-\boldsymbol{I}(a,\phi)\right], \qquad \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{T}}(a,\phi) \sim \exp\left[+\boldsymbol{I}(a,\phi)\right], \tag{4.10}$$

где евклидова функция Гамильтона–Якоби $\boldsymbol{I}(a,\phi)$ вычисляется на особом семействе решений классических евклидовых уравнений движения, удовлетворяющих специальным граничным условиям Хартла–Хокинга при $a=0$ и краевым условиям (a,ϕ) в концевой точке — аргументе этой функции. При $a=0$ производная скалярного поля по евклидову времени τ должна быть равна нулю, а $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\tau = 1$ (τ измеряет собственное расстояние), что эквивалентно требованию регулярности 4-метрики в окрестности полюса 4-мерной сферы (4.6), (4.7) при $\tau = 0$. В лидирующем порядке приближения медленного скатывания, когда инфлатонное поле постоянно, такое решение просто совпадает с этой метрикой при постоянной Хаббла (4.3), а функция Гамильтона–Якоби равна

$$\boldsymbol{I}(a,\phi) = -\frac{\pi m_{\mathrm{P}}^2}{2H^2}\left\{1 - \left[1 - H^2(\phi)a^2\right]^{3/2}\right\},$$
$$H^2(\phi) = \frac{8\pi U(\phi)}{3m_{\mathrm{P}}^2}\,. \tag{4.11}$$

До тех пор, пока точка (a,ϕ) лежит в области двумерного суперпространства под кривой (рис. 4)

$$a = \frac{1}{H(\phi)}\,, \tag{4.12}$$

вселенная находится в подбарьерном состоянии, описываемом евклидовым пространством-временем с метрикой 4-мерной сферы. Евклидовы экстремали, начинающиеся при $a=0$, имеют каустику [17] (4.12) и не могут проникнуть в область $a > 1/H(\phi)$. Однако они могут быть продолжены в эту область в комплексном времени (4.8), и евклидова функция $\boldsymbol{I}(a,\phi)$ приобретает лоренцеву

[17] В низшем порядке приближения медленного скатывания задача является фактически одномерной, так что (4.12) представляет просто множество точек поворота, однако за пределами этого приближения эта кривая действительно переходит в огибающую семейства евклидовых траекторий [83].

часть:

$$\boldsymbol{I}(a,\phi) = \boldsymbol{I}(\phi) \pm \mathrm{i}\boldsymbol{S}(a,\phi)\,, \qquad a > \frac{1}{H(\phi)}\,, \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{S}(a,\phi) = -\frac{\pi m_{\mathrm{P}}^2}{2H^2}\left[H^2(\phi)\,a^2 - 1\right]^{3/2}. \tag{4.14}$$

Здесь $\boldsymbol{I}(\phi)$ есть евклидово действие теории с лагранжианом (4.1), вычисляемое на гравитационном полуинстантоне — полусфере (4.6) ($0 \leqslant \tau \leqslant \pi/2H$):

$$\boldsymbol{I}(\phi) = -\frac{3m_{\mathrm{P}}^4}{16U(\phi)}\,. \tag{4.15}$$

Это действие определяет амплитуду волновых функций (4.10) в классически разрешенной области:

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{NB}}(a,\phi) \sim \exp\left[-\boldsymbol{I}(\phi)\right]\cos\left[\boldsymbol{S}(a,\phi) + \frac{\pi}{4}\right], \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{T}}(a,\phi) \sim \exp\left[+\boldsymbol{I}(\phi) + \mathrm{i}\boldsymbol{S}(a,\phi)\right], \qquad a > \frac{1}{H(\phi)}\,, \tag{4.17}$$

которая интерпретируется в древесном (низшем по $\hbar$) приближении как функция распределения ансамбля инфляционных вселенных, описываемых в лоренцевом пространстве-времени функцией Гамильтона – Якоби (4.14). Основной параметр, характеризующий их, — это значение эффективной постоянной Хаббла $H = H(\phi)$ или скалярной кривизны деситтеровского пространства, распределение по которым содержится в соответствующих функциях распределения Хартла – Хокинга $\rho_{\mathrm{NB}}(\phi)$ [17] и Виленкина $\rho_{\mathrm{T}}(\phi)$ [84]:

$$\rho_{\mathrm{NB}}(\phi) \sim \exp\left[-2\boldsymbol{I}(\phi)\right], \qquad \rho_{\mathrm{T}}(\phi) \sim \exp\left[+2\boldsymbol{I}(\phi)\right]. \tag{4.18}$$

Различие волновых функций Хартла – Хокинга и Виленкина, а также соответствующих функций распределения заключается в разных граничных условиях в суперпространстве: в то время как туннелирующее состояние $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{T}}(a,\phi)$ при $a > 1/H(\phi)$ содержит только исходящую волну и описывает расширяющуюся вселенную, волновая функция Хартла – Хокинга $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{NB}}(a,\phi)$ в лоренцевой области является суперпозицией состояний противоположно эволюционирующих космологий, которые с позиций обсуждения в разделах 2 и 3 представляют собой разночастотные компоненты решения уравнения Уилера – ДеВитта. Туннелирующая волновая функция задается с помощью вышеуказанных граничных условий исходящей волны в лоренцевой области суперпространства и дополнительного условия независимости $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{T}}(a,\phi)$ от ϕ при $a = 0$ [78, 85]. Для волновой функции Хартла – Хокинга существует более фундаментальная и модельно-независимая прескрипция в виде континуального интеграла по евклидовым геометриям [17, 18], которая в древесном приближении приводит к выражению (4.16) как доминирующему при $\hbar \to 0$ вкладу точки перевала этого интеграла — евклидово-лоренцевой экстремали (4.4) – (4.7).

Функции распределения $\rho_{\mathrm{NB}}(\phi)$ и $\rho_{\mathrm{T}}(\phi)$ описывают противоположные результаты наиболее вероятного подбарьерного туннелирования: соответственно в минимум и максимум инфлатонного потенциала $U(\phi) \geqslant 0$ (хотя при строгом равенстве минимум $U(\phi) = 0$, вообще говоря, выпадает из области применимости приближения медленного скатывания). Вышеприведенные уравнения справедливы для модели (4.1), однако могут также применяться в теории с неминимальным взаимодействием скалярного инфлатона φ,

$$\boldsymbol{L}(g_{\mu\nu},\varphi) = g^{1/2}\left\{\frac{m_{\mathrm{P}}^2}{16\pi}\,R(g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\,\xi\varphi^2 R(g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\,m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\,\varphi^4\right\}, \tag{4.19}$$

при условии, что $L(G_{\mu\nu},\phi)$ рассматривается выше как эйнштейновская параметризация лагранжиана $\boldsymbol{L}(g_{\mu\nu},\varphi)$ с полями

$$(G_{\mu\nu},\phi) = \left(\left(1 + \frac{8\pi|\xi|\varphi^2}{m_{\mathrm{P}}^2}\right)g_{\mu\nu},\,\phi(\varphi)\right),$$

связанными с $(g_{\mu\nu},\varphi)$ известными конформными преобразованиями [86 – 88]. При отрицательной константе неминимального взаимодействия $\xi = -|\xi|$ эта модель легко приводит к сценарию хаотической инфляции [89] с потенциалом инфлатона в эйнштейновской параметризации

$$U(\phi)\bigg|_{\phi=\phi(\varphi)} = \frac{m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4}{\left(1 + 8\pi|\xi|\varphi^2/m_{\mathrm{P}}^2\right)^2}\,, \tag{4.20}$$

включая случай спонтанного нарушения симметрии при масштабе v с $m^2 = -\lambda v^2 < 0$ в потенциале Хиггса $\lambda(\varphi^2 - v^2)^2/4$. При больших φ потенциал (4.20) выходит на константу и в зависимости от параметра

$$\delta \equiv -\frac{8\pi|\xi|m^2}{\lambda m_{\mathrm{P}}^2} = \frac{8\pi|\xi|v^2}{m_{\mathrm{P}}^2}$$

обладает двумя типами поведения при промежуточных значениях инфлатонного поля. При $\delta > -1$ он не имеет локальных максимумов и генерирует медленное убывание скалярного поля, приводящее к стандартному сценарию с конечной продолжительностью инфляционной стадии, в то время как для $\delta < -1$ он имеет локальный максимум при

$$\bar{\varphi} = \frac{m}{\sqrt{\lambda|1+\delta|}}$$

и благодаря отрицательному наклону графика потенциала приводит к инфляции с неограниченной продолжительностью для всех моделей со скалярным полем, растущим от начального значения $\varphi_{\mathrm{I}} > \bar{\varphi}$.

Древесные функции распределения (4.18) для такого потенциала не подавляют вклада сверхпланковских масштабов и не нормируемы при больших φ,

$$\int^{\infty} \mathrm{d}\varphi\,\rho_{\mathrm{NB,T}}(\varphi) = \infty\,,$$

подрывая таким образом справедливость квазиклассического разложения. Только для туннелирующего случая при $\delta < -1$ распределение $\rho_{\mathrm{T}}(\phi)$ имеет локальный пик при $\bar{\varphi}$, который мог бы служить в качестве источника наиболее вероятного энергетического масштаба инфляции при разумном субпланковском значении постоянной Хаббла. Однако этот пик требует большой положительной массы инфлатонного поля, $m^2 > \lambda m_{\mathrm{P}}^2/(8\pi|\xi|)$, которая слишком велика для разумных значений

$\xi = -2 \times 10^4$, $\lambda = 0{,}05$ [86] и формально генерирует бесконечную продолжительность инфляционной стадии (поскольку последняя начинается из максимума инфлатонного потенциала).

4.2. Однопетлевая функция распределения инфляционных вселенных

Заметим, что при вычислении древесных функций распределения выше фактически не требовалось знания правильного вероятностного внутреннего произведения космологических волновых функций, обсуждению которого была посвящена большая часть 2-го и 3-го разделов. Достаточно было вычислить и квадрировать амплитуду волновой функции, которая в силу специфики модели оказалась функцией на сечении двумерного минисуперпространства, трансверсальном координате a, обычно играющей роль времени. Поэтому полученная функция распределения оказалась определенной на физическом подпространстве правильной размерности — одномерном пространстве инфлатонного поля. За пределами древесного приближения ситуация меняется: для вычислений требуется знание волновой функции с предэкспоненциальным фактором в нужном приближении, знание правильного внутреннего произведения, а также выход за рамки минисуперпространственной аппроксимации, поскольку в функцию распределения теперь уже вносит нетривиальный вклад интегрирование по виртуальным квантовым полям, замороженным в древесном приближении. В однопетлевом порядке, которым мы здесь ограничимся, эти поля достаточно учесть в линеаризованном приближении. Основное приближение в теории хаотической инфляционной вселенной, как и выше, состоит в минисуперпространственной модели с масштабным фактором a и пространственно-однородным скалярным инфлатоном φ, в то время как неоднородные поля всех возможных спинов рассматриваются как возмущения на этом фоне. Все вместе они образуют суперпространство переменных

$$q^i = \big(a,\, \varphi,\, \varphi(\mathbf{x}),\, \psi(\mathbf{x}),\, A_a(\mathbf{x}),\, \psi_a(\mathbf{x}),\, h_{ab}\,(\mathbf{x}), \ldots\big)\,. \quad (4.21)$$

Для вычисления функций распределения и их интерпретации теперь понадобится конкретная редукция к физическим переменным АДМ ξ, изложенная в разделе 3. Эту редукцию разумно проводить отдельно в минисуперпространственном секторе полного суперпространства (a, φ) и его секторе неоднородных мод. Как и выше, выберем поле инфлатона φ в качестве физической переменной, функцию распределения которой будем вычислять, а решение классических уравнений движения (4.5) с $H = H(\varphi)$ будем считать калибровкой

$$\chi^{\perp}(a, \varphi, t) = a - \frac{1}{H(\varphi)} \cosh\big[H(\varphi)t\big] = 0\,, \quad (4.22)$$

которая одновременно будет играть роль параметризации минисуперпространственных координат в терминах физической переменной φ [18]. Редукция АДМ для линеаризованных неоднородных мод полей сводится к выбору их поперечных (T) и поперечно-бесследовых компонент (TT), так что полный набор физических переменных представляет

$$\xi^A = (\varphi, f)\,, \quad f = \big(\varphi(\mathbf{x}),\, \psi(\mathbf{x}),\, A_a^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}),\, \psi_a^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}),\, h_{ab}^{\mathrm{TT}}(\mathbf{x}), \ldots\big)\,. \quad (4.23)$$

На квантовом уровне редукция АДМ легко проводится по изложенной в разделе 3 методике для туннелирующего состояния (4.17), однако сталкивается с очевидными трудностями для волновой функции Хартла – Хокинга (4.16), поскольку последняя содержит положительные и отрицательные частоты и в калибровке (4.22) порождает копии Грибова, соответствующие этим разночастотным компонентам. Как обсуждалось выше в разделе 3.6, эти копии являются артефактом использования неудачной калибровки, поверхность которой дважды пересекает классическую экстремаль (4.5) одной и той же вселенной до и после отскока от минимального значения масштабного фактора $a = 1/H(\varphi)$. Это приводит к интерпретации разночастотных компонент в (4.16) как суперпозиции двух *одновременно* существующих состояний расширяющейся и сжимающейся вселенной. Такая проблема может быть преодолена переходом к квантованию в конформном суперпространстве (раздел 3.6), однако в квазиклассическом приближении достаточно просто рассмотреть квантовую редукцию АДМ для отдельной положительно-частотной (или отрицательно-частотной) компоненты (4.16) и получить соответствующую волновую функцию физических переменных $\Psi(\xi, t) = \Psi(\varphi, f|t)$. Тогда функцию распределения инфлатонного поля φ следует рассматривать как диагональный элемент матрицы плотности чистого состояния $\mathrm{tr}_f|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Он может быть получен из $|\Psi\rangle = \Psi(\phi, f\,|\,t)$ путем усреднения по остальным модам физических полей f:

$$\rho\,(\phi\,|\,t) = \int \mathrm{d}f\, \Psi^*(\phi, f\,|\,t) \Psi(\phi, f\,|\,t)\,, \quad (4.24)$$

и это не сводится к простому квадрированию волновой функции.

Вычисление волновых функций Хартла – Хокинга и Виленкина в однопетлевом порядке по $\hbar$ и пертурбативно по неоднородным модам f на фоне метрики Робертсона–Уолкера (4.23) проводилось во многих работах [90, 82, 91, 85, 79, 69, 80]. Оно может быть основано на континуальном интегрировании по полям регулярным на евклидовом пространстве с метрикой (4.6), (4.7) или на использовании общего однопетлевого ядра (3.55) (точнее, его евклидова аналога) путем композиции со специальной волновой функцией в начальный момент [19] . Обе волновые функции оказываются гауссовой функцией переменных f — их евклидовым вакуумом, инвариантным относительно деситтеровской группы [20]. Поэтому инте-

[18] Эта калибровка очень удобна, поскольку она в квазиклассическом приближении соответствует выбору собственного времени с функцией хода $N^{\perp} = 1$ [8].

[19] Евклидов аналог (3.55) получается заменой лоренцевой функции Гамильтона – Якоби на евклидову с евклидовыми временами τ и τ'. Волновая функция Хартла – Хокинга или Виленкина получается из него путем стягивания пространственного сечения при $\tau' = 0$ в точку и интегрирования по всем значениям ξ' с единичной мерой.

[20] Эта функция является гауссовой и в евклидовой области, однако ее дисперсия, построенная из базисных функций линеаризованных евклидовых уравнений движения [69, 92] стремится к бесконечности при $\tau \to 0$. Это соответствует бесконечной дисперсии в начальный момент времени волновой функции, участвующей в построении квантовых состояний Хартла – Хокинга или Виленкина путем вышеуказанной композиции с ядром евклидовой эволюции.

грирование по f в (4.24) тривиально и приводит к фундаментальному алгоритму для однопетлевой функции распределения, который справедлив как для квантового состояния Хартла – Хокинга [79, 8, 69, 93, 80], так и для туннелирующего квантового состояния [92]

$$\rho_{\mathrm{NB,T}}(\varphi) \cong \frac{1}{H^2(\varphi)} \exp\left[\mp 2\boldsymbol{I}(\varphi) - \boldsymbol{\Gamma}_{1-\mathrm{loop}}(\varphi)\right]. \qquad (4.25)$$

Оказывается, что однопетлевые поправки для обеих функций одинаковы и определяются главным образом евклидовым эффективным действием полной системы квантовых полей $\xi(x)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1-\mathrm{loop}}(\varphi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\ln \frac{\delta^2 I[\xi]}{\delta\xi(x)\,\delta\xi(y)}\bigg|_{\mathrm{DS}}\right). \qquad (4.26)$$

Эффективное действие вычисляется на (квази)деситтеровском гравитационном инстантоне — 4-мерной сфере радиуса $1/H(\varphi)$ и, поэтому, является функцией φ. Такое замкнутое евклидово многообразие получается удвоением полуинстантона [69] — две полусферы сшиваются друг с другом по экваториальной гиперповерхности Σ_{B} (на которой происходит квантовый переход с изменением сигнатуры). Графическое изображение процедуры вычисления функции распределения представлено на рис. 5. Волновая функция и ей сопряженная, участвующие в скалярном произведении (4.24), могут быть представлены двумя евклидово-лоренцевыми многообразиями, при этом при вычислении внутреннего произведения в силу унитарности теории вклады лоренцевых областей взаимно уничтожаются, а остаток сводится к евклидову эффективному действию, вычисляемому на замкнутом инстантоне, полученному склейкой двух полусфер вышеуказанного типа [69, 93].

Формула (4.25) обладает рядом замечательных свойств. Обратим внимание на тот факт, что, хотя мы начинали с квантового состояния физических переменных АДМ в некоторой калибровке и по нему вычисляли функцию распределения, которая, казалось бы, должна также зависеть от выбора этой калибровки, результат тем не менее является калибровочно-инвариантным и калибровочно-независимым. Для классического действия в (4.25) это очевидно по его определению, эффективное действие $\boldsymbol{\Gamma}_{1-\mathrm{loop}}(\varphi)$ не зависит от выбора калибровки, потому что оно вычисляется на массовой оболочке [6, 94], а предэкспоненциальный фактор $1/H^2(\varphi)$ фактически также является калибровочным инвариантом, поскольку он выражается через скаляр кривизны [21] $R(g_{\mu\nu}) = 4\Lambda = 12H^2$. Таким образом, функция (4.25) описывает распределение калибровочно-инвариантной наблюдаемой — скалярной кривизны в квантовом ансамбле деситтеровских вселенных, и это объясняет причину ее калибровочной инвариантности и калибровочной независимости.

Другое свойство алгоритма (4.25) касается унитарности теории. Заметим, что мы привели формулу (4.25) для функции распределения вселенных в начальный момент их квантовой нуклеации от евклидова полуинстантона $t = 0$. Функция распределения (4.24) получается из (4.25) согласно соотношению

$$\rho\,(\phi\,|\,t) = \rho_{\mathrm{NB,T}}\big(\varphi(\phi, t)\big)\left|\frac{\partial\varphi(\phi, t)}{\partial\phi}\right|, \qquad (4.27)$$

где $\varphi(\phi, t)$ есть значение поля при этой нуклеации как функция поля ϕ, к которому Вселенная приходит к моменту t (функцию распределения которого $\rho\,(\phi\,|\,t)$ мы в этот момент вычисляем) [8, 69]. Это соотношение доказывает унитарность теории — сохранение полной вероятности: $\int \mathrm{d}\phi\,\rho(\phi\,|\,t) = \mathrm{const}$. Якобиан преобразования $\left|\partial\varphi(\phi, t)/\partial\phi\right| = 1/u_\varphi(t)$ выражается через линеаризованную моду (базисную функцию) инфлатонного поля (см. уравнение (3.71) в разделе 3, в котором роль ξ и ξ' играют ϕ и φ соответственно). На каустике в двумерном минисуперпространстве, разделяющей евклидову и лоренцеву области, этот якобиан и базисная функция остаются регулярными, однако вырождается соответствующий детерминант Фаддеева – Попова, что служит иллюстрацией к общему рассмотрению раздела 3. Таким образом, полная функция распределения факторизуется на калибровочно-зависимый и неинвариантный якобиан $\left|\partial\varphi(\phi, t)/\partial\phi\right|$, который обеспечивает явную унитарность теории, и на калибровочно-инвариантную функцию распределения гравитационных инстантонов (4.25), которая в явно ковариантном виде аккумулирует квантовые поправки.

Последнее свойство следует из того, что эффективное действие в (4.25), вычисляемое в физических переменных, может быть тождественно преобразовано к явно ковариантному виду (в ковариантной калибровке фонового поля [6, 94]). Тогда его можно вычислять с помощью ковариантных методов и, в частности, провести кова-

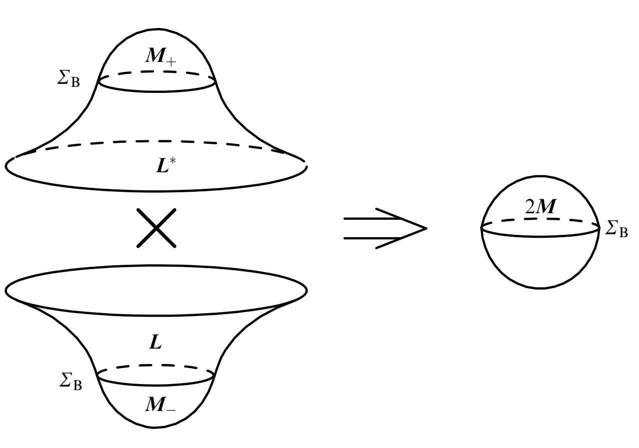

Рис. 5. Графическое представление вычисления квантовой функции распределения лоренцевых вселенных: композиция евклидово-лоренцева пространства-времени $\boldsymbol{M}_- \cup \boldsymbol{L}$ с его комплексно-сопряженной и противоположно ориентированной копией $\boldsymbol{M}_+ \cup \boldsymbol{L}^*$ приводит к удвоенному евклидову многообразию $2\boldsymbol{M}$ — гравитационному инстантону, несущему евклидово эффективное действие теории. Взаимоуничтожение лоренцевых областей $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}^*$ отражает унитарность теории в физическом пространстве-времени с лоренцевой сигнатурой.

[21] Как известно, в теории гравитации нет локальных калибровочных инвариантов относительно преобразований диффеоморфизмов, потому что даже в пространственные скаляры относительно последних добавляется член, содержащий производную Ли. В данной постановке задачи, однако, на однородном (квази)деситтеровском пространстве скаляр кривизны приближенно является константой и, следовательно, в пределах приближения, используемого в этой статье, — локальным инвариантом.

риантную регуляризацию его ультрафиолетовых расходимостей. Только это может гарантировать правильное вычисление высокоэнергетического масштабного поведения $\boldsymbol{\Gamma}_{1-\text{loop}}(\varphi)$ и функций распределения. Действительно, в высокоэнергетическом пределе большого инфлатонного поля, соответствующем в модели (4.19) пределу постоянной Хаббла

$$H(\varphi) \simeq \sqrt{\frac{\lambda}{12|\xi|}}\,\varphi \to \infty\,,$$

эффективное действие вычисляется и перенормируется на деситтеровском инстантоне исчезающего размера H^{-1} и поэтому для теории на таком пространстве асимптотически определяется полным аномальным масштабным поведением Z:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1-\text{loop}}\Big|_{H\to\infty} \simeq Z\ln\frac{H}{\mu}\,. \tag{4.28}$$

Здесь μ представляет собой массовый параметр перенормировки или размерный параметр обрезания, генерируемый конечной фундаментальной теорией струн, если модель (4.19) рассматривается как ее эффективный субпланковский предел.

В однопетлевом приближении параметр Z определяется вторым коэффициентом ДеВитта [6, 94] всех ковариантных мультиплетов полей, проинтегрированным по объему деситтеровского инстантона,

$$Z = \frac{1}{16\pi^2}\int_{\text{DS}} \mathrm{d}^4x\, g^{1/2} a_2(x,x)\,, \tag{4.29}$$

и критически зависит от феноменологической модели частиц, включающей в качестве гравитон-инфлатонного сектора лагранжиан (4.19). Эта величина определяет, в частности, полный набор однопетлевых логарифмических расходимостей модели и набор соответствующих β-функций.

Использование уравнений (4.25) и (2.48) с учетом $H \sim \varphi(\varphi\to\infty)$ показывает, что квантовая функция распределения в отличие от ее древесного приближения содержит зависящий от Z фактор:

$$\rho_{\text{NB,T}}(\varphi) \cong \frac{1}{\varphi^{Z+2}}\exp\bigl[\mp 2\boldsymbol{I}(\varphi)\bigr]\,. \tag{4.30}$$

Эта модификация может сделать волновые функции Хартла–Хокинга и Виленкина нормируемыми при сверхпланковских энергиях при условии, что параметр Z удовлетворяет неравенству

$$Z > -1\,, \tag{4.31}$$

служащему в качестве критерия выбора непротиворечивой полевой модели частиц в ранней вселенной и весомым аргументом в пользу применимости квазиклассического петлевого разложения [79, 95]. Хотя уравнение (4.30), строго говоря, справедливо только в пределе $\varphi\to\infty$, его можно использовать для качественно хорошего описания и при промежуточных энергиях. В этой области распределение (4.30) может породить вероятностный пик при $\varphi=\varphi_I$ с квантовой дисперсией σ, $\sigma^{-2} = -\,\mathrm{d}^2\ln\rho(\varphi_I)/\mathrm{d}\varphi_I^2$:

$$\varphi_I^2 = \frac{2|I_1|}{Z+2}\,,\qquad \sigma^2 = \frac{|I_1|}{(Z+2)^2}\,,$$
$$I_1 = -24\pi\,\frac{|\xi|}{\lambda}\,(1+\delta)m_{\text{P}}^2\,, \tag{4.32}$$

где I_1 представляет собой второй коэффициент разложения евклидова действия по обратным степеням φ:

$$2\boldsymbol{I}(\varphi) = I_0 + \frac{I_1}{\varphi^2} + O\left(\frac{1}{\varphi^4}\right).$$

Для квантовых состояний Хартла–Хокинга и туннелирующего состояния этот пик реализуется в дополнительных друг к другу областях изменения параметра δ. Для состояния Хартла–Хокинга он существует только при $\delta < -1$ $(I_1 > 0)$ и, таким образом, соответствует бесконечной продолжительности инфляции с полем φ, находящимся на отрицательном склоне графика инфлатонного потенциала (4.20) и безгранично растущим от своего начального значения $\varphi_I > \bar\varphi$. Для туннелирующего состояния этот пик имеет место при $\delta > -1$ и приводит к конечной продолжительности инфляционной стадии с параметром экспоненциального расширения [80]

$$N(\varphi_I) = \frac{8\pi^2|\xi|\bigl(1+6|\xi|\bigr)}{\lambda(Z+2)}\,.$$

Далее мы рассмотрим этот последний случай, поскольку он описывает общепринятый инфляционный сценарий с радиационно-доминированной стадией, следующей за инфляцией.

4.3. Неминимальная инфляция и физика частиц в ранней вселенной

Статус инфляционной теории был недавно хорошо подтвержден наблюдениями космического микроволнового фона в спутниковых экспериментах COBE [96] и Реликт [97]. В хаотической инфляционной модели с неминимальным инфлатонным полем (4.19) спектр возмущений, совместный с этими наблюдениями, может быть получен для констант взаимодействия порядка $\lambda/\xi^2 \sim 10^{-10}$ [86, 98] (экспериментальное ограничение на калибровочно-инвариантное [99] возмущение плотности $P_\zeta(k) = N_k^2(\lambda/\xi^2)/8\pi^2$ в k-й моде, пересекающей горизонт в момент расширения $\exp N_k$). Основное преимущество этой модели заключается в том, что она позволяет избежать противоестественно малого значения λ в модели минимального инфлатона [40, 75] и заменить его значением $\lambda \simeq 0{,}05$, совместным с теорией великого объединения, при условии, что константа $\xi \simeq -2\times 10^4$ выбрана по порядку величины, равной отношению планковского масштаба к типичному масштабу великого объединения: $|\xi| \sim m_{\text{P}}/v$. Для этих значений констант взаимодействия, известное ограничение на параметр экспоненциального расширения в течение инфляционной стадии $\exp\bigl[N(\varphi_I)\bigr] \geqslant \exp(60)$, генерируемого вероятностным пиком (4.32), приводит к громадному значению аномального скейлинга: $Z \sim 10^{11}$. Замечательным свойством модели с неминимальным инфлатоном является то, что эта большая величина может быть порождена большим значением константы ξ.

Действительно, выражение для $Z_{1-\text{loop}}$, хорошо известное в теории общего вида [6, 94], содержит вклад четвертого порядка по эффективным массам частиц, легко вычислимый на деситтеровском фоне [100]:

$$Z_{1-\text{loop}} = (12H^4)^{-1}\left(\sum_{\chi} m_{\chi}^4 + 4\sum_{A} m_A^4 - 4\sum_{\psi} m_{\psi}^4\right) + \ldots, \tag{4.33}$$

где суммирование идет по всем хиггсовским скалярам χ, векторным калибровочным бозонам A и спинорам ψ. Их эффективные массы для больших φ сводятся в основном к вкладам $m_{\chi}^2 = \lambda_{\chi}\varphi^2/2, m_A^2 = g_A^2\varphi^2, m_{\psi}^2 = f_{\psi}^2\varphi^2$, индуцированным по хиггсовскому механизму их лагранжианом взаимодействия с полем инфлатона:

$$\boldsymbol{L}_{\text{int}} = \sum_{\chi}\frac{\lambda_{\chi}}{4}\chi^2\varphi^2 + \sum_{A}\frac{1}{2}g_A^2A_{\mu}^2\varphi^2 + \sum_{\psi}f_{\psi}\varphi\bar{\psi}\psi + \\ + \text{взаимодействие с производными}. \tag{4.34}$$

Таким образом, в силу соотношения $\varphi^2/H^2 = 12|\xi|/\lambda$ общий аномальный скейлинг теории

$$Z_{1-\text{loop}} = 6\,\frac{\xi^2}{\lambda}\,\boldsymbol{A} + O(\xi)\,, \tag{4.35}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2\lambda}\left(\sum_{\chi}\lambda_{\chi}^2 + 16\sum_{A}g_A^4 - 16\sum_{\psi}f_{\psi}^4\right), \tag{4.36}$$

содержит то же самое большое безразмерное отношение $\xi^2/\lambda \simeq 10^{10}$ и универсальную комбинацию констант взаимодействия $\boldsymbol{A}$, определяемую моделью частиц (гравитон и поле инфлатона не дают вклада в $\boldsymbol{A}$, как и гравитино в том случае, когда оно не взаимодействует с инфлатоном).

Для такого $Z_{1-\text{loop}}$ параметры вероятностного инфляционного пика выглядят как

$$\varphi_I = m_{\text{P}}\sqrt{\frac{8\pi(1+\delta)}{|\xi|\boldsymbol{A}}}\,, \qquad \sigma = \frac{\varphi_I}{\sqrt{12\boldsymbol{A}}}\frac{\sqrt{\lambda}}{|\xi|}\,, \tag{4.37}$$

$$H(\varphi_I) = m_{\text{P}}\frac{\sqrt{\lambda}}{|\xi|}\sqrt{\frac{2\pi(1+\delta)}{3\boldsymbol{A}^2}}\,, \qquad N(\varphi_I) = \frac{8\pi^2}{\boldsymbol{A}} \tag{4.38}$$

и удовлетворяют ограничению $\boldsymbol{N}(\varphi_I) \geqslant 60$ с единственным условием $\boldsymbol{A} \leqslant 1{,}3$.

При $\delta \ll 1$ ($\delta \sim 8\pi/|\xi|$ для $|\xi| \sim m_{\text{P}}/v$) и $\boldsymbol{A} \simeq 1$ полученные численные параметры описывают чрезвычайно острый вероятностный пик с узкой шириной и субпланковской постоянной Хаббла:

$$\varphi_I \simeq 0{,}03m_{\text{P}}\,, \qquad \sigma \simeq 10^{-7}m_{\text{P}}\,, \qquad H(\varphi_I) \simeq 10^{-5}m_{\text{P}}\,, \tag{4.39}$$

что является реалистической областью для инфляционного сценария. Замечательно, что относительная ширина пика

$$\frac{\sigma}{\varphi_I} \sim \frac{\Delta H}{H} \sim 10^{-5} \tag{4.40}$$

соответствует наблюдаемому уровню анизотропии микроволнового фона, хотя недостаточно ясно, является ли квантовая дисперсия σ непосредственно наблюдаемой в настоящее время из-за стохастического шума такого же порядка величины, генерируемого в течение инфляции и накладывающегося на σ.

Все эти выводы достаточно универсальны и (за исключением выбора $|\xi|$ и λ) универсально зависят от параметра $\boldsymbol{A}$ (4.36) модели частиц в ранней вселенной. Этот параметр должен удовлетворять ограничениям

$$\frac{\lambda}{|\xi|} \ll \boldsymbol{A} \leqslant 1{,}3\,, \tag{4.41}$$

чтобы было адекватным приближение больших $|\xi|$ в (4.35), обеспечивающее подавление сверхпланковских масштабов энергий (нижняя граница), и чтобы обеспечить достаточную продолжительность инфляции (верхняя граница). Эти ограничения свидетельствуют в пользу квазисуперсимметричной природы модели частиц в ранней вселенной [95], поскольку, по-видимому, только суперсимметрия в состоянии обеспечить баланс между вкладами бозонов и фермионов в (4.36) и зажать константу $\boldsymbol{A}$ в пределах (4.41).

Сделаем краткое резюме результатов применения методов гравитационного туннелирования в теории квантового происхождения ранней вселенной. Как видно, квантовый механизм, который подавляет вклад сверхпланковских масштабов, также генерирует узкий вероятностный пик в распределении туннелирующих инфляционных вселенных и свидетельствует в пользу (квази)суперсимметричной природы полевой модели в ранней вселенной. Этот пик расположен при субпланковском значении постоянной Хаббла, что служит убедительным аргументом в пользу квазиклассического разложения для квантово-гравитационных эффектов и хорошо согласуется с наблюдениями микроволнового фона в модели с неминимальным инфлатонным полем. Замечательным свойством теории является то, что ее выводы основаны на одном малом параметре — безразмерном отношении двух фундаментальных масштабов, теории великого объединения и планковского, задаваемого комбинацией констант $\sqrt{\lambda}/|\xi| \simeq 10^{-5}$. Конкретное значение этой комбинации, конечно, также требует объяснения, которое, возможно, последует из ренормгрупповых методов (или их обобщения на пертурбативно неперенормируемые теории) [88].

С точки зрения квантовой космологии ранней вселенной эти результаты делают более предпочтительным выбор туннелирующего квантового состояния по сравнению с состоянием Хартла – Хокинга. Спор по поводу преимуществ одного состояния перед другим имеет долгую историю [40, 75, 60, 84, 101, 78]. В настоящее время в космологическом контексте туннелирующее состояние кажется более полезным и концептуально ясным, поскольку для его интерпретации не надо привлекать спорные идеи третичного квантования, которые возникают в случае волновой функции Хартла – Хокинга: разложение ее на положительно- и отрицательно-частотные компоненты и отдельное вычисление для них вероятностных распределений. С другой стороны, формулировка туннелирующего состояния не является достаточно эстетически замкнутой, поскольку использует положительно-частотное граничное условие после потенциального барьера, нормировку на константу под барьером при $a = 0$, требование нормируемости по неоднородным модам f и т.д. И все это в отличие от замкнутой формулировки в виде функционального интеграла для волновой функции Хартла – Хокинга, автоматически обеспечивающего многие из этих свойств. Однако вне космологического контекста, в частности, в физике кротовых нор и черных дыр, туннелирующая прескрипция для волновой функции выглядит бесполезной, а на пересечении космологической проблематики с теорией виртуальных черных дыр она приводит к противоестественному заключению, что квантовое рождение больших черных дыр более вероятно, чем планковских [102].

Все эти аргументы вряд ли могут быть решающими вне рамок последовательной теории, которая должна установить статус третичного квантования, решить открытую в настоящее время проблему корректного квантования конформной моды в эйнштейновском лагранжиане и т.д. В теории квантового рождения ранней вселенной вся эта проблематика, по-видимому, не играет решающей роли. Заметим, что критерий нормируемости волновой функции и алгоритм (4.25) не распространяются на низкоэнергетический предел $\varphi \to 0$, где наивно вычисляемая функция распределения Хартла – Хокинга обращается в бесконечность и приближение медленного скатывания становится неприменимым. К счастью, эта область отделена от вероятностного инфляционного пика обширной "пустыней" с практически нулевой плотностью квантового распределения, что, по-видимому, оправдывает полученные выводы, пренебрегающие явлениями инфракрасной физики дочерних вселенных и теории космологической постоянной Коулмена [30].

5. Заключение

Основная мысль этой работы: главный объект квантовой гравитации — так называемая "волновая функция Вселенной" — таковой в обычном квантовомеханическом смысле слова не является, поскольку подчиняется уравнениям связи и, тем самым, не нормируема в суперпространстве. Нормируемая волновая функция, так же как ее динамическая эволюция, уравнение Шрёдингера, которому она подчиняется, вводятся путем наложения на координаты суперпространства калибровочных условий (3.18) или (3.22), параметризованных числом t. Возникает вопрос: имеет ли смысл теория, в которой вся динамика задается выбором калибровки, т.е. "руками"? или: "меняется ли физика в зависимости от того, что мы назовем "часами"? (Карел Кухар, см. дискуссию по квантовой гравитации в книге [103]).

Заметим, во-первых, что в ОТО — классической или квантовой — так и должно быть: "динамика", если под этим словом понимать явную зависимость полей от времени, очевидно, меняется при преобразованиях координат, т.е. зависит от выбора системы отсчета (а это и есть выбор калибровки). Однако, если в классике существует стандартная процедура пересчета из одной системы отсчета в другую, то в квантовой гравитации ситуация не столь очевидна. Может оказаться, что квантовые теории АДМ, построенные при различных выборах калибровок, физически неэквивалентны.

Хорошо известно, что состояние квантового вакуума пространства Минковского не является "пустым" в ускоренной системе отсчета [104], а наблюдатель, свободно падающий в поле черной дыры, не увидит ни горизонта, ни излучения Хокинга, хотя они вполне объективно наблюдаемы покоящимися в асимптотической области приборами. Это "несоответствие", называемое "информационным парадоксом", привело к тому, что недавно был сформулирован "принцип дополнительности для черной дыры" [105, 106], который, по мнению авторов этих работ, "изменит все наши представления о квантовании гравитации".

Проблема, однако, с нашей точки зрения, не в том, что динамика задается выбором калибровки, а в том, чтобы сформулировать правила построения калибровочных условий, соответствующих выбору физических систем отсчета, задаваемых физическими телами, что в квантовой теории не просто; вспомним, что даже такие привычные слова, как "свободное падение", приобретают в квантовой гравитации операторный смысл. Во всяком случае, выбор таких *физически мотивированных* калибровочных условий должен зависеть от динамических свойств системы, а, возможно, даже и от фоновой геометрии (нулевого приближения в квазиклассическом разложении по степеням постоянной Планка). Подобная зависимость процедуры квантования от начальной точки разложения теории возмущений внесет в теорию принципиальную нелинейность, отсутствующую в обычной квантовой теории.

Иной смысл проблема выбора калибровок приобретает в формализме третичного квантования, когда "волновая функция Вселенной" объявляется оператором. Необходимое в этом подходе определение одновременных коммутаторов, очевидно, требует введения понятия "одновременности", т.е. расслоения суперпространства гиперповерхностями, что и фиксируется выбором калибровки. Использование же не требующего фиксации калибровки "S-матричного", ковариантного в суперпространстве языка, предполагает введение источников в правую часть уравнения Уилера – ДеВитта, что есть выход за "массовую оболочку" уравнения связи.

Необходимо отметить, что прямые аналогии квантовой гравитации с теорией релятивистской частицы и ее вторичным квантованием законны лишь для минисуперпространственных моделей. В общем случае справедливы не одно, а ∞^3 (по числу точек 3-пространства) уравнений Уилера – ДеВитта. Тем самым, строго говоря, квантовая гравитация соответствует системе из ∞^3 релятивистских частиц, распространяющихся в конечномерном (по числу полей, подсчитанных с учетом супермоментных связей) минисуперпространстве и взаимодействующих друг с другом за счет градиентных по $\mathbf{x}$ членов исходного лагранжиана. Формулы данной работы применимы, конечно, и в этом общем случае, однако в отличие от "одночастичных" задач, рассмотренных в разделах 3.5 и 3.7, квантование методом редукции АДМ в задаче двух (не говоря уже о бесконечном числе) взаимодействующих релятивистских частиц нетривиально и требует специального рассмотрения.

Возвращаясь к первоосновам, попробуем указать то исходное "техническое" обстоятельство, которое делает квантовую гравитацию столь трудной и вместе с тем столь содержательной наукой. Известно, что траекторию нерелятивистской частицы, движущейся в стационарном потенциале $U(\mathbf{x})$ с энергией E, можно получить варьированием так называемого "укороченного" действия Мопертюи [107]

$$S_{\mathrm{M}} = \int \sqrt{T(E-U)}\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

(T — кинетическая энергия), формально описывающего движение релятивистской частицы переменной массы, или иначе — движение в конформно-плоском пространстве с масштабным фактором $(E-U)$. Классические экстремали (с энергией E) стандартного действия с лагранжианом $(T-U)$ и действия (5.1), очевидно, совпадают, но квантование теории (5.1), т.е. системы, помещенной на поверхность постоянной энергии, приводит к принципиально иным, отличным от нерелятивистской задачи результатам. (О квантовании систем со связями см. [108].) В ОТО действие аналогичное (5.1), получаемое подстановкой в действие Эйнштейна g_{00}-компоненты метрики, выраженной из (00)-компоненты уравнений Эйнштейна, было выписано впервые в 1962 г. в работе Байерлайна, Шарпа, Уилера (БШУ) [109]; см. также [110, 111].

В асимптотически плоских пространствах гравитация БШУ (т.е. гравитация, в которой справедлива связь Уилера–ДеВитта), вообще говоря, не эквивалентна стандартной ОТО и получается из последней наложением добавочного условия равенства нулю поверхностного интеграла, задающего энергию-импульс гравитационного поля и материи. В сущности, большинство концептуальных проблем квантовой гравитации — проблема времени и т.п. — возникают в результате наложения этой связи, всегда справедливой в замкнутых пространствах. Трудности интерпретации квантовой гравитации вблизи "точки поворота" обусловлены вырождением действия типа (5.1) при $E-U=0$. В этой связи упомянем оставшуюся за пределами данной статьи проблему стрелы времени, конкретнее — проблему поворота стрелы времени, которой А.Д. Сахаров уделял большое внимание (см. вводную статью в юбилейном выпуске УФН, 1991 г. [112]). Вначале Хокинг утверждал [113], что при максимальном расширении Вселенной происходит обращение термодинамической стрелы времени, потом он писал об этом, как о главной своей ошибке. (См. [114, 115] и также, например, недавнюю работу [116], авторы которой все-таки настаивают, что при достижении Вселенной максимального радиуса время пойдет вспять.) Без сомнения, эти дискуссии отражают реальные трудности теории.

Другой принципиальный вопрос, связанный с проблемой "поворота", в окрестности которого нельзя пользоваться квазиклассическим приближением: допускает ли квантовая гравитация с супергамильтоновой связью построение квазиклассического волнового пакета, описывающего стационарное пространство-время, в частности пространство Минковского? Ведь в определенном смысле стационарность — это "перманентная точка поворота". В связи с этим вопросом неоднократно высказывалось мнение, что ОТО со связью Уилера–ДеВитта удовлетворяет принципу Маха, согласно которому пустое пространство Минковского — объект физически недопустимый [23, 24, 103, 110, 117].

В заключение — о двух принципиально противоположных подходах к объяснению фундаментальных свойств наблюдаемой Вселенной: размерность, сигнатура, константы ... Первый подход, которого придерживался А.Д. Сахаров, называется принципом "антропологического отбора": "В духе антропологического принципа считаем, что наблюдаемая Вселенная выделена совокупностью значений параметров благоприятных для развития жизни и разума. В частности, возможно, сигнатура ... является одним из таких параметров" [2]. И далее: "В пространстве P следует рассматривать бесконечное число U-включений (для всей совокупности траекторий или даже для одной траектории); при этом параметры бесконечного числа из них могут быть сколь угодно близкими к параметрам наблюдаемой Вселенной. Поэтому можно предполагать, что число похожих на нашу Вселенную, в которых возможны структуры, жизнь и разум, бесконечно. Это не исключает того, что жизнь и разум возможны в бесконечном числе классов существенно иных Вселенных, образующих конечное или бесконечное число классов "похожих" Вселенных, в том числе Вселенных с иной, чем наша, сигнатурой" [2]. (Здесь P — евклидово пространство положительно-определенной сигнатуры, U — вселенная с одним временем.) Для Сахарова идея множественности вселенных, столь естественно возникающая при третичном квантовании гравитации (а также в моделях хаотической инфляции), была очень близка — об этом во многих его работах, а также в Нобелевской лекции.

От этого бесконечного многообразия возможностей невольно хочется спрятаться в скорлупу наивного антропоморфизма. Противоположный антропному принципу подход "динамической предопределенности" не отрицает существования "пространственно-временной пены" на планковском масштабе, но питает надежду, что удастся сформулировать принципы и уравнения, которые позволят вычислить фундаментальные константы, а также объяснят, почему вселенные с размерностью и иной, чем $3+1$, сигнатурой не могут быть большими и квазиклассическими. Бесчисленные вселенные, о которых говорит Сахаров, сами слова об их пространственно-временных характеристиках, имеют смысл только в квазиклассическом приближении, тогда как на фундаментальном квантовом уровне ситуация может быть гораздо более однозначной. Следующие из первопринципов, жесткие требования к существованию квазиклассического предела (т.е. фазы нарушенной симметрии общекоординатных диффеоморфизмов) могут обладать достаточной предсказательной силой для объяснения свойств макроскопической вселенной. Здесь квантовая гравитация дает большой простор для идей. Но та — главная, "сумасшедшая" (по Бору) — пока еще, по-видимому, не родилась. Заведомо не претендуя на полноту (раскрытие этой темы требует написания специального обзора), отметим работы [118–120], в которых предпринята попытка объяснения 3-мерности пространства в рамках теории струн. Теория виртуальных кротовых нор и "большой фиксации" Коулмена, Гиддингса, Строминджера [30] (см. введение, раздел 1.6), к сожалению, вопреки первоначальному оптимизму, пока не давшая желаемых результатов, очевидно, является попыткой реализации принципа "динамической предопределенности". Результаты раздела 4, где получена функция распределения с максимумом для задающей темп инфляции постоянной Хаббла, тоже следует отнести к попыткам динамического, не антропного, предсказания свойств наблюдаемой Вселенной.

Благодарности

Авторы благодарны за обсуждения К. Йоттеруду, А.Ю. Каменщику, В.А. Рубакову и И.В. Тютину.

Мы благодарим за поддержку этой работы Российский фонд фундаментальных исследований (грант 96-02-16287-а).

Один из авторов (А.О.Б.) благодарен за поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (гранты 96-02-16295 и 96-01-00482), за совместную поддержку Международному научному фонду и Правительству Российской Федерации (грант MQY300), а также Европейскому сообществу (грант INTAS-93-493). Эта работа стала возможной также благодаря частичной поддержке Российского исследовательского проекта "Космомикрофизика".

Список литературы

1. *Академик А.Д. Сахаров. Научные труды* (Под ред. Б Л Альтшулера, Л В Келдыша (председатель), Д А Киржница, В И Ритуса) (М.: Центр-Ком ОТФ ФИАН, 1995)
2. Сахаров А Д *ЖЭТФ* **87** 375 (1984)
3. *УФН* **161** (5) (1991)
4. Сахаров А Д *Горький, Москва, далее везде* (Нью-Йорк: изд. им. А.П. Чехова, 1990); *Знамя* (9–10) (1991)
5. Дирак П А М *Лекции по квантовой механике* (Москва: Мир, 1968)
6. DeWitt B S *Phys. Rev.* **160** 1113 (1967); **162** 1195 (1967)
7. Wheeler J A, in *Batelles Recontres* (Eds C DeWitt, J A Wheeler) (New York: Benjamin, 1968)
8. Barvinsky A O *Phys. Rep.* **230** 237 (1993)
9. Arnowitt R, Deser S, Misner C, in *Gravitation: an Introduction to Current Research* (Ed. L Witten) (New York: Wiley, 1962)
10. Fradkin E S, Vilkovisky G A *Phys. Lett. B* **55** 224 (1975); CERN Report TH-2332 (1977); Batalin I A, Vilkovisky G A *Phys. Lett. B* **69** 309 (1977)
11. Becchi C, Rouet A, Stora R *Comm. Math. Phys.* **42** 127 (1975); Тютин И В, Препринт № 39 ФИАН (1975); Kugo T, Ojima I *Suppl. Progr. Theor. Phys.* **66** 1 (1979)
12. Hawking S W, in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge, London, New York, Melbourne: Cambridge Univ. Press, 1979) Русский перевод: *Общая теория относительности* (Под ред. С Хокинга, В Израэля) (М.: Мир, 1983) с. 363
13. Barvinsky A O, in *Proc. of GR9 540* (*Jena, 1980*)
14. Barvinsky A O, Ponomaryov V N *Phys. Lett. B* **167** 289 (1986)
15. Teilteiboim C *Phys. Rev. D* **25** 3159 (1982); **28** 298, 310 (1983)
16. Halliwell J J *Phys. Rev. D* **38** 2468 (1988)
17. Hartle J B, Hawking S W *Phys. Rev. D* **28** 2960 (1983)
18. Hawking S W *Nucl. Phys. B* **239** 257 (1984)
19. DeWitt B S, in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics* (Eds I A Batalin, C J Isham, G V Vilkovisky) (Bristol: Adam Hilger, 1987) p. 191
20. Vilkovisky G A *Nucl. Phys. B* **234** 125 (1984); *Class. Quant. Grav.* **9** 895 (1992); in *Quantum Theory of Gravity* (Ed. S M Christensen) (Bristol: Adam Hilger, 1984)
21. Epp R J, Kunstatter G, Toms D J *Phys. Rev. D* **47** 2474 (1993)
22. Barbero J F, Perez-Mercader J *Phys. Rev. D* **48** 3663 (1993)
23. Altshuler B L, Boyarsky A M, Neronov A Yu "The problem of classical limit in quantum cosmology: the effective action language", in *Report at the Seminar "Quantum Gravity. In Memory of Academician Moisei Markov", June 12–19, Moscow, 1995, gr-qc 9511069* (to be published in World Scientific)
24. Altshuler B L, Boyarsky A M, Neronov A Yu *Gravitation and Cosmology* **1** 191 (1995)
25. Isham C J *J. Math. Phys.* **35** 6360 (1994)
26. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Phys. Rev. D* **52** 743 (1995)
27. Wheeler J A *Ann. Phys.* (*N.Y.*) **2** 604 (1957); in *Geometrodynamics* (New York: Academic, 1962)
28. Banks T *Nucl. Phys. B* **309** 493 (1988)
29. Lavrelashvili G V, Rubakov V A, Tinyakov P G *Письма в ЖЭТФ* **46** 167 (1987); *Nucl. Phys. B* **299** 757 (1988); *Mod. Phys. Lett. A* **3** 1231 (1988)
30. Giddings S, Strominger A *Nucl. Phys. B* **306** 890 (1988); **321** 481 (1988); Coleman S *Nucl. Phys. B* **307** 867 (1988); **310** 643 (1988)
31. Hawking S W, Laflamme R *Phys. Lett. B* **209** 39 (1988); Hawking S W *Phys. Rev. D* **37** 904 (1988); *Nucl. Phys. B* **335** 155 (1990)
32. Rubakov V A *Nucl. Phys. B* **453** 395 (1995)
33. Hawking S W *Nucl. Phys. B* **363** 117 (1991)
34. Fradkin E S, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **271** 561 (1986)
35. Tseytlin A A *Phys. Lett. B* **251** 530 (1990)
36. Bleyer U et al. *Nucl. Phys. B* **429** 177 (1994)
37. Redmount I H, Suen W-M *Phys. Rev. D* **49** 5199 (1994)
38. Frolov V P, Novikov I D *Phys. Rev. D* **42** 1057 (1990)
39. Frolov V P, in *Sakharov Memorial Lectures in Physics* (Eds L V Keldysh, V Ya Fainberg) (New York: Nova Science Publ. Inc., 1992) p. 1067
40. Линде А Д *Физика элементарных частиц и инфляционная космология* (М.: Наука, 1990); Linde A D *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood Academic, 1990)
41. Greensite J *Phys. Lett. B* **300** 34 (1993)
42. Carlini A, Greensite J *Phys. Rev. D* **49** 866 (1994)
43. Kriele M, Martin J *Class. Quant. Grav.* **12** 503 (1995)
44. Embacher F *Gravitation and Cosmology* **1** 46 (1995)
45. Hellaby C, Dray T *Phys. Rev. D* **49** 5096 (1994)
46. Blencowe M P, Duff M J *Nucl. Phys. B* **310** 387 (1988).
47. Сахаров А Д *ДАН СССР* **177** 70 (1967); *ТМФ* **23** 178 (1975)
48. Green M B, Schwarz J H, Witten E *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988) Русский перевод: Грин М, Шварц Дж, Виттен Э *Теория суперструн* (М.: Мир, 1990)
49. Polyakov A M *Gauge Fields and Strings* (Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers, 1987) Русский перевод: Поляков А М *Калибровочные поля и струны* (Пер. с англ. В Г Книжник, ред. А А Белавин, М Ю Лашкевич) (М.: ИТФ им. Л Д Ландау, 1995)
50. *J. Math. Phys.* **36** 11 (1995) Special Issue on Quantum Gravity and Diffeomorphism Invariant Quantum Field Theory
51. Halliwell J J *Int. J. Mod. Phys. A* **5** 2473 (1990)
52. Isham C J *Structural Issues in Quantum Gravity* (Plenary Session lecture given at the GR 14 Conference, Florence, August 1995)
53. *Sakharov Memorial Lectures in Physics. Proc. of the First International Sakharov Conference on Physics, Moscow, 21–31 May, 1991* (Eds L V Keldysh, V Ya Fainberg) (New York: Nova Science Publ. Inc., 1992)
54. Kuchar K V *J. Math. Phys.* **17** (1976) 777
55. Фаддеев Л Д *ТМФ* **1** 3 (1969)
56. Barvinsky A O, Krykhtin V *Class. Quant. Grav.* **10** 1957 (1993)
57. Kuchar K V, in *Proc. of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Eds G Kunstatter, D Vincent, J Williams) (Singapore: World Scientific, 1992)
58. Geroch R P *J. Math. Phys.* **8** 782 (1967)
59. DeWitt B S, in *Proc. of the Third Seminar on Quantum Gravity* (Eds M A Markov, V A Berezin, V P Frolov) (Singapore: World Scientific, 1985)
60. Vilenkin A *Phys. Lett. B* **117** 25 (1982); *Phys. Rev. D* **27** 2848 (1983)
61. Lapchinsky V, Rubakov V A *Acta Phys. Polon. B* **10** 1041 (1979)
62. Banks T *Nucl. Phys. B* **249** 332 (1985)
63. Kiefer C, Preprint Freiburg THEP-95/1, gr-qc/9501001
64. Batalin I A, Fradkin E S *Rivista del Nuovo Cim.* **9** 1 (1986); *Ann. Inst. Henri Poincare* **49** 145 (1988)
65. Barvinsky A O *Phys. Lett. B* **241** 201 (1990)
66. Barvinsky A O *Class. Quant. Grav.* **10** 1985 (1993)
67. DeWitt-Morette C *Ann. Phys.* **97** 367 (1976)
68. Gribov V N *Nucl. Phys. B* **139** 1 (1978)
69. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Phys. Rev. D* **50** 5093 (1994)
70. Halliwell J J, Hartle J B *Phys. Rev. D* **41** 1815 (1990)
71. Gibbons G W, Hartle J B *Phys. Rev. D* **42** 2458 (1990)
72. York J *Phys. Rev. Lett.* **26** 1656 (1971); **28** 1082 (1972)
73. O'Murchadha N, York J *J. Math. Phys.* **14** 1551 (1973)
74. Ashtekar A *Non-Perturbative Quantum Gravity* (Singapore: World Scientific, 1991)
75. Linde A D *Phys. Lett. B* **129** 177 (1983)
76. Сахаров А Д *ЖЭТФ* **49** 345 (1965)

77. Hawking S W, Page D N *Nucl. Phys. B* **264** 185 (1986)
78. Vilenkin A *Phys. Rev. D* **37** 888 (1988)
79. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Class. Quant. Grav.* **7** L181 (1990)
80. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu *Phys. Lett. B* **332** 270 (1994)
81. Mottola E, Lapedes A *Phys. Rev. D* **27** 2285 (1983)
82. Laflamme R *Phys. Lett. B* **198** 156 (1987)
83. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu, Mishakov I V Quantum Creation of the Early Universe, to be published in Nucl. Phys. B
84. Линде А Д *ЖЭТФ* **87** 369 (1984); Linde A D *Sov. Phys. JETP* **60** 211 (1984); *Lett. Nuovo Cimento* **39** 401 (1984); Zeldovich Ya B, Starobinsky A A *Sov. Astron. Lett.* **10** 135 (1984); Vilenkin A *Phys. Rev. D* **30** 549 (1984)
85. Vachaspati T, Vilenkin A *Phys. Rev. D* **37** 898 (1988)
86. Salopek D S, Bond J R, Bardeen J M *Phys. Rev. D* **40** 1753 (1989)
87. Page Don N *J. Math. Phys.* **32** 3427 (1991)
88. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu, Karmazin I P *Phys. Rev. D* **48** 3677 (1993)
89. Spokoiny B L *Phys. Lett. B* **129** 39 (1984); Fakir R, Unruh W G *Phys. Rev. D* **41** 1783 (1990)
90. Halliwell J J, Hawking S W *Phys. Rev. D* **31** 1777 (1985)
91. Wada S *Nucl. Phys. B* **276** 729 (1986)
92. Barvinsky A O, Kamenshchik A Yu "Quantum Origin of the Early Universe and the Energy Scale of Inflation", in *Proc. VI Sem.* "*Quantum Gravity*" (*Moscow, 1995*), gr-qc/9510032
93. Barvinsky A O *Phys. Rev. D* **50** 5115 (1994)
94. DeWitt B S *Dynamical Theory of Groups and Fields* (New York: Gordon and Breach, 1965); Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Phys. Rep.* **119** 1 (1985)
95. Kamenshchik A Yu *Phys. Lett. B* **316** 45 (1993)
96. Smoot J et al. *Astrophys. J.* **396** L1 (1992)
97. Strukov I et al. *Pis'ma A. Zh.* **18** 387 (1992); *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **258** 37p (1992)
98. Salopek D S, Preprint DAMTP R92/41 (1992)
99. Bardeen J M, Steinhardt P J, Turner M S *Phys. Rev. D* **28** 679 (1983)
100. Allen B *Nucl. Phys. B* **226** 228 (1983); Fradkin E S, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **234** 472 (1984)
101. Rubakov V A *Phys. Lett. B* **148** 280 (1984)
102. Bousso R and Hawking S W, Preprint DAMTP/R-95/33, gr-qc/9506047
103. *Mach's Principle*: *from Newton's Bucket to Quantum Gravity* (Eds J Barbour, H Pfister) *Einstein Studies* Vol. 6 (Boston – Basel – Berlin: Birkhauser, 1995)
104. Гинзбург В Л, Фролов В П *Труды ФИАН* **197** 8 (1989)
105. Susskind L, Thorlacius L, Uglum J *Phys. Rev. D* **48** 3743 (1993)
106. Susskind L, Thorlacius L *Phys. Rev. D* **49** 966 (1994)
107. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Физматгиз, 1958)
108. Гитман Д М, Тютин И В *Каноническое квантование полей со связями* (М.: Наука, 1986)
109. Baierlein R F, Sharp D H, Wheeler J A *Phys. Rev.* **126** 1864 (1962)
110. Barbour J B *Class. Quant. Grav.* **11** 2853, 2875 (1994)
111. Greensite J *Phys. Rev. D* **49** 930 (1994)
112. Альтшулер Б Л, см. [3], с. 3
113. Hawking S W *Phys. Rev. D* **32** 2496 (1985)
114. Page Don N, in Ref. [53], p. 1031
115. Gell-Mann M, Hartle J B, in Ref. [53], p. 1151
116. Kiefer C, Zeh H D *Phys. Rev. D* **51** 4145 (1995)
117. Lynden-Bell D, Katz J, Bicak J *Month. Not. Roy. Astr. Soc.* **272** 150 (1995)
118. Cleaver G B, Rosenthal P J *Nucl. Phys. B* **457** 621 (1995)
119. Brandenberger R, Vafa C *Nucl. Phys. B* **316** 391 (1989)
120. Tseytlin A A, Vafa C *Nucl. Phys. B* **372** 443 (1992)

Quantum cosmology and physics of transitions with a change of the space-time signature

B.L. Al'tshuler, A.O. Barvinsky
P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskiĭ prosp. 53, 117924 Moscow, Russia
Tel. (*7-095*) *135-83 39*
E-mail: *altshul@lpi.ac.ru, barvin@rq2.fian.msk.su*

This paper examines elements of the general theory of transitions with changing space-time signature in quantum gravity and cosmology as suggested in a pioneering work of A.D. Sakharov. Unlike the conventional formal method for functional integration, this approach uses as the starting point the Dirac – Wheeler – DeWitt operator quantization and its reduction to quantization in the Arnowitt – Deser – Misner variables. It has been demonstrated that the motivation to consider Euclidean-Lorentzian transitions consists in the global ambiguity of physical reduction on the phase space of the theory (a gravitational analogue of the problem of Gribov' copies). This ambiguity specifically results in the undefined sign of the physical inner product of quantum states and leads to the concept of third quantization. An alternative approach is the quantization in the York gauge and in special variables of conformal superspace. The problem of origin of the early Universe through gravitational tunneling in Hartle – Hawking and Vilenkin quantum states is considered to illustrate applications of the general theory. The mechanism is described by which loopwise effects generate the normalisable distribution function for the ensemble of chaotic inflationary universes. In a model with a large non-minimal coupling constant for the scalar inflaton, this mechanism gives rise to a sharp probability peak at sub-Planckian values of the Hubble constant and other parameters, which is in good agreement with the current observable status of the cosmological inflation theory.

PACS numbers: 04.60.Ds, 98.80.Bp, 98.80.Cq, 98.80.Hw

Bibliography — 120 references

Received 19 February 1996