

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Конфайнмент

Ю.А. Симонов

*В обзоре излагаются различные аспекты и механизмы невылетания цвета в квантовой хромодинамике. После введения калибровочно-инвариантных параметров порядка явление формулируется на языке корреляторов полей и явно выделен класс корреляторов, ответственных за конфайнмент. В терминах эффективных лагранжианов конфайнмент показан как дуальный эффект Мейсснера и для количественного описания используется популярный метод абелевых проекций, который детально объясняется. Для нахождения полевых конфигураций, ответственных за конфайнмент, рассмотрены классические решения и подвергнуты анализу с помощью нового критерия отбора. В конце обзора все стороны и механизмы явления иллюстрируются на простом примере образования струны у кварка, движущегося в поле тяжелого антикварка.*

PACS numbers: 12.38.Aw

## Содержание

1. Введение (337).
  2. Определение и параметры порядка (338).
  3. Корреляторы полей и конфайнмент (341).
  4. Конфайнмент и сверхпроводимость. Дуальный эффект Мейсснера (346).
  5. Метод абелевых проекций (349).
  6. Поиск классических решений. Монополи, мультиинстантоны и дионы (353).
  7. Топология и стохастичность (357).
  8. Заключение (360).
- Список литературы (361).

## 1. Введение

Около 10 лет назад автор рассмотрел различные модели конфайнмента в обзоре [1]. Уже тогда из многих конкурирующих моделей была выявлена главная идея механизма конфайнмента — беспорядок, или стохастичность, полей вакуума на больших расстояниях. Особую красоту это явление приобрело, когда выяснилось, что за беспорядок ответственны топологически нетривиальные конфигурации [2], причем эти конфигурации могут быть как квантовыми, так и квазиклассическими. В последнем случае нужно исследовать существующие классические решения: инстантоны, мультиинстантоны, дионы и т.д.

Целенаправленная работа многих исследователей в течение последних 10 лет дала целый ряд дополнитель-

ных аргументов в пользу стохастического механизма и позволила отбросить в сторону ряд популярных в прошлом моделей: например, модель диэлектрического вакуума и модель  $Z_2$ -вихрей. О них читатель может узнать в [1] и в указанных там ссылках. В то же время возникло и новое, более глубокое понимание явления.

Оказалось, что на феноменологическом уровне стохастический механизм проявляет себя как дуальный мейсснеровский механизм, предложенный для объяснения конфайнмента 20 лет назад [3]. За последние годы в пользу дуального эффекта Мейсснера в вакууме квантовой хромодинамикой (КХД) накоплено много решеточных данных, и был предложен метод абелева проецирования [4], с помощью которого аналогия между струной КХД и струной Абрикосова–Нильсена–Олесена (АНО) установлена на количественном уровне.

В то же время точная форма удерживающих конфигураций вакуумных полей — классических ли решений или квантовых флуктуаций — еще не найдена, в этом направлении продолжается активная работа.

Настоящий обзор основан на обширной информации, полученной из решеточных вычислений, феноменологии сильных взаимодействий и теоретико-полевых работ.

Обзор имеет следующую структуру. После формулировки в следующем разделе критериев, которым должны удовлетворять механизмы конфайнмента, в разделе 3 дано описание общего метода вакуумных корреляторов (МВК) [5], и конфайнмент характеризуется посредством определенных свойств корреляторов вакуумных полей.

В разделе 4 проводится детальное сравнение сверхпроводимости и конфайнмента, с точки зрения как МВК, так и эффективного лагранжиана типа Гинзбурга–Ландау. В разделе 5 вводится метод абелевой проекции (АП) и используются решеточные данные, чтобы установить, насколько близок вакуум КХД к дуальному сверхпроводнику. Одновременно метод АП выявляет топологические свойства удерживающих конфигураций.

Ю.А. Симонов. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, ул. Б. Черемушкинская 25, Россия  
Тел. (095) 123-02-92  
Факс (095) 123-65-84, 883-96-05  
E-mail: simonov@vitep5.itep.ru

Статья поступила 18 января 1996 г.

В разделе 6 представлены наиболее вероятные кандидаты на такие конфигурации среди классических решений. Введен принцип, позволяющий различать, способно ли то или иное решение обеспечить конфайнмент, если из них построить разреженный газ.

Связь топологии конфигураций и стохастических свойств вакуума КХД обсуждается в разделе 7.

В заключении подводятся итоги поиска конфигураций и независимо от них в простом виде сформулирована картина удерживающего вакуума. Кратко обсуждается возможный механизм деконфайнмента при росте температуры.

## 2. Определение конфайнмента. Параметры порядка

Под конфайнментом обычно понимается явление, при котором в физическом спектре отсутствуют частицы (поля), входящие в фундаментальный лагранжиан. В случае КХД, который только и будет нас интересовать ниже, это означает, что кварки, глюоны и вообще все цветные объекты не могут существовать как отдельные асимптотические состояния. Для большей точности заметим, что иногда безмассовые частицы, входящие в лагранжиан своими полями, например фотон или глюон, могут эффективно приобрести массу — в этом состоит явление экранировки в плазме или вакууме КХД выше температуры деконфайнмента. В силу данного выше определения существование асимптотических экранированных цветных состояний невозможно в фазе конфайнмента.

С другой стороны, в фазе деконфайнмента кварки и глюоны могут эволюционировать по евклидову (или минковскому) времени по отдельности, не соединенные струнами. Это приводит к тому, что свободная энергия для достаточно больших температур  $t$  пропорциональна  $t^4$ , как для фотонного газа, и поэтому такую фазу естественно называть кварк-глюонной плазмой (КГП). Как оказывается, КГП весьма далека по своим свойствам от идеального газа кварков и глюонов, и в ней возникает своеобразное взаимодействие, названное магнитным конфайнментом, — об этом мы подробнее поговорим в заключении, а сейчас возвратимся к фазе конфайнмента.

Очень важно обсудить явление конфайнмента в калибровочно-инвариантных терминах. На этом языке физическое содержание явления конфайнмента лучше всего понять, сравнивая калибровочно-инвариантную систему электрон-позитрон ( $+e, -e$ ) в КЭД и систему кварк-антикварк ( $q\bar{q}$ ) в КХД в отсутствие других зарядов. Когда расстояние между  $+e$  и  $-e$  велико, электромагнитное взаимодействие становится пренебрежимо малым и калибровочно-инвариантная волновая функция системы ( $+e, -e$ ) превращается в произведение индивидуальных волновых функций. Поэтому понятие изолированного заряда и его индивидуальной динамики имеет смысл.

В отличие от этого в современной картине конфайнмента, а также в соответствии с решеточными расчетами и данными эксперимента (мы обсудим их ниже) кварк и антикварк притягивают друг друга на больших расстояниях с силой примерно 14 тонн.

Поэтому  $q$  и  $\bar{q}$  не могут разделиться, и индивидуальная динамика, индивидуальные волновые функции, функции

Грина кварка и антикварка, в принципе, не имеют смысла: кварк (или антикварк) накрепко удерживается его партнером. Это утверждение может быть обобщено на любые ненулевые цветные заряды, например два глюона удерживают друг друга и никогда не могут убежать друг от друга (позже мы обсудим, что происходит, когда в игру включаются посторонние цветные заряды).

Выяснилось также, что явление конфайнмента связано с образованием струны между цветными зарядами — именно струна дает постоянную силу на больших расстояниях; и там динамика цветовых зарядов без струны оказывается неадекватной.

Эта картина хорошо иллюстрируется многочисленными решеточными измерениями потенциала между статическими кварком и антикварком (рис. 1). На рисунке ясно виден линейный рост потенциала  $V(r) = \sigma r$  на больших расстояниях,  $r \geq 0,25$  фм.

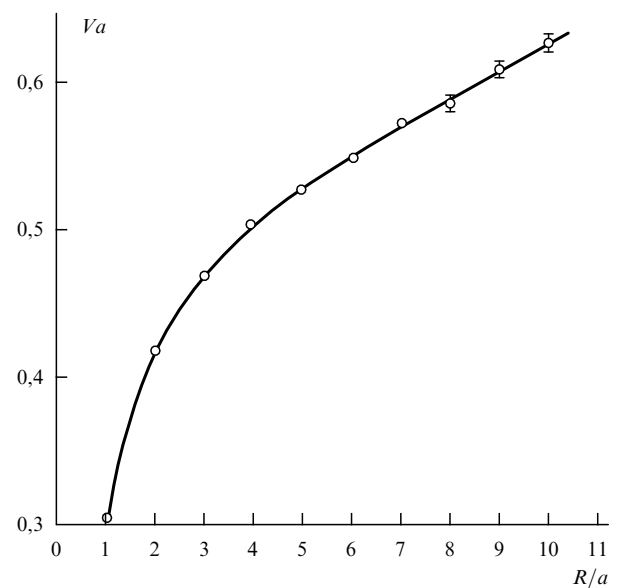


Рис. 1. Потенциал между статическими кварками в триплетном представлении SU(3), вычисленный в [10] на решетке  $32^4$ . Сплошная линия — подгонка вида  $C/R + \sigma R + \text{const}$ . Потенциал и расстояния измеряются в единицах длины ребра решетки  $a$ , равного 0,055 фм для  $\beta = 6,9$ . Динамические кварки в вакууме отсутствуют.

Мы сформулируем это как первое свойство конфайнмента.

1. *Взаимодействие (потенциала) между цветными объектами линейно растет на больших расстояниях.*

Чтобы придать этому утверждению точный смысл, который можно проверить в вычислениях на решетке, удобно ввести так называемую петлю Вилсона [6], через которую определяется потенциал. Делается это следующим образом. Возьмем тяжелые кварк  $Q$  и антикварк  $\bar{Q}$  и рассмотрим процесс, в котором пара  $Q\bar{Q}$  рождается в одной точке  $x$ , затем пара расходится на некоторое расстояние  $r$ , а спустя время  $T$  аннигилирует в точке  $y$ .

Легко видеть, что траектории  $Q$  и  $\bar{Q}$  образуют петлю (начинающуюся в точке  $x$  и заканчивающуюся в точке  $y$ ), а амплитуда (функция Грина) такого процесса по законам квантовой механики пропорциональна фазовому или швингеровскому множителю  $W \propto \exp(i g \int A_\mu j_\mu d^4x)$ , где  $A_\mu$  — полный цветной вектор-потенциал кварков и вакуума и  $j_\mu$  — ток пары  $Q\bar{Q}$ , соответствующий их

движению по петле. Учитывая, что  $A_\mu$  — матрица в цветовом пространстве ( $A_\mu = A_\mu^a T^a$ ,  $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$ , и  $T^a = \sigma^a/2$  для  $SU(2)$  и  $T^a = \lambda^a/2$  для  $SU(3)$ ), нужно добавить оператор упорядочения  $P$  вдоль петли и след по цветовым индексам  $\text{tr}$ , так как кварки рождались и уничтожались в белом состоянии объекта  $Q\bar{Q}$ . Итак, получаем оператор Вилсона для данного распределения полей

$$\langle W(C) \rangle = \text{tr} \left[ P \exp \left( ig \int_C A_\mu dx_\mu \right) \right],$$

где мы использовали точечность кварков,  $j_\mu(x) \propto \delta^{(3)}(x - x(t)) dx_\mu/dt$ .

Наконец, нужно учесть, что поля  $A_\mu(x)$  в вакууме образуют стохастический ансамбль и по этому ансамблю надо усреднять. Это необходимое следствие векторности поля  $A_\mu(x)$  и лоренц-инвариантности вакуума, иначе для фиксированной функции  $A_\mu(x)$  эта инвариантность будет нарушена в противоречии с опытом.

И последнее. В теории поля вообще и при описании вакуума в частности удобно пользоваться евклидовым пространством, чтобы делать расчеты на решетке методом Монте-Карло. Для этого имеются по меньшей мере две причины. Техническая причина: функциональные интегралы в евклидовом пространстве имеют вещественную меру  $\exp(-S_E)$ , где  $S_E$  — евклидово действие, и их сходимость лучше обосновывается (хотя и не доказывается строго для КХД).

Возможно, существует и другая, более глубокая причина. До сих пор все нетривиальные классические решения в КХД (инстантоны, дионы и т.д.) имеют евклидову природу, т.е. в обычном пространстве Минковского они описывают некоторые процессы туннелирования. Подобно ковалентной связи двух атомов, возникающей за счет туннелирования электрона между ними, евклидовы конфигурации в глюодинамике и КХД дают притяжение, т.е. понижение энергии вакуума, и поэтому выгодны для непертурбативной перестройки вакуума (см. обсуждение в заключении). Поэтому в обзоре мы повсюду будем использовать евклидово пространство, т.е. переходить от  $x_0, A_0$  к вещественным евклидовым компонентам  $x_4 = ix_0, A_4 = -iA_0$ . Вернемся теперь к петле Вилсона и свяжем ее с потенциалом. Для этого вспомним, что  $W$  есть амплитуда, или функция Грина системы  $Q\bar{Q}$ , и что ее можно выразить через гамильтониан  $H$  системы как  $W = \exp(-HT)$ , где  $T$  — евклидово время. Для тяжелых кварков кинетическая часть  $H$  исчезает и остается только потенциал  $V(r)$  взаимодействия между кварками, так что окончательно получаем для усредненной вилсоновской петли

$$\langle W(C) \rangle = \left\langle \text{tr} \left[ P \exp \left( ig \int_C A_\mu dx_\mu \right) \right] \right\rangle = \exp[-V(r)T], \tag{1}$$

где петлю  $C$  удобно выбрать в виде прямоугольника  $r \times T$ , и тогда конфайнмент соответствует линейному росту потенциала  $V(r) = \sigma r$ , где  $\sigma$  называется натяжением струны.

Сказав это, надо сразу же оговориться. Во-первых, что происходит, когда присутствуют другие заряды, например  $q\bar{q}$  пары, рожденные из вакуума? Для  $(e\bar{e})$  системы ничего существенного не произойдет, а вот  $q\bar{q}$

система может быть разбита дополнительной парой  $q_1\bar{q}_1$  на две нейтральные системы:  $q\bar{q}_1$  и  $q_1\bar{q}$ , которые могут теперь разойтись — струна рвется на две части.

То же самое верно для пары глюонов, которые могут быть заэкранированы глюонной парой из вакуума.

На практике (т.е. в расчетах на решетке) рождение пар из вакуума подавлено даже для глюонов [7]; один из факторов подавления для кварков есть  $1/N_c$  [8], другой, дополнительный, — по-видимому, численный, и он не вполне еще понят. Так, для числа цветов  $N_c = 3$  результирующий фактор есть 0,1, его можно оценить, например, из отношения ширин адронных резонансов к их массе. Благодаря этому обстоятельству на решетке можно увидеть почти постоянную силу между  $q$  и  $\bar{q}$  вплоть до расстояний в 1 фм и больше, даже когда учитываются динамические фермионы (т.е. дополнительные кварковые пары). На рис. 2 показан линейный конфайнмент во всей измеренной области с точностью как раз около 10%. Поэтому мы сформулируем второе

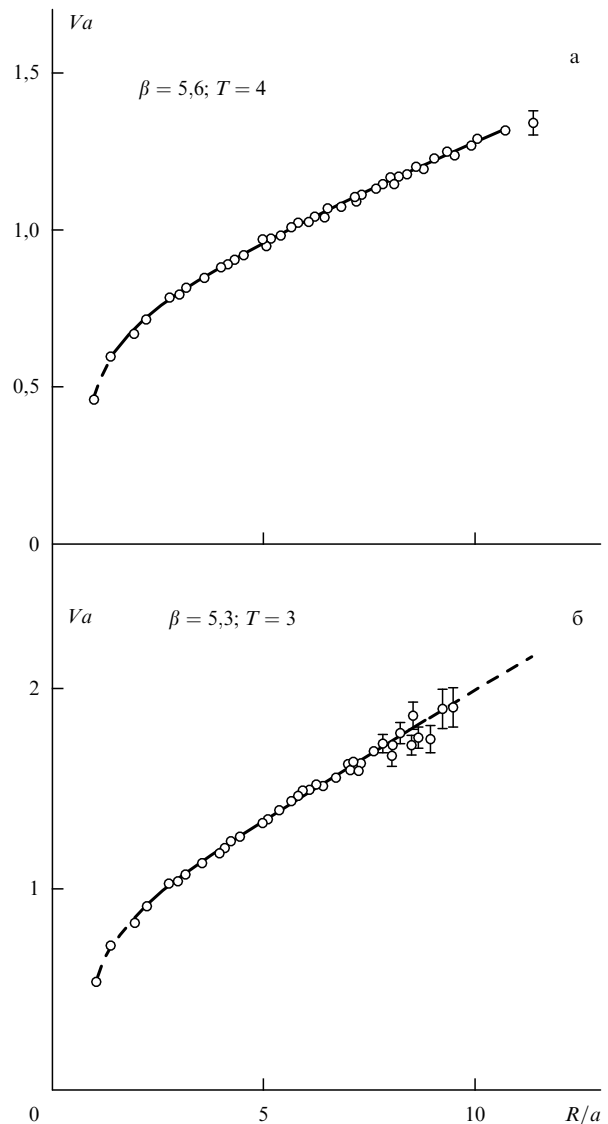


Рис. 2. Тот же потенциал, что на рис. 1, но с учетом динамических кварков, взятых в двух разных решеточных вариантах: (а) staggered fermions,  $a \approx 0,11$  фм, (б) Wilson fermions,  $a \approx 0,16$  фм, вычисления Хеллера и др. (вторая ссылка [10]).

свойство конфайнмента в КХД, которые должны воспроизводить все реалистические теоретические модели.

2. *Линейный конфайнмент между статическими кварками имеет место также в присутствии дополнительных пар  $q\bar{q}$  в области измеряемых расстояний ( $0,3 \text{ фм} \leq r \leq 1,5 \text{ фм}$ ).*

Еще одно важное замечание по поводу динамики кварков (или глюонов) на малых расстояниях. Там доминирует пертурбативное взаимодействие, потому что оно сингулярно, что видно хотя бы из силы, возникающей между кварком и антикварком за счет обмена глюоном,  $4\alpha_s/3r^2$ . Сравнивая ее с силой конфайнмента ( $\sigma = 0,2 \text{ ГэВ}^2 \approx 14 \text{ тонн}$ ), мы видим, что пертурбативная динамика доминирует на расстояниях  $r < 0,25 \text{ фм}$ .

На этих расстояниях кварки и глюоны можно рассматривать отдельно с существенно пертурбативной динамикой. Последнее подтверждается успешным сравнением теории возмущений в КХД с экспериментальными данными [9].

До сих пор речь шла о зарядах в фундаментальном представлении (кварках). Весьма удивительные результаты были получены для взаимодействия статических зарядов в других представлениях цветовой группы. Например, заряды в присоединенном представлении, которые могли бы быть легко заэкранированы глюонами из вакуума, в решеточных расчетах показывают линейный конфайнмент в физической области ( $r \leq 1,5 \text{ фм}$ ) (рис. 3). Частично это свойство можно понять с точки зрения больших  $N_c$  [7]: экранированная часть потенциала  $V_s \propto r^{-1} \exp(-\mu r)$  подавлена множителем  $1/N_c^2$  по сравнению с линейной частью, но становится преобладающей на больших расстояниях

$$\langle W_{\text{adj}}(C) \rangle = C_1 \exp(-\sigma_{\text{adj}} r T) + \frac{C_2}{N_c^2} \exp[-V_s(r) T]. \quad (2)$$

То же свойство выполняется и для других представлений [10], более того, натяжение струны  $\sigma(j)$  для данного представления  $j$  удовлетворяет приближенному соотношению [7]

$$\frac{\sigma(j)}{\sigma(\text{fund})} = \frac{C_2(j)}{C_2(\text{fund})}, \quad (3)$$

где  $C_2(j) \equiv C_2(j, N_c)$  — квадратичный оператор Казимира,

$$C_2(\text{adj}, N_c) = N_c, \quad C_2(\text{fund}, N_c) = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}.$$

Соответственно формулируем третье свойство конфайнмента.

3. *Присоединенные и другие заряды эффективно удерживаются линейным образом в физической области ( $r \leq 1,5 \text{ фм}$ ) и натяжение струны приближенно удовлетворяет соотношению (3).*

Завершим этот раздел двумя замечаниями.

1. Соблюдение калибровочной инвариантности абсолютно необходимо для изучения механизма конфайнмента. Она приводит к тому, что любая калибровочно-неинвариантная величина (как-то: кварковый или глюонный пропагатор, трехглюонная вершина и т.д.) исчезает, когда производится усреднение по всем вакуумным

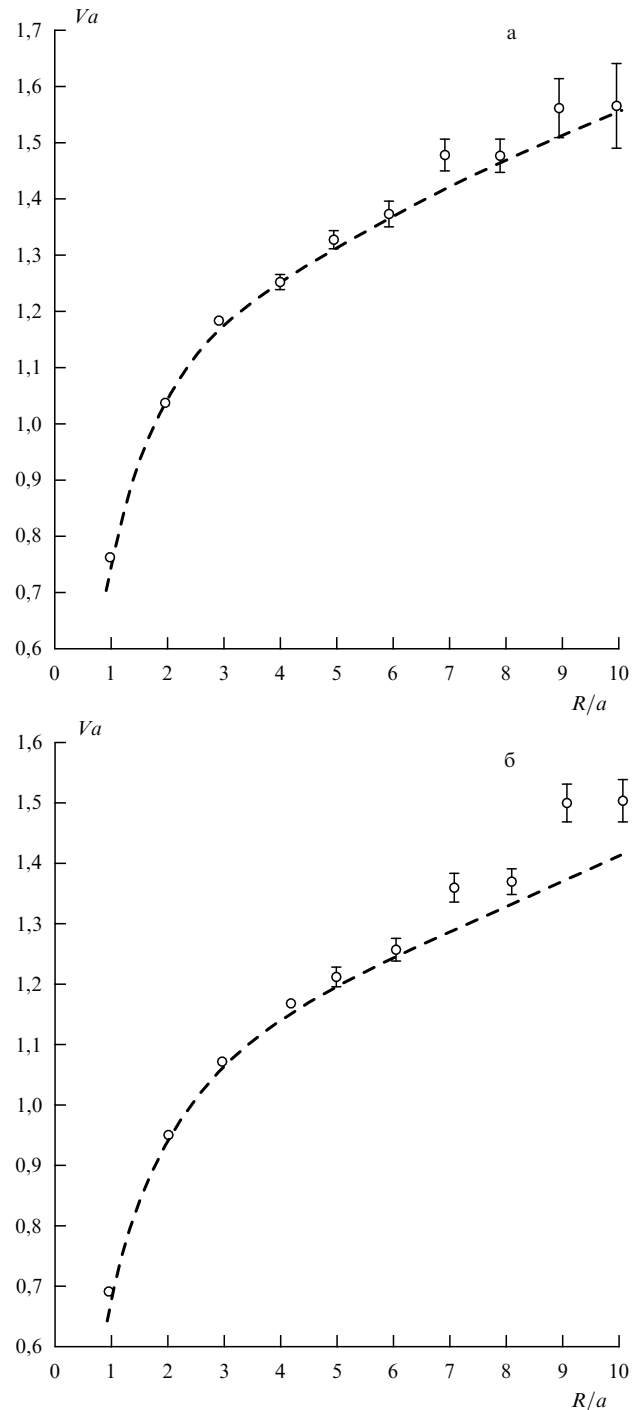


Рис. 3. Тот же потенциал, что на рис. 1, но для кварков в секстетном (а) и октетном (б) представлениях. Пунктирная линия — триплетный потенциал из рис. 1, умноженный на соответствующее отношение операторов Казимира, равное 2,25 для октета и 2,5 для секстета.

полям (включающим с необходимостью и все калибровочные копии полей). Зафиксировать калибровку можно только в калибровочно-инвариантной амплитуде, иначе можно потерять важную часть динамики — динамику конфайнмента.

В качестве популярного примера приведем так называемый "непертурбативный" кварковый пропагатор, который обычно берется в форме, не дающей полюсов при действительных массах. Как говорилось выше, такой пропагатор не имеет физического смысла, так как с

формальной точки зрения он калибровочно-неинвариантен и исчезает при усреднении, а с физической точки зрения бессмысленен, поскольку пропагатор цветного объекта не может быть рассмотрен отдельно от его цветового партнера, так как соединен с ним струной и эта струна доминирует в динамике на больших расстояниях. То же можно сказать о "непертурбативном" глюонном пропагаторе вида  $1/q^4$  при малых  $q$ , где вдобавок к сказанному возникает нефизическое сингулярное поведение для двухглюонной (глюобольной) функции Грина.

Подобным образом хорошо известные уравнения Дайсона–Швингера (УДШ) для одночастичной функции Грина не могут быть использованы в КХД в фазе конфайнмента, потому что они, во-первых, калибровочно-неинвариантны, а во-вторых, в них должна присутствовать струна, присоединенная к каждому пропагатору, которая опущена в этих уравнениях.

Несколько более сложная, но в принципе близкая ситуация с уравнением Бете–Солпитера (УБС): на фундаментальном уровне, т.е. когда ядро УБС содержит глюонные и кварковые обмены, каждое конечное приближение (обычно лестничное) для ядра нарушает калибровочную инвариантность и пропускает явление конфайнмента. Однако после усреднения амплитуды и написания эффективного уравнения типа УБС эффективное уравнение (уже не содержащее цветовых степеней свободы) может быть исследовано обычной техникой УБС. Такие уравнения могут иметь смысл (если он имеется) в феноменологических применениях, но не в фундаментальном понимании конфайнмента, что является главной целью настоящего обзора. Поэтому здесь мы не будем обсуждать многочисленные подходы, основанные на использовании УДШ и УБС.

2. Перейдем теперь к параметрам порядка, определяющим конфайнмент. В отсутствие динамических кварков строгим параметром порядка является уже упомянутая выше петля Вилсона (1). Конфайнмент в этом случае определяется как фаза, где закон площадей действует для достаточно больших контуров, тогда как в фазе деконфайнмента возникает закон периметра.

Другим, и практически часто более удобным для ненулевых температур  $T$ , параметром порядка является линия Полякова

$$\langle \Omega(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{n} \left\langle \text{tr} \left[ P \exp \left( i g \int_0^\beta A_4 dx_4 \right) \right] \right\rangle, \quad \beta = \frac{1}{T}. \quad (4)$$

Так как  $\langle \Omega \rangle$  связано со свободной энергией  $F$  изолированного цветного заряда:  $\langle \Omega \rangle = \exp(-F/T)$ , то исчезновение  $\langle \Omega \rangle$  при  $T < T_c$  означает, что  $F$  бесконечно в фазе конфайнмента. С другой стороны, исчезновение  $\langle \Omega \rangle$  связано с  $Z(N_c)$ -симметрией, которая имеется в фазе конфайнмента. Симметрия требует, чтобы  $Z(N_c)$ -неинвариантная величина  $\langle \Omega \rangle$  для кваркового представления обращалась в нуль. Как и для петли Вилсона, линии Полякова могут быть определены как для фундаментального, так и присоединенного представлений; в первом случае они равны строго нулю в фазе конфайнмента без динамических кварков. Присоединенная линия Полякова не равна нулю, но очень мала в этой фазе.

Когда динамические кварки присутствуют в вакууме, тогда и петля Вилсона, и линия Полякова, строго говоря, не являются параметрами порядка, так как закон площа-

дей для больших вилсоновских петель теперь отсутствует и  $\langle \Omega \rangle$  не исчезает в фазе конфайнмента. Однако, как говорилось выше, для больших  $N_c$  и практически даже для  $N_c = 2, 3$  эти величины можно рассматривать как приближенные и полезные параметры порядка даже в присутствии динамических кварков.

С динамической точки зрения (приближенная) справедливость закона площадей (наличие линейного потенциала) на расстоянии  $r \leq 1,5$  фм для любых цветных зарядов даже в присутствии динамических кварков означает, что струна уже сформирована на этих расстояниях и струнная динамика определяет поведение цветных зарядов в наиболее физически интересной области.

### 3. Корреляторы полей и конфайнмент

Как видно из закона площадей (1), явление конфайнмента с необходимостью требует появления нового массового параметра в теории — натяжение струны  $\sigma$  имеет размерность [масса]<sup>2</sup>. Так как теория возмущений в КХД в результате перенормировки зависит от шкалы масс только через  $\Lambda_{\text{QCD}}$  и в силу асимптотической свободы можно выразить константу связи  $g(\Lambda)$  на масштабе  $\Lambda$  через  $\Lambda_{\text{QCD}}$  как

$$g^2(\Lambda) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\Lambda^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad \beta_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} n_f,$$

то можно записать

$$\sigma = \text{const } \Lambda_{\text{QCD}}^2 \propto \Lambda^2 \exp\left(-\frac{16\pi^2}{\beta_0 g^2(\Lambda)}\right), \quad (5)$$

где  $\Lambda$  — импульс обрезания. Из выражения (5) ясно, что натяжение струны  $\sigma$  не может быть получено из ряда теории возмущений, так что само  $\sigma$  и все явление конфайнмента имеют непертурбативное происхождение.

Тогда следует допустить в вакууме КХД непертурбативную компоненту полей и представить полный глюонный вектор-потенциал как

$$A_\mu = B_\mu + a_\mu, \quad (6)$$

где  $B_\mu$  — непертурбативная компонента,  $a_\mu$  — пертурбативная. Что касается  $B_\mu$ , то это может быть: а) квазиклассическое поле, т.е. состоящее из суперпозиции классических решений вроде инстантонов, мультиинстантонов, дионов и т.д. (эта возможность обсуждается в разделе 6), б) чисто квантовое (но непертурбативное) поле. В качестве примера можно взять гауссов стохастический вакуум, обсуждаемый ниже в этом разделе.

Важно, однако, подчеркнуть, что формализм корреляторов полей, обсуждаемый ниже, носит самый общий характер и позволяет описывать обе ситуации а) и б), квазиклассическую и стохастическую. В первом случае иногда требуются некоторые модификации, которые будут введены в конце раздела.

Как говорилось выше, конфайнмент подразумевает образование струны между цветными зарядами. Чтобы понять, каким образом струна связана с корреляторами полей, рассмотрим простой пример нерелятивистского кварка, движущегося на расстоянии  $\mathbf{r}$  от бесконечно тяжелого антикварка, расположенного в начале координат. Как известно из квантовой механики, функция Грина кварка пропорциональна фазовому интегралу вдоль его

траектории  $C$ :

$$G(\mathbf{r}, t) \propto \left\langle \exp \left[ ig \int_C A_\mu(\mathbf{r}(t'), t') dx_\mu \right] \right\rangle,$$

где усреднение проводится по всем вакуумным конфигурациям. Удобно выразить  $A_\mu$  через напряженности полей  $F_{\mu\nu}$ , так как именно последние будут исходными стохастическими величинами, и это можно сделать, перейдя в калибровку Фока – Швингера

$$A_\mu(x) = \int_0^x F_{\nu\mu}(u) \alpha(u) du_\nu, \quad \alpha(u) = \frac{u}{x}.$$

Тогда в низшем неисчезающем порядке получим

$$G(\bar{r}, t) \propto 1 - \frac{g^2}{2} \int d\sigma_{\nu\mu}(u) d\sigma_{\nu'\mu'}(u') \langle F_{\nu\mu}(u) F_{\nu'\mu'}(u') \rangle + \dots,$$

где  $d\sigma_{\nu\mu} = \alpha(u) dx_\mu du_\nu$ .

С другой стороны, можно ввести потенциал  $V(r)$ , действующий на кварк,

$$G \propto \exp \left[ - \int V(r, t') dt' \right] \propto 1 - \int V(r, t') dt'.$$

Образование струны подразумевает, что  $V(r, t)$  пропорционально  $r$ , и это, как мы видим, зависит от корреляторов полей  $\langle FF \rangle$ .

Для точного лоренц-инвариантного рассмотрения введем теперь калибровочно-инвариантные корреляторы полей (КП) и выразим через них петлю Вилсона. Это может быть сделано с помощью неабелевой теоремы Стокса [11]

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &= \left\langle \frac{1}{N_c} P \text{tr} \left\{ \exp \left[ ig \int_C A_\mu dx_\mu \right] \right\} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{N_c} \left\langle P \text{tr} \left\{ \exp \left[ ig \int_S d\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(u, z_0) \right] \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(u, z_0) &= \Phi(z_0, u) F_{\mu\nu}(u) \Phi(u, z_0); \\ \Phi(x, y) &= P \exp \left[ ig \int_y^x A_\mu dz_\mu \right], \end{aligned} \quad (8)$$

и интегрирование в (7) выполняется по поверхности  $S$  внутри контура  $C$ , тогда как  $z_0$  — произвольная точка на  $S$ , от выбора которой  $\langle W(C) \rangle$  очевидным образом не зависит.

В абелевом случае факторы параллельного переноса  $\Phi(z_0, u)$  и  $\Phi(u, z_0)$  сокращаются и получается обычная теорема Стокса.

Заметим, что неабелева теорема Стокса в виде (7) является калибровочно-инвариантной формулировкой даже до усреднения по вакуумным конфигурациям — последнее обозначено угловыми скобками в (7).

Теперь можно использовать теорему о кластерном разложении [12] и выразить правую часть уравнения (7) через КП, а именно [5]:

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &= \frac{1}{N_c} \text{tr} \left\{ \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \int d\sigma(1) d\sigma(2) \dots d\sigma(n) \right] \right\} \times \\ &\times \langle \langle F(1) \dots F(n) \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

где мы опустили нижние индексы в  $d\sigma_{\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu}$  и использовали обозначение  $F(k) \equiv F_{\mu_k\nu_k}(u^{(k)}, z_0)$ . Обратим внимание в (9) на важное упрощение — средние  $\langle \langle F(1) \dots F(n) \rangle \rangle$  в цветонейтральном вакууме пропорциональны единичной цветовой матрице, и потому упорядочивающий оператор  $P$  более не нужен.

Уравнение (9) выражает петлю Вилсона через связанные корреляторы полей, также называемые кумулянтами [12], которые могут быть выражены через КП следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \langle F(1)F(2) \rangle \rangle &\equiv \langle F(1)F(2) \rangle - \langle F(1) \rangle \langle F(2) \rangle, \\ \langle \langle F(1)F(2)F(3) \rangle \rangle &\equiv \langle F(1)F(2)F(3) \rangle - \\ &- \langle \langle F(1)F(2) \rangle \rangle \langle F(3) \rangle - \langle F(1) \rangle \langle \langle F(2)F(3) \rangle \rangle - \\ &- \langle F(2) \rangle \langle \langle F(1)F(3) \rangle \rangle - \langle F(1) \rangle \langle F(2) \rangle \langle F(3) \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим простейший кумулянт второго порядка (член первого порядка по  $F_{\mu\nu}$  обращается в нуль при усреднении из-за цветонейтральности и лоренц-инвариантности вакуума)

$$\langle F(x)\Phi(x, z_0)\Phi(z_0, y)F(y)\Phi(y, z_0)\Phi(z_0, x) \rangle. \quad (11)$$

Он зависит не только от  $x, y$ , но также от произвольной точки  $z_0$ . В случае классического решения (диона или инстантона) удобно поместить  $z_0$  в его центр, и тогда приобретает четкий физический смысл. Этот случай обсуждается в разделе 6. Здесь же рассмотрим предел стохастического вакуума, когда разложение (9) особенно полезно.

С этой целью определим параметры, от которых зависит типичный кумулянт  $\langle \langle F(1) \dots F(n) \rangle \rangle$ . Когда все координаты  $u^k$  совпадают с  $z_0$ , возникает конденсат  $\langle \langle (F_{\mu\nu}(0))^n \rangle \rangle^1$ , которому мы припишем порядок величины  $F^n$ . Зависимость от координат можно охарактеризовать глюонной корреляционной длиной  $T_g$ , которая предполагается одного порядка для всех кумулянтов (например, для инстантонного газа  $T_g$  примерно совпадает со средним радиусом инстантона). Тогда ряд в (9) может быть оценен так:

$$\langle W(C) \rangle \approx \frac{1}{N_c} \text{tr} \left\{ \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} F^n T_g^{2(n-1)} S \right] \right\}, \quad (12)$$

где  $S$  — площадь поверхности внутри контура  $C$ . При выводе результата (12) мы учли, что зависимость от  $z_0$  выпадает в каждом кумулянте

$$\langle \langle F(x^{(1)}, z_0) F(x^{(2)}, z_0) \dots F(x^{(n)}, z_0) \rangle \rangle, \quad (13)$$

когда  $x$  и  $y$  близки,

$$|x - y| \ll |x - z_0|, \quad |y - z_0|.$$

Поэтому в (13) в типичной ситуации, когда все расстояния таковы, что  $|x^{(i)} - x^{(j)}| \propto T_g \ll |x^{(i)} - z_0|, |x^{(j)} - z_0|$ , можно опустить зависимость от  $z_0$  с точностью до членов  $O(FT_g^2)$ .

<sup>1</sup> В правилах сумм КХД все члены этого типа для  $n > 2$  обычно отбрасываются, поскольку они дают нуль при так называемом вакуумном прокладывании.

Ряд в (12) идет по степеням  $(FT_g^2)$ , и когда этот параметр мал:

$$FT_g^2 \ll 1, \tag{14}$$

получается предел гауссова стохастического ансамбля, где доминирует низший (квадратичный по  $F_{\mu\nu}$ ) кумулянт.

В том же приближении (т.е. когда  $T_g \rightarrow 0$  при фиксированном  $\langle F_{\mu\nu}^2 \rangle$ ) в этом кумулянте можно пренебречь зависимостью от  $z_0$  и использовать эквивалентную форму (11)

$$D_{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{N_c} \text{tr} \langle F_{\mu\nu}(x)\Phi(x,y)F_{\lambda\sigma}(y)\Phi(y,x) \rangle. \tag{15}$$

Это выражение можно записать в общем виде через две скалярные функции  $D(x-y)$  и  $D_1(x-y)$  [5]:

$$D_{\mu\nu\lambda\sigma} = (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})D(x-y) + \frac{1}{2} \partial_\mu \left\{ [(h_\lambda\delta_{\nu\sigma} - h_\sigma\delta_{\nu\lambda}) + \text{perm}] D_1(x-y) \right\}, \tag{16}$$

где  $h_\mu \equiv x_\mu - y_\mu$ . Важно заметить, что член, пропорциональный  $D_1$  в (16), есть по построению полная производная.

Подстановка (16) в (9) позволяет получить закон площади в петле Вилсона с натяжением струны, выраженным через  $D(x)$ ,

$$\langle W(C) \rangle = \exp(-\sigma S_{\min}),$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \int D(x) d^2x (1 + O(FT_g^2)), \tag{17}$$

где  $O(FT_g^2)$  — вклад высших кумулянтов,  $S_{\min}$  — минимальная площадь внутри контура  $C$ .

Заметим, что  $D_1$  не входит в  $\sigma$ , но дает вклад в член периметра и в члены с жесткостью. С другой стороны, низшие порядки пертурбативной КХД дают вклад в  $D_1$ , а не в  $D$ , а именно, вклад одноглюонного обмена есть

$$D_1^{\text{pert}}(x) = \frac{16\alpha_s}{3\pi x^4}. \tag{18}$$

Непертурбативные вклады в  $D(x)$  и  $D_1(x)$  были вычислены на решетке [13] методом охлаждения, который подавляет пертурбативные флуктуации, и представлены на рис. 4. Как видно из рис. 4, обе функции прекрасно описываются экспонентой в измеренной области  $D_1(x) \approx D(x)/3 \approx \exp(-x/T_g)$ , где  $T_g \approx 0,2$  фм. Малость  $T_g$  по сравнению с адронными размерами подтверждает осмысленность сделанных ранее приближений, в частности условия стохастичности (14). Надо добавить учесть, что  $F$  в (14) есть эффективная величина поля в кумулянтах, обращающихся в нуль при вакуумном прокладывании, и поэтому может иметь дополнительную малость по сравнению с величиной  $F$  из глюонного конденсата.

Представление (16) справедливо как для абелевых, так и для неабелевых теорий; поэтому интересно понять, применимы ли формулы для закона площадей и натяжения струны (17) также в КЭД (или для решеточной U(1)). Чтобы ответить на этот вопрос, применим оператор  $(1/2)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial/\partial x_\alpha$  к обеим сторонам равенств (15), (16) [5].

В абелевом случае, когда в (15)  $\Phi$  сокращается, можно взять производную  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial/\partial x_\alpha$  от (16) и получить следую-

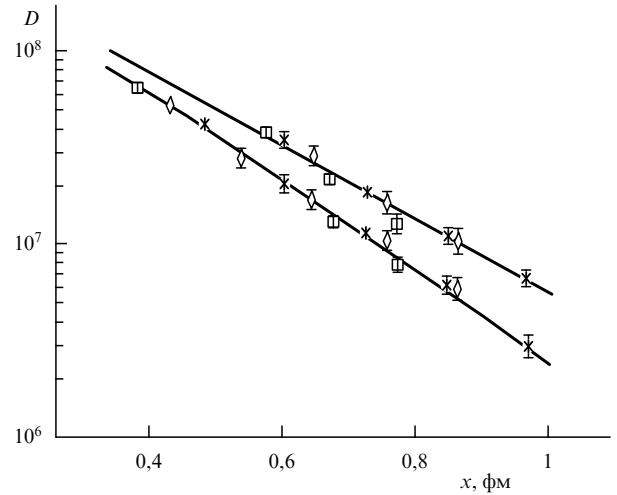


Рис. 4. Функции  $D_{11}(x) = D + D_1 + x^2 \partial D_1 / \partial x^2$  (нижний ряд точек) и  $D_\perp(x) = D + D_1$  (верхний ряд точек) как функции расстояния:  $\times$  —  $\beta = 5,8$ ,  $\diamond$  —  $\beta = 5,9$  и  $\square$  —  $\beta = 6,0$ . Линии отвечают наилучшему приближению с помощью независимых экспонент для  $D(x)$  и  $D_1(x)$  [13].

щий ответ (член с  $D_1$  выпадает):

$$\partial_\alpha \langle \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) F_{\lambda\sigma}(y) \rangle = \varepsilon_{\lambda\sigma\gamma\beta} \partial_\gamma D(x-y), \tag{19}$$

где  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} / 2$ . Тогда, если в абелевой теории присутствуют магнитные монополи (например, монополи Дирака) и их ток есть  $\tilde{j}_\mu$ , уравнения Максвелла (расширенные) имеют вид

$$\partial_\alpha \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) = \tilde{j}_\beta(x). \tag{20}$$

В отсутствии магнитных монополей (в чистой КЭД) абелевы тождества Бьянки (они же — вторая пара уравнений Максвелла) требуют выполнения равенства

$$\partial_\alpha \tilde{F}_{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{21}$$

Таким образом, в КЭД, где нет магнитных монополей, в силу (19) функция  $D(x)$  исчезает и, следовательно, конфайнмент отсутствует, что и наблюдается на опыте.

В решеточной версии U(1)-теории магнитные монополи присутствуют (как решеточные артефакты) и решеточная формулировка нашего метода предсказывает режим конфайнмента с ненулевым натяжением струны, как это и наблюдается в расчетах методом Монте-Карло [14]. Это натяжение струны можно связать посредством  $D(x)$  с коррелятором магнитных монопольных токов. В самом деле, умножая обе стороны (19) на  $(1/2)\varepsilon_{\lambda\sigma\gamma\delta} \partial/\partial y_\gamma$ , получаем

$$\langle \tilde{j}_\beta(x) \tilde{j}_\delta(y) \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \delta_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) D(x-y). \tag{22}$$

Отметим, что запись уравнения (22) тождественно учитывает сохранение монопольного тока: применяя  $\partial/\partial x_\beta$  или  $\partial/\partial y_\delta$  к обеим сторонам (22), получаем нуль.

Интересно заметить, что конфайнмент (т.е. ненулевые  $\sigma$  и  $D$ , см. уравнение (17)) в U(1)-теории с монопольными токами возникает благодаря не средней монопольной плотности  $\langle \tilde{j}_4(x) \rangle$ , а более тонкой характеристике —

коррелятору монопольных токов (22), который не исчезает и для конфигураций, где  $\langle \tilde{j}_4(x) \rangle = 0$ . Последнее выполняется для систем с равным числом монополей и антимонполей.

Отметим также, что, строго говоря, данный выше анализ справедлив, когда выполняется условие стохастичности (14) и можно пренебречь вкладом высших кумулянтов. Случай монополей с дираковскими условиями квантования выходит, вообще говоря, за рамки применимости (14) и требует дополнительных уточнений, которые обсуждены ниже в этом разделе.

Обратимся теперь к неабелеву случаю, снова предполагая, что выполняется условие стохастичности (14) и потому можно учитывать только низший кумулянт (15), (16).

Применяя, как и в абелевом случае, оператор  $(1/2)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial/\partial x_\alpha$  к правой части (15), (16), получаем [15]

$$\begin{aligned} \langle D_\alpha \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) \Phi(x, y) F_{\lambda\sigma}(y) \Phi(y, x) \rangle + \Delta_{\beta\lambda\sigma}(x, y) = \\ = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} D(x - y). \end{aligned} \quad (23)$$

Член с  $D_1$  в (23) выпадает, как и в абелевом случае. Первый член слева в (23) теперь содержит член неабелева тождества Бьянки, который равен нулю для всех конфигураций, выражаемых через вектор-потенциал  $A_\mu$ , в том числе и для магнитных монополей и дионов — классических решений уравнения Янга – Миллса; иными словами, всегда можно положить

$$D_\alpha \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) = 0. \quad (24)$$

Другой вопрос, можно ли нарушить на решетке условие (24) при определении артефактных монополей подобно абелеву случаю. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в разделе 5 при изучении решеточных результатов для монополей, полученных методом абелевой проекции. Чтобы завершить обсуждение соотношения (23), надо найти  $\Delta_{\beta\lambda\sigma}$ ; эта величина появляется только в неабелевом случае благодаря сдвигу прямолинейного контура  $(x, y)$  коррелятора (15) в положение  $(x + \delta x, y)$ , что подразумевается при дифференцировании  $\partial/\partial x_\alpha$ . Это "дифференцирование контура" известно в литературе [16] и приводит к следующему ответу:

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta\lambda\sigma}(x, y) = \text{ig} \int_y^x dz_\rho \alpha(z) \times \\ \times \langle \text{tr} [\tilde{F}_{\alpha\beta}(x) \Phi(x, z) F_{\alpha\rho}(z) \Phi(z, y) F_{\lambda\sigma}(y) \Phi(y, x) - \\ - \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) \Phi(x, y) F_{\lambda\sigma}(y) \Phi(y, z) F_{\alpha\rho}(z) \Phi(z, x)] \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

Соотношение (23) приобретает особенно простой вид, когда, используя (24), мы устремим точку  $x$  к  $y$  [15]:

$$\left. \frac{dD(z)}{dz^2} \right|_{z=0} = \frac{g}{8} f^{abc} \langle F_{\alpha\beta}^a(0) F_{\beta\gamma}^b(0) F_{\gamma\alpha}^c(0) \rangle. \quad (26)$$

Таким образом, мы показали, что конфайнмент (ненулевое  $\sigma$  благодаря ненулевому  $D(x)$ ) возникает в неабелевом случае за счет чисто неабелева коррелятора  $\langle \text{tr} (F_{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F_{\gamma\alpha}) \rangle = 3 \langle \text{tr} (E_i E_j B_k) \rangle \varepsilon_{ijk}$ .

Чтобы понять физический смысл этого тройного коррелятора, нужно вообразить в пространстве магнитные и электрические силовые линии. Каждый магнитный

монополю есть источник силовых линий независимо от того, является ли он реальным объектом (классическим решением или сторонним объектом вроде монополя Дирака) или же решеточным артефактом. В неабелевой теории эти силовые линии могут ветвиться, и, например, электрическая силовая линия может испустить магнитную в некоторой точке, тем самым имитируя магнитный монополю в этой точке. Именно это явление и содержится в тройном корреляторе  $\langle \text{tr} (FFF) \rangle$ . Заметим, что этот эффект может быть чисто квантовым, и тогда никакие реальные монополи для данного механизма конфайнмента не нужны.

До сих пор мы обсуждали конфайнмент за счет низшего кумулянта  $D(x)$ , что справедливо при выполнении условия стохастичности (14), когда  $D(x)$  дает доминирующий вклад. Обратимся теперь к другим членам в кластерном разложении (9). Ясно, что общая структура высших кумулянтов гораздо сложнее, чем (16), но в ней всегда присутствует (для четных членов) кронекеровская структура  $D(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod \delta_{\mu_i \mu_k}$ , подобная  $D(x - y)$  в (16), и другие члены, содержащие производные и разности координат, подобные  $D_1$ . Член  $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дает вклад в натяжение струны, и применение того же оператора  $(1/2)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial/\partial x_\alpha$  снова выявляет член неабелева тождества Бьянки (24) и аналог  $\Delta_{\beta\lambda\sigma}$  в (23). Это означает, что натяжение струны в общем случае представляет собой сумму

$$\begin{aligned} \sigma = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma^{(n)}, \\ \sigma^{(n)} = g^n \int \langle \langle F(1) F(2) \dots F(n) \rangle \rangle d\sigma(2) \dots d\sigma(n). \end{aligned} \quad (27)$$

Когда выполняется условие стохастичности (14), первый член в сумме  $\sigma^{(2)}$  доминирует; в общем же случае все члены в (27) могут быть важны. Наиболее типичный пример такой ситуации — упомянутый выше случай квазиклассического вакуума, который мы обсудим сейчас вкратце, а более детально в разделе 6.

В разреженном газе классических решений роль корреляционной длины вакуума  $T_g$  играет размер решения  $\rho$ . Коррелятор  $\langle F(x_1) \dots F(x_n) \rangle$  существенно отличен от нуля, когда все  $x_1, \dots, x_n$  находятся внутри радиуса  $\rho$  данного решения (т.е. диона или инстантона).

С другой стороны, типичное значение поля  $F$  для решения, например  $F = F_{\mu\nu}(0)$ , связано с  $\rho$  величиной топологического заряда  $Q$ . Так, для инстантона

$$Q = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^2. \quad (28)$$

Если заряд  $Q$  — целый, отсюда немедленно следует, что

$$(gF \cdot \rho^2)^2 \sim n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Та же оценка справедлива для диона (см. обсуждение в разделе 6).

Следовательно, ряды (12) и (27) имеют параметр разложения  $gFT_g^2$  порядка единицы и могут не сходиться. Более детальный анализ газа инстантонов и магнитных монополей показывает, что ряд (27) для натяжения струны в случае газа инстантонов (для упрощения центры инстантонов или монополей брались на плоскости (12) вилсоновской петли) имеет вид [17]



$$\begin{aligned} \sigma &= \rho_0(1 - \langle \cos \beta \rangle); \\ \beta &= g \int F_{12}(z) d^2z = 2\pi, \quad \sigma = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

т.е. для инстантонного газа натяжение струны  $\sigma = 0$ . Однако для магнитных монополей  $\sigma$  отлично от нуля:

$$\beta = \pi, \quad \sigma = 2\rho_0, \quad (31)$$

где  $\rho_0$  — поверхностная плотность инстантонов (монополей). Заметим, что в билокальном приближении  $\sigma^{(2)} = \rho_0 \langle \beta^2 \rangle / 2$ , т.е. в обоих случаях положительна, но для инстантонов вся сумма ряда в целом для  $\sigma$  обращается в нуль, а для монополей отлична от нуля. Как мы увидим ниже, этот результат находится в согласии с важным критерием из раздела 6: все топологические заряды (29) дают поток через петлю Вилсона, равный  $2\pi Q$ , и для (мульти)инстантонов с  $Q = n = 1, 2, \dots$  петля Вилсона есть  $W = \exp(i2\pi Q) = 1$ , так что конфайнмент в разреженном газе таких объектов отсутствует. Для магнитных монополей (дионов) топология другая и поток от одного объекта равен  $\pi$ , что в конечном счете приводит к конфайнменту для разреженного газа монополей в соответствии с (31).

Таким образом, низший кумулянт  $\langle F(x)\Phi F(y)\Phi \rangle$  может давать ложный результат для квазиклассического вакуума, и тогда нужно суммировать весь ряд, чтобы получить правильный ответ, как в (30), (31). Поэтому для исследования вакуума, содержащего целые топологические заряды, нужно их предварительно выделить и записать явно их вклад, тогда как остальное — квантовые флуктуации с  $FT_g^2 \ll 1$  — можно рассмотреть с помощью низшего кумулянта. Пример такого вакуума — инстантонный газ на фоне удерживающих конфигураций — изучался в [18] с целью получить спонтанное нарушение киральной инвариантности; эта работа демонстрирует полезность такого комплексного подхода.

Мы заключим данный раздел обсуждением конфайнмента для зарядов в высших представлениях цветной группы. Как указывалось в предыдущем разделе, наше определение конфайнмента, основанное на решеточных данных, предполагает наличие линейного потенциала между стохастическими зарядами в любом представлении, причем натяжение струны оказывается пропорциональным квадратичному оператору Казимира, т.е. инвариантному квадрату заряда.

Поэтому рассмотрим петлю Вилсона (1) для зарядов в данном представлении; последнее не было явно указано во всех уравнениях, приводящих к (27). Для любого представления можно написать

$$A_\mu(x) = A_\mu^a T^a, \quad \text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (32)$$

Подобно (9), для представления  $j \equiv (m_1, m_2, \dots)$  группы  $SU(N)$  с размерностью  $N(j)$  можно написать кластерное разложение

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle &= \frac{1}{N(j)} \times \\ &\times \text{tr}_j \left\{ \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \int d\sigma(1) \dots d\sigma(n) \langle \langle F(1) \dots F(n) \rangle \rangle \right] \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

и, используя обычные аргументы, получить уравнение (27).

Благодаря цветовой нейтральности вакуума каждый кумулянт пропорционален единичной цветовой матрице, т.е. для низшего кумулянта имеем

$$\begin{aligned} \langle F(1)F(2) \rangle_{ab} &= \langle F^c(1)F^d(2) \rangle T_{an}^c T_{nb}^d = \\ &= \langle F^c(1)F^c(2) \rangle \frac{1}{N_c^2 - 1} T_{an}^c T_{nb}^c = A^{(2)} C_2(j) \cdot \hat{1}_{ab}, \end{aligned} \quad (34)$$

где использовано определение

$$T^c T^c = C_2(j) \hat{1} \quad (35)$$

и введена постоянная, не зависящая от представления  $j$ ,

$$A^{(2)} \equiv \frac{1}{N_c^2 - 1} \langle F^c(1)F^c(2) \rangle, \quad (36)$$

а также учтена цветовой нейтральность вакуума

$$\langle F^c(1)F^d(2) \rangle = \delta_{cd} \frac{\langle F^e(1)F^e(2) \rangle}{N_c^2 - 1}. \quad (37)$$

Для следующего по сложности кумулянта — квартичного — имеем

$$\begin{aligned} \langle \langle F(1)F(2)F(3)F(4) \rangle \rangle_{xe} &= \\ &= \langle \langle F^{a_1}(1)F^{a_2}(2)F^{a_3}(3)F^{a_4}(4) \rangle \rangle T_{\alpha\beta}^{a_1} T_{\beta\gamma}^{a_2} T_{\gamma\delta}^{a_3} T_{\delta\epsilon}^{a_4} = \\ &= A_1^{(4)} (C_2(j))^2 \delta_{xe} + A_2^{(4)} (T^{a_1} T^{a_2} T^{a_1} T^{a_2})_{xe}. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, в квартичном кумулянте присутствуют высшие степени квадратичного оператора Казимира, а также высшие операторы Казимира.

Натяжение струны для представления  $j$  есть коэффициент в диагональном элементе в (34) и (38)

$$\sigma(j) = C_2(j) \int \frac{g^2 A^{(2)}}{2} d^2x + O(C_2^2(j)), \quad (39)$$

где член  $O(C_2^2(j))$  содержит высшие степени  $C_2(j)$  и высшие операторы Казимира.

Сравнивая результат (39) с решеточными данными [10], представленными на рис. 3, можно видеть, что доминирование квадратичного кумулянта согласуется с данными, так как он дает вклад, пропорциональный  $C_2(j)$ , отчетливо видный на решетке.

Еще одной интересной и важной проверкой доминантности билокального коррелятора (гауссовой стохастичности) является вычисление профиля струны КХД, проведенное в [19]. Под профилем струны подразумевается распределение  $\rho_{11}$  продольной составляющей цветозлектрического поля как функции расстояния  $x_\perp$  до оси струны. Это распределение можно выразить в виде интеграла от функции  $D(x)$ ,  $D_1(x)$  [18] и, взяв данные решеточных измерений для  $D(x)$  из [13], можно вычислить  $\rho_{11}(x_\perp)$  и сравнить с независимыми измерениями этой величины. Такое сравнение было проведено в [19] и показано на рис. 5. Видно хорошее согласие вычисленного профиля  $\rho_{11}(x_\perp)$  (пунктирная линия) с "экспериментальными" значениями. Таким образом, метод вакуумных корреляторов даже в своем простейшем (билокальном) приближении достаточно хорошо описы-

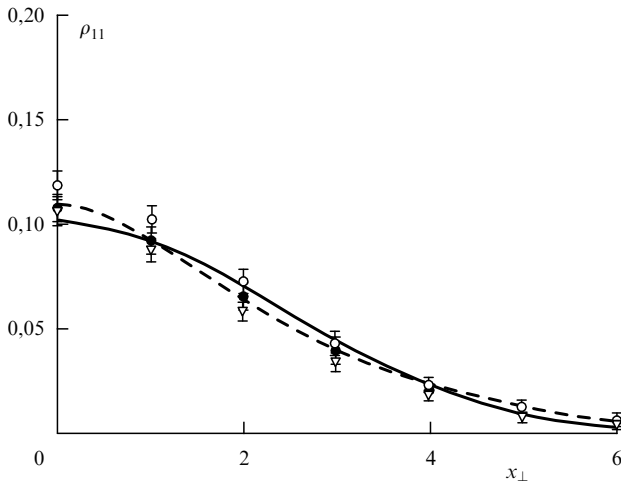


Рис. 5. Распределение  $\rho_{11}$  параллельной компоненты цветоэлектрического поля как функция расстояния  $x_{\perp}$  до оси струны. Измерения в [19] сделаны на разных расстояниях  $x_{11}$  от начала струны:  $\bullet$  —  $x_{11} = 3a$ ,  $\diamond$  —  $x_{11} = 5a$  и  $\nabla$  —  $x_{11} = 7a$  ( $a$  — длина ребра решетки). Сплошная линия — гауссова подгонка, пунктирная линия — вычисление [19] с помощью функции  $D(x)$ , взятой из [13].

вайт имеющиеся данные, включая такие тонкие характеристики, как корреляции полей в струне.

#### 4. Дуальный эффект Мейсснера, конфаинмент и сверхпроводимость

Физическая сущность явления конфаинмента — образование струны между внешними зарядами, введенными в вакуум, что в свою очередь означает, что распределение электрического поля коренным образом меняется по сравнению с обычной дипольной картиной (для пустого вакуума) и вместо этого поля фокусируются в виде струны в удерживающем вакууме. С точки зрения макроскопической электродинамики среды этот эффект можно было бы описывать, вводя диэлектрическую функцию  $\varepsilon(x)$  и (цвето)электрическую индукцию  $\mathbf{D}(x)$  вместе с (цвето)электрическим полем  $\mathbf{E}(x)$ ,  $\mathbf{D}(x) = \varepsilon(x)\mathbf{E}(x)$ .

Затем можно подогнать вид функции  $\varepsilon(x)$  (или еще лучше  $\varepsilon(D)$  или  $\varepsilon(E)$ ) так, чтобы получить картину струны. Другая возможность — выбрать эффективное действие как функцию  $F_{\mu\nu}^2$ , таким образом, чтобы воспроизвести струнную конфигурацию поля. Это направление обсуждалось в [1], а его основной результат, что физический вакуум КХД как среда является чистым диэлектриком (т.е.  $\varepsilon = 0$  вдали от внешних зарядов), был получен уже давно [20]. Было показано также, что можно выбрать  $\varepsilon(E)$  таким, чтобы возникла струна почти постоянного (вдоль длины) радиуса [21].

Мы не будем обсуждать здесь эти подходы, а также результаты так называемой диэлектрической модели из-за их феноменологичности, отсылая читателя к обзорам [1, 21]. Вместо этого в данном и следующем разделах остановимся на другом подходе, который доказал свою плодотворность в последние годы, — на конфаинменте как дуальном эффекте Мейсснера [3] и на идеологически связанном с ним методе абелевой проекции [4].

Физическая идея, использованная 'т Хофтом и Мандельштамом [3], — это аналогия между образованием струны Абрикосова в сверхпроводнике 2-го рода между

магнитными полюсами и образованием струны между цветными зарядами в КХД.

Изучим эту аналогию с нескольких точек зрения:

- 1) энергетики вакуума — минимальной свободной энергии вакуума;
- 2) классических уравнений движения — уравнений Максвелла и Лондонов;
- 3) образования конденсата и нарушения симметрии;
- 4) корреляторов токов и полей.

В этой связи рассмотрим 4d (четырёхмерное) обобщение модели сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау, которое обычно называется абелевой моделью Хиггса с лагранжианом [22]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - |D_{\mu}\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\varphi|^2 - \varphi_0^2)^2, \quad D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}. \quad (40)$$

Как известно, эта модель обладает классическими решениями — струнами Абрикосова–Нильсена–Олесена (АНО), которые есть 4d обобщение струн Абрикосова, возникающих в сверхпроводнике 2-го рода. Последний описывается лагранжианом Гинзбурга–Ландау, где константы выбраны надлежащим образом [23].

Лагранжиан (40) содержит в себе два поля: электромагнитное ( $A_{\mu}, F_{\mu\nu}$ ) — аналог глюонного поля в КХД и комплексное поле Хиггса  $\varphi$ , описывающее амплитуду куперовских пар в сверхпроводнике. Когда  $\lambda \rightarrow \infty$ , волновой функционал  $\Psi\{A_{\mu}, \varphi(x)\}$  имеет резкий максимум вблизи  $\varphi(x) = \varphi_0$ , что означает образование конденсата куперовских пар с амплитудой  $\varphi_0$ .

Рассмотрим модель (40) более подробно и обсудим последовательно пункты 1)–4).

1) Плотность энергии, соответствующая лагранжиану (40),

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} + |\mathbf{D}\varphi|^2 + |D_0\varphi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\varphi|^2 - \varphi_0^2)^2. \quad (41)$$

Из (41) ясно, что в отсутствии внешних источников и для больших  $\lambda$  наименее по энергии состояние соответствует  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$  и  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ . Для последующего сравнения с КХД стоит упомянуть, что образование конденсата  $\langle F_{\mu\nu}^2 \rangle$  не является выгодным для больших  $\lambda$ , так как смешанный член  $|A_{\mu}\varphi|^2$  дает тогда очень большой положительный вклад: конденсат электрических зарядов  $\varphi$  выталкивает и подавляет повсюду электромагнитное поле  $F_{\mu\nu}$ . Та же ситуация возникает и в неабелевой модели Хиггса — модели Джорджи–Глэшоу: там возникают две фазы, зависящие от констант связи  $\lambda, g$ , и для больших  $\lambda$  преобладает фаза деконфаинмента с  $\varphi = \varphi_0$ . Здесь слово деконфаинмент означает: внешние цветоэлектрические заряды не удерживаются, а цветомагнитные удерживаются. При уменьшении  $\lambda$  можно достичь области, где становится выгодно образовать конденсат  $\langle F_{\mu\nu}^2 \rangle$ , и тогда возможно ненулевое  $D(x)$ . Как уже обсуждалось в разделе 3, в этой фазе возможен конфаинмент цветоэлектрических зарядов.

Но вернемся к абелевой модели Хиггса и к интересующему нас пределу больших  $\lambda$ . В этом случае энергетически выгодно (и это подтверждают точные расчеты) образование конденсата электрических зарядов ( $\varphi(x) = \varphi_0$ ), конденсат электромагнитного поля отсутствует и возникают АНО струны, соединяющие магнитные

заряды — это и есть конфайнмент магнитных зарядов, в то время как конфайнмент электрических зарядов отсутствует.

Можно ожидать, что в дуальной картине конденсат магнитных зарядов (монополей) приведет к возникновению струн из электрического поля, соединяющих электрические заряды, т.е. конфайнмент электрических зарядов. В глюодинамике наша догадка состоит в том, что конденсат цветомагнитных монополей (дионов) связан с возникновением глюонного конденсата  $\langle F_{\mu\nu}^2 \rangle$  и ненулевой корреляционной функции  $D(x)$ .

2) Обсудим теперь структуру струн АНО с точки зрения классических уравнений движения. Статические уравнения Максвелла дают

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}, \tag{42}$$

где  $\mathbf{j}$  — микроскопический ток электрических зарядов, включая конденсат куперовских пар; чтобы получить замкнутое уравнение для  $\mathbf{B}$ , нужно использовать одно специальное свойство сверхпроводника в форме уравнения Лондонов

$$\text{rot } \mathbf{j} = \delta^{-2} \mathbf{B}. \tag{43}$$

Оно может быть выведено из лагранжиана типа Гинзбурга–Ландау, например из (40). В самом деле, найдем из него по обычным правилам ток

$$j_\mu = ie(\phi^+ \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^+ \phi) - 2e^2 A_\mu |\phi|^2. \tag{44}$$

Допустим, что существует область, где  $\phi$  уже можно считать постоянным, а  $A_\mu$  еще отлично от нуля (позже мы определим эту область более подробно). Тогда, применяя к обеим сторонам (44) операцию  $\text{rot}$ , получим уравнение Лондонов (43), причем для  $\delta$  имеем

$$\delta^{-2} = 2e^2 \phi_0^2. \tag{45}$$

Подстановка (43) в (42), где предварительно уже проведена операция  $\text{rot}$  с обеих сторон, дает уравнение для  $\mathbf{B}$

$$\Delta \mathbf{B} - \delta^{-2} \mathbf{B} = 0. \tag{46}$$

Решая (46), получаем экспоненциальное падение поля  $\mathbf{B}$  при удалении от центра струны:

$$B(r) = \text{const } K_0 \left( \frac{r}{\delta} \right), \quad B(r) \propto \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right), \quad r \gg \delta. \tag{47}$$

Отсюда видно, что величина  $\delta^{-1}$  есть масса фотона, генерируемая механизмом Хиггса.

С другой стороны, поле  $\phi$  имеет свою собственную корреляционную длину  $\xi$ , связанную с массой квантовых возбуждений поля  $\phi$  ("массой Хиггса"):

$$\xi = \frac{1}{m_\phi}, \quad m_\phi^2 = 2\lambda\phi_0^2. \tag{48}$$

Как известно [23], лондоновский предел, отвечающий сверхпроводнику 2-го рода, возникает при соотношении

$$\delta \gg \xi, \quad \text{или} \quad e \ll \lambda. \tag{49}$$

Можно еще вычислить энергию струны на единицу длины — натяжение струны — для струны минимального магнитного потока  $2\pi$ . С помощью (41) и (47), (48) получаем [23]

$$\sigma_{\text{ANO}} = \frac{\pi}{\delta^2} \ln \frac{\delta}{\xi}, \quad \frac{\delta}{\xi} \gg 1. \tag{50}$$

Заметим, что главный вклад в  $\sigma_{\text{ANO}}$  (50) дает член  $|\mathbf{D}\phi|^2$  в (41).

Таким образом, физическая картина струны АНО в лондоновском пределе предполагает генерацию массы магнитного поля  $m = 1/\delta$ , которая в этом пределе много меньше хиггсовской массы  $m_\phi = 1/\xi$ .

Поучительно проследить, как возникает экранировка магнитного поля (генерация массы). Сначала магнитное поле создает вокруг своего потока (силовых магнитных линий) круговой ток  $\mathbf{j}$  в сверхпроводящей среде, что описывается уравнением Лондонов (43). Далее согласно уравнению Максвелла (42) вокруг индуцированного тока  $\mathbf{j}$  возникает циркуляция магнитного поля, в основном направленная *против* первоначального магнитного поля и пропорциональная ему по величине. В результате магнитное поле экранируется частично в центре и полностью вдали от центра струны АНО.

На рис. 6 показан профиль струны АНО, т.е. компонента магнитного поля, параллельная оси струны,  $B(r)$ , как функция расстояния  $x_t$  до центра струны, вычисленная из уравнения (47). Интересно сопоставить этот профиль с соответствующим профилем струны КХД в глюодинамике. Последний, определяемый параллельной компонентой цветоэлектрического поля, был изменен в [24] (он показан на рис. 6).

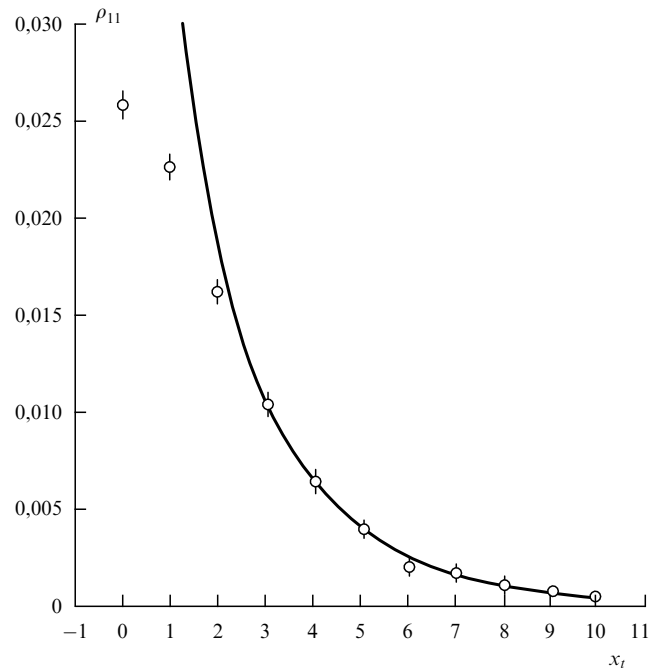


Рис. 6. То же распределение  $\rho_{11}$ , что на рис. 5, для SU(2)-глюодинамики, вычисленное в [24] на решетке  $24^4$ , при  $\beta = 2,7$ ,  $x_{11} = 5a$ , длина струны 10a (точки), в сравнении с распределением (47) в струне Абрикосова (сплошная линия). Рост при малых  $x_t$ , видный у сплошной линии, есть нефизический результат и возникает за счет выхода за рамки сделанных в (47) приближений.

Как видно из рис. 6, этот профиль находится в хорошем согласии с профилем струны АНО (за исключением области малых  $x$ , где приближение (46), (47) не работает и надо решать исходные уравнения Гинзбурга–Ландау). Таким образом, дуальный механизм эффекта Мейсснера подтверждается сходным строением струн АНО и струн КХД.

Интересно было бы также понять, существует ли (кроме схождения профилей) схожесть эффективных лагранжианов в модели (40) и в КХД. Этот вопрос обсудим в следующем разделе.

Завершим пункт 2) обсуждением параметров типа  $\delta_{\text{QCD}}$  и  $\xi_{\text{QCD}}$  в КХД — дуальных аналогов сверхпроводящих параметров  $\delta$  и  $\xi$ , введенных ранее в (44), (45). Вычисления с помощью метода абелевых проекций [25] дают такие значения (рис. 7):

$$\delta_{\text{QCD}} \approx \xi_{\text{QCD}} \approx 0,2 \text{ фм}. \quad (51)$$

Таким образом, в КХД ситуация скорее промежуточная между (дуальными) сверхпроводниками 1-го и 2-го типов. Вычисления эффективного потенциала  $V(\phi)$  в

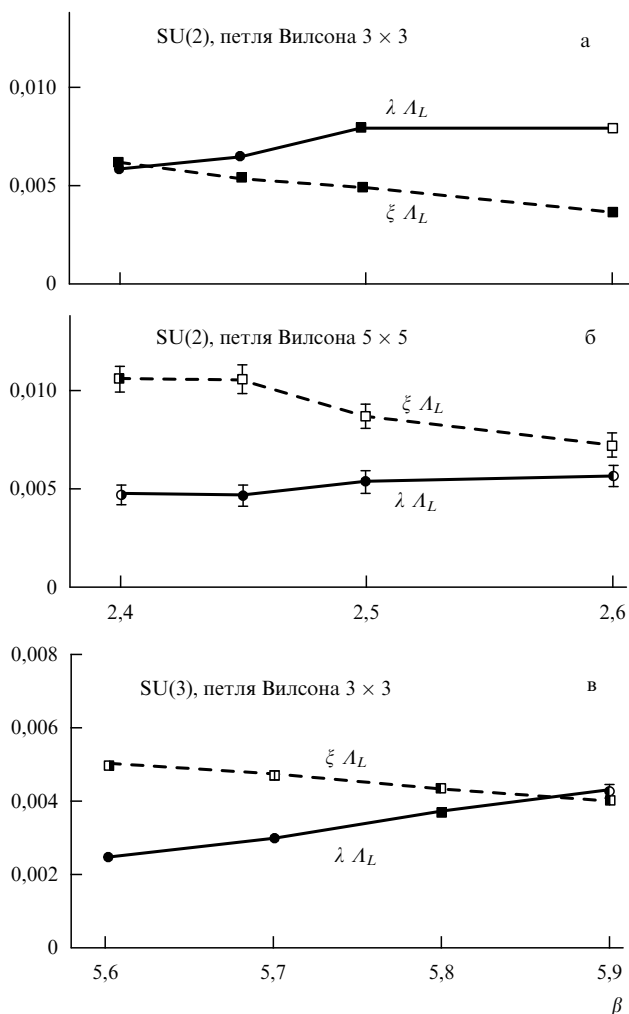


Рис. 7. Вычисления на решетке [25] глубины проникновения  $\delta \equiv \lambda$  и длины когерентности  $\xi$  как функции  $\beta = 2N_c/g^2$  для АП конфигураций в SU(2) (а, б) и для SU(3)-теории (в). Величины  $\delta$  и  $\xi$  определены сравнением распределения полей и АП монополярных токов с решением дуальных уравнений Гинзбурга–Ландау.

SU(2)-глюодинамике, проведенные недавно методом абелевых проекций [26], показывают двугорбую структуру взаимодействия, но с довольно мелкой ямой, поэтому эффективное  $\lambda_{\text{QCD}}$  в лагранжиане типа (40) невелико, что находится в согласии с (51). Весьма увлекательное изложение свойств дуальных монополей и их измерения на решетке читатель может найти в [27].

3) Рассмотрим явление конфайнмента с точки зрения образования конденсата и нарушения симметрии. Явление сверхпроводимости обычно ассоциируется с образованием конденсата куперовских пар (хотя это и необязательно). Понятие конденсата наиболее ясно выражено для не взаимодействующего бозе-газа вблизи нулевой температуры, где возникает явление конденсации Бозе–Эйнштейна. В идеале в квантовомеханической системе конденсат можно рассматривать как когерентное состояние. Когда учитывается взаимодействие, понятие конденсата становится менее определенным [28].

В квантовой теории поля понятие конденсата можно связать со свойствами волнового функционала. Тогда в случае выключенного взаимодействия можно снова построить когерентное состояние во вторично-квантованном формализме (см., например, построение волновых операторов в случае сверхтекучести [29]). Характерной особенностью такого описания конденсата является фиксированная фаза волнового функционала, что означает нарушение U(1)-симметрии. Простейшим примером может служить теория типа Гинзбурга–Ландау (40), где в приближении  $\lambda \rightarrow \infty$  волновой функционал  $\Psi\{\varphi\}$  определяется классическим решением  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\Psi\{\varphi\} \rightarrow \Psi\{\varphi_0\}$ .

Решение  $\varphi = \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  имеет фиксированную фазу, нарушает U(1)-симметрию лагранжиана (40), и возникает явление спонтанного нарушения симметрии (СНС) [30]. Простейший пример СНС — двугорбый потенциал Хиггса в (40). Поэтому, если мы хотим установить наличие дуального эффекта Мейсснера в КХД (глюодинамике), то достаточно найти конденсат магнитных монополей  $\tilde{\varphi}$ , дуальный конденсату куперовских пар  $\varphi = \varphi_0$ , и определить эффективный потенциал  $V(\tilde{\varphi})$ , имеющий явную двугорбую структуру.

Такой анализ выполнен в [26] методом абелевых проекций и там же показано, что действительно  $V(\tilde{\varphi})$  имеет такой вид. Обсудим это в следующем разделе.

4) Наконец, рассмотрим дуальный механизм Мейсснера с точки зрения корреляторов полей и токов [31]. Это позволит нам описать данный механизм в наиболее общем виде, справедливом в случае и классического, и квантового вакуума.

Чтобы изучать конфайнмент как магнитных, так и электрических зарядов, можно использовать коррелятор (16) (для последних обсуждение дано в разделе 3, см. уравнение (19) и последующий текст). Перепишем определение (16) для корреляторов электрических и магнитных полей по отдельности:

$$\langle E_i(x)E_j(y) \rangle = \delta_{ij} \left( D^E + D_1^E + h^2 \frac{\partial D_1^E}{\partial h^2} \right) + h_i h_j \frac{\partial D_1^E}{\partial h^2}, \quad (52)$$

$$\langle H_i(x)H_j(y) \rangle = \delta_{ij} \left( D^H + D_1^H + h^2 \frac{\partial D_1^H}{\partial h^2} \right) - h_i h_j \frac{\partial D_1^H}{\partial h^2}, \quad (53)$$

где  $h_\mu = x_\mu - y_\mu$ ,  $h^2 = h_\mu h_\mu$ . Здесь в (52), (53) мы ввели корреляционные функции  $D$ ,  $D_1$  отдельно для электрических и магнитных полей. В лоренц-инвариантном

вакууме  $D^E = D^H$  и  $D_1^E = D_1^H$ , однако в модели Гинзбурга–Ландау и в теории поля (40) при ненулевой температуре электрические и магнитные корреляционные функции (к.ф.) не совпадают.

Давайте теперь сравним вилсоновские средние (1) для электрических и магнитных зарядов. В первом случае результат есть закон площадей (17) с функцией  $D \rightarrow D^E$ , ответственной за конфайнмент.

Рассмотрим теперь магнитный заряд, бегущий по контуру  $C$  в плоскости (14). Для него соответствующая петля Вилсона имеет вид

$$\langle \tilde{W}(C) \rangle = \left\langle \exp \left( ig \int \tilde{F}_{14} d\sigma_{14} \right) \right\rangle = \exp(-\sigma^* S_{\min}). \quad (54)$$

Здесь  $\tilde{F}_{\mu\nu}$  — дуальная напряженность поля,  $\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2)e_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ , и  $\tilde{F}_{14} = H_1$ . Из (17) следует, что натяжение дуальной струны  $\sigma^*$  есть

$$\sigma^* = \frac{g^2}{2} \int d^2x D_1^H(x) [1 + O(T_g^2 H)]. \quad (55)$$

Присутствие к.ф.  $D_1^H$  в уравнении (55) вызывает удивление. Для электрических зарядов  $D^E$  дает конфайнмент, что обусловлено непертурбативными конфигурациями, например магнитными монополями (см. (22)), тогда как  $D_1^E$  дает периметрическую поправку к закону площадей и содержит также пертурбативные вклады типа кулоновского члена. Те же электрические заряды в вилсоновской петле в плоскости (23) приводят опять к закону площадей (17) с заменой  $D \rightarrow D^H$ . Кроме того,  $D^H$  так же, как и  $D^E$ , связано с монополями в вакууме; в самом деле, взяв оператор дивергенции дважды от обеих сторон уравнения (53), получим

$$\langle \text{div} H(x), \text{div} H(y) \rangle = -\partial^2 D^H(x-y). \quad (56)$$

Вместо этого конфайнмент внешних магнитных зарядов в уравнении (55) связан с функцией  $D_1^H$  (или же  $D_1^E$ , если петля  $\langle \tilde{W}(C) \rangle$  берется в плоскости (23)). Таким образом, дуальность электрических и магнитных зарядов предполагает также замены  $D^H, D^E \leftrightarrow D_1^E, D_1^H$ .

Здесь, однако, нужна осторожность, и сначала требуется отделить пертурбативные взаимодействия, которые содержатся в  $D_1$ . Именно, нужно заменить в (55)  $D_1^H$  на  $\tilde{D}_1^H$ , где

$$\tilde{D}_1^H = D_1^H - \frac{4e^2}{x^4}. \quad (57)$$

Важно подчеркнуть снова, что только непертурбативные составляющие корреляторов могут создать новый массовый параметр вроде  $\sigma^*$ , пертурбативный член дает обычное кулоновское взаимодействие, которое технически удобнее не включать в  $D_1^H$ , а отделить его на более ранней стадии (см. [32]).

Генерация массы такого рода ясно видна в модели Гинзбурга–Ландау, где к.ф.  $D_1$  может быть явно вычислена из (40):

$$D_1^G(x-y) = (e^2|\phi|^2 - \partial^2)_{xy}^{-1} \approx \exp(-m|x-y|), \quad (58)$$

где в асимптотической области  $|\phi| = |\phi_0|$  и  $m = e|\phi_0| = 1/\delta$ .

С точки зрения дуальности  $D_1^H(x)$  (49) следует сравнивать с поведением  $D^E(x)$ , которое обсуждалось в разделе 3 и измерялось в [13]:

$$D(x) = D^E(x) = \exp(-\mu|x|), \quad \mu \approx 1 \text{ ГэВ}. \quad (59)$$

Уравнения (58), (59) наглядно демонстрируют справедливость дуального механизма Мейсснера на уровне полевых корреляторов.

## 5. Метод абелевых проекций

В предыдущем разделе показано, как формируется струна между магнитными источниками в вакууме, описываемом абелевой моделью Хиггса.

В дуальном механизме Мейсснера [3] предполагается, что в вакууме КХД возникает конденсат магнитных монополей, который и создает струну между цветоэлектрическими зарядами. На этом этапе существуют два пути дальнейшего исследования. На первом из них можно задать вид абелевой или неабелевой модели Хиггса для дуальных глюонных полей и скалярного поля магнитных монополей. Исследования этого типа проводились в [33] и феноменологически вполне успешны: линейный конфайнмент здесь возникает естественным образом, и даже зависящие от спина силы между кварками находятся в разумном согласии с опытом [34]. Однако мы не будем здесь излагать этот по-своему интересный подход, адресуя читателя к цитированной литературе, так как в нем до сих пор не решена наиболее фундаментальная часть проблемы — вывод дуальной модели Мейсснера из первых принципов — лагранжиана КХД.

Вместо этого обратимся к другому направлению, весьма интенсивно развивавшемуся последние 8–10 лет, — методу абелевых проекций (АП), впервые предложенному 'т Хофтом [4]. В нем главная проблема — как распознать конфигурации поля со свойствами магнитных монополей, которые ответственны за конфайнмент. 'т Хофт предложил найти такую калибровку, в которой монопольные степени свободы, скрытые в данной конфигурации, становятся явными. Соответствующая процедура была разработана как на решетке, так и в непрерывном пределе [35]. Большая часть последующих усилий была посвящена практическому разделению решеточных конфигураций и изучению эффектов от выделенных степеней свободы (натяжение струны, топологические заряды, СНС и т.п. на абелево-проецированных конфигурациях), а также построению эффективного лагранжиана. Мы начнем с формальной процедуры в непрерывной версии для  $SU(N_c)$ -глюодинамики, следуя работам [4, 35].

Для любого составного оператора  $X$ , преобразующегося по присоединенному представлению, например  $F_{\mu\nu}$ ,

$$X \rightarrow X' = VXV^{-1}, \quad (60)$$

можно найти унитарную матрицу  $V$  (т.е. такую калибровку), что  $X$  приобретает диагональный вид

$$X' = VXV^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \quad (61)$$

Для оператора  $X$  из алгебры Ли  $SU(N_c)$  вещественные  $\lambda_i$  можно выбрать упорядоченными:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \lambda_N$ . Ясно также, что  $V$  определена с точностью до умножения

слева на диагональную  $SU(N_c)$ -матрицу. Эта матрица принадлежит картановой или максимально абелевой подгруппе  $SU(N_c)$ ,  $U(1)^{N_c-1} \subset SU(N_c)$ .

Рассмотрим теперь поле  $A_\mu$  в калибровке (61):

$$\tilde{A}_\mu = V \left( A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^{-1} \quad (62)$$

и посмотрим, как компоненты  $\tilde{A}_\mu$  преобразуются относительно  $U(1)^{N_c-1}$ . Тогда диагональные элементы поля

$$a_\mu^i \equiv (\tilde{A}_\mu)_{ii} \quad (63)$$

преобразуются как "фотоны":

$$a_\mu^i \rightarrow a_\mu^i + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_i, \quad (64)$$

в то время как недиагональные элементы  $c_\mu^{ij} \equiv (A_\mu)_{ij}$  преобразуются как заряженные поля:

$$C_\mu^{ij} = \exp[i(\alpha_i - \alpha_j)] C_\mu^{ij}. \quad (65)$$

Здесь и выше  $i, j$  — цветовые индексы,  $i, j = 1, \dots, N_c$ .

Однако, как замечает 'т Хофт [4], это еще не конец истории, — при совпадении двух или более собственных значений  $\lambda_i$  возникает сингулярности со свойствами магнитных монополей. Чтобы их выявить, рассмотрим, как в [35], напряженность поля "фотонов"

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu a_\nu^i - \partial_\nu a_\mu^i = \\ &= VF_{\mu\nu} V^{-1} + ig \left[ V \left( A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^{-1}, V \left( A_\nu + \frac{i}{g} \partial_\nu \right) V^{-1} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

и определим "монополярный ток"

$$K_\mu^i = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu f_{\rho\sigma}^i, \quad \partial_\mu K_\mu^i = 0. \quad (67)$$

Так как  $F_{\mu\nu}$  регулярно всюду, единственная сингулярность, дающая вклад в  $K_\mu^i$ , есть коммутаторный член в (66), а вся гладкая часть  $a_\mu^i$  не дает вклада в  $K_\mu^i$  из-за наличия антисимметричного тензора.

Тогда определим магнитный заряд  $m^i(\Omega)$  в 3d области  $\Omega$ :

$$m^i(\Omega) = \int_\Omega d^3\sigma_\mu K_\mu^i = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} d^2\sigma_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma}^i. \quad (68)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда два собственных значения в (61) совпадают, например  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Это может случиться в какой-то точке  $x^{(1)}$ , в 3d пространстве  $\Omega$ , т.е. на линии в 4d пространстве, что можно представить себе как мировую линию магнитного монополя. Вклад в  $m^i(\Omega)$  происходит только от бесконечно малой окрестности  $B_\varepsilon$  точки  $x^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} m^i(B_\varepsilon(x^{(1)})) &= \frac{i}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} d^2\sigma_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} [V \partial_\rho V^{-1}, V \partial_\sigma V^{-1}]_{ii} = \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho [V \partial_\sigma V^{-1}]_{ii}. \end{aligned} \quad (69)$$

Член  $V \partial_\sigma V^{-1}$  сингулярен, и с ним надо обращаться с осторожностью. Для выявления сингулярности запишем

$$V = W \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta + i \sigma \mathbf{e}_\phi \sin \frac{\theta}{2}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

где  $W$  — матрица  $SU(N)$ , гладкая вблизи  $x^{(1)}$ . Подставляя (70) в (69), имеем

$$m^i(B_\varepsilon(x^{(1)})) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\varepsilon} d^2\sigma_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho (1 - \cos \theta) \partial_\sigma \phi [\sigma_3]_{ii}, \quad (71)$$

где  $\phi$  и  $\theta$  — азимутальный и полярный углы. Подынтегральное выражение в (71) — якобиан отображения из  $S_\varepsilon^2(x^{(1)})$  к  $(\theta, \phi) \propto SU(2)/U(1)$ .

Так как

$$\Pi_2 \left( \frac{SU(2)}{U(1)} \right) = Z, \quad (72)$$

магнитный заряд есть  $m^i = \pm 1/2$ .

Из приведенного выше вывода ясно, что точка  $x = x^{(1)}$ , где  $\lambda_1(x^{(1)}) = \lambda_2(x^{(1)})$ , есть сингулярная точка калибровочно преобразованного поля  $\tilde{A}_\mu$  и  $a_\mu^i$ , и последняя ведет себя вблизи  $x = x^{(1)}$  как  $O(|x - x^{(1)}|^{-1})$ , тогда как АП напряженности  $f_{\mu\nu}^i$  как  $O(|x - x^{(1)}|^{-2})$ , т.е. подобно полю точечного магнитного монополя.

В этом месте необходимо подчеркнуть несколько моментов:

1) исходные вектор-потенциал и напряженность  $A_\mu$  и  $F_{\mu\nu}$  являются гладкими и не проявляют какого-либо сингулярного поведения;

2) на больших расстояниях  $f_{\mu\nu}^i$ , вообще говоря, не похожа на монополь, т.е. не убывает как  $|x - x^{(1)}|^{-2}$ , так что схожесть с магнитным монополем видна только в топологических свойствах вблизи точки  $x^{(1)}$ ;

3) поля  $A_\mu, a_\mu^i$ , вообще говоря, не имеют ничего общего с классическими решениями и могут быть квантовыми флуктуациями. В действительности, практически любое распределение полей в вакууме может быть подвергнуто АП, после чего будут найдены  $a_\mu^i, f_{\mu\nu}^i$  и у них найдены магнитные монополярные токи.

Примеры подобных распределений приведены ниже, но до этого нужно сказать несколько слов о выборе поля  $X$  в (60) и вообще о конкретном выборе калибровочного условия.

В настоящее время наиболее распространенными выборами являются, во-первых, для ненулевых температур линия Полякова в качестве оператора  $X$  в (60), т.е.

$$L_{ij}(\mathbf{x}) = \left[ P \exp \left( ig \int_0^\beta dx_4 A_4(x_4, \mathbf{x}) \right) \right]_{ij}, \quad (73)$$

где  $\beta = 1/T$ ,  $T$  — температура, причем  $A_4$  должно быть периодически по  $x_4$ ;  $i, j$  — цветовые индексы в фундаментальном представлении; во-вторых, очень широко используется так называемая максимальная абелева калибровка (МАК) [35]. В решеточных обозначениях она определяется как калибровка, в которой достигает максимума выражение

$$R = \sum_{s, \mu} \text{tr}(\sigma_3 \tilde{U}_\mu(s) \sigma_3 \tilde{U}_\mu^+(s)). \quad (74)$$

Здесь  $U_\mu$  — матрица ребра решетки:  $U_\mu \exp(igA_\mu^{(s)}\Delta z_\mu)$ ,  $\tilde{U}_\mu$  — калибровочно-преобразованная матрица:

$$\tilde{U}_\mu(s) = V(s)U_\mu(s)V^{-1}(s + \mu). \quad (75)$$

В непрерывном пределе МАК характеризуется условием, которое для  $SU(2)$  выглядит наиболее просто

$$(\partial_\mu \pm igA_\mu^3)A_\mu^\pm = 0, \quad A_\mu^\pm = A_\mu^1 \pm iA_\mu^2. \quad (76)$$

Как будет видно, выбор калибровки является решающе важным для АП: например, в минимальной АП, соответствующей минимуму  $R$  (74), магнитные монополи, полученные АП, не оказывают влияния на конфайнмент [36].

Так как общее число работ, имеющих отношение к АП, огромно, обсудим вкратце только основные идеи и результаты. Большая их часть выполнена на решетке. (Краткое введение и обсуждение техники решеточных вычислений см. в [27].)

Выделение монопольных степеней свободы выполняется следующим образом. Для матрицы АП ребра (75) можно определить  $U(1)$  угол  $\theta_\mu$

$$\tilde{U}_\mu = \exp(i\theta_\mu\sigma_3), \quad -\pi \leq \theta_\mu \leq \pi. \quad (77)$$

Далее, для плакета  $\tilde{U}_{\mu\nu} \propto \tilde{U}_\mu \tilde{U}_\nu \propto \sum \exp(i\theta_{\mu\nu}\sigma_3)$  можно написать  $-4\pi \leq \theta_{\mu\nu} \leq 4\pi$  и определить "кулоновскую" составляющую  $\theta_{\mu\nu}$ ,  $\bar{\theta}_{\mu\nu} = \text{mod}_{2\pi}\{\theta_{\mu\nu}\}$ , так что

$$\bar{\theta}_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + 2\pi n_{\mu\nu}, \quad (78)$$

где  $n_{\mu\nu}$  — число дираковских струн, проходящих через плакет  $\mu\nu$ .

Теперь можно вычислить различные наблюдаемые, сделанные из АП переменных, и найти вклады в них отдельно от "кулоновской" части  $\bar{\theta}_{\mu\nu}$  и от "монопольной" части  $m_{\mu\nu} \equiv 2\pi n_{\mu\nu}$ . Это было сделано в целом ряде работ (см. обзор в [37]), где была продемонстрирована доминантность монопольных вкладов:

- 1) для натяжения струны [38],
- 2) для пропагаторов фермионов и адронных масс [39],
- 3) для топологической восприимчивости [40].

На рис. 8 приведены результаты полного расчета для натяжения струны и монопольного вклада, где ясно виден преобладающий вклад монополей по сравнению с кулоновскими переменными.

Другой линией развития в методе АП был вывод и исследование эффективных лагранжианов для АП степеней свободы (см., например, [41]). Однако результирующий лагранжиан оказался таким, что нейтральные АП объекты, вроде "фотонов", не удерживаются и явно присутствуют в спектре, что противоречит опыту. Поэтому такие лагранжианы не очень полезны как с феноменологической, так и с фундаментальной точки зрения, и мы отсылаем читателя к цитированной литературе и помещенным там ссылкам.

Вернемся теперь к проверке механизма конфайнмента с помощью АП. Прямая проверка дуального механизма Мейсснера предполагает по крайней мере два элемента: выявление дуального лондоновского тока и установление конденсации магнитных монополей.

Первое было сделано, например, в [42]. Дуальное уравнение Лондонов (43) имеет вид

$$\mathbf{E} = \delta^2 \text{rot } \mathbf{j}_M, \quad \delta = \frac{1}{m}. \quad (79)$$

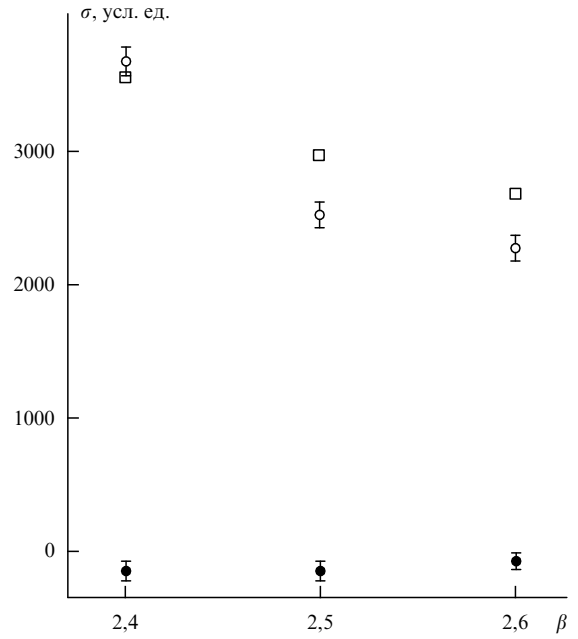


Рис. 8. Натяжение струны  $\sigma$ , вычисленное в [43] на всех АП конфигурациях (□) и отдельно на АП монополях (○) и "фотонах" (●), как функция  $\beta = 4/g^2$  в  $SU(2)$ -глюодинамике.

Для идеального сверхпроводника 2-го рода необходимо выполнение условия  $\delta \gg \xi$ , где  $\xi = m_\phi^{-1}$  — масса хиггсовского бозона (это есть квант возбуждения магнитного монопольного конденсата). На практике в [42] было найдено, что  $\delta \approx \xi$ , и потому конденсат "мягкий", что в свою очередь требует решения точных уравнений для струн АНО. Такой анализ выполнен для  $SU(2)$ - и  $SU(3)$ -глюодинамики в [43] и [44].

Профиль струны  $\rho(x_\perp)$  также изучался в рамках АП и получающийся  $\rho_{АП}(x_\perp)$  [45] весьма похож на  $\rho(x_\perp)$ , вычисленный в рамках полного (непроецированного) действия методом Монте-Карло [46]. Таким образом, общая картина распределения токов и полей совместима с идеей дуальной сверхпроводимости.

Теперь мы подходим ко второй проверке — поиску конденсата монополей. Здесь важно, как определяются монополи. В первых анализах [35] АП монополи в максимально абелевой калибровке определялись через магнитные токи на ребрах дуальной решетки, и плотность периметров монопольных токов была измерена ниже и выше температуры  $T_c$  фазового перехода. Плотность резко уменьшалась при  $T > T_c$ .

Позже было понято [47], что так определенная монопольная плотность может не быть хорошей характеристикой дуальной сверхпроводимости и монопольного конденсата и что для последнего нужно определить оператор рождения магнитного монополя.

Таким образом, оказалось необходимым определить дуальный аналог хиггсовского поля  $\phi$  и решить вопрос о его конденсации. Общая математическая конструкция оператора рождения монополя была дана ранее в [48] и использована позже для  $U(1)$ -теории в ряде работ [49]. Другая конструкция была использована для  $U(1)$ -теории в [50] и так же, как в [49], была продемонстрирована конденсация  $U(1)$ -монополей. В случае  $SU(2)$ -глюодинамики анализ выполнен в [51] и [26].

В последней работе решался важный вопрос о нахождении эффективного потенциала  $V(\varphi)$  для (определенного по аналогии с методом Фрелиха–Маркетти [48]) оператора рождения АП монополей  $\varphi$  (строгое доказательство соответствия [48] и полученного  $\varphi$  пока отсутствует).

В самом деле, если поверить в картину дуального эффекта Мейснера в фазе конфайнмента, то следует ожидать двугорбую структуру  $V(\varphi)$ , симметричную относительно замены  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . На рис. 9а приведена правая часть  $V(\varphi)$  (при положительных  $\varphi$ ), которая действительно имеет минимум при  $\varphi = \varphi_c$ , сдвинутый вправо от значения  $\varphi = 0$ , для значений  $\beta = 4/g^2$  в области конфайнмента. На рис. 9б та же величина  $V(\varphi)$  была измерена в фазе деконфайнмента и, как видно из рисунка, отвечает  $\varphi_c = 0$ . Таким образом, данные работы [26] дают прямое свидетельство возможности образова-

ния конденсата для АП-монополей. Отметим, однако, что, строго говоря, конденсация должна была бы устанавливаться в лондонском пределе ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), иначе квантовые флуктуации поля  $\varphi$  могут превалировать в случае мелкой ямы, как на рис. 9а (напомним, что речь здесь идет о системе с конечным числом степеней свободы в конечном решеточном объеме).

До сих пор мы ничего не говорили о природе конфигураций, которые под воздействием (или с помощью) АП обнаруживают магнитную монополярную структуру и обеспечивают конфайнмент. Они могли бы быть классическими конфигурациями или квантовыми флуктуациями (последняя возможность предпочитается большинством исследователей). Недавно с помощью АП был выполнен интересный анализ [52–54] классических конфигураций. Мы остановимся на первой работе [52], вызвавшей целый поток дальнейших публикаций. Авторы делают аналитически АП над изолированным инстантоном, мультиинстантоном и монополем Прасада–Соммерфилда и во всех случаях демонстрируют появление прямолинейного монополярного тока. В первом случае ток сосредоточен в центре инстантона и его направление зависит от выбранной параметризации. Далее в работе [53] такой же анализ был сделан численно для газа инстантонов и антиинстантонов, и было показано, что вокруг них возникают устойчивые по отношению к введению квантовых флуктуаций петли монополярного тока размером порядка радиуса инстантонов.

Таким образом, все выглядит так, как если бы внутри (анти)инстантона был спрятан магнитный монополярный. Этот результат крайне удивителен с нескольких точек зрения. Во-первых, магнитный монополярный дает поток через петлю Вилсона, равный  $\pi$  (см. раздел 6), тогда как поток от инстантона равен нулю (по модулю  $2\pi$ ), что и объясняет, почему газ монополей может дать конфайнмент, а газ инстантонов — нет. Поэтому тождество (хотя и неполное) монополя и инстантона невозможно. Во-вторых, известно [55], что конфайнмент в инстантонном газе отсутствует, и потому обнаружение там монополярных петель достаточно большого размера [53] весьма подозрительно. Чтобы понять, что же происходит в методе АП и не вносит ли сам метод монополи туда, где их нет, снова обратимся к случаю одного инстантона [52] и учтем, что АП содержит сингулярное калибровочное преобразование, при котором первоначально гладкое поле  $F_{\mu\nu}$  превращается в сингулярное, а именно [52],

$$F_{\mu\nu}(x) = VF_{\mu\nu}(x)V^{-1} + F_{\mu\nu}^{\text{sing}}, \quad (80)$$

где

$$F_{\mu\nu}^{\text{sing}}(x) = -iV(x)[\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu]V^{-1}(x). \quad (81)$$

Матрица  $V(x)$  сингулярна, и потому  $F_{\mu\nu}^{\text{sing}}$  не обращается в нуль. Поэтому функция  $D(x)$ , определяющая коррелятор полей (15) и магнитных токов (22), при таком сингулярном калибровочном преобразовании приобретает новое слагаемое

$$D(x) \rightarrow D(x) + D^{\text{sing}}(x), \quad (82)$$

где

$$D^{\text{sing}}(x-y) \propto \langle F^{\text{sing}}(x)F^{\text{sing}}(y) \rangle. \quad (83)$$

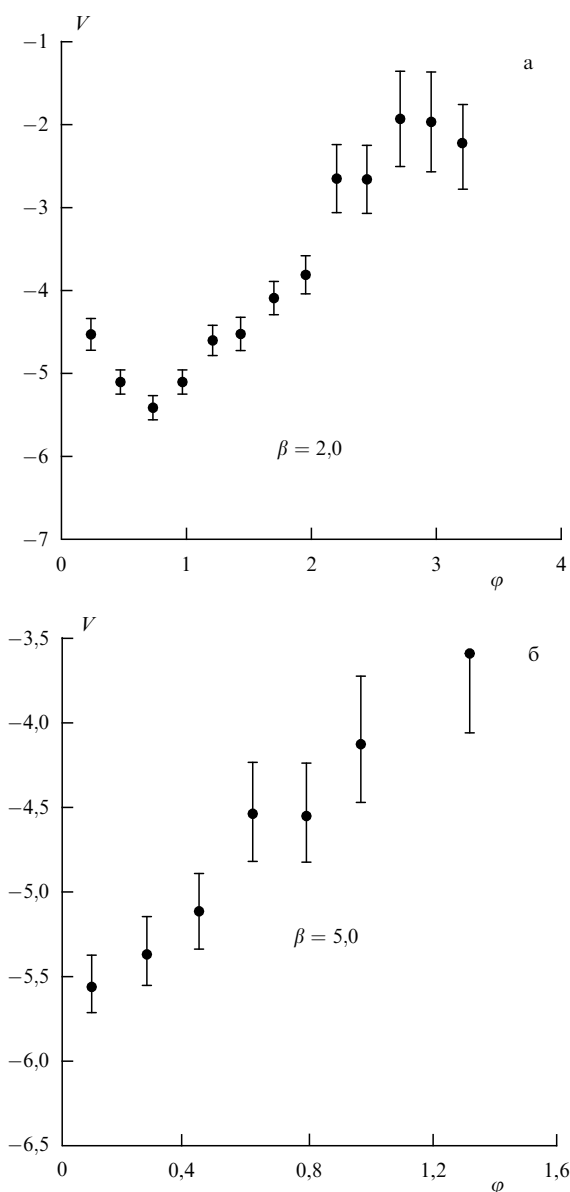


Рис. 9. Эффективный потенциал АП монополярного поля  $\varphi$ , определенного в соответствии с [48], вычисленный в [26] для двух значений  $\beta$  в SU(2)-глюодинике, отвечающих конфайнменту (а) и деконфайнменту (б).



Это же  $F_{\mu\nu}^{\text{sing}}$  приводит к появлению магнитных монопольных токов, которые в случае одного инстантона проходят через его центр [52]. Таким образом, вероятно, метод АП действительно вносит сингулярность, отвечающую магнитному монополю, практически в любую конфигурацию и потому не может служить надежным методом отбора удерживающих конфигураций. С другой стороны, применение АП в полных решеточных расчетах хорошо воспроизводит наблюдаемые конфайнмента, например, натяжение струны [38], т.е. конфигурации конфайнмента выдерживают тест АП.

В этой связи интересно взять другой пример, также исследованный в [52], — дионное решение (решение Прасада–Соммерфилда). Здесь оказывается, что монопольный ток, определенный через АП, проходит в точности через центры мультиинстантонного решения и совпадает с траекторией физического монополя (диона), которую можно вычислить независимо, т.е. магнитный монопольный ток, вычисленный в АП, совпадает с полным магнитным током. Это дает основания предположить, что истинные удерживающие конфигурации хорошо проходят через метод АП.

**6. Поиск классических решений. Монополи, мультиинстантоны и дионы**

В предыдущем разделе показано, что метод АП не дает ответа на вопрос, какие конфигурации ответственны за конфайнмент: это могут быть и классические поля, и квантовые флуктуации. Ничего не говорят об этом пока и корреляторы полей, хотя измерения на решетке дают ограничения на возможный профиль конфигураций.

Между тем интересную информацию дают расчеты на решетке методом охлаждения [56], при котором на каждом шаге охлаждения подавляется все больше квантовых флуктуаций и эволюция идет в сторону уменьшения действия. Они показывают, что из десятков тысяч первоначальных конфигураций на решетке (в основном, это квантовый шум) на некотором этапе охлаждения остается несколько десятков (иногда 15–25), которые обеспечивают такой же конфайнмент (величину натяжения струны), как и в первоначальном — "горячем" — вакууме. При еще большем охлаждении число конфигураций уменьшается до нескольких единиц (это, обычно, (анти)инстантоны) и конфайнмент исчезает.

Таким образом, можно думать, что удерживающие конфигурации в вакууме отличны от обычных квантовых флуктуаций, и, возможно, их действие больше инстантонного или они менее стабильны. Поэтому имеет смысл внимательно рассмотреть все известные классические конфигурации и проверить, нельзя ли из них построить вакуум с конфайнментом. В этом разделе изучим несколько классических решений: мультиинстантоны, дионы и тороны и кратко обсудим твистованные, или торонные, инстантоны.

После выявления индивидуальных свойств каждого из решений специально остановимся на их вкладе в петлю Вилсона — на том, что мы называем элементарным потоком решения. Приведем аргументы в пользу того, что элементарный поток дионов и торонных инстантонов, равный  $\pi$ , может приводить к конфайнменту, тогда как поток инстантонов, равный нулю (по модулю  $2\pi$ ), конфайнмента не дает. Последнее находится в согласии с наблюдениями [55]. Для построения удержи-

вающего вакуума из подходящих решений нужно обработать разреженный газ из этих объектов, что мы и обсудим на весьма нетривиальном примере газа дионов и антидионов.

**6.1. Классические решения, т.е. решения уравнения**

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{84}$$

в (анти)самодуальном случае могут быть записаны в виде так называемого анзаца 'т Хофта [57] или в более общей форме анзаца АДНМ [58].

В первом случае (более простом и менее общем) имеем

$$A_\mu^a = -\frac{1}{g} \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \partial_\nu \ln W, \tag{85}$$

где  $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$  — символ 'т Хофта:

$$\bar{\eta}_{\mu\nu}^a = \begin{cases} e_{a\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3, \\ \delta_{a\nu}, & \mu = 4, \\ -\delta_{a\mu}, & \nu = 4, \end{cases} \tag{86}$$

и функция  $W$  удовлетворяет уравнению  $\partial^2 W = 0$ . Важный класс решений дается следующей формулой:

$$W = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n^2}{(x - x^{(n)})^2}. \tag{87}$$

Здесь  $\rho_n, x_\mu^{(n)}, n = 1, \dots, N$ , — действительные параметры. В простейшем случае,  $N = 1$ , получается инстантонное решение [59] с размером  $\rho_n = \rho$  и положением  $x_\mu^{(1)}$ . Для конечной величины  $\rho_n$  и произвольного  $N$  (85) и (87) дают мультиинстантонное решение с топологическим зарядом  $Q = N$ . В частности, для  $N \rightarrow \infty, x_4^{(n)} = nb, x_i^{(n)} = r_i$  получается периодический инстантон Хэррингтона–Шепарда [60], для которого  $A_\mu^a$  периодически зависит от евклидова времени  $x_4 \equiv t$ .

Особой чертой инстантона является его конечный размер: поля  $F_{\mu\nu}$  спадают на больших расстояниях от центра как  $x^{-4}$ . Это поведение сильно отличается от случая магнитных монополей, где поля спадают как  $x^{-2}$ .

Таким поведением обладает другой класс решений (см. ниже), которые получаются из (85), (87) в пределе  $\rho_n = \rho \rightarrow \infty$ . В этом классе решений случай  $N = 1$ , когда  $W = 1/(x - x^{(0)})^2$ , отвечает чистой калибровке.

Следующий случай,  $N = 2$ , калибровочно эквивалентен (анти)инстантону с положением в точке  $(x^{(1)} + x^{(2)})/2$  и размером  $|x^{(1)} - x^{(2)}|/2$ .

Нас будет интересовать случай, когда  $N \rightarrow \infty, \rho_i = \rho \rightarrow \infty, x_4^{(n)} = nb, \mathbf{x}^{(n)} \equiv \mathbf{R}, n = 1, 2, \dots$ . Назовем это решение дионом, так как (см. ниже) оно обладает как цветоэлектрическим, так и цветомагнитным полем. В этом случае  $W$  можно записать так:

$$W \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{R})^2 + (x_4 - nb)^2}, \tag{88}$$

и затем переписать (88), используя переменные

$$\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{R}| \equiv r, \quad x_4 \gamma \equiv t, \quad \gamma = \frac{2\pi}{b}, \tag{89}$$

в следующем виде:

$$W = \frac{1}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos t}. \quad (90)$$

Из (85) находим вектор-потенциалы

$$A_{ia} = e_{aik} n_k \left( \frac{1}{r} - \coth r + \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos t} \right) - \frac{\delta_{ia} \sin t}{\cosh r - \cos t}, \quad (91)$$

$$A_{4a} = n_a \left( \frac{1}{r} - \coth r + \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos t} \right), \quad (92)$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{R}}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|}.$$

Можно отметить, что дионное поле в этой сингулярной калибровке (или калибровке 'т Хофта) оказывается дальнедействующим по координате  $r$ :

$$A_{\mu a} \propto \frac{1}{r}, \quad F_{\mu\nu} \propto \frac{1}{r^2} \quad (93)$$

и периодическим по времени  $t$ . Еще большую схожесть этого решения с полем магнитного монополя можно увидеть, сделав (сингулярное) калибровочное преобразование [61]

$$\tilde{A}_\mu = U^+ \left( A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U, \quad U = \exp \left( \frac{i \mathbf{r} \mathbf{n}}{2} \theta \right), \quad (94)$$

где

$$\tan \theta = W_4 \left[ \frac{W}{r} + W_r \right]^{-1}, \quad W_\mu \equiv \partial_\mu W.$$

В этой калибровке, иногда называемой калибровкой Росси, дионное решение (94)  $\tilde{A}_\mu$  совпадает с решением Прасада – Сомерфилда [62]

$$\tilde{A}_{ia} = f(r) e_{iba} n_b, \quad f(r) = \frac{1}{gr} \left( 1 - \frac{r}{\sinh r} \right), \quad (95)$$

$$\tilde{A}_{4a} = \varphi(r) n_a, \quad \varphi(r) = \frac{1}{gr} (r \coth r - 1). \quad (96)$$

Заметим, что  $\tilde{A}_{\mu a}$ , не зависящее от времени, описывает статическое дионное решение, поскольку в нем содержится и цветомагнитное, и цветоэлектрическое поле

$$E_{ka} = B_{ka} = \delta_{ak} \left( -f' - \frac{f}{r} \right) + n_a n_k \left( f' - \frac{f}{r} + g f^2 \right). \quad (97)$$

Можно сделать еще одно добавочное калибровочное преобразование, приведя  $E_{ka}$ ,  $B_{ka}$  к квазиабелевой калибровке, где единственная дальнедействующая компонента направлена по третьей цветовой оси:

$$E'_{k3} = B'_{k3} (r \rightarrow \infty) \propto -\frac{1}{gr^2} n_k. \quad (98)$$

Уравнение (98) оправдывает название дион для данного решения и демонстрирует его схожесть с магнитным монополем. Заметим также, что  $\tilde{A}_{4a}$  (96) на пространственной бесконечности стремится к постоянной, подобно хиггсовскому полю в монополе 'т Хофта – Полякова [63].

Полное действие диона вычисляется с помощью (95), (96) или (91), (92) и равно

$$S = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \int_0^T dt (B_{ak}^2 + E_{ak}^2) = \frac{8\pi^2}{g^2 b} T, \quad (99)$$

где  $T$  — длина "дионной траектории", выраженная через число  $N$  центров (87):  $T = b(N - 1)$ . Для данного  $N$  действие и топологический заряд равны

$$S(N) = \frac{8\pi^2}{g^2} Q(N), \quad Q(N) = N - 1. \quad (100)$$

**6.2.** Этот короткий раздел посвящен другому типу классических решений — зависящих от граничных условий и определенных в конечном объеме. Рассмотрим тороны и торонные инстантоны [64], которые подчиняются твистованным граничным условиям (ГУ) в ящике с размерами  $0 \leq x_\mu \leq a_\mu$ . Периодические ГУ накладываются с точностью до калибровочных преобразований (твистованные ГУ)

$$A_\lambda(x_\mu = a_\mu) = \Omega_\mu \left[ A_\lambda(x_\mu = 0) - i \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right] \Omega_\mu^+. \quad (101)$$

Чтобы обеспечить самосогласованность определения  $A_\lambda$  на ребрах, четыре функции  $\Omega_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\Omega_1(x_2 = a_2) \Omega_2(x_1 = 0) = \Omega_2(x_1 = a_1) \Omega_1(x_2 = 0) Z_{12}, \quad (102)$$

и аналогичным соотношениям для  $1, 2 \rightarrow i, j$ . Здесь  $Z_{12} \in Z(N)$  — центр группы  $SU(N)$ ,

$$Z_{\mu\nu} = \exp \left( 2\pi i \frac{n_{\mu\nu}}{N} \right), \quad n_{\mu\nu} = -n_{\nu\mu}, \quad (103)$$

где  $n_{\mu\nu}$  суть целые числа, не зависящие от координат  $x_\mu$ .

Твистованные решения  $A_\mu$  (101) дают вклад в топологический заряд

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \int_{|x_\mu| \leq a_\mu} \text{tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) d^4 x = \nu - \frac{\chi}{N}, \quad (104)$$

где  $\nu$  — целое число и  $\chi = n_{\mu\nu} \tilde{n}_{\mu\nu} / 4 = n_{12} n_{34} + n_{13} n_{42} + n_{14} n_{23}$ .

Действие в ящике ограничено снизу

$$\frac{1}{2} \int \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^4 x \geq \frac{8\pi^2}{g^2} \left| \nu - \frac{\chi}{N} \right|. \quad (105)$$

Рассмотрим, например, случай, когда  $n_{34} = -n_{12} = 1$ , а все остальные  $n_{\mu\nu} = 0$ ,  $\chi = 1$ . Тогда получаем

$$A_\lambda(x) = -\frac{\omega}{g} \sum_\mu \frac{\alpha_{\mu\lambda} x_\mu}{a_\mu \alpha_\lambda}, \quad \alpha_{\mu\lambda} = -\alpha_{\lambda\mu}, \quad (106)$$

где  $\alpha_{12} = 1/2Nk$ ;  $\alpha_{34} = 1/2Nl$ ,  $k + l = N$ ,

$$\omega = 2\pi \text{diag}(l, \dots, l, -k, \dots, -k). \quad (107)$$

Здесь матрица  $\omega$  имеет  $k$  элементов, равных  $l$ , и  $l$  элементов, равных  $-k$ , причем наложено условие

$a_1 a_2 (a_3 a_4)^{-1} = l/k = (N - k)/k$ . В качестве простого примера возьмем  $SU(2)$ -теорию и кубический ящик, тогда  $k = l = 1$ ,  $\omega = 2\pi\tau_3$  и

$$A_\lambda(x) = -\frac{\tau_3}{a^2} \frac{\pi}{2g} \sum_\mu \bar{\alpha}_{\mu\lambda} x_\mu, \quad \bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{34} = 1. \quad (108)$$

Это решение самодуально, причем имеет место соотношение

$$\text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \text{tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) = \frac{16\pi^2}{\prod_\mu a_\mu N g^2}. \quad (109)$$

Из (109) следует, что торон (108) — частный случай самодуального решения с постоянным полем  $\bar{F}_{\mu\nu}$ , т.е. когда

$$A_\mu(x) = \bar{F}_{\mu\nu} x_\nu \frac{\tau_3}{2}, \quad (110)$$

где амплитуда постоянного поля  $\bar{F}_{\mu\nu}$  квантуется. Для постоянного (анти)самодуального поля согласно анализу Лейтвилера [65] такие решения устойчивы по отношению к квантовым флуктуациям.

Поток поля (108) через петлю Вилсона в плоскости (12) или (34) есть

$$P \exp\left(ig \int_C A_\mu dx_\mu\right) = \exp\left(-i\pi \frac{S}{a^2} \tau_3\right), \quad (111)$$

где  $S$  — площадь внутри контура  $C$ .

Как мы увидим в следующем подразделе, величина потока, равная  $\pi$  для  $S = a^2$ , есть важное свойство, присущее конфайнменту. Другое интересное свойство торонов, отсутствующее у других классических решений, состоит в том, что их действие пропорционально  $1/Ng^2$  и потому не растет для больших  $N$ , когда  $g^2 = g_0^2/N$ . Мы обсудим это свойство в заключении.

Другой тип решения — твистованные инстантоны [64]. Они представляют собой решения с топологическим зарядом  $Q$  (104) и целым ненулевым  $\nu$ . Недавно на решетке с твистованными ГУ были обнаружены подобные объекты [66]. Они имели полуцелый топологический заряд  $Q = 1/2$  и профиль напряженности поля, почти не отличимый от обычных инстантонов. К сожалению, аналитический вид твистованных инстантонов пока неизвестен. В [66] было показано, что они, по-видимому, создают ненулевое натяжение струны. Это свойство не случайно, так как в следующем подразделе мы покажем, что полуцелый топологический заряд может приводить к элементарному потоку через петлю Вилсона, равному  $\pi$ , а это, в свою очередь, может дать конфайнмент.

**6.3.** Вычислим вклад одного классического решения в петлю Вилсона для (мульти)инстантона, диона и твистованного инстантона и свяжем свойства элементарного потока с конфайнментом газа классических решений [67]. Рассмотрим круговую петлю Вилсона в плоскости (12) и возьмем  $A_\mu$  в виде анзаца 'т Хофта (85), где  $N$  фиксировано и  $x_i^{(n)} = 0$ ,  $x_4^{(n)} = nb$ . Тогда мы можем изучить случай одного инстантона ( $N = 1$ ), периодического инстантона ( $N \rightarrow \infty$ ,  $\rho_i = \rho$  фиксировано), мультиинстантона ( $N$  конечно,  $\rho_i$  конечны) и диона ( $\rho_i = \rho \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ).

Когда радиус петли  $R$  много больше сердцевины решения (т.е. когда  $R \gg \rho$  для (мульти)инстантона или  $R \gg b/2\pi$  для диона), петля Вилсона равна

$$W(C_R) = \exp\left(i\tau_3\pi \frac{RW_r}{W}\right) \equiv \exp(i\tau_3 \cdot \text{flux}), \quad (112)$$

где

$$W_r = \frac{\partial W}{\partial |\mathbf{x}|} \Big|_{|\mathbf{x}|=R}, \quad |\mathbf{x}| \equiv r.$$

Тогда для (мульти)инстантона имеем при  $R \gg \rho$

$$\frac{RW_r}{W} \Big|_{r=R} = \frac{-\sum \rho_n^2 2R/[R^2 + (x_4 - nb)^2]^2}{1 + \sum \rho_n^2/[R^2 + (x_4 - nb)^2]} \rightarrow 0. \quad (113)$$

В регулярной калибровке мы бы получили поток, равный  $2\pi$  [68]; в произвольной калибровке находим, что

$$W(C_R) = 1, \quad (\text{мульти})\text{инстантоны}. \quad (114)$$

Рассмотрим теперь случай дионов, что означает переход к пределу  $\rho_n \rightarrow \infty$  в  $W_r$  в (112). Используя формулу (90), получаем для диона

$$\frac{RW_r}{W} = -1; \quad \text{flux} = -\pi, \quad W(C_R) = -1. \quad (115)$$

Интересно рассмотреть также промежуточный случай так называемых  $\tau$ -монополей [69], когда  $\rho_n \rightarrow \infty$  при фиксированном  $N$ , так что длина цепи  $L = Nb$  конечна. Используя (88), находим два предельных случая

$$R \gg L, \quad \frac{RW_r}{W} = -2, \quad \text{flux} = -2\pi; \quad W(C_R) = 1; \quad (116)$$

$$R \ll L, \quad \frac{RW_r}{W} = -1, \quad \text{flux} = -\pi; \quad W(C_R) = -1. \quad (117)$$

Отсюда видно, что только достаточно длинные  $\tau$ -монополи, почти дионы, при  $L \gg R$  приводят к нетривиальному ответу  $W(C_R) \neq 1$ .

Чтобы связать значения элементарных потоков (114)–(117) с конфайнментом, нам понадобятся модельные соображения о стохастическом распределении потоков в газе дионов (или мультиинстантонов), как это было сделано в [68, 69]. В более общем виде картина стохастического распределения потоков сформулирована в модели стохастического конфайнмента [70] и проверена на решетке в [71]. Мы вернемся к ней в следующем разделе, а пока используем более простые соображения из [68, 69].

Рассмотрим тонкий слой (размерности  $3d$ ) над и под плоскостью петли Вилсона, толщиной  $l \ll R$ , где  $R$  — радиус петли, и предположим, что он заполнен разреженным газом мультиинстантонов или дионов. Если  $3d$  плотность газа есть  $\nu$ , так что среднее число объектов в слое равно  $\bar{n} = \nu Sl$ ,  $S = \pi R^2$ , то согласно распределению Пуассона вероятность иметь  $n$  объектов в этом же слое составляет

$$w(n) = \exp(-\bar{n}) \frac{(\bar{n})^n}{n!}. \quad (118)$$

Пусть  $\lambda$  — вклад в петлю Вилсона от одного объекта, причем  $\lambda = +1$  и  $-1$  для инстантона и диона соответственно, тогда полный вклад газа

$$\begin{aligned} \langle W(C_R) \rangle &= \sum_n \exp(-\bar{n}) \frac{\lambda^n \bar{n}^n}{n!} = \\ &= \exp[-\bar{n}(1 - \lambda)] = \exp(-\sigma S), \end{aligned} \quad (119)$$

где

$$\sigma = (1 - \lambda)vl. \quad (120)$$

Таким образом, для инстантонов ( $\lambda = 1$ ) из (120) получаем нулевое натяжение струны в согласии с другими вычислениями [55], тогда как для дионов ( $\lambda = -1$ ) конфаинмент максимален. Перечислим те свойства, которые необходимы для этого важного заключения о результирующем конфаинменте:

- 1) поток равен  $\pi$ , так что  $W = -1$  для одного диона,
- 2) стохастическое распределение Пуассона (или подобное ему) для распределения дионов,
- 3) существование слоя конечной толщины, т.е. конечной длины экранирования  $l$ , так что объекты, находящиеся дальше  $l$ , полностью экранируют друг друга и не дают вклада в петлю Вилсона.

Заметим, что условие 3) необходимо для закона площадей, иначе (для  $l$  больших, например  $l = R$ ) получается  $\sigma$ , растущее с  $R$ , т.е. "сверхконфаинмент".

Те же рассуждения применимы к торонам и твистованным инстантонам [66]. В самом деле, согласно (111) в этом случае элементарный поток равен  $-\pi$ . Поэтому, если разделить весь объем на твистованные кубические ячейки и обеспечить стохастичность потоков в ячейках, получится снова результат (119), отвечающий картине конфаинмента.

Тороны [72] и твистованные инстантоны [66] изучались с точки зрения конфаинмента аналитически в [72] и на решетке в [66]. В случае торонов трудно обеспечить стохастичность, так как ГУ на стенке двух соседних ячеек требуют непрерывности  $A_\mu(x)$  и это приводит к упорядочению потоков, в результате чего конфаинмент теряется. В случае твистованных инстантонов с  $Q = 1/2$  [66] поле существенно отлично от нуля только вблизи центра инстантона и ГУ менее существенны. Авторы [66] замечают тенденцию к установлению ненулевого  $\sigma$  в своих расчетах с твистованными ГУ; однако пока неясно, что получится при введении таких ГУ только на внутренних гранях решетки.

**6.4.** Ниже рассматриваются дионы как наиболее вероятные кандидаты на классические удерживающие конфигурации. Предварительно необходимо изучить свойства дионного газа и показать, что взаимодействие в разреженном газе достаточно слабо, что в свою очередь обосновывает применимость приближения разреженного газа.

Как это всегда делается, примем анзац суперпозиции

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{N_+} A_\mu^{+(i)}(x) + \sum_{i=1}^{N_-} A_\mu^{- (i)}(x), \quad (121)$$

где  $N_+$ ,  $N_-$  — числа дионов и антидионов соответственно. Чтобы вакуум КХД из дионов был  $O(4)$ -инвариантным, дионы должны быть равномерно распре-

делены по направлениям дионной мировой линии  $\omega_\mu^{(i)}$  ( $\omega_\mu^{(i)}\omega_\mu^{(i)} = 1$ ) и по вектору положения  $R_\mu^{(i)}$ . Можно записать

$$A_\mu^{(i)}(x) = \Omega_i^+(LA)_\mu(r, t)\Omega_i. \quad (122)$$

Здесь  $\Omega_i$  — матрица цветовой ориентации диона,  $L$  —  $O(4)$ -матрица вращения, а  $r$  и  $t$  определены так:

$$r = \{(x - R^{(i)})^2 - [(x - R^{(i)})_\mu \omega_\mu^{(i)}]^2\}^{1/2}, \quad (123)$$

$$t = (x - R^{(i)})_\mu \omega_\mu^{(i)}. \quad (124)$$

На этом этапе нетривиальным моментом является выбор калибровки для решения  $A_\mu$  в (122), например можно взять решение в сингулярной калибровке (91) или же в калибровке Росси (95), (96). Сумма (121) не может быть получена калибровочным преобразованием от одного выбора к другому. На самом деле оказывается, что форма (95), (96) не годится, потому что действие всей суммы (121) в этом случае расходится (см. обсуждение и подробности в [67]).

Калибровка (91) с точки зрения аддитивности приемлема, и мы рассмотрим ее более внимательно. Так как решение в этом случае спадает достаточно быстро (ср. уравнение (93)), взаимодействие между дионами, выраженное через  $S_{\text{int}}$ :

$$S(A) = \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} S_i(A^{(i)}) + S_{\text{int}}, \quad (125)$$

является кулоноподобным на больших расстояниях, например для параллельных мировых линий дионов получаем

$$S_{\text{int}}(R^{(1)}, R^{(2)}) = \frac{\text{const} \cdot T}{|\mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(2)}|}, \quad (126)$$

где  $T = Nb$  — длина дионных линий; подобная же оценка может быть получена и для непараллельных линий.

Как обсуждалось в предыдущем подразделе, решающим моментом для возникновения закона площадей петли Вилсона является экранирование. Чтобы его обнаружить, рассмотрим поле тесно скоррелированной пары  $d\bar{d}$ . Когда расстояние между  $d$  и  $\bar{d}$  обращается в нуль, суммарный вектор-потенциал  $d$  и  $\bar{d}$  получается сложением (91), (92) для  $d$  и соответствующего выражения для  $\bar{d}$ , отличающегося знаком последнего члена в (91) и общим знаком в (92). Таким образом, получаем

$$A_{ia}(d\bar{d}) = \frac{2}{g} e_{aik} n_k \left( \frac{1}{r} - \coth r + \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos t} \right), \quad (127)$$

$$A_{4a}(d\bar{d}) = 0. \quad (128)$$

На больших расстояниях имеем асимптотику

$$A_{ia}(d\bar{d}) = 2e_{aik} \frac{1}{gr} + O(e^{-r}), \quad (129)$$

а вычисление  $B_{ka}$  сводится к подстановке в (98)  $f = 2/gr$ , что немедленно дает

$$B_{ia}(d\bar{d}) = O(e^{-r}), \quad E_{ia} \equiv O(e^{-r}). \quad (130)$$

Таким образом, поля от  $d$  и от  $\bar{d}$  полностью экранируют друг друга на больших расстояниях. Заметим, что это чисто неабелевый эффект, так как сокращение в (98) возникает за счет квадратичного члена.

Возьмем теперь расстояние между  $d$  и  $\bar{d}$  равным  $\rho = \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(2)}$  и расстояние между точкой наблюдения  $\mathbf{x}$  и центром  $d\bar{d}$  равным  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - (\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)})/2$ , причем  $r \gg \rho$ . Тогда поле от системы  $d\bar{d}$  (усредненное по направлению  $\rho$ ) оказывается порядка

$$B_k, E_k = O\left(\frac{\rho^2}{r^4}\right). \quad (131)$$

Следовательно, вклад от далекой коррелированной пары  $d\bar{d}$  несуществен, и тогда при вычислении петли Вилсона достаточно учесть расстояния до плоскости петли, меньшие корреляционной длины  $l$ , которая на самом деле есть длина экранирования.

Для оценки  $l$  используем теперь рассуждения, основанные на размерности. В нашей кулоноподобной системе мы имеем только один параметр длины — среднее расстояние  $l$  между ближайшими соседями:

$$l = cv^{-1/3}, \quad (132)$$

где  $c$  — численная постоянная,  $v$  — 3d плотность дионного газа. Отсюда с учетом (120) натяжение струны в дионном газе можно записать в следующем виде:

$$\sigma = cv^{2/3}. \quad (133)$$

Численные расчеты петли Вилсона для дионов проводились в [73], однако там пока не достигнута плотность дионов, приводящая к режиму экранировки, и расчеты продолжаются в настоящее время.

Подытоживая изложенное в этом разделе, обсудим перспективы, как использовать обсуждавшиеся классические решения в качестве кандидатов на удерживающие конфигурации. Только два из них, дионы и твистованные инстантоны, дают правильный поток, равный  $\pi$ , через петлю Вилсона, способный удержать газ в вакууме, поэтому разберем их по отдельности. Дионы можно представить себе как когерентную цепочку инстантонов с согласованной ориентацией цветового поля и с большим радиусом инстантонов. При переходе от инстантонного газа к таким выстроенным цепочкам действие изменяется мало, а энтропия, очевидно, сильно уменьшается, зато, по-видимому, возникает конфайнмент [73].

Чтобы оценить выгодность или невыгодность дионных конфигураций с точки зрения свободной энергии вакуума, необходимо провести сложные количественные расчеты, которые планируются в ближайшем будущем.

Что касается твистованных инстантонов, то они требуют появления внутренней решеточной структуры в вакууме, но тогда возникает опасность, что лоренц-инвариантность вакуума будет нарушена в корреляторах полей. В конечном счете, как и в случае дионов, вопрос разрешается вычислением свободной энергии вакуума: в природе должна осуществляться та структура вакуума, которая обеспечивает минимальное значение свободной энергии. Расчеты на решетке по методу Монте-Карло удовлетворяют этому принципу минимальной свободной энергии (с точностью до эффектов конечного размера решетки) и предсказывают вакуум с конфайнментом и какими-то специальными непертурба-

тивными конфигурациями, ответственными за конфайнмент.

Возможно, что эти конфигурации суть дионы, возможно, они не классические, однако не исключено, что существуют классические решения, которые пока неизвестны и которые реально обеспечивают конфайнмент.

## 7. Топология и стохастичность

В разделе 6 стохастичность потоков была использована для вывода закона площадей в газе дионов (магнитных монополей). Этот раздел начнем с более строгого определения стохастичности и сравнения с решеточными данными.

В абелевой теории магнитный поток через петлю  $C$  определен однозначно с помощью петли Вилсона

$$W(C) = \exp\left(ie \oint_C A_\mu dx_\mu\right) = \exp\left(ie \int_S \mathbf{H} d\sigma\right), \quad (134)$$

и поток магнитного поля

$$\mu = e \int_S \mathbf{H} d\sigma. \quad (135)$$

Для  $SU(N_c)$ -калибровочной теории поток можно определить аналогичным образом [70] (мы опускаем слово "магнитный", так как это определение зависит от ориентации петли). Итак, рассмотрим собственные значения (с.з.) вилсоновского оператора (обратите внимание на отсутствие знака trace в его определении):

$$U(C) = P \exp\left(ig \oint_C A_\mu dx_\mu\right) \equiv \exp[i\hat{\alpha}(C)]. \quad (136)$$

С.з. унитарного оператора  $U(C)$  равны  $\exp[i\hat{\alpha}(C)]$ , где  $\hat{\alpha}(C)$  — диагональная матрица  $N \times N$ , зависящая от  $A_\mu$ .

В электродинамике величина  $\alpha_n(C_{12})$  аддитивна для сложного контура  $C_{12}$ , состоящего из двух замкнутых контуров  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\alpha_n(C_{12}) = \alpha_n(C_1) + \alpha_n(C_2). \quad (137)$$

В  $SU(N_c)$ -теории это, вообще говоря, не так. Введем сначала в рассмотрение спектральную плотность  $\rho_c(\alpha)$ , т.е. усредненную с весом  $\exp[-S_0(A)]$  вероятность появления "потока"  $\alpha(C)$ :

$$\rho_c(\alpha) = \frac{\int DA_\mu \exp[-S_0(A)] N^{-1} \sum_{m=1}^N \delta_{2\pi}(\alpha - \alpha_m(A_\mu, C))}{\int DA_\mu \exp[-S(A)]}, \quad (138)$$

где  $S_0(A)$  — стандартное действие  $SU(N_c)$ -теории.

С помощью  $\rho_c(\alpha)$  можно вычислять любой вилсоновский оператор для контура  $C$ , а также вилсоновский оператор для контура  $C^n$ , т.е. контура  $C$ , проходимого  $n$  раз,

$$\langle W(C^n) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \exp(in\alpha) \rho_c(\alpha). \quad (139)$$

Предположим теперь, что в системе есть конфайнмент, т.е. закон площадей справедлив для контура  $C$ , и пусть он справедлив также для контуров  $C^n$ :

$$\langle W(C^n) \rangle = \exp(-k_n S). \quad (140)$$

Тогда имеет место следующее равенство [70, 71]:

$$\rho_S^C(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha_n \rho_{S_1}^{C_1}(\alpha_1) \dots \rho_{S_n}^{C_n}(\alpha_n) \times \delta_{2\pi}(\alpha - \alpha_1 - \dots - \alpha_n), \quad (141)$$

где контур  $C$  с площадью  $S$  образован контурами  $C_i$ , разделяющими площадь  $S$  на части  $S_i$ . Доказательство может быть проведено в обоих направлениях [70, 71], т.е. от (139), (140) к (141) либо наоборот. Иногда это утверждение формулируют в виде теоремы [70]: *необходимое и достаточное условие конфайнмента есть аддитивность случайных потоков*. Случайность присутствует в форме (141), имеющей вид свертки, как это и должно быть для произведения вероятностей независимых событий. Аддитивность видна из аргумента  $\delta$ -функции в (141).

Плотность  $\rho_c(\alpha)$  измерялась на решетке [71] и было найдено, что  $\rho_c(\alpha)$  действительно удовлетворяет соотношению (141) и приближенно совпадает с  $\rho_c^d(\alpha)$  — плотностью для хромодинамики в пространстве размерностью  $d = 2$  (если правильно перенормировать заряд). Для  $d = 2$  величина  $\rho_c(\alpha)$  известна аналитически и в точности удовлетворяет (141) [71]. В этом случае конфайнмент существует по тривиальным причинам.

Рассмотрим теперь неабелеву теорему Стокса [11], которая для оператора (136) имеет следующий вид:

$$U(C) = P \exp \left[ ig \int_S d\sigma_{\mu\nu}(u) F_{\mu\nu}(u, x_0) \right], \quad (142)$$

и учтем, что под действием калибровочного преобразования  $V(x)$  выражение (142) преобразуется так:

$$U(C) \rightarrow V^+(x_0) U(C) V(x_0), \\ F_{\mu\nu}(u, x_0) \rightarrow V^+(x_0) F_{\mu\nu} V(x_0). \quad (143)$$

Так как некоторым унитарным преобразованием  $U(C)$  может быть приведено к диагональной форме (136), то мы заключаем из (142), что это унитарное преобразование и есть калибровка  $V(x_0)$ , в которой  $\int d\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(u, x_0)$  диагонально. Следовательно, можно определить поток  $\mu$  подобно (135) как

$$\hat{\mu} = \text{diag} \left\{ ig V^+(x_0) \int_S d\sigma_{\mu\nu}(u) F_{\mu\nu}(u, x_0) V(x_0) \right\}. \quad (144)$$

Заметим, что зависимость от  $x_0$ , присутствующая в  $U(C)$ , сокращается в  $W(C) = \text{tr} [U(C)]$ .

Аддитивность потоков от разных участков поверхности  $S$  явно видна в (144).

Рассмотрим теперь статистическую независимость потоков от этих участков, для чего разделим поверхность  $S$  на участки  $S_1, \dots, S_n$ . С учетом теоремы кластерного разложения [12] из обсуждения в разделе 3 можно заключить, что необходимым и достаточным условием для статистической независимости потоков от  $S_1, \dots, S_n$  является, во-первых, существование конечной корреляционной длины  $T_g$  для всех кумулянтов  $\langle\langle F(1) \dots F(k) \rangle\rangle$ ,  $k = 2, \dots, \infty$ . Если вдобавок каждый из участков поверхности  $S_i$  больше по размерам, чем  $T_g$ , то их вклады становятся независимыми.

Таким образом, рассмотрение в разделе 3 в рамках метода полевых корреляторов полностью согласуется с идеей стохастического конфайнмента [70]. Однако МВК,

кроме того, содержит и количественный аппарат для вычисления всех наблюдаемых в терминах заданных локальных корреляторов, отсутствующий в модели стохастического конфайнмента.

Введение новой физической величины  $T_g$  и кумулянтов как количественной характеристики непертурбативного вакуума есть то развитие идеи стохастического вакуума, которое дает точное количественное выражение понятию стохастичности.

Когда размер участков  $S_i$  становится порядка  $T_g$  или меньше, потоки — уже не случайные независимые величины и закон площадей на таких малых расстояниях исчезает, как это было объяснено в разделе 3.

Измерения на решетке [71] показывают, что  $\rho_c(\alpha)$  имеет острый пик при  $\alpha = 0$  для маленьких контуров. В этом случае нет закона площадей, а, скорее, действует пертурбативный режим. Наоборот, для больших контуров плотность  $\rho_c(\alpha)$  как функция  $\alpha$  довольно изотропна.

Этот факт можно сравнить с нашим результатом для потоков инстантонов и дионов. Из определения потока (136) дион, помещенный на плоскость внутри контура  $C$ , производит поток (ср. уравнение (112))

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Дион, удаленный от этой плоскости, дает фазы  $\alpha_m$  меньше  $\pi$  по модулю. Ясно, что инстантоны с нулевым потоком не могут вызвать изотропное распределение потоков, тогда как дионы, имеющие максимально возможные  $\alpha_m = \pm\pi$ , наиболее эффективны в создании такой изотропии, когда производится усреднение по всем ориентациям дионов и по их положению в слое над и под поверхностью петли  $C$ .

Перейдем теперь к вопросу о потоках в присоединенной петле Вилсона и вообще в петле Вилсона, отвечающей высшим представлениям цветовой группы.

В этом случае можно сохранить определение (136), однако  $A_\mu$  и  $\hat{\alpha}(C)$  нужно выразить через генераторы, отвечающие данному представлению:

$$A_\mu = \sum_a A_{\mu a} T^a, \quad \text{tr} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (146)$$

Таким образом,  $\hat{\alpha}(C)$  для вилсоновской петли в присоединенном представлении есть матрица  $(N_c^2 - 1) \times (N_c^2 - 1)$ . Например, для  $SU(2)$  матрица генератора в присоединенном представлении есть  $(T^a)_{bc} = (i/2) e_{abc}$ . Чтобы понять, что же дает стохастический конфайнмент для присоединенного представления, возьмем в качестве примера поток от одного диона и вычислим  $\hat{\alpha}_{\text{adj}}(C)$ . Повторяя рассуждения, приведенные к (112) для потока через петлю в плоскости (12), можно заключить, что, как и раньше, только цветной индекс  $a = 3$  дает вклад, и мы получаем

$$\hat{\alpha}_{\text{adj}}(C) = \pi \text{diag}(T^3) \lim \left( \frac{RW_r}{W} \right). \quad (147)$$

Так как для диона последний множитель  $\lim(RW_r/W) = -1$  и

$$\text{diag}(T^3) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

то окончательно имеем

$$\hat{\alpha}_{\text{adj}}(C) = \begin{pmatrix} -\pi & & \\ & \pi & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad (148)$$

Таким образом, наше заключение об элементарном потоке, равном  $\pi$ , сохраняет силу и в присоединенном представлении (и во всех высших представлениях). Отсюда следует, что присоединенные заряды будут удерживаться в вакууме из случайных потоков вида (148) таким же образом, как фундаментальные заряды (кварки).

Действительно, для элементарного потока имеем

$$\langle W_{\text{adj}} \rangle = \frac{1}{N_c^2 - 1} \text{tr}_{\text{adj}} \left\{ \exp[i\hat{\alpha}_{\text{adj}}(C)] \right\} = -1, \quad (149)$$

и точно так же для  $\langle \hat{W}_{\text{fund}} \rangle = -1$ .

До сих пор мы обсуждали стохастичность вакуума с точки зрения потоков и заключили, что она проявляет себя как случайное распределение потоков. В разделе 3 стохастичность вакуума была сформулирована также на языке корреляторов полей. С помощью метода АП удалось связать последние с распределением АП монополярных токов (в U(1)-теории точная связь имеется и без АП — см. уравнение (22)).

Возникает вопрос: какова топологическая роль магнитных монополей и дионов в установлении стохастической картины вакуума?

Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с абелевой теории. В отсутствие магнитных монополей действуют тождества Бьянки  $\text{div} \mathbf{H} = 0$ , требующие, чтобы все магнитные силовые линии были замкнуты. Это приводит к упорядоченному распределению магнитных линий, и никакой стохастической картины при этом не возникает. В результате не возникает явление конфайнмента, что видно из (22). В присутствии магнитных монополей магнитные силовые линии могут начинаться и заканчиваться в любой точке, где имеется монополярность, и может установиться стохастическое распределение полей. Как мы уже обсуждали в разделе 3, неабелева динамика может имитировать эффект монополей с помощью тройного коррелятора  $\langle E_i E_j B_k \rangle$  и таким образом обеспечивать стохастическое распределение полей.

Итак, магнитные монополи абелевой теории и дионы в глюодинамике создают беспорядок в нашей системе — непертурбативном вакууме. Такая же ситуация возникает в спиновых и решеточных системах, например в планарной модели Гейзенберга вихри Березинского–Костерлица–Таулеса создают беспорядок и формируют фазовый переход в высокотемпературную фазу [74] (см. подробнее об этом в [1]). Все сказанное выше есть проявление общего принципа [2], который можно сформулировать так: *топологически нетривиальные полевые конфигурации ответственны за возникновение беспорядка в системе и вызывают фазовые переходы типа порядок–беспорядок*.

С точки зрения КХД "упорядоченная фаза" есть пертурбативный вакуум с дальними корреляциями ( $D_1(x) \propto 1/x^4$ ) и распределением потока вблизи нуля в  $\rho_c(\alpha)$ , тогда как "фаза беспорядка" есть реальный вакуум КХД с конечной длиной корреляции  $T_g$  и со случайным

распределением потоков  $\rho_c(\alpha)$ . В непрерывном пределе в КХД нет никакого фазового перехода между такими фазами — они сосуществуют на разных шкалах расстояний (или импульсов). В решеточной версии U(1)-теории [13], действительно, имеются две фазы: фаза слабой связи, соответствующая реальной КЭД, и фаза сильной связи с магнитными монополями (артефактами решетки), которые ответственны за фазовый переход. Роль монополей в непрерывном пределе в КХД могут играть, например, дионы — топологически нетривиальные конфигурации глюодинамики.

В сингулярной калибровке дион имеет мультиинстантонное топологическое квантовое число, пропорциональное длине его мировой линии. Дион насыщает тройной коррелятор  $\langle E_i E_j B_k \rangle$  и может быть источником беспорядка в распределении полей.

Однако окончательного ответа на вопрос о природе удерживающих конфигураций у нас пока нет. Анализ дионного вакуума как модели вакуума КХД еще не завершен, и, возможно, топологически нетривиальными конфигурациями, ответственными за конфайнмент, окажутся и не дионы, а пока неизвестные решения или вообще чисто квантовые флуктуации.

Закончим этот раздел обсуждением возможной связи между конфайнментом и андерсоновской локализацией [75]. В основе сходства между этими двумя явлениями лежит стохастичность полей в вакууме (среде), через которые проходит кварк (электрон). Однако на этом сходство и заканчивается. Именно в случае электрона имеет смысл говорить о его индивидуальной функции Грина, которая всегда (при любой плотности дефектов) спадает экспоненциально. (Существует, однако, специальный коррелятор, например удельная проводимость постоянного тока  $\sigma_{dc}$ , которая обращается в нуль для локализованных состояний (при большой плотности локализованных дефектов [76]) и отлична от нуля в случае делокализации.)

В случае кварка в вакууме с конфайнментом его функция Грина (а точнее, калибровочно-инвариантная функция Грина системы  $q\bar{q}$ , усредненная по вакуумным конфигурациям) отвечает линейно растущему потенциалу, т.е. ведет себя как  $G(r) \propto \exp(-r^{3/2})$ , где  $r$  — расстояние между  $q$  и  $\bar{q}$ . Таким образом, в отличие от функции Грина электрона в среде, убывающей экспоненциально по обе стороны границы подвижности [76], в случае конфайнмента функция Грина убывает быстрее любой экспоненты. Это свойство функций Грина в вакууме с конфайнментом было названо автором *суперлокализацией* [77]. Если бы усредненный потенциал  $\bar{V}$ , действующий на кварк, был конечен, то при некоторой энергии кварк мог бы освободиться и попасть в детектор. Сущность суперлокализации в том и состоит, что усредненный потенциал  $\bar{V}$  неограниченно растет с расстоянием и потому кварки заперты при любой энергии — это есть *абсолютный конфайнмент*.

Интересно проследить, как возникает неограниченный рост  $\bar{V}$ . Для этого, так же как мы делали в начале раздела 3, рассмотрим нерелятивистский кварк, движущийся для простоты в плоскости  $x, t$ , а бесконечно тяжелый антикварк пусть сидит в начале координат. Согласно законам квантовой механики функция Грина кварка пропорциональна фазовому интегралу [78], и если использовать калибровку Фока–Швингера, то можно записать

$$\begin{aligned}
G(X, T) &= \left\langle \exp \left[ ig \int_0^T A_4(x, t) dt \right] \right\rangle \approx \\
&\approx 1 - \frac{g^2}{2} \int_0^T dt \int_0^X dt' \int_0^X du \int_0^X du' \langle E_1(u, t) E_1(u', t') \rangle \approx \\
&\approx 1 - \bar{V}T.
\end{aligned} \tag{150}$$

Стохастичность полей в вакууме подразумевает конечную корреляционную длину  $T_g$  для коррелятора  $\langle E_1(u, t) E_1(u', t') \rangle$ , т.е. согласно (16)

$$\langle E_1(u, t) E_1(u', t') \rangle = D(u - u', t - t') + \dots, \tag{151}$$

и тогда для больших  $T$  и  $X$  получаем

$$\bar{V} \approx \text{const}|X|, \quad |X| \rightarrow \infty. \tag{152}$$

Таким образом, линейный рост  $\bar{V}$  — это следствие случайного характера распределения напряженностей полей  $\mathbf{E}(u, t)$  и того, что потенциал  $\bar{V}$  получается усреднением вектор-потенциалов  $A_\mu$ , связанным с  $F_{\mu\nu}$  дополнительным интегралом. Это дополнительное интегрирование и создает линейный рост  $\bar{V}$ , физически означающий, что в  $\bar{V}$  происходит накопление флуктуации полей  $F_{\mu\nu}$  на всем расстоянии  $X$  от кварка до антикварка. В этом и состоит сущность явления суперлокализации, не имеющего пока аналога в физике конденсированных сред.

## 8. Заключение

Итак, мы рассмотрели конфайнмент с разных сторон и описали механизм этого явления на языке корреляторов полей, на более феноменологическом языке дуальной сверхпроводимости — эффективных классических уравнений типа Гинзбурга–Ландау, на языке стохастического распределения потоков и, наконец, изучили классические конфигурации, которые могли бы быть ответственными за конфайнмент.

На протяжении всего обзора подчеркивалось, что конфайнмент — это образование струны между цветными зарядами, состоящей, в основном, из продольного электрического поля.

Попытаемся теперь свести вместе разные описания конфайнмента, данные в обзоре, и показать на простом примере, как выглядит струна.

Для этого используем наглядную картину нерелятивистского кварка и тяжелого антикварка на расстоянии  $X$  друг от друга, данную в конце раздела 7. С точки зрения корреляторов полей конфайнмент — образование струны — является следствием того факта, что существует длина  $T_g$ , внутри которой поля когерентны, а вне — случайны. Это показано на рис. 10а, где выделена полоса шириной  $T_g$  в плоскости (14) (можно взять и любую другую плоскость, например (12) или (13)). Внутри этой полосы поля направлены в основном одинаково (т.е. так же, как на оси струны  $x_0$ ), а вне — случайным образом. Величина  $T_g$  характеризует толщину струны (если выбрать плоскость (12) или (14)). Таким образом, роль  $T_g$  двойная, она дает нам толщину когерентности, на которой создается струна, и за пределами которой стохастические вакуумные поля существуют и без внесения кварка и антикварка в вакуум.

Теперь посмотрим на ту же картину с точки зрения дуальной сверхпроводимости. В этом случае она будет выглядеть, как показано на рис. 10б. Здесь стрелочкой

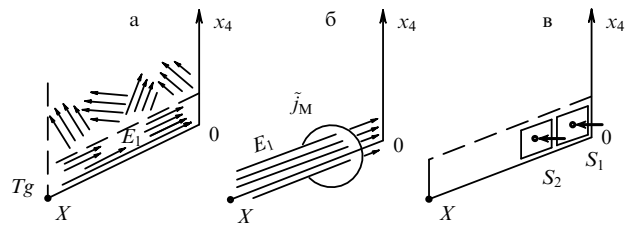


Рис. 10. Картина образования струны между нерелятивистским кварком и тяжелым антикварком, рассматриваемая в рамках трех различных подходов: (а) в формализме корреляторов полей, (б) дуальной сверхпроводимости, (в) модели стохастического распределения потоков.

показан круговой ток монополей  $\tilde{j}_\mu$ , который вызывается цветоэлектрическим полем струны  $E_x$  в силу дуального уравнения Лондонов  $\text{rot} \tilde{j} = m^2 \mathbf{E}$ . Наличие этого тока сжимает струну и не дает разойтись силовым линиям, в результате чего  $E_x$  экспоненциально падает при удалении от оси  $Ox$  как  $\exp(-m\sqrt{y^2 + z^2})$ . Таким образом,  $m$  определяет толщину струны, и мы заключаем, что  $m \sim 1/T_g$ .

Действительно, уравнение (22) явно подтверждает это.

Наконец, обратимся к распределению потоков и к стохастической модели вакуума (рис. 10в). В этом случае полосу, отвечающую струне на рис. 10а, можно разбить на участки площади  $S_1, S_2, \dots$  размером  $d^2$ , внутри которых потоки когерентны и равны, например,  $\pm\pi$  для дионов, а два соседних участка уже некогерентны — потоки в них распределены случайным образом. Толщина струны теперь создается размером  $d$  области  $S_n$ , на которой распределение потока когерентно. Если площадка  $S_n$  пронизывается монополем или дионом, то  $d$  совпадает с размером монополя или диона.

В самом деле, посмотрим, на каких размерах петли  $R$  набирается поток, равный асимптотически  $-\pi$  для диона. Используя (115) и подставляя в него (90), обнаруживаем, что для этого с экспоненциальной точностью достаточно выполнения условия  $R \gg b/2\pi \equiv \gamma^{-1}$ , т.е. размер элементарного потока диона равен  $\gamma^{-1}$  и равен размеру площадки  $d$ .

С точки зрения корреляторов полей  $d$  — не что иное, как  $T_g$ , и потому толщина струны по порядку величины совпадает с размером диона (или монополя, или другого классического решения).

Итак, все наши картины, представленные на рис. 10, могут быть совмещены в один обобщенный механизм образования струны, в основе которого лежит существование когерентных областей распределения поля размером  $T_g$ , за пределами которых поля уже независимы и стохастичны.

Возникает вопрос: кто велит, чтобы вакуум КХД был устроен именно так и почему в случае КХД и глюодинамики вакуум такой, а в случае КЭД и теории Вайнберга–Салама, по-видимому, имеет другое строение, где, вероятно, непертурбативные конфигурации подавлены? Ответив на этот вопрос, мы одновременно смогли бы ответить и на вопрос о механизме фазового перехода деконфайнмента, который наблюдался в расчетах на решетке [79]. Эти вопросы требуют отдельного обзора, так как количество накопленной информации по этим проблемам очень велико. Здесь же ограничимся двумя замечаниями.



Во-первых, плотность (непертурбативной) энергии вакуума можно связать с помощью теоремы о масштабной аномалии с величиной непертурбативного глюонного конденсата [80]

$$\varepsilon_{\text{неперт}} = + \frac{\beta(\alpha_s)}{16\alpha_s} \langle F_{\mu\nu}^a(0) F_{\mu\nu}^a(0) \rangle. \quad (153)$$

Для больших  $\alpha_s$  величина  $\beta(\alpha_s)$  отрицательна в отличие от КЭД и, если она сохраняет свой знак во всей эффективной области значений  $\alpha_s$ , то можно сделать вывод, что непертурбативная сдвигка вакуума (153) выгодна, поскольку она уменьшает энергию вакуума (а также и свободную энергию при малых температурах). Сказанное выше можно рассматривать как наводящее соображение, почему непертурбативный вакуум в КХД выгоден и осуществляется, а в КЭД — невыгоден и не осуществляется.

Во-вторых, коснемся вопроса о фазовом переходе при повышении температуры в КХД, отсылая читателя к расчетам на решетке [79] и оригинальным работам [81] за более подробным изложением. Основным критерием, который определяет структуру вакуума, предпочтительную при данной температуре  $T$ , является критерий минимума свободной энергии (что вытекает из второго начала термодинамики). В фазе конфайнмента при  $T > 0$  свободная энергия состоит из члена (153) и вклада адронных возбуждений (глоболы, мезоны и барионы), который медленно нарастает вплоть до  $T \approx 150$  МэВ. Заметим, что глюонный конденсат содержит как цветоэлектрические, так и цветомагнитные поля, но лишь первые имеют отношение к конфайнменту в собственном смысле этого слова.

Обычно фазой деконфайнмента, которая осуществляется при  $T > T_c$ , считали фазу с пертурбативным вакуумом, где кварки и глюоны в низшем приближении по  $g$  являются свободными [82]. Однако легко понять, что с точки зрения минимума свободной энергии в фазе деконфайнмента выгоднее сохранить цветомагнитные поля и соответствующую часть конденсата (153), так как глюоны и кварки при этом остаются практически свободными, но возникает большой выигрыш по энергии — примерно равный половине величины (153). Так возникает фаза "магнитного конфайнмента" [81]. Вычисления в [81] дают величину  $T_c$  в хорошем согласии с решеточными данными при числе ароматов  $n_f = 0, 2, 4$ .

Главное предсказание "магнитного конфайнмента" — это закон площадей при  $T > T_c$  для пространственных петель Вилсона [83] и явление "адронной экранировки", т.е. существование адронного спектра при  $T > T_c$  для функций Грина, эволюционирующих вдоль пространственных направлений [81], что хорошо совпадает с измерениями на решетке [79].

Таким образом, картина фазового перехода [81] в фазу "магнитного конфайнмента", подтвержденная расчетами, вряд ли вызывает сомнения. В этой картине при  $T > T_c$  исчезают цветоэлектрические корреляторы, точнее, корреляторы типа  $D(x)$ , дающие вклад в натяжение струны.

Что происходит при этом с эффективными или реальными магнитными монополями и дионами? В методе АП при  $T > T_c$  происходит существенное уменьшение плотности монополей [35], что можно трактовать как значительную аннигиляцию или близкое спаривание монополей и антимонполей. То же можно было бы

предположить относительно пар дионов и антидионов. Таким образом, фаза деконфайнмента цветных зарядов может быть ассоциирована с фазой конфайнмента монополей (или дионов). Однако явление "магнитного конфайнмента" накладывает определенные ограничения на структуру вакуума при  $T > T_c$ . Например, для этого требуется, чтобы существовали магнитные монопольные (дионные) токи, направленные вдоль четвертой (временной) оси, т.е. статические или периодические монополи (дионы). Такие токи способны создать конфайнмент в пространственных плоскостях (что наблюдается на решетках [83]), но не участвуют в обычном конфайнменте (на временных плоскостях  $(i4)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ). Более подробно все эти вопросы будут обсуждены в отдельных публикациях.

Мы также не могли коснуться здесь за неимением места важного вопроса о связи конфайнмента и спонтанного нарушения киральной, а также  $U_A(1)$ -инвариантности, в которой магнитные монополи (дионы) могут играть важную роль [84].

Всюду выше считалось само собой разумеющимся, что конфайнмент — свойство не только КХД (где кварки присутствуют в вакууме), но и глюодинамики (без кварков). Это заключение следует из многочисленных решеточных вычислений (например, [10]), а также из совокупности данных, подтверждающих дуальный эффект Мейсснера как механизм конфайнмента (см. выше), где кварки не играют большой роли; наоборот, не существует каких-либо вычислений или экспериментальных данных, указывающих на ключевую роль кварков в механизме конфайнмента. По этой причине мы нигде не касаемся ниже по-своему интересной модели В.Н. Грибова и отсылаем читателя к оригинальным работам [85].

Автор благодарен А.М. Бадалян за внимательное чтение рукописи, многочисленные предложения и советы, А. Ди Джакомо и Х.Г. Дошу — за интересные дискуссии и полезную информацию, М.И. Поликарпову, Э.Т. Ахмедову, Ф.В. Губареву и М.Н. Чернотубу — за полезные обсуждения и горячие споры по поводу затронутых здесь вопросов и К.А. Тер-Мартиросяну — за постоянную поддержку, обсуждения и советы. Автор весьма признателен Н.П. Игумновой за кропотливую работу по подготовке рукописи.

Автор также благодарен за финансовую поддержку РФФИ, в рамках проекта 95-02-05436, и ИНТАС, грант 93-79.

## Список литературы

1. Симонов Ю А *Материалы XXII зимней школы ЛИЯФ* (Л.: ЛИЯФ, 1985) с. 3
2. Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **120** 429 (1977); Polyakov A M *Phys. Lett.* **59** 80 (1975)
3. 't Hooft G, in *High Energy Physics* (Ed. A Zichichi) (Bologna: Editrice Compositori, 1976); Mandelstam S *Phys. Lett. B* **53** 476 (1975)
4. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **190** 455 (1981)
5. Dosch H G *Phys. Lett. B* **190** 177 (1987); Dosch H G, Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **205** 339 (1988); Simonov Yu A *Nucl. Phys. B* **307** 512 (1988); Симонов Ю А *ЯФ* **54** 192 (1991)
6. Wilson K G *Phys. Rev. D* **10** 2445 (1974)
7. Greensite J, Halpern M B *Phys. Rev. D* **27** 2545 (1983)
8. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **72** 461 (1974)
9. Ellis R K *QCD at TAS'94, Fermilab - Conf-94/410-T* (Fermilab, 94); Altarelli G, in *QCD — 20 years later* (Eds H A Kastrup, P Zerwas) (Singapore: World Scientific, 1993)
10. Ford I J et al. *Phys. Lett. B* **208** 286 (1988); Heller U M et al. *Phys. Lett. B* **335** 71 (1994)

11. Арефьева И Я *Теор. мат. физ.* **43** 111 (1980); Симонов Ю А *ЯФ* **50** 213 (1989)
12. Van Kampen N G *Phys. Rep. C* **24** 171 (1976); *Physica* **74** 215 (1974); Симонов Ю А *ЯФ* **48** 1381 (1988); *ЯФ* **50** 213 (1989)
13. Di Giacomo A, Panagopoulos H *Phys. Lett. B* **285** 133 (1992)
14. De Grand T A, Toussaint D *Phys. Rev. D* **22** 2478 (1980); *Phys. Rev. D* **24** 466 (1981); Bhanot G *Phys. Rev. D* **24** 461 (1981)
15. Симонов Ю А *ЯФ* **50** 213 (1989)
16. Dugand L, Mendel E P *Phys. Lett. B* **85** 241 (1979)
17. Симонов Ю А *ЯФ* **50** 500 (1989)
18. Симонов Ю А *ЯФ* **57** 1491 (1994)
19. Del Debbio L, Di Giacomo A, Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **332** 111 (1994)
20. Lee T D *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Harwood, New York, 1981) Chapter 17
21. Alder S, Piran T *Rev. Mod. Phys.* **56** 1 (1984)
22. Nielsen H B, Olesen P *Nucl. Phys. B* **57** 367 (1973); **61** 45 (1973)
23. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2* (М.: Наука, 1973) Гл. 5
24. Sea P, Cosmai L *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **42** 225 (1995)
25. Matsubara Y, Ejiri S, Suzuki T *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **34** 176 (1994)
26. Chernodub M N, Polikarpov M I, Veselov A I, Preprint hep-lat Ref 95 12030
27. Поликарпов М И *УФН* **165** 627 (1995)
28. Tinkham M *Introduction to Superconductivity* (Kreiger, USA, 1980)
29. См. [23], § 26
30. Weinberg S *Progr. of Theor. Phys. Suppl.* **86** 43 (1986)
31. Молодцов С В, Симонов Ю А *ПЖ* **60** 230 (1994)
32. Симонов Ю А *ЯФ* **58** 113 (1995)
33. Baker M, Ball J S, Zachariasen F *Phys. Rev. D* **37** 1036 (1988)
34. Baker M et al. *Phys. Rev. D* **51** 1968 (1995)
35. Kronfeld A S, Schierholz G, Wiese U *Nucl. Phys. B* **293** 461 (1987)
36. Chernodub M N, Polikarpov M I, Veselov A I *Phys. Lett. B* **342** 303 (1995)
37. Suzuki T *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **30** 176 (1993)
38. Suzuki T et al. *Phys. Lett. B* **347** 347 (1995); Stack D et al. *Phys. Rev. D* **50** 3395 (1994); Ejiri S et al. *Nucl. Phys. B* **42** 481 (1995)
39. Suzuki T *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) (1996) (in press)
40. Miyamura O, Origuchi S, Preprint hep-lat Ref 95 08015
41. Ken Yee *Phys. Lett. B* **347** 367 (1995); Sukanuma H et al. Preprint hep-ph Ref 9506366; *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) (1996) (in press)
42. Brown D A, Haymaker R W, Singh V *Phys. Lett. B* **306** 115 (1993)
43. Matsubara Y et al. *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **34** 176 (1994); Shiba H, Suzuki T *Ibid.*, p. 182
44. Haymaker R W *Lectures at the Intern. E. Fermi School, Varenna 1995* (in press)
45. Sea P, Cosmai L *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) (1996) (in press)
46. Schichter C, Bali G S, Schilling K *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **42** 273 (1995)
47. Ivanenko T L, Polikarpov M I, Pochinski A V *Phys. Lett. B* **252** 631 (1990); *Phys. Lett. B* **302** 458 (1993); Di Giacomo A *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) (1996) (in press)
48. Froehlich J, Marchetti P A *Comm. Math. Phys.* **112** 343 (1987)
49. Polley L, Wiese U J *Nucl. Phys. B* **356** 629 (1991); Polikarpov M I, Polley L, Wiese U *Phys. Lett. B* **253** 212 (1991)
50. Del Debbio L, Di Giacomo A, Paffuti G *Phys. Lett. B* **349** 513 (1995); *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **42** 231 (1995)
51. Del Debbio L et al. *Phys. Lett. B* **355** 255 (1995); *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **42** 234 (1995)
52. Chernodub M N, Gubarev F V *Pisma v ZhETF* **62** 91 (1995)
53. Hart A, Teper M, Preprint hep-lat Ref 95 11016
54. Bornyakov V, Schierholz G (in preparation)
55. Callen C G, Dashen R, Gross D J *Phys. Lett. B* **66** 375 (1977); Веселов А И, Поликарпов М И *Письма в ЖЭТФ* **45** 113 (1987)
56. Campostrini M, Di Giacomo A *Phys. Lett. B* **225** 403 (1989)
57. Jackiw R, Nohl C, Rebbi C *Phys. Rev.* **15** 1642 (1977)
58. Atiyah M F et al. *Phys. Lett. A* **65** 185 (1978)
59. Belavin A A et al. *Phys. Lett. B* **59** 85 (1975)
60. Harrington B, Shepard H *Phys. Rev. D* **17** 2122 (1978)
61. Rossi P *Phys. Rep.* **86** 317 (1982)
62. Prasad M K, Sommerfield C M *Phys. Rev. Lett.* **35** 1760 (1975)
63. Polyakov A M *JEP T Lett.* **20** 894 (1974); 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **79** 276 (1974)
64. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **153** 141 (1979); *Comm. Math. Phys.* **81** 267 (1981)
65. Leutwyler H *Nucl. Phys. B* **179** 129 (1981)
66. Garcia-Perez M, Gonzalez-Arroyo A, Martinez P *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **34** 228 (1994)
67. Simonov Yu A *Dyons in QCD: confinement and chiral symmetry breaking. Lectures at the Intern. E. Fermi School, Varenna, 1995* (in press)
68. Симонов Ю А *ЯФ* **50** 500 (1989)
69. Симонов Ю А *ЯФ* **42** 557 (1985); Preprint ИТЕП-156 (М.: ИТЭФ, 1985)
70. Olesen P *Nucl. Phys. B* **200** 381 (1982); Ambjorn J, Olesen P, Peterson V *Nucl. Phys. B* **240** 553 (1984); Ambjorn J, Olesen P *Nucl. Phys. B* **170** 60, 265 (1980)
71. Makeenko Yu M, Polikarpov M I, Veselov A I *Phys. Lett. B* **118** 133 (1982); Belova T I et al. *Nucl. Phys. B* **230** 473 (1984)
72. Симонов Ю А *ЯФ* **46** 317 (1987)
73. Веселов А И и др. *Письма в ЖЭТФ* **62** 679 (1995)
74. Березинский В Л *ЖЭТФ* **59** 907 (1970); **61** 1144 (1971); Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C* **6** 118 (1973)
75. Anderson P W *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958); *Rev. Mod. Phys.* **50** 191 (1978)
76. Lee P A, Ramakrishnan T V *Rev. Mod. Phys.* **57** 287 (1985); Лившиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982)
77. Simonov Yu A, Preprint ИТЕП 68-87 (М.: ИТЭФ, 87)
78. Фейнман Р, Хибс А *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (М.: Мир, 1968)
79. Karsch F, in *QCD: 20 years later* (Eds P M Zerwas, H A Kastrup) (Singapore: World Scientific, 1993)
80. Вайнштейн А И и др. *УФН* **136** 553 (1982)
81. Симонов Ю А *Письма в ЖЭТФ* **55** 605 (1992); *ЯФ* **58** 357 (1995); Dosch H G, Pirner H J, Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **349** 335 (1995); Gubankova E L, Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **360** 93 (1995)
82. Kapusta J *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989)
83. Manoussakis E, Polonyi J *Phys. Rev. Lett.* **58** 847 (1987); Bali G S et al. *Phys. Rev. Lett.* **71** 3059 (1993)
84. Gonzalez-Arroyo A, Simonov Yu A *Nucl. Phys. B* (in press); Preprint hep-th Ref 9506032
85. Gribov V N *Physica Scripta T* **15** 164 (1987); Preprint LUTP 91-7 (Lund Univ., 1991)

## The confinement

**Yu. A. Simonov**

*Institute of Theoretical and Experimental Physics, 117259 Moscow, ul. B. Cherepushkinskaya 25, Russia  
Tel. (7-095) 123-02 92. Fax (7-095) 123-65 84. E-mail: simonov@vitep5.itep.ru*

Various aspects and mechanisms of QCD colour confinement are surveyed. Following the introduction of gauge-invariant order parameters, a field-correlator definition of the phenomenon is given, and a class of correlators responsible for confinement is explicitly separated. It is shown that in terms of effective Lagrangians confinement is a dual Meissner effect, and for its quantitative description the popular Abelian projection method is used, which is explained in detail. To determine the field configurations responsible for confinement, classical solutions are analysed using a newly-developed criterion. Finally, all aspects of confinement are illustrated by a simple example of string formation for a quark moving in the field of heavy antiquark.

PACS numbers: 12.38.Aw

Bibliography — 85 references

Received 18 January 1996