Март 1996 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 166, № 3*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Галилеевы преобразования и распространение автоволновых фронтов во внешних полях

В. А. Давыдов, В. Г. Морозов

Рассмотрены автоволновые режимы в двумерной возбудимой среде в присутствии внешнего электрического поля на основе применения галилеевых преобразований к уравнениям "реакция–диффузия". Показано, что трансформационные свойства этих уравнений позволяют получить некоторые общие соотношения для скорости автоволновых фронтов и скорости дрейфа спиральных волн, не зависящие от конкретного вида нелинейных членов в уравнениях. Установлена универсальная зависимость критических характеристик автоволн от напряженности внешнего поля. Простой кинематический подход, обсуждаемый в данной работе, применим также для исследования эволюции автоволн в трехмерных и многокомпонентных возбудимых средах.

PACS numbers: **05.50.+q**, 05.70.Ln, **82.40.–g**, **87.10.+e**

Содержание

1. **Введение (327).**
2. **Основные уравнения (328).**
   2.1. Возбудимая среда в электрическом поле. 2.2. Искривленный фронт в отсутствие поля.
3. **Галилеевы преобразования координат (329).**
4. **Распространение искривленных фронтов в отсутствие поля (330).**
5. **Прямолинейный фронт в однородном электрическом поле (330).**
6. **Искривленный фронт во внешнем электрическом поле (331).**
7. **Дрейф спиральной автоволны в электрическом поле (332).**
8. **Заключение (333).**

Список литературы (333).

1. Введение

В настоящее время как в России, так и за рубежом ведутся интенсивные исследования явлений самоорганизации в различных неравновесных системах, заключающихся в возникновении и эволюции упорядоченных пространственно-временных структур. Это бурно развивающееся междисциплинарное научное направление получило название "Синергетика" [1–3]. Одним из наиболее интересных примеров подобных систем являются так называемые возбудимые среды, способные формировать импульсы (автоволны) в ответ на внешнее возмущение [4, 5]. Существует много примеров возбудимых сред самой различной природы: физической, химической, биологической. К ним относятся, например, нервные и мышечные ткани [6], колонии микроорганизмов [7], ряд химических растворов и гелей [8, 9], магнитные сверхпроводники с током [10], некоторые твердотельные системы [11].

В.А. Давыдов, В.Г. Морозов. Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), 117454 Москва, просп. Вернадского 78
Тел. (095) 433-96-14, (095) 179-20-28
E-mail: davydov@lpi.ac.ru, vmorozov@glasnet.ru

Статья поступила 20 сентября 1995 г.

Возбудимые среды являются относительно новым и нетрадиционным объектом исследования. Однако их изучение важно для создания новых перспективных устройств обработки информации, для разработки методов повышения эффективности технологических процессов в химической промышленности и даже при поиске способов борьбы с опасными заболеваниями.

Автоволновые структуры в двумерной среде, как правило, имеют вид движущихся фронтов возбуждения. В случае разрыва такого фронта могут появиться особые типы режимов — вращающиеся спиральные волны (см., например, ссылки в [12]).

Общепринятым математическим описанием возбудимых сред является система нелинейных параболических уравнений типа "реакция–диффузия"

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t} = F(\mathbf{U}) + \widehat{\mathrm{D}}\,\Delta\mathbf{U}\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{U}$ — вектор состояния элементарного объема возбудимой среды. Например, в химически возбудимой среде компоненты вектора $\mathbf{U}$ представляют собой концентрации реагентов, матрица $\widehat{\mathrm{D}}$ определяет коэффициенты диффузии, а нелинейная функция $F(\mathbf{U})$ задает скорость химических реакций в элементарном объеме. В средах иной природы компоненты вектора $\mathbf{U}$ могут иметь смысл температуры, потенциала и т.д., а элементы матрицы $\widehat{\mathrm{D}}$ могут быть коэффициентами теплопроводности или электрической проводимости.

Несмотря на то, что реальные возбудимые среды должны описываться, как правило, многокомпонентным вектором состояния, многочисленные исследования показывают, что основные закономерности эволюции автоволновых структур хорошо воспроизводятся в рамках двухкомпонентной системы [13, 14]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, g) + D_u \, \Delta u \,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u, g) + D_g \, \Delta g \,. \tag{2}$$

Переменную u часто называют "активатором", а переменную g — "ингибитором". Для возбудимых сред нуль-изоклина $F(u, g) = 0$ имеет характерную И-образную форму, а нуль-изоклина $G(u, g) = 0$ может быть монотонной или даже линейной.

Общие математические методы решения уравнений (1) и (2) до настоящего времени не разработаны. Поэтому для их исследования приходится использовать численные или приближенные аналитические методы. В числе последних отметим так называемый "кинематический подход" [12, 15, 16], с помощью которого удалось исследовать многие автоволновые режимы в двух- и трехмерных неоднородных, нестационарных и анизотропных возбудимых средах.

Одной из важнейших прикладных задач в физике возбудимых сред является разработка методов эффективного управления характеристиками автоволновых структур — формой и скоростью движения фронтов, частотой вращения спиральных волн, их положением на плоскости и т.д. К таких методам относится инициирование резонансного дрейфа спиральных волн в нестационарных возбудимых средах [17, 18], а также создание в среде необходимых неоднородностей. Другие способы управления автоволнами связаны с приложением к возбудимой среде внешнего поля, например, электрического [19 – 21].

Учет влияния однородного электрического поля на распространение автоволн приводит, вообще говоря, к появлению в правой части системы (1) слагаемых, пропорциональных градиентам компонент вектора состояния $\mathbf{U}$ (см. раздел 2). Интересно, что подобные модифицированные уравнения возникают также и при описании движения искривленных фронтов [13].

Мы покажем, что весьма существенная информация о распространении прямолинейных и искривленных автоволновых фронтов как в присутствие внешнего электрического поля, так и без него может быть получена без детального решения модифицированных уравнений (1) путем простого применения к ним галилеевых преобразований и использования некоторых качественных особенностей движения автоволн, обнаруженных в результате приближенного аналитического исследования или численных расчетов. Простота и доступность этого подхода побудила нас изложить его в виде методических заметок. Отметим, что ряд результатов получен в настоящей работе впервые.

2. Основные уравнения

2.1. Возбудимая среда в электрическом поле

Рассмотрим двухкомпонентную двумерную среду, которая описывается уравнениями (2), модифицированными для учета влияния электрического поля. Не сложно провести обобщение результатов на случай трех и более компонент.

Модифицированную систему (2) легче всего получить следующим образом. В общем случае автоволновые структуры в двумерной среде должны описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, g) - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J}_u \,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u, g) - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J}_g \,, \tag{3}$$

где $\mathbf{J}_u$ и $\mathbf{J}_g$ — потоки активатора и ингибитора, соответственно. В отсутствие внешних полей эти потоки имеют диффузионный характер, и мы приходим к "классической" системе (2). Учет влияния внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ приводит к дополнительным слагаемым в выражениях для потоков:

$$\mathbf{J}_u = -D_u \vec{\nabla} u + \mu_u \mathbf{E} \, u,$$
$$\mathbf{J}_g = -D_g \vec{\nabla} g + \mu_g \mathbf{E} \, g \,, \tag{4}$$

где μ_u и μ_g — подвижности активатора и ингибитора. Будем считать, что возбудимая среда однородна и, следовательно, коэффициенты диффузии и подвижности являются постоянными величинами. Подставляя (4) в (3), получим систему уравнений, описывающую двухкомпонентную возбудимую среду во внешнем однородном электрическом поле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, g) + D_u \Delta u - \mu_u \mathbf{E} \cdot \vec{\nabla} u \,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u, g) + D_g \Delta g - \mu_g \mathbf{E} \cdot \vec{\nabla} g \,. \tag{5}$$

В одномерном случае, когда автоволна с прямолинейным фронтом распространяется вдоль оси x, система уравнений (5) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, g) + D_u \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_u E \cos\alpha \, \frac{\partial u}{\partial x} \,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u, g) + D_g \, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \mu_g E \cos\alpha \, \frac{\partial g}{\partial x} \,, \tag{6}$$

где α — угол между направлением электрического поля и осью x.

2.2. Искривленный фронт в отсутствие поля

Рассмотрим теперь распространение кругового фронта с центром в начале координат. Переходя к полярной системе координат (r, φ), полюс которой находится в центре кругового фронта, и учитывая, что вследствие полярной симметрии зависимость от угла φ исчезает, систему уравнений (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, g) + D_u \, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{D_u}{r} \, \frac{\partial u}{\partial r} \,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u, g) + D_g \, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{D_g}{r} \, \frac{\partial g}{\partial r} \,. \tag{7}$$

Практически во всех случаях, когда возможно распространение устойчивого криволинейного фронта автоволны, радиус кривизны фронта R значительно превышает его толщину (т.е. ширину области, где, собственно, и локализовано возбуждение). Это означает, что $1/r$ в (7) можно заменить на $1/R = K$, где K — кривизна линии фронта. В итоге получаем систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,g) + D_u\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + D_u K\,\frac{\partial u}{\partial r}\,,$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u,g) + D_g\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + D_g K\,\frac{\partial g}{\partial r}\,, \tag{8}$$

которая совпадает с (6), если произвести замены $r \to x$, $D_u K \to -\mu_u E \cos\alpha$ и $D_g K \to -\mu_g E \cos\alpha$.

Таким образом, распространение прямолинейных фронтов в электрическом поле и слабоискривленных в его отсутствие описывается одной и той же системой уравнений. Отметим, что такая же система получается при исследовании распространения автоволн в слабонеоднородной возбудимой среде.

Все приведенные выше примеры являются частными случаями следующей системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,g) + D_u \Delta u - \mathbf{A}\cdot\vec{\nabla} u\,,$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u,g) + D_g \Delta g - \mathbf{B}\cdot\vec{\nabla} g\,, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — постоянные векторы. Ниже мы рассмотрим некоторые общие свойства решений системы (9), а затем применим полученные результаты к задачам о движении искривленных фронтов и распространении автоволн в электрическом поле.

3. Галилеевы преобразования координат

Перейдем в (9) к декартовой системе координат (x', y'), движущейся со скоростью $\mathbf{w}$ относительно исходной системы (x, y). Соответствующее преобразование для координат точек пространства является преобразованием Галилея: $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{w}t$. Легко проверить, что в новой системе координат (9) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,g) + D_u \Delta' u + (\mathbf{w} - \mathbf{A})\cdot\vec{\nabla}' u\,,$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(u,g) + D_g \Delta' g + (\mathbf{w} - \mathbf{B})\cdot\vec{\nabla}' g\,, \tag{10}$$

где Δ' и $\vec{\nabla}'$ — оператор Лапласа и градиент в переменных (x', y'). Предположим, что система уравнений (9) имеет решение, описывающее стационарную автоволну, прямолинейный фронт которой движется со скоростью $\mathbf{V}$. Поскольку эта скорость параметрически зависит от векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, мы обозначим ее как $\mathbf{V}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Очевидно, что соответствующее решение системы уравнений (10) описывает плоскую автоволну со скоростью распространения $\mathbf{V}(\mathbf{A} - \mathbf{w}, \mathbf{B} - \mathbf{w})$. Заметим, что в обоих случаях речь идет об одной и той же автоволне, но рассматриваемой в двух системах координат, связанных между собой преобразованиями Галилея. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\mathbf{V}(\mathbf{A} - \mathbf{w}, \mathbf{B} - \mathbf{w}) = \mathbf{V}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) - \mathbf{w}\,, \tag{11}$$

которое позволяет сделать некоторые простые, но важные выводы относительно зависимости скорости $\mathbf{V}$ от векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Для этого удобно рассмотреть преобразование Галилея с бесконечно малой скоростью $\mathbf{w}$. Вычисляя вариацию обеих частей (11) по проекциям вектора $\mathbf{w}$ и полагая затем $\mathbf{w} = 0$, получаем следующие дифференциальные соотношения для проекций скорости фронта как функций $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\frac{\partial V_x}{\partial A_x} + \frac{\partial V_x}{\partial B_x} = 1\,, \qquad \frac{\partial V_x}{\partial A_y} + \frac{\partial V_x}{\partial B_y} = 0\,,$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial A_y} + \frac{\partial V_y}{\partial B_y} = 1\,, \qquad \frac{\partial V_y}{\partial A_x} + \frac{\partial V_y}{\partial B_x} = 0\,. \tag{12}$$

В общем случае функции V_x и V_y, удовлетворяющие соотношениям (12), имеют вид

$$V_x = V_{0x} + \frac{1}{2}(A_x + B_x) + f_x(A_x - B_x,\ A_y - B_y)\,,$$

$$V_y = V_{0y} + \frac{1}{2}(A_y + B_y) + f_y(A_x - B_x,\ A_y - B_y)\,, \tag{13}$$

где V_{0x} и V_{0y} — проекции вектора скорости распространения автоволнового фронта $\mathbf{V}_0$ при $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$. Что касается функций $f_x(\eta_1, \eta_2)$ и $f_y(\eta_1, \eta_2)$, то пока можно лишь утверждать, что они являются проекциями вектора (т.е. преобразуются соответствующим образом при поворотах системы координат) и, кроме того, они равны нулю при $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Соотношения (13) выполняются в любой декартовой системе координат. Удобно, однако, выбрать ее таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль вектора скорости фронта $\mathbf{V}$. В этом случае $V_x = V$ и $V_y = 0$, так что фактически нас интересует только функция $f(\eta_1, \eta_2) \equiv f_x(\eta_1, \eta_2)$. Нетрудно убедиться в том, что эта функция не зависит от второго аргумента. В самом деле, для отыскания скорости и формы стационарной автоволны, движущейся вдоль оси x, в системе уравнений (9) следует произвести замену переменных $x = Vt + \xi$, а затем положить $\partial u/\partial t = \partial g/\partial t = 0$ и $\partial u/\partial y = \partial g/\partial y = 0$. Это дает

$$D_u\,\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + F(u,g) + (V - A_x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = 0\,,$$

$$D_g\,\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\xi^2} + G(u,g) + (V - B_x)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi} = 0\,. \tag{14}$$

Ясно, что значение скорости автоволны V, полученное в результате решения этой системы уравнений с соответствующими граничными условиями, будет параметрически зависеть от A_x и B_x, но не будет зависеть от A_y и B_y. Таким образом, общее выражение для скорости стационарного движения фронта автоволны можно записать в виде

$$V = V_0 + \frac{1}{2}\,(A_x + B_x) + f(A_x - B_x)\,, \tag{15}$$

где $f(\eta)$ — некоторая функция. Напомним, что это соотношение выполняется в системе координат, ось x которой (или, что то же самое, ось ξ) направлена вдоль вектора $\mathbf{V}$. Следует также отметить, что V_0 и f могут зависеть от коэффициентов диффузии D_u и D_g и от тех параметров, которые определяют вид функций F и G в (14).

4. Распространение искривленных фронтов в отсутствие поля

Применим полученные выше соотношения к исследованию распространения искривленных фронтов при $\mathbf{E} = 0$. В этом случае исходная система уравнений (8) с помощью замены переменных $r = Vt + \xi$ приводится к виду (14), где

$$A_x = -D_u K, \qquad B_x = -D_g K. \tag{16}$$

Таким образом, общая формула (15) для скорости распространения фронта дает

$$V = V_0 - \frac{1}{2}(D_u + D_g)K + f\big((D_g - D_u)K\big). \tag{17}$$

Напомним, что явный вид функции $f(\eta)$ можно найти только путем решения исходных уравнений "реакция–диффузия".

В случае равных коэффициентов диффузии $D_u = D_g = D$ сразу приходим к хорошо известному результату [12]

$$V = V_0 - DK. \tag{18}$$

Дополнительную информацию о функции $f(\eta)$ можно получить, воспользовавшись результатами [22] (см. также [13]). В [22] исследовалась зависимость скорости фронта от кривизны в случае, когда отсутствует диффузия ингибитора, т.е. $D_g = 0$, и было показано, что для малых значений кривизны зависимость $V(K)$ линейна

$$V = V_0 - D_u K. \tag{19}$$

При возрастании кривизны линейная зависимость (19) сменяется нелинейной. Было обнаружено наличие критической кривизны K_{cr}, при превышении которой устойчивое распространение искривленного фронта оказывается невозможным. Отметим, что при достижении критической кривизны, скорость фронта V_{cr}, вообще говоря, не равна нулю.

В случае $D_g = 0$ общее выражение (17) для скорости фронта дает

$$V = V_0 - \frac{1}{2}\, D_u K + f(-D_u K). \tag{20}$$

Сравнение (19) и (20) показывает, что при малых η функция $f(\eta)$ имеет вид

$$f(\eta) = \frac{1}{2}\,\eta + f_1(\eta), \tag{21}$$

где $f_1(\eta)$ — функция, разложение которой в ряд Тейлора по степеням η не содержит линейных членов. Таким образом, из (20) следует, что

$$V = V_0 - D_u K + f_1(-D_u K). \tag{22}$$

Если в (17) пренебречь возможной зависимостью f от D_g как от независимого параметра, то нетрудно обобщить (22) на случай, когда $D_g \neq 0$. Действительно, в этом приближении остается справедливым разложение (21), из которого с учетом (17) находим, что

$$V = V_0 - D_u K + f_1\big((D_g - D_u)K\big). \tag{23}$$

Так как в разложении f_1 по K отсутствуют линейные члены, видно, что в случае малой кривизны фронта автоволны значение коэффициента диффузии ингибитора не влияет на линейную зависимость $V(K)$! Разумеется, при изменении D_g скорость плоского фронта V_0 тоже будет меняться, но зависимость скорости от кривизны (т.е. угол между касательной к графику $V(K)$ и осью K) при малых K определяется только значением D_u. Этот общий результат, полученный без решения уравнений "реакция–диффузия", представляется очень важным для изучения кинематики автоволновых фронтов. Однако, поскольку (23) было выведено при дополнительном предположении, оно нуждается в детальной экспериментальной и численной проверке [1]. Можно привести довод в пользу того, что зависимость f от D_g и в самом деле должна быть весьма слабой. Известно, что в области переднего фронта автоволны производная $\mathrm{d}^2 g/\mathrm{d}\xi^2$ значительно меньше производной $\mathrm{d}^2 u/\mathrm{d}\xi^2$ (ингибитор даже называют "медленной переменной"). Это означает, что диффузия ингибитора не оказывает существенного влияния на формирование автоволнового фронта, и, следовательно, функция f в (17) должна слабо зависеть от D_g как от параметра. Подчеркнем, что при этом зависимость f от D_g через аргумент $(D_g - D_u)K$ остается, поскольку ее причиной являются не диффузионные, а "дрейфовые" члены в (9).

5. Прямолинейный фронт в однородном электрическом поле

Анализ эволюции искривленных фронтов, проведенный в предыдущем разделе, может быть легко перенесен на случай движения прямолинейных фронтов во внешнем однородном электрическом поле $\mathbf{E}$. Рассмотрим прямолинейный автоволновой фронт, распространяющийся вдоль оси x. В данном случае стационарное движение фронта описывается уравнениями (14), в которых $\xi = x - Vt$ и

$$\begin{aligned} A_x &= \mu_u E_x = \mu_u E \cos\alpha, \\ B_x &= \mu_g E_x = \mu_g E \cos\alpha. \end{aligned} \tag{24}$$

Дальнейшее рассмотрение с точностью до обозначений аналогично проведенному в предыдущем разделе, поэтому сразу же выпишем некоторые соотношения для скорости фронта как функции внешнего поля, которые следуют из общей формулы (15). Если подвижности активатора и ингибитора одинаковы ($\mu_u = \mu_g = \mu$), то зависимость скорости фронта от электрического поля линейна в широком диапазоне значений E

$$V = V_0 + \mu E_x. \tag{25}$$

Будет ли при этом автоволна двигаться быстрее или медленнее, зависит от знака проекции E_x и знака подвижности μ. Так, влияние электрического поля на движе-

[1] Первое незавсимое подтверждение справедливости (23) мы получили от В.С. Зыкова. При обсуждении некоторых результатов настоящей работы он информировал нас, что в своих численных экспериментах на модели "реакция–диффузия" в весьма широком диапазоне значений D_g он действительно не обнаружил влияния диффузии ингибитора на зависимость $V(K)$ в случаях малой кривизны [23].

ние автоволнового фронта в реакции Белоусова–Жаботинского заключается в замедлении волны, распространяющейся вдоль поля [20].

Для моделей с $D_g = 0$ следует также считать, что $\mu_g = 0$, так как согласно соотношению Эйнштейна коэффициент диффузии пропорционален подвижности. В этом случае зависимость скорости фронта от электрического поля имеет вид

$$V = V_0 + \mu_u E_x + f_1(\mu_u E_x)\,, \tag{26}$$

причем разложение функции $f_1(\eta)$ в ряд Тейлора не содержит линейных по E_x членов (см. (21)). Повторяя рассуждения из раздела 4, выражение (26) можно обобщить на случай $\mu_g \neq 0$. По аналогии с (23) имеем

$$V = V_0 + \mu_u E_x + f_1\big((\mu_u - \mu_g)E_x\big)\,. \tag{27}$$

Таким образом, в слабом электрическом поле скорость прямолинейного фронта зависит только от подвижности активатора. Зависимость от подвижности ингибитора проявляется лишь в достаточно сильных полях в виде нелинейных членов в разложении функции f_1 по степеням внешнего поля. Этот важный и далеко не очевидный вывод был проверен в численных экспериментах [24] на модели "Орегонатор". Результаты этих экспериментов полностью подтвердили данное предсказание теории.

Отметим, наконец, что из аналогии между уравнениями, описывающими движение прямолинейного фронта во внешнем поле и распространение искривленного фронта в отсутствие поля, следует существование критической напряженности электрического поля E_{cr}. Если напряженность превышает E_{cr}, то устойчивое распространение автоволны окажется невозможным. Покажем, что величину E_{cr} можно выразить через критическое значение кривизны фронта K_{cr} в отсутствие внешнего поля.

Обозначим через V_{cr} скорость искривленного фронта автоволны при $K = K_{\text{cr}}$ в отсутствие поля. Обозначим также через $\widetilde{V}_{\text{cr}}$ скорость прямолинейного фронта автоволны при $E_x = E_{\text{cr}}$ (заметим, что E_{cr} может быть положительной или отрицательной величиной в зависимости от знаков подвижностей μ_u и μ_g). Поскольку стационарный режим распространения автоволны в обоих случаях описывается системой уравнений (14), где величины A_x и B_x имеют вид (16) или (24), то при критических значениях скоростей должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} V_{\text{cr}} + D_u K_{\text{cr}} &= \widetilde{V}_{\text{cr}} - \mu_u E_{\text{cr}}\,,\\ V_{\text{cr}} + D_g K_{\text{cr}} &= \widetilde{V}_{\text{cr}} - \mu_g E_{\text{cr}}\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Из (28) получаем связь между критическим значением поля для прямолинейного фронта и критической кривизной для искривленного фронта

$$E_{\text{cr}} = -K_{\text{cr}}\,\frac{D_u - D_g}{\mu_u - \mu_g}\,. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует также соотношение между критическими значениями скорости фронта в рассматриваемых случаях

$$\widetilde{V}_{\text{cr}} = V_{\text{cr}} + K_{\text{cr}}\,\frac{\mu_u D_g - \mu_g D_u}{\mu_u - \mu_g}\,. \tag{30}$$

При $\mu_u = \mu_g$ величины E_{cr} и $\widetilde{V}_{\text{cr}}$ обращаются в бесконечность. Впрочем, этот результат был очевиден заранее, поскольку в случае равных подвижностей активатора и ингибитора внешнее поле из исходных уравнений "реакция–диффузия" можно исключить с помощью преобразований Галилея, так что скорость прямолинейного фронта определяется (25) при любых значениях напряженности поля.

Подчеркнем, что K_{cr} и V_{cr} не зависят от μ_u и μ_g. Поэтому (29) и (30) определяют *универсальную зависимость* критического поля и критической скорости движения прямолинейного фронта в электрическом поле от подвижностей активатора и ингибитора для всех возбудимых сред, описываемых системой уравнений (9). Следует отметить, однако, что область применимости этих формул ограничена следующим условием: критический радиус кривизны должен заметно превышать толщину автоволнового фронта. В противном случае невозможно перейти от (7) к (8).

6. Искривленный фронт во внешнем электрическом поле

Для исследования кинематики спиральных волн и других автоволновых структур во внешнем поле важно знать, как зависит скорость распространения фронта от локальных значений кривизны и поля. Для решения этого вопроса в случае, когда радиус кривизны значительно больше толщины фронта и напряженность поля не слишком быстро изменяется в пространстве, можно воспользоваться стационарными уравнениями (14), где величины A_x и B_x следует взять в виде

$$A_x = \mu_u E_{\text{n}} - D_u K\,, \qquad B_x = \mu_g E_{\text{n}} - D_g K\,. \tag{31}$$

При этом проекция электрического поля на нормаль к линии фронта E_{n} и кривизна фронта K могут рассматриваться как заданные постоянные величины.

Ввиду очевидной аналогии задачи с теми, которые обсуждались в предыдущих разделах, сразу же запишем некоторые интересные соотношения, которые следуют из общей формулы (15) для скорости стационарного движения фронта автоволны.

Прежде всего для моделей с $D_g = 0$ и $\mu_g = 0$ имеем

$$V = V_0 + \mu_u E_{\text{n}} - D_u K + f_1(\mu_u E_{\text{n}} - D_u K)\,, \tag{32}$$

где $f_1(\eta)$ — та же самая нелинейная функция, что и в (22).

В случае, когда $D_g \neq 0$ и $\mu_g \neq 0$, скорость стационарного движения фронта имеет вид

$$V = V_0 + \mu_u E_{\text{n}} - D_u K + f_1\big((\mu_u - \mu_g)E_{\text{n}} - (D_u - D_g)K\big)\,. \tag{33}$$

Заметим, что из (32) и (33) могут быть получены, как частные случаи, приведенные в разделах 4 и 5 выражения для скорости прямолинейного фронта во внешнем поле и скорости искривленного фронта в отсутствие поля.

Поскольку в рассматриваемой ситуации на скорость движения автоволнового фронта влияют одновременно его кривизна и внешнее поле, ясно, что критическая кривизна для выделенного участка автоволны будет зависеть от локального значения нормальной проекции поля E_{n}. Эту зависимость можно найти, действуя так же, как в предыдущем разделе при выводе (29) и (30). Обозначим через $K_{\rm cr}(E_{\rm n})$ и $V_{\rm cr}(E_{\rm n})$ критические значения кривизны фронта и его скорости в присутствие поля. Соответствующие величины в нулевом поле будем обозначать, как и раньше, через $K_{\rm cr}$ и $V_{\rm cr}$. Из (16) и (31) для параметров A_x и B_x в двух указанных случаях следует, что в критическом режиме движения фронта должны выполняться соотношения

$$V_{\rm cr}(E_{\rm n}) + D_u K_{\rm cr}(E_{\rm n}) - \mu_u E_{\rm n} = V_{\rm cr} + D_u K_{\rm cr}\,,$$
$$V_{\rm cr}(E_{\rm n}) + D_g K_{\rm cr}(E_{\rm n}) - \mu_g E_{\rm n} = V_{\rm cr} + D_g K_{\rm cr}\,. \qquad (34)$$

Отсюда сразу получаем

$$K_{\rm cr}(E_{\rm n}) = K_{\rm cr} + E_{\rm n}\,\frac{\mu_u - \mu_g}{D_u - D_g}\,. \qquad (35)$$

Таким образом, критическое значение кривизны автоволнового фронта линейно зависит от нормальной компоненты внешнего поля. В случае равных подвижностей активатора и ингибитора из (35) следует, что критическая кривизна не зависит от поля. Этот результат, однако, легко было предвидеть заранее на основании трансформационных свойств уравнений "реакция–диффузия" при галилеевых преобразованиях. Отметим также, что из (35) можно вывести выражение (29) для критического поля в случае прямолинейного фронта. Действительно, полагая в (35) $E_{\rm n} = E_{\rm cr}$ и $K_{\rm cr}(E_{\rm n}) = 0$, сразу приходим к (29).

Второе важное соотношение, которое следует из (34), связывает значения критических скоростей фронта в нулевом и конечном внешних полях. С учетом (35) это соотношение можно записать в виде

$$V_{\rm cr}(E_{\rm n}) = V_{\rm cr} - E_{\rm n}\,\frac{\mu_u D_g - \mu_g D_u}{D_u - D_g}\,. \qquad (36)$$

Обратим внимание на одно интересное и неочевидное следствие из (35) и (36). Из (36) видно, что в системах с $D_g = 0$ и $\mu_g = 0$ критическая скорость фронта не зависит от внешнего поля. В то же время, согласно (35), $K_{\rm cr}(E_{\rm n}) \neq K_{\rm cr}$, если $E_{\rm n} \neq 0$.

7. Дрейф спиральной автоволны в электрическом поле

Одной из наиболее интересных разновидностей автоволновых структур в возбудимых средах являются спиральные волны, вращающиеся вокруг неподвижного центра с постоянной угловой скоростью. Исходя из простых физических соображений, естественно ожидать, что слабое электрическое поле, практически не изменяя структуру фронта, должно приводить лишь к дрейфу центра спиральной волны. Сильное же поле способно настолько повлиять на динамику активатора и ингибитора, что сам процесс распространения автоволны может стать невозможным. Из полученного нами соотношения (35) следует, что критическая кривизна фронта может существенно изменяться во внешнем поле.

Детальное исследование движения спиральных автоволн во внешнем поле возможно лишь с помощью численного решения исходных уравнений "реакция–диффузия" или применения какого-либо приближенного метода. Относительно простым и универсальным является "кинематический подход", в котором описывается только изменение со временем положения фронта волны [12]. В рамках этого подхода (32) и (33) можно использовать для описания зависимости локальной скорости волнового фронта от кривизны поля в линейном или нелинейном приближениях (в нелинейном случае требуется дополнительная информация относительно функции f_1).

Обсудим лишь некоторые общие закономерности дрейфа спиральных волн, которые могут быть установлены на основе галилеевых преобразований в уравнениях "реакция–диффузия" без детального исследования решений этих уравнений. Более подробно применение галилеевых преобразований к явлению дрейфа спиральных автоволн описано в [25].

Предположим, что система уравнений (9) в отсутствие внешнего поля, т.е. при $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$, имеет решение $u_0(\mathbf{r}, t)$, $g_0(\mathbf{r}, t)$, которое описывает стационарную циркуляцию спиральной волны с угловой скоростью ω вокруг неподвижного центра. Для ненулевого поля имеем

$$\mathbf{A} = \mu_u \mathbf{E}\,, \qquad \mathbf{B} = \mu_g \mathbf{E}\,, \qquad (37)$$

причем решение уравнений (9) $u(\mathbf{r} - \mathbf{V}t, t)$, $g(\mathbf{r} - \mathbf{V}t, t)$ описывает спиральную волну, центр которой движется с постоянной дрейфовой скоростью $\mathbf{V}$, параметрически зависящей от векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Эту скорость легко найти, если подвижности активатора и ингибитора равны ($\mu_u = \mu_g = \mu$). Действительно, в этом случае в системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{w} = \mu\mathbf{E}$, решение уравнений (9) имеет вид $u_0(\mathbf{r} - \mu\mathbf{E}t, t)$, $g_0(\mathbf{r} - \mu\mathbf{E}t, t)$. Оно описывает спиральную волну, вращающуюся с той же самой угловой скоростью ω вокруг центра, который дрейфует со скоростью

$$\mathbf{V} = \mu\mathbf{E}\,. \qquad (38)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_u \neq \mu_g$. Для определенности будем считать, что внешнее однородное электрическое поле направлено вдоль оси x системы координат. Тогда, повторяя рассуждения из раздела 3, приходим к соотношениям

$$V_x = \frac{1}{2}(\mu_u + \mu_g)E + F_x\big((\mu_u - \mu_g)E\big)\,,$$
$$V_y = F_y\big((\mu_u - \mu_g)E\big)\,, \qquad (39)$$

которые получаются из (13) при $\mathbf{V}_0 = 0$. Функции $F_x(\eta)$ и $F_y(\eta)$ обращаются в нуль при $\eta = 0$. Кроме того, можно утверждать, что они являются *нечетными функциями*, поскольку скорость дрейфа должна менять знак при изменении знака электрического поля. Явный вид этих функций для конкретных моделей может быть найден в результате численного решения уравнений "реакция–диффузия". В [25] проведены детальные численные расчеты скоростей дрейфа V_x и V_y, а также функций F_x и F_y, полностью подтверждающие предсказания теории.

Второе соотношение в (39) описывает "поперечный дрейф" спиральной волны в электрическом поле. Отметим, что этот эффект неоднократно наблюдался в численных и натурных экспериментах (см., например, [26]).

Предположим теперь, что электрическое поле достаточно мало, и в разложениях

$$F_x(\eta) = a_1\eta + O(\eta^3)\,, \qquad F_y(\eta) = a_2\eta + O(\eta^3) \tag{40}$$

достаточно оставить только линейные члены, где a_1 и a_2 — некоторые константы, зависящие от модели. Тогда, обозначив через χ угол между электрическим полем $\mathbf{E}$ и скоростью дрейфа автоволны $\mathbf{V}$, из (39) получим

$$\tan\chi = a_2\,\frac{\mu_u - \mu_g}{(1/2 + a_1)\mu_u + (1/2 - a_1)\mu_g}\,. \tag{41}$$

Подчеркнем, что эта формула описывает универсальную зависимость угла дрейфа спиральной волны в слабом электрическом поле от подвижностей активатора и ингибитора. Значения постоянных a_1 и a_2 зависят, как уже отмечалось, от модели возбудимой среды.

8. Заключение

Мы привели некоторые результаты, следующие из применения преобразований Галилея к нелинейным уравнениям "реакция–диффузия", которые описывают распространение автоволновых фронтов во внешнем электрическом поле. Такой подход позволяет исключительно просто, без решения конкретных уравнений, установить ряд закономерностей поведения прямолинейных и слабоискривленных фронтов во внешнем поле. Многие из этих закономерностей являются настолько общими, что не зависят от вида нелинейных функций в "микроскопических" реакционно-диффузионных уравнениях. В то же время они допускают непосредственную экспериментальную и численную проверку. В первую очередь мы имеем в виду соотношения (29) и (30) для критических значений электрического поля и скорости прямолинейного фронта, формулы (35) и (36) для критической кривизны и скорости во внешнем поле, а также соотношение (15) для скорости автоволны.

Следует отметить, что область применимости данного подхода выходит далеко за рамки явлений, рассмотренных в статье. Прежде всего галилеевы преобразования могут оказаться весьма эффективными для исследования автоволновых процессов, которые описываются многокомпонентными моделями (с числом уравнений три и более). При этом очевидно, что если "дрейфовые" члены присутствуют только в двух уравнениях системы (подобные уравнения используются, например, для описания автоволновых структур в реакции Белоусова–Жаботинского в присутствие электрического поля), то результаты, приведенные выше, автоматически переносятся на этот случай. Если, однако, "дрейфовые" члены имеются в трех и более уравнениях, то следует ожидать появления новых закономерностей, которые отсутствуют в двухкомпонентной системе. Мы предполагаем в дальнейшем подробно исследовать и этот случай.

Полученные результаты представляются также весьма важными для построения кинематики автоволновых структур во внешнем поле, изучения их эволюции, взаимодействия и способов управления ими. В частности, некоторые приведенные соотношения необходимы для замыкания кинематических уравнений, применяемых в теории автоволн [12].

Благодарности. Исследования, описанные в настоящей статье, оказались возможными, в частности, благодаря Гранту № N7M000 Международного научного фонда и Гранту № N7M300 Международного научного фонда и Российского Правительства.

Авторы искренне благодарны В.С. Зыкову, а также В. Перес-Манузури, А.П. Манузури и М. Гомес-Гестейра за полезные обсуждения и интерес к данной работе.

Список литературы

1. Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1980)
2. Winfree A T *When Time Breaks Down* (Princton Univ. Press, 1987)
3. Mikhailov A S *Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems* (Berlin: Springer, 1990)
4. Васильев В А, Романовский Ю М, Яхно В Г *Автоволновые процессы* (М.: Наука, 1987)
5. Кринский В И, Михайлов А С *Автоволны* (М.: Знание, 1984)
6. Иваницкий Г Р, Кринский В И, Сельков Е Е *Математическая биофизика клетки* (М.: Наука, 1978)
7. Gerisch G *Wilhelm Roux Archiv Entwickelungsmech Organizmen* **156** 127 (1965)
8. Белоусов Б П *Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.* (М.: Медгиз, 1959) с. 145; *Автоволновые процессы в системах с диффузией* (Горький: ИПФ АН СССР, 1981) с. 176
9. Жаботинский А М *Концентрационные автоколебания* (М.: Наука, 1974)
10. Буздин А И, Михайлов А С *ЖЭТФ* **90** 294 (1986)
11. Скотт Э *Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике* (М.: Сов. радио, 1977)
12. Давыдов В А, Зыков В С, Михайлов А С *УФН* **161** 45 (1991)
13. Зыков В С *Моделирование волновых процессов в возбудимых средах* (М.: Наука, 1984)
14. Winfree A T *The Geometry of Biological Time. Biomathematics* Vol. 8 (New York: Springer, 1980)
15. Бражник П К, Давыдов В А, Михайлов А С *ТМФ* **74** 440 (1988)
16. Mikhailov A S, Davydov V A, Zykov V S *Physica D* **70** 1 (1994)
17. Агладзе К И, Давыдов В А, Михайлов А С *Письма в ЖЭТФ* **45** 601 (1987)
18. Давыдов В А, Зыков В С, Михайлов А С, Бражник П К *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **31** 574 (1988)
19. Schmidt S, Ortoleva P J *J. Chem. Phys.* **67** 3771 (1977)
20. Sevcikova H, Marek M *Physica D* **9** 140 (1983)
21. Agladze K I, de Kepper P J *J. Phys. Chem.* **96** 5239 (1992)
22. Зыков В С *Биофизика* **25** 888 (1980)
23. Зыков В С, Частное сообщение
24. Munuzuri A P et al. (to be published)
25. Munuzuri A P et al. *Chaos, Solitons and Fractals* (in press)
26. Steinbock O, Schutze J, Muller S C *Phys. Rev. Lett.* **68** 248 (1992)

Galilean transformations and the evolution of autowave fronts in external fields

V.A. Davydov, V.G. Morozov
Moscow State Institute of Radioengineering, Electronics, and Automation (Technical University), prosp. Vernadskogo 78, 117454 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 433-96 14, (7-095) 179-20 28
E-mail: davydov@lpi.ac.ru, vmorozov@glasnet.ru

We consider autowave regimes in two-dimensional excitable media in the presence of an external electric field, using Galilean transformations in the reaction-diffusion equations. It is shown that the transformation properties of these equations lead to some general relations for the autowave front and vortex drift velocities, independently of the concrete form of nonlinear terms in the equations. The general field dependence of the critical autowave characteristics is determined. The simple kinematic method discussed in this work is applicable for studying autowave evolution in three-dimensional and many-component excitable media.

PACS numbers: **05.50.+q**, 05.70.Ln, **82.40.–g**, **87.10.+e**

Bibliography — 26 references

Received 20 September 1995

Anniversary
of Uspekhi Fizicheskikh Nauk On-Line

Starting 26 December 1994 Uspekhi Fizicheskikh Nauk provides brand new electronic services, available via Internet. On our server, **ufn.ioc.ac.ru**, you may find:

- UFN, electronic edition. We provide our articles in Plain TeX format, pictures included, available typically well before the actual issue release date.
- "Non-printable" information: starting 1995, we provide our authors an option of submitting materials, for some reasons not acceptable for printed copy — colour photographs, animation, sounds *etc*.
- Abstracts and tables of contents
- Annual indexes

Our information is available in many ways:

WWW: Our URL is: http://ufn.ioc.ac.ru/ufn.html. You can conveniently access abstracts, annual author indexes and other information stored here using your favourite WWW browser.

Anonymous FTP: with FTP, login to `ufn.ioc.ac.ru` with username `anonymous`, type in your e-mail address as a password. You may find more info in `README` file.

E-mail archive: send a request to `ufnlib@ufn.ioc.ac.ru`, specify ‘`archive`’ as a subject, put commands in message body. Perhaps, it is a good idea to start with ‘`help`’ command.

UFN mailing list: to receive monthly abstracts and tables of contents of our journal, send a request with ‘`subscribe`’ in subject line to `ufnlist@ufn.ioc.ac.ru`. With subscription to this list you will be able to read abstracts of articles that would be released later. The same information could be obtained via INFOMAG service.

INFO finger: to keep in touch with the last changes, look up `info@ufn.ioc.ac.ru` with `finger` command.

During a year we were accessed from 1300 different hosts with more than 8500 requests! We have got about 60 requests every day during last months! It was generous of our readers to take so much interest in our work.

We would be glad to hear all your comments and suggestions. It is an experiment for us and we do need your feedback. Send all your comments and suggestions about our services to `ufn@ufn.ioc.ac.ru`.