

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Эффекты геометрической фазы в нейтронной оптике

В.И. Боднарчук, Л.С. Давтян, Д.А. Корнеев

Цель данной работы — детальный анализ геометрической фазы (фазы Берри) и обсуждение специфики ее измерения в наиболее типичном с точки зрения проявления эффектов такого рода физическом процессе — эволюции спина нейтрона в прецессирующем магнитном поле.

PACS numbers: 03.65.-w, 42.50.-p

Содержание

1. Введение (185).
 2. Неголономные задачи (186).
 3. Фаза Берри. Общий случай (186).
 4. Фаза Берри для нейтрона в прецессирующем магнитном поле (188).
 5. Фаза Ааронова–Анандана для нейтрона в прецессирующем магнитном поле (189).
 6. Измерения геометрической фазы с помощью поляризованных нейтронов (190).
 7. Заключение (192).
- Приложение (193).
Список литературы (194).

1. Введение

В ставшей классической работе Халперна и Хольштейна [1] по прохождению нейтронов через ферромагнетики была предложена итерационная схема, позволяющая находить конечный вектор поляризации по начальному при прохождении нейтрона через магнитное поле произвольно заданной конфигурации. Эта итерационная схема лежит в основе обработки данных по прохождению нейтронов через магнитные поля различных неколлинеарных конфигураций и сегодня.

Возможен ли более общий взгляд на этот вопрос? Существуют ли закономерности поведения вектора поляризации, которые трудно заметить, оставаясь в рамках подхода Халперна–Хольштейна? Поиск ответов на эти вопросы приводит к необходимости детального анализа другой не менее знаменитой работы.

В.И. Боднарчук, Л.С. Давтян, Д.А. Корнеев. Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория нейтронной физики им. И.М. Франка, 141980 Дубна, Московская обл., Россия
Тел. (09-621) 65-984. Факс (09-621) 65-882
E-mail: bodnarch@nfsun1.jinr.dubna.su,
davytan@nfsun1.jinr.dubna.su, korneev@nfsun1.jinr.dubna.su

*Статья поступила 20 февраля 1995 г.,
после доработки 10 августа 1995 г.*

В 1984 г. Берри опубликовал в "Proceedings of Royal Society" работу [2] под названием "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes". Именно в этой работе Берри в рамках квантовой механики было в полной мере осознано то обстоятельство, что поведение так называемой *неголономной* системы с зависящими от времени (или координат) параметрами качественно отличается от поведения систем, для которых эти параметры фиксированы. Берри показал, что в пределе адиабатического изменения параметров системы общее изменение фазы волновой функции квантовомеханической системы после возвращения к начальным значениям параметров может отличаться от изменения динамической фазы. Возникающая разность фаз связана простым соотношением с телесным углом, очерчиваемым за время циклической эволюции вектор-параметром $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ системы (в случае нейтронов — вектором напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(t)$). Значение этой фазы не зависит в пределе от длительности рассматриваемой циклической эволюции и может приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Прошедшие после публикации этой знаменательной работы десять лет были отмечены многочисленными экспериментальными и теоретическими работами, посвященными различным проявлениям геометрической, или топологической, фазы.

Соответствующий анализ классических систем был проведен Ханни [3]: в механических системах с изменяющимся во времени параметрами наблюдалось дополнительное угловое смещение — так называемый угол Ханни. С точки зрения классической механики причина этого заключается в том, что наряду с адиабатическим инвариантом действия существует неинвариантная переменная — угол. Впоследствии Берри проанализировал [4] взаимосвязь введенной им дополнительной фазы волновой функции и угла Ханни в квазиклассическом приближении.

Ааронов и Анандан доказали, что геометрическая фаза возникает и в случае неадиабатической эволюции [5]. Более того, эти рассуждения могут быть обобщены также на случаи нециклической, неунитарной и неабелевой эволюций [6].

Имея возможность сослаться на многочисленные обзоры (см., например, [7–10]) и ставя перед собой целью анализ именно нейтронно-оптического аспекта проявления геометрической фазы, в разделе 2 мы ограничимся только аннотацией обширного спектра неголономных задач. Кроме того, мы не будем ниже абстрагироваться и говорить вместо нейтрона в магнитном поле о "частице со спином $1/2$ во внешнем поле", так как это мало что меняет по существу. Далее, в разделе 3 воспроизведены простейшие рассуждения, приводящие к необходимости введения понятия геометрической фазы. В разделах 4 и 5 получены и проанализированы соответственно фазы Берри и фазы Ааронова–Анандана для волновых функций нейтрона в прецессирующем магнитном поле. Фазы Берри для базисных волновых функций с положительной и отрицательной проекциями спина на ось квантования представляют адиабатические пределы более общих (неадиабатических) геометрических фаз Ааронова–Анандана. Последние получены и проанализированы на основе предложенного Аароновым и Ананданом метода, определяющего геометрическую фазу как разность полной и динамической фаз. В разделе 6 кратко обсуждаются нейтронно-оптические эксперименты по измерению геометрических фаз. В приложении расширен подход Берри к вычислению неадиабатических геометрических фаз. На примере задачи с прецессирующим полем показано, что применение расширенного подхода Берри и подхода Ааронова–Анандана приводит к идентичным значениям неадиабатических геометрических фаз.

2. Неголономные задачи

История явления, обсуждаемого в работе Берри, восходит к маятнику Фуко и опытам Саньяка с вращающимся интерферометром. В работах Рытова, Владимирского и Панчаратнама [11] по оптике световодов, обладающих анизотропией показателя преломления, было проанализировано влияние геометрии световода на результаты поляризационных экспериментов. Позднее эксперимент Томиты и Чао [12] подтвердил вращение плоскости поляризации в изогнутом в виде спирали волоконном световоде (рис. 1).

Достаточно наглядно эффекты геометрической фазы проявляются в оптике поляризованных нейтронов. Эксперименты Биттера и Дубберса [13], Ричардсона и др. [14], Вейнфуртера и Бадурека [15] подтвердили принципиальную возможность измерения геометрических фаз в нейтронной оптике. Движение нейтрона в магнитном поле, сопровождающееся соответствующей эволюцией спина, примечательно и с теоретической точки зрения — соответствующее уравнение Шрёдингера точно решается в важном частном случае прецессирующего магнитного поля [16]. Необходимо еще раз подчеркнуть, что в контексте геометрической фазы под эволюцией мы подразумеваем поведение спина нейтрона при наличии *неявной* (через параметры) зависимости гамильтониана от времени. Реализовать такую зависимость можно, например, во времяпролетных экспериментах при наличии неколлинеарных (геликоидальных) магнитных полей. Вместо простой картины обычно рассматриваемых состояний прецессии с положительной и отрицательной проекциями спина в однородном и стационарном магнитных полях в случае эволюций мы имеем качественно отличное по сложности неголономное поведение.

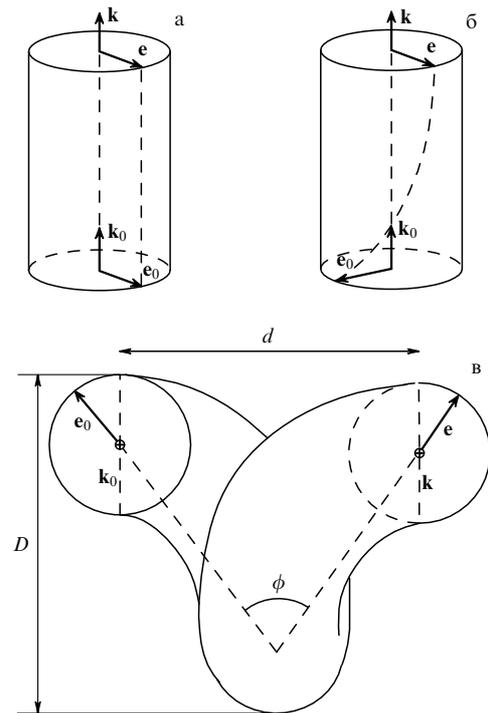


Рис. 1. Оптика световодов: (а) прямой или свернутой в виде плоской спирали цилиндрический световод не изменяет направления поляризации e светового пучка; (б) световод с естественной или искусственной (вследствие деформации кручения) гиротропностью изменяет направление поляризации пучка при прохождении участка световода (фаза Панчаратнама); (в) изменение направления поляризации света при распространении в изогнутых неплоских световодах (фаза Рытова–Владимирского) [10]. В частности, в световоде, изогнутом в виде спирали с постоянными шагом d и диаметром D , возникающая фаза Рытова–Владимирского равна углу скручивания $\phi = 2 \arcsin(d/2D)n$ [11], где n — число шагов спирали. Очевидно, что при $d \rightarrow 2D$ получим $\phi = \pi n$. Дальнейшее увеличение d (до максимального значения πD) может быть проведено таким образом, что угол скручивания при этом меняться не будет

ние. Отметим в этой связи ряд недавних работ [17–19], посвященных анализу различных аспектов неголономности в двухуровневой системе с $SU(2)$ -симметричным гамильтонианом.

В данной работе рассматриваются эффекты, связанные с эволюцией в *макрополях*, когда спин нейтрона движется в магнитном поле внешнего макроскопического источника или в некотором усредненном поле в конденсированной среде. Эволюция физической системы в *микрополях*, или *квантовая эволюция*, заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим здесь только, что геометрическая фаза с необходимостью возникает при анализе таких квантовых явлений, как эффект Яна–Теллера (или молекулярный эффект Ааронова–Бома) [20], квантовый эффект Холла [21] и ядерный квадрупольный резонанс во вращающемся кристалле с осью вращения, повернутой относительно оси магнитной анизотропии, где имеет место специфическое "расплывание" резонансных пиков [22].

3. Фаза Берри. Общий случай

В теории возмущений предполагается, что гамильтониан квантовой системы может быть представлен как сумма

некоторого невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 и возмущения \hat{V} :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Явная зависимость гамильтониана от времени обычно связывается с зависимостью от времени возмущения:

$$\hat{V} = \hat{V}(t).$$

В нейтронно-оптических времяпролетных экспериментах нейтрон движется через магнитное поле, напряженность которого может изменяться от одной точки траектории к другой как по величине, так и по направлению. Это обстоятельство не отражается на характере локального взаимодействия (спина нейтрона с магнитным полем), но приводит к неявной, через компоненты напряженности магнитного поля (вектор-параметра $\mathbf{R}(t)$), зависимости гамильтониана от времени:

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) = \hat{H}_0(\mathbf{R}(t)).$$

В случае *адиабатической* эволюции предполагается, что напряженность магнитного поля \mathbf{H} (ось квантования) изменяет свое направление настолько медленно, что параллельная полю компонента вектора поляризации $\mathbf{P} = (\boldsymbol{\sigma})$ (прецессирующего вокруг \mathbf{H}) сохраняется. Однако направление компоненты, перпендикулярной оси квантования, из-за движения последней в общем случае в конце циклической эволюции не совпадает с начальным. Важно, что это обстоятельство может иметь место даже тогда, когда время эволюции вектор-параметра *кратно* периоду прецессии (рис. 2).

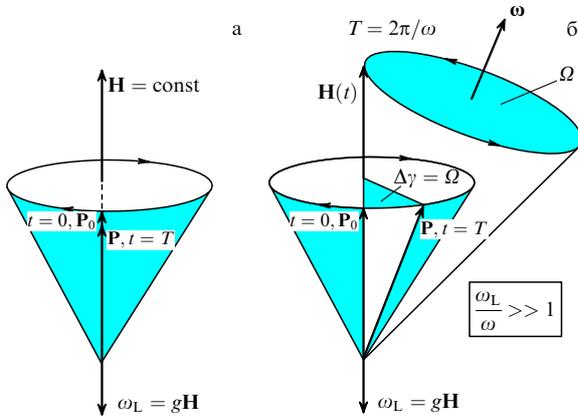


Рис. 2. Возникновение наблюдаемой геометрической фазы Берри $\Delta\gamma$ для спина нейтрона в прецессирующем магнитном поле $\mathbf{H}(t)$. Показаны положения вектора поляризации нейтронов \mathbf{P} в моменты $t = 0$ и $t = T$, где T — период эволюции вектора поля \mathbf{H} . Для наглядности рассмотрен случай, когда период T кратен периоду ларморовской прецессии T_L : (а) обычная ларморовская прецессия вектора \mathbf{P} вокруг вектора $\mathbf{H} = \text{const}$, когда начальное и конечное состояния вектора \mathbf{P} совпадают (при условии кратности периодов T и T_L); (б) характерное поведение вектора \mathbf{P} при наличии прецессии вектора \mathbf{H} с частотой $+\omega$. Начальное и конечное состояния вектора \mathbf{P} не совпадают из-за возникновения геометрических фаз на уровне волновых функций. Для этого случая подразумевается, что конус прецессии вектора \mathbf{P} адиабатически следует за вектором \mathbf{H} , т.е. выполняется условие адиабатичности $\omega_L/\omega = T/T_L \gg 1$. Угол $\Delta\gamma = (\gamma_- - \gamma_+)$ — разность фаз Берри базисных спиновых волновых функций нейтрона. Основной вывод теории Берри для спина нейтрона заключается в том, что $\Delta\gamma = \Omega$, где Ω — телесный угол, очерчиваемый вектором напряженности поля на сфере Пуанкаре

Как описывать поведение нейтрона в этом случае? Что известно вообще о системах с неявной зависимостью от времени?

Из адиабатической гипотезы Эренфеста [24] следует, что такая квантовая система после *циклической* эволюции вектор-параметра не должна отличаться от системы в начальном состоянии при соблюдении условия адиабатичности эволюции. В чем ценность работы Берри? Он указал на то, что в общем случае волновая функция системы при циклическом изменении параметров приобретает дополнительный нетривиальный фазовый множитель. Действительно, для любой квантовой системы, в частности с зависящими от времени параметрами, формально имеет место задача на собственные значения гамильтониана — система, по крайней мере, локально во времени описывается "стационарным" уравнением Шрёдингера:

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) \psi_n(q, \mathbf{R}(t)) = E_n(\mathbf{R}(t)) \psi_n(q, \mathbf{R}(t)).$$

При этом полная волновая функция

$$\Psi_n(q, \mathbf{R}(t), t) = \psi_n(q, \mathbf{R}(t)) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau\right]$$

должна удовлетворять временному уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \dot{\Psi}_n = \hat{H} \Psi_n.$$

В результате на уровне матричных элементов мы приходим к условию *параллельного переноса*

$$\left(\psi_n(q, \mathbf{R}(t)), \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(q, \mathbf{R}(t))\right) = 0.$$

Удовлетворить этому условию можно, только воспользовавшись тем обстоятельством, что фаза волновой функции еще произвольна. Заменяя $\psi_n \rightarrow \tilde{\psi}_n \exp(i\gamma_n)$, имеем

$$i\hbar \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_n(q, \mathbf{R}(t)) \right) \exp(i\gamma_n) + i \left(\frac{\partial}{\partial t} \gamma_n \right) \tilde{\psi}_n \exp(i\gamma_n) \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_n = i \left(\tilde{\psi}_n(q, \mathbf{R}(t)), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_n(q, \mathbf{R}(t)) \right). \tag{1}$$

Определенная таким образом γ_n и есть *геометрическая фаза*, или *фаза Берри*.

Пусть система совершает адиабатическую эволюцию вдоль замкнутого контура C в пространстве параметров, т.е. $\mathbf{R}(T_C) = \mathbf{R}(0)$, где $T_C \rightarrow \infty$ — время эволюции. Тогда изменение фазы γ_n за время T_C определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_n \rightarrow \gamma_n &= i \oint_0^{T_C} \left(\tilde{\psi}_n(q, \mathbf{R}(t)), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_n(q, \mathbf{R}(t)) \right) dt = \\ &= i \oint_C \mathbf{A}_{nn} d\mathbf{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mathbf{A}_{nn} = i \left(\tilde{\psi}_n, \vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \tilde{\psi}_n \right). \tag{3}$$

Если контур не содержит особенностей, то, используя теорему Стокса, можно записать выражение для фазы в виде

$$\gamma_n = \int_{\Sigma_C} \text{rot } \mathbf{A}_m \, ds, \quad (4)$$

где ds — элемент ориентированной поверхности Σ_C , натянутой на контур C . Характерной чертой адиабатической эволюции является то, что изменение фазы в процессе циклической эволюции не зависит от времени, за которое эта эволюция была совершена, а определяется исключительно *геометрией* области параметрического пространства, ограниченного замкнутым контуром C ; в этом случае

$$\gamma_n \propto \Omega,$$

где Ω — телесный угол, очерчиваемый вектор-параметром \mathbf{R} . Для волновой функции нейтрона фазы для двух спиновых состояний (ориентированные по полю обозначены индексом $+$, против поля — индексом $-$) выражаются через телесный угол, очерчиваемый вектором магнитного поля \mathbf{H} , следующим образом [2]:

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \Omega. \quad (5)$$

Итак, последовательный анализ адиабатического предела приводит к качественно отличной картине циклической эволюции; система возвращается в состояние, отличающееся от начального соответствующей геометрической фазой, определяемой траекторией в пространстве параметров.

Однако предположение об адиабатичности возмущения, когда система "проходит" цепочку введенных выше "стационарных" состояний $\Psi_n(q, \mathbf{R}(t), t)$, сохраняя фиксированным в течение эволюции квантовое число n для произвольной зависимости параметров от времени, вообще говоря, может не соответствовать действительности. Поэтому реальное описание таких систем связано с некоторыми дополнительными предположениями о характере изменения параметров, дающими, например, возможность применять методы нестационарной теории возмущений для описания неадиабатического поведения.

Итак, в целом волновая функция системы, гамильтониан которой неявно зависит от времени, изменяется не только во времени, но и в параметрическом пространстве. При этом, в принципе, если это пространство имеет геометрические особенности (кривизну, кручение, полюсы, не является односвязным), то последние могут влиять на поведение системы. В тех случаях, когда это имеет место, говорят, что система обладает (нетривиальной) *голономией*. В частности, если предположить, что эволюция системы происходит в полях, изменяющихся только по направлению, то рассмотрение возможных эволюций системы сводится к анализу свойства голономности соответствующих траекторий, очерчиваемых вектор-параметром $\mathbf{R}(t)$ на единичной сфере возможных направлений векторной величины — *сфере Пуанкаре*.

4. Фаза Берри для нейтрона в прецессирующем магнитном поле

Известно, что решение задачи о спине нейтрона в однородном магнитном поле допускает два собственных состояния с определенной проекцией спина на выделен-

ную ось:

$$\Psi_+^o(\theta, \phi) = \exp\left(-\frac{i\omega_L t}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\phi) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\Psi_-^o(\theta, \phi) = \exp\left(\frac{i\omega_L t}{2}\right) \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\phi) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где θ и ϕ — соответственно полярный и азимутальный углы оси квантования \mathbf{H} в выбранной системе координат, $\omega_L = 2\mu H/\hbar$ — частота ларморовской прецессии, μ — абсолютное значение магнитного момента нейтрона, $H = |\mathbf{H}|$.

Для поведения спина нейтрона в магнитном поле характерно, что при переходе от постоянного поля к прецессирующему соответствующее временное уравнение Шрёдингера (уравнение Паули), как известно, решается точно [16]. Знание волновых функций в задаче с прецессирующим полем дает уникальную возможность в деталях проследить возникновение адиабатической геометрической фазы Берри волновой функции нейтрона, применяя изложенный выше подход к ее вычислению. Кроме того, знание точного решения позволяет также провести детальный анализ и для случая неадиабатического режима в рамках подхода Ааронова–Анандана (см. раздел 5).

Рассмотрим с точки зрения геометрической фазы поведение спина нейтрона в магнитном поле, вектор которого, оставаясь постоянным по величине, равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z , образуя с ней угол θ :

$$\begin{aligned} H_x &= H \sin \theta \cos(\omega t + \phi), \\ H_y &= H \sin \theta \sin(\omega t + \phi), \\ H_z &= H \cos \theta. \end{aligned}$$

Уравнение Паули имеет вид

$$i\hbar\dot{\Psi} = 2\mu\mathbf{H}\hat{s}\Psi. \quad (8)$$

Опуская детали решения, приведем вид волновой функции:

$$\Psi(t) = C_+ \Psi_+(t) + C_- \Psi_-(t), \quad |C_+|^2 + |C_-|^2 = 1, \quad (9)$$

$$\Psi_+(t) = \exp\left[\frac{-i(A + \omega)t}{2}\right] \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\Phi) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\Psi_-(t) = \exp\left[\frac{i(A - \omega)t}{2}\right] \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\Phi) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\Phi = \omega t + \phi$,

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{A + \omega_L \cos \theta + \omega}{2A}}, \quad (12)$$

$$A = \sqrt{(\omega + \omega_L \cos \theta)^2 + \omega_L^2 \sin^2 \theta}. \quad (13)$$

Сравнивая (10), (11) с формулами (6), (7), приходим к выводу, что ось квантования задается теперь некоторым эффективным полем \mathbf{H}_{eff} , вектор которого составляет угол Θ (12) с осью z (рис. 4а).

Отметим, что состояния Ψ_{\pm} ортогональны:

$$(\Psi_{+}, \Psi_{-}) = 0$$

и соответствуют состояниям с проекцией спина на ось z :

$$(\Psi_{\pm}, s_z \Psi_{\pm}) = \pm \frac{1}{2} \cos \Theta.$$

Чему равна в этой задаче геометрическая фаза Берри? Применим изложенную выше схему вычисления.

Компоненты векторов $\mathbf{A}_{\pm\pm}$ (3) в сферических координатах равны

$$\mathbf{A}_{++} = i(\psi_{+}, \vec{\nabla}\psi_{+}) = \left(0, 0, \frac{1}{2H \sin \theta} \cos^2 \frac{\Theta}{2}\right), \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_{--} = i(\psi_{-}, \vec{\nabla}\psi_{-}) = \left(0, 0, \frac{1}{2H \sin \theta} \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right). \quad (15)$$

Далее, согласно (4)

$$\gamma_{\pm\pm} = \int_{\Sigma_C} \text{rot}(\mathbf{A}_{\pm\pm}) \, ds. \quad (16)$$

Вычислив роторы:

$$\text{rot} \mathbf{A}_{\pm\pm} = \left(\mp \frac{1}{2H^2} \left(\frac{\sin \Theta}{\sin \theta}\right) \frac{d\Theta}{d\theta}, 0, 0\right), \quad (17)$$

получим для $\gamma_{\pm\pm}$ следующие выражения ($\omega_L > \omega$):

$$\gamma_{\pm\pm} = \mp \frac{1}{2} \Omega(\Theta), \quad (18)$$

где $\Omega(\Theta) = 2\pi(1 - \cos \Theta)$ — телесный угол, образованный конусом с углом раствора 2Θ :

$$\Theta = \arccos \left(\frac{\omega_L \cos \theta + \omega}{A} \right). \quad (19)$$

При выполнении условия адиабатичности $\omega_L/\omega \gg 1$ γ_{\pm} совпадает с известным выражением (5):

$$\gamma_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \Omega(\theta).$$

Отметим, что выражение (18) справедливо для случая локально стационарного уравнения Шрёдингера, т.е. для $\omega_L/\omega \gg 1$. Однако формально его можно обобщить на случай, когда $\omega_L/\omega \leq 1$, т.е. когда условие адиабатичности нарушается. Поэтому именно $\gamma_{\pm\pm}$ (18) в области значений $\omega_L/\omega \leq 1$ в нашем случае было бы правильно называть неполной неадиабатической фазой Берри. Как, оставаясь в рамках подхода Берри, корректно вычислять полную неадиабатическую геометрическую фазу для произвольного ω_L/ω , изложено в приложении. Однако в литературе часто термин "неадиабатическая фаза Берри" употребляют по отношению к рассматриваемой далее полной неадиабатической геометрической фазе Ааронова–Анандана. Ниже получим выражения для полных неадиабатических геометрических фаз, применяя подход Ааронова–Анандана к задаче с прецессирующим полем.

5. Фаза Ааронова–Анандана для нейтрона в прецессирующем магнитном поле

Как показали Ааронов и Анандан [5], существует метод непрямого вычисления неадиабатической геометрической фазы. Вернемся к вводным рассуждениям в разделе 3. Вместо предположения о прохождении нейтрона через цепочку "стационарных" состояний рассмотрим квантовую систему, гамильтониан которой обладает свойством цикличности:

$$\hat{H}(T) = \hat{H}(0).$$

Тогда волновая функция в момент времени T с точностью до фазы совпадает с начальной волновой функцией:

$$\Psi(T) = \exp(i\alpha) \Psi(0).$$

Представим волновую функцию в виде

$$\Psi(t) = \exp[i\alpha(t)] \tilde{\Psi}(t), \quad \tilde{\Psi}(T) = \tilde{\Psi}(0) = \Psi(0).$$

Подставив эту волновую функцию в уравнение Паули (8) и умножив скалярно обе части на Ψ^* , получим

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -i \left(\tilde{\Psi}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi} \right) + \frac{1}{\hbar} (\Psi, \hat{H}\Psi).$$

После интегрирования от 0 до T имеем

$$\alpha(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T (\Psi, \hat{H}\Psi) \, dt + i \int_0^T \left(\tilde{\Psi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\Psi} \right) \, d\tau, \quad (20)$$

где

$$-\frac{1}{\hbar} \int_0^T (\Psi, \hat{H}\Psi) \, dt = \beta \quad (21)$$

есть динамическая фаза, а

$$i \int_0^T \left(\tilde{\Psi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\Psi} \right) \, d\tau = \gamma \quad (22)$$

— геометрическая фаза Ааронова–Анандана. Таким образом, легко видеть, что геометрическая фаза в момент времени T есть

$$\gamma = \alpha - \beta. \quad (23)$$

Подход Ааронова–Анандана дает возможность вычислить геометрическую фазу в общем случае прецессии с произвольным значением параметра ω_L/ω .

В нашей задаче волновые функции (10), (11) обладают свойством цикличности. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$\Psi_{\pm}(T) = \exp \left[i\pi \left(1 \pm \frac{A}{\omega} \right) \right] \Psi_{\pm}(0), \quad (24)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период эволюции. Следовательно, общее изменение фазы к моменту времени T для этих функций

$$\alpha_{\pm} = \pi \left(1 \pm \frac{A}{\omega} \right). \quad (25)$$

Подставляя в (21) гамильтониан Паули $\hat{H} = \hbar \omega_L \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, и интегрируя это выражение с использованием волновых функций (10), (11), получаем

значения динамических фаз

$$\beta_{\pm} = \pm \frac{\pi \omega_L}{A\omega} (\omega \cos \theta + \omega_L) = \pm \frac{\pi}{\omega} (A - \omega \cos \theta). \quad (26)$$

Здесь следует отметить важную деталь неадиабатической задачи: динамическая фаза β уже не совпадает с ларморовским углом поворота в поле \mathbf{H} за время T . Геометрические фазы согласно (23) равны

$$\gamma_+ = \alpha_+ - \beta_+ = \pi(1 + \cos \theta) = 2\pi - \frac{1}{2} \Omega(\theta), \quad (27)$$

$$\gamma_- = \alpha_- - \beta_- = \pi(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \Omega(\theta). \quad (28)$$

Разность $\gamma_- - \gamma_+$, входящая в наблюдаемые, равна

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \gamma_- - \gamma_+ = -2\pi \cos(\theta) = \\ &= \Omega(\theta) - 2\pi. \end{aligned} \quad (29)$$

В адиабатической теории Берри знак геометрической фазы определяется направлением обхода контура в пространстве параметров. Поэтому для согласования полученных нами формул в адиабатическом пределе с теорией Берри будем считать, что

$$\Delta\gamma = \Omega(\theta) \text{ при } \omega > 0; \quad \Delta\gamma = -\Omega(\theta) \text{ при } \omega < 0. \quad (30)$$

Это не меняет понимания полученных нами формул, поскольку новое написание $\Delta\gamma$ отличается от (29) на 2π . На рис. 3 показано поведение $\Delta\gamma$ в зависимости от параметра ω/ω_L .

Как влияет геометрическая фаза на вектор поляризации нейтронов при прохождении геликоидального циклического поля, которое в системе координат движущегося нейтрона сводится к прецессирующему?

Используя волновые функции (10), (11), вычислим наблюдаемые квантовомеханические средние от операторов $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$, которые являются компонентами вектора конечной поляризации, т.е. поляризации в момент

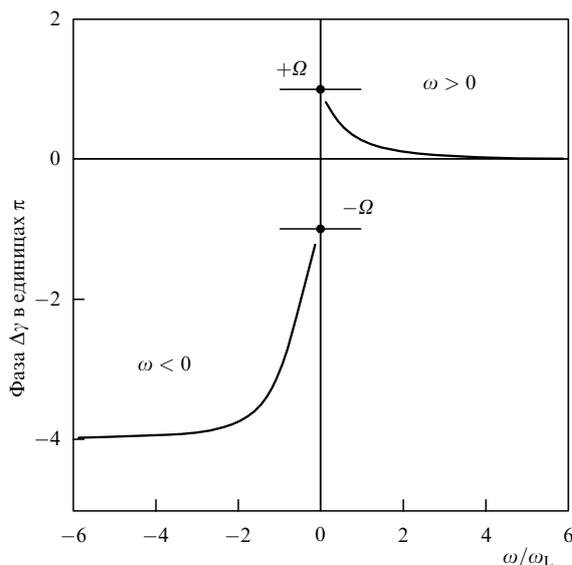


Рис. 3. Наблюдаемая разностная геометрическая фаза волновой функции $\Delta\gamma$, рассчитанная для прецессирующего поля по формулам (30) в зависимости от параметра ω/ω_L ($\theta = 60^\circ$, $|\mathbf{H}| = 1$ Э). При $\omega/\omega_L \rightarrow 0$ (предел Берри) $\Delta\gamma \rightarrow \pm\Omega$, где Ω — телесный угол, описываемый вектором магнитного поля \mathbf{H} . Знак $\Delta\gamma$ определяется знаком ω

времени $T = 2\pi/\omega$. Для простоты положим коэффициенты смешивания в (9) равными: $(C_+, C_-) = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ и $\phi = 0$.

Получим

$$P_x = -\cos \theta \sin(\Delta\beta + \Delta\gamma), \quad (31)$$

$$P_y = \cos(\Delta\beta + \Delta\gamma), \quad (32)$$

$$P_z = \sin \theta \sin(\Delta\beta + \Delta\gamma). \quad (33)$$

При $\omega_L/\omega \gg 1$ для конечного вектора поляризации имеем следующее поведение:

$$P_x \rightarrow -\cos \theta \sin(T\omega_L + \Omega(\theta)), \quad (34)$$

$$P_y \rightarrow \cos(T\omega_L + \Omega(\theta)), \quad (35)$$

$$P_z \rightarrow \sin \theta \sin(T\omega_L + \Omega(\theta)). \quad (36)$$

Видно, что наблюдаемой является разностная геометрическая фаза $\Delta\gamma = \gamma_- - \gamma_+ = \Omega$ (см. (27), (28)), которая естественным образом вошла в качестве аддитивной константы в аргументы компонент вектора \mathbf{P} .

В заключении к разделам 4, 5 отметим важное, на наш взгляд, обобщение задачи о прецессирующем поле в контексте геометрических фаз. Из вида волновых функций (10), (11) следует существование эффективного магнитного поля с напряженностью \mathbf{H}_{eff} , с введением которого задача с прецессирующим полем становится формально адиабатической (рис. 4). Из этого следует, что в пространстве, где параметром является напряженность эффективного поля, можно применять адиабатический подход Берри (построение вектора напряженности эффективного поля показано на рис. 4а). Рис. 4б иллюстрирует прецессию \mathbf{H}_{eff} по конусам с различными углами раствора 2θ , зависящими от параметра ω/ω_L .

Таким образом, на сфере Пуанкаре (рис. 4в) эффективное поле ометает различные телесные углы Ω в зависимости от величины и знака ω . Изменяя ω от $-\infty$ до $+\infty$, можно определить весь набор значений телесных углов $\Omega(\omega/\omega_L)$, т.е. определить всевозможные значения наблюдаемых геометрических фаз $\Delta\gamma = \Omega(\omega/\omega_L)$. В пространстве \mathbf{H}_{eff} естественным образом объединяются как адиабатический (Берри), так и неадиабатический (Ааронова–Анандана) подходы. Строго адиабатическому пределу Берри соответствует предельная траектория на сфере Пуанкаре, когда $\omega/\omega_L \rightarrow 0$. Таким образом, данный подход к задаче с прецессирующим полем не делает принципиального различия между теориями Берри и Ааронова–Анандана и позволяет вычислить полный набор геометрических фаз $\Delta\gamma(\omega/\omega_L)$. Следуя этим рассуждениям, теперь легко объяснить поведение геометрической фазы $\Delta\gamma$ (см. рис. 3), подразумевая, что функция $\Delta\gamma(\omega/\omega_L)$ есть не что иное, как телесный угол $\Omega(\omega/\omega_L)$ на сфере Пуанкаре, показанной на рис. 4в.

6. Измерения геометрической фазы с помощью поляризованных нейтронов

Посмотрим на проблему геометрической фазы с точки зрения возможности ее наблюдения в нейтронно-оптических экспериментах. Прежде всего обратим внимание на то, что вообще любая фаза волновой функции в наблюдаемых величинах проявляется как аргумент некоторой экспериментально измеряемой функции, которая может зависеть кроме фазы и от других параметров (например, от параметров, характеризующих начальное состояние

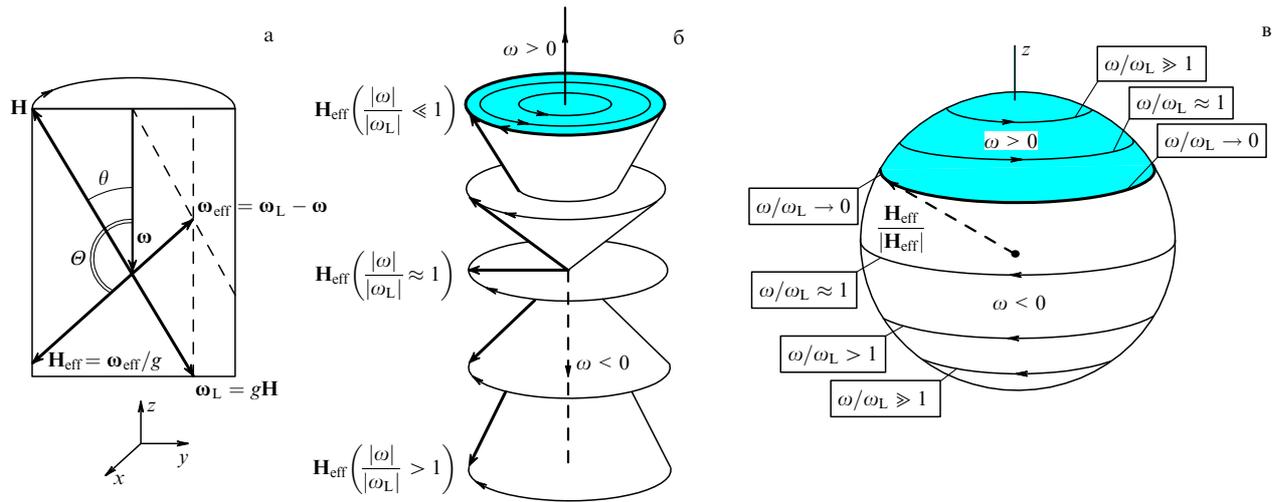


Рис. 4. К иллюстрации основных понятий, привлекаемых для описания геометрической фазы при эволюции спина нейтрона в прецессирующем магнитном поле: (а) появление эффективного поля \mathbf{H}_{eff} в задаче о поведении спина в прецессирующем магнитном поле \mathbf{H} . Антипараллельность векторов \mathbf{H} и ω_L , \mathbf{H}_{eff} и ω_{eff} вызвана отрицательностью гиромангнитного отношения нейтрона g ; (б) прецессия эффективного поля по конусам с различными углами раствора 2θ в зависимости от параметра ω/ω_L ; (в) иллюстрация зависимости наблюдаемой геометрической фазы $\Delta\gamma = \Omega$ от параметра ω/ω_L на сфере Пуанкаре для вектора \mathbf{H}_{eff} . Жирной линией показан предельный контур, описываемый $\mathbf{H}_{\text{eff}}/|\mathbf{H}_{\text{eff}}|$ при $\omega/\omega_L \rightarrow 0$, совпадающий с контуром реального поля. При росте по модулю параметра ω/ω_L , вектор $\mathbf{H}_{\text{eff}}/|\mathbf{H}_{\text{eff}}|$ начинает прижиматься к одному или другому полюсу сферы в зависимости от знака ω

поляризации пучка). Поэтому можно ставить вопрос только о косвенном измерении геометрической фазы, дающей наряду с динамической фазой вклад в непосредственно наблюдаемые величины. В экспериментах с поляризованными нейтронами такими величинами являются компоненты конечного вектора поляризации. В этих экспериментах применяют методику spin-rotation, которая заключается в том, что в начальной точке траектории нейтрона вектор поляризации направляется перпендикулярно магнитному полю, а в конечной точке на основе измерения проекции вектора поляризации на одну из осей в плоскости, перпендикулярной полю, может быть определена полная фаза волновой функции.

Разделение полной фазы на динамическую и геометрическую части основано на некоторых дополнительных соображениях. В частности, для строго адиабатической эволюции спина при пролете нейтроном участка L в неколлинеарном поле, совершающем для определенности один оборот, динамическая фаза описывается выражением

$$\Delta\beta = \beta_- - \beta_+ = \omega_L t,$$

где ω_L — ларморовская частота магнитного момента нейтрона в поле \mathbf{H} , t — время пролета участка L , где создано поле. Естественно, что в такой постановке эксперимента время $t = L/v$ для любых скоростей нейтрона будет равно периоду цикла поля T . Поскольку скорость и длина волны нейтрона λ связаны простым соотношением $v = \text{const}/\lambda$, динамическая фаза прямо пропорциональна длине волны нейтрона:

$$\Delta\beta = \text{const} \times \omega_L \lambda = A\lambda.$$

При этом измеряемые компоненты вектора поляризации есть, как и (31)–(33), синусы или косинусы от суммы динамической и геометрической фаз $\Delta\alpha$. О геометрическом вкладе

$$\Delta\gamma = \text{const}$$

в полную фазу, используя анализ поляризации в рамках метода времени пролета на полихроматическом пучке, можно судить по сдвигу фазы в осциллирующей зависимости $P_i(\lambda)$:

$$P_i \propto \cos(\Delta\beta + \Delta\gamma) = \cos(A\lambda + \Delta\gamma).$$

Если же анализ поляризации проводить на монохроматическом пучке нейтронов ($\lambda = \text{const}$), то адиабатическую фазу Берри можно выделить, построив зависимость полной фазы от ω_L , т.е. от среднего значения напряженности магнитного поля на контуре, сохраняя при этом геометрию контура неизменной. Именно эта методика была использована Биттером и Дубберсом в 1987 г. в первом эксперименте по измерению фазы Берри с помощью монохроматических поляризованных нейтронов на реакторе института Лауэ–Ланжевена [13]. На рис. 5 приведены схема установки и полученные Биттером и Дубберсом зависимости поляризации и полной фазы от силы тока I , пропускаемого через геликоидальную катушку. Были использованы два соленоида: геликоидальный (для вращения вектора магнитного поля вдоль траектории нейтрона) и коаксиальный ему (для компоненты поля вдоль траектории). Примечательно, что измерения полной фазы в неадиабатической области в рамках этого метода позволяют наблюдать фазы, кратные 2π (рис. 5б).

Эксперименты Ричардсона [14] подтвердили, в частности, аддитивность набора геометрической фазы: повороты вектора напряженности магнитного поля на 4π и 6π сопровождалась соответствующим двух- и трехкратным набором геометрической фазы. В экспериментах Вейнфуртера и Бадурека [15] наблюдались специфические, обусловленные наличием геометрической фазы эффекты: подавление модуляций в измерениях компонент вектора поляризации и линейное смещение измеряемых спектров по параметру, характеризующему нецикличность эволюции.

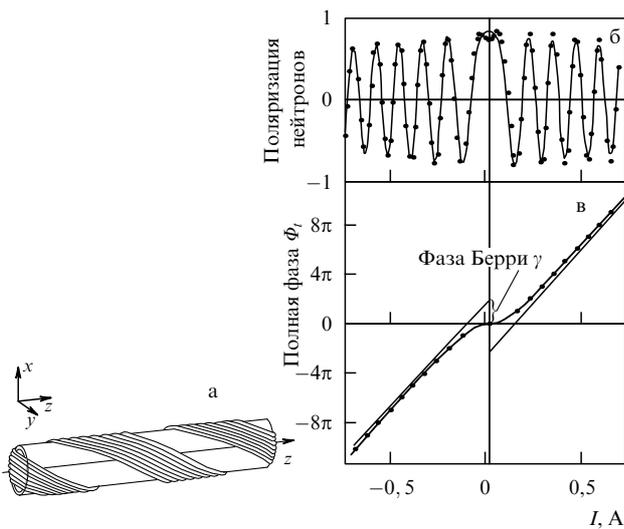


Рис. 5. Эксперимент Биттера и Дуббера [13] по измерению геометрической фазы в прецессирующем поле: (а) геликоидальная катушка для правовращающегося магнитного поля. В системе отсчета, связанной с нейтроном, магнитное поле описывает круг в плоскости, перпендикулярной скорости нейтрона. Нейтронный пучок направлен вдоль оси z ; (б) зависимость перпендикулярной полю компоненты вектора поляризации на выходе из геликоидальной катушки от параметра адиабатичности, пропорционального току I в геликоидальной катушке; (в) наблюдаемый и вычислительный фазовый сдвиг Φ .

Мы опустим здесь подробное обсуждение этих экспериментов, отсылая читателя непосредственно к оригинальным публикациям. В целом, в пределах точности экспериментов они подтвердили справедливость закона равенства фазы Берри телесному углу, описываемому вектором геликоидального магнитного поля. Вместе с

тем измерения геометрической фазы [23] (рис. 6), проведенные авторами данной работы, в магнитном поле более сложном, чем постоянное равномерно прецессирующее магнитное поле, показали, что разделение области значений параметра ω_L/ω на адиабатическую и неадиабатическую становится некорректным. Причина состоит в том, что на отдельных локальных участках контура критерий адиабатичности может нарушаться даже для очень медленных нейтронов. Обработка этого времяпролетного эксперимента с полихроматическими нейтронами на основе модели прецессирующего поля показала, что такой подход явно недостаточен для анализа сложных контуров и требуется более детальный (см. приложение) алгоритм вычисления геометрической фазы без разделения ее на адиабатическую и неадиабатическую части.

7. Заключение

Итак, фаза Берри не есть абстрактно теоретическое понятие. Влияние на фазу волновой функции геометрических свойств пространства параметров, от которых зависит гамильтониан квантовой системы, — экспериментально наблюдаемое явление. С точки зрения нейтронной оптики предсказание Берри для адиабатической эволюции спина нейтрона ($1/2$) в простых геликоидальных полях подтверждается экспериментально в виде дополнительного поворота компоненты вектора поляризации, перпендикулярной полю, на угол, близкий к телесному углу, описываемому вектором напряженности поля:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) n,$$

где θ — угол и n — число оборотов геликоида. Сейчас ясно, что пренебрежение геометрической фазой в опреде-

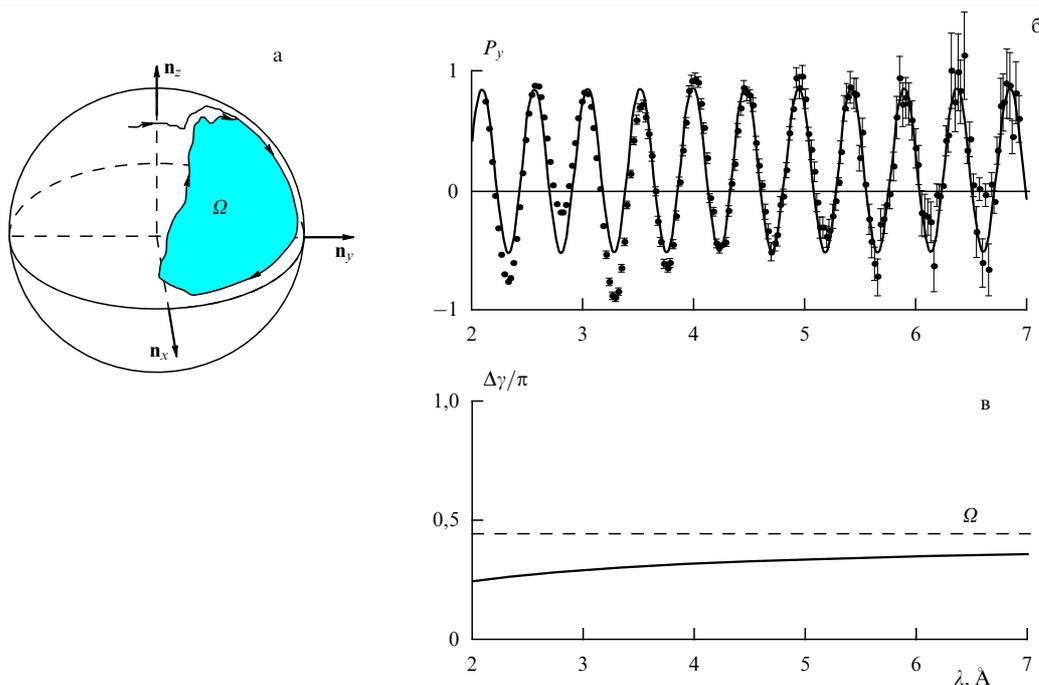


Рис. 6. Времяпролетный эксперимент, проведенный в ЛНФ ОИЯИ [23]: (а) контур на сфере Пуанкаре, соответствующий реализованной в эксперименте стационарной конфигурации магнитного поля; (б) сплошная линия — результат подгонки по МНК-процедуре экспериментальной зависимости $P_y(\lambda)$ на основе модели прецессирующего поля; (в) полученная зависимость геометрической фазы от длины волны нейтронов. Отклонение от значения независимо измеренного телесного угла Ω на уровне 10–15%

ленных случаях может приводить к систематической ошибке при интерпретации экспериментов с поляризованными нейтронами, в основу которых положен метод спиновой прецессии (метод спинового эха, трехмерный анализ поляризации). Пока точность проведенных экспериментов не позволяет говорить о строгом равенстве измеренных углов поворота вектора P телесному углу, очерчиваемому вектором напряженности магнитного поля. Скорее, первые эксперименты носят оценочный характер. Вместе с тем нейтронные эксперименты ставят и новые вопросы, связанные с измерением геометрических фаз для случая магнитных полей сложной геометрии с учетом неадиабатических эффектов.

Авторы признательны С.И. Виночку, В.К. Игнатовичу и В.М. Тер-Антоняну за полезные обсуждения и замечания. Работа поддерживается Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-02-19769).

Приложение

Расширим подход Берри на случай неадиабатической эволюции для контуров произвольной формы. Из работы Берри [2] следует, что волновую функцию эволюционирующей квантовой системы с учетом возможных геометрических фаз в наиболее общем случае необходимо записывать в виде

$$\Psi(q, \mathbf{R}(t), t) = \sum_n C_n(\mathbf{R}(t), t) \psi_n(q, \mathbf{R}(t)) = \sum_n \exp(i\alpha_n) C_n(\mathbf{R}(0), 0) \psi_n(q, \mathbf{R}(t)), \quad (\text{П.1})$$

где $\psi_n(q, \mathbf{R}(t))$ — собственные состояния гамильтониана $H(\mathbf{R}(t))$ и

$$\alpha_n = \int_0^t \frac{\partial \alpha_n}{\partial \tau} d\tau + \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \alpha_n d\mathbf{R}.$$

Эти величины — разности фаз коэффициентов разложения в начальный и произвольный моменты времени, так называемые *полные фазы*, по существу, и определяют характер эволюции системы.

Первый интеграл в экспоненте представляет собой знакомую *динамическую фазу* волновой функции:

$$\beta_n = \int_0^t \frac{\partial \alpha_n}{\partial \tau} d\tau = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau. \quad (\text{П.2})$$

Однако ниже мы обсудим второй (криволинейный) интеграл:

$$\gamma_n = \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \alpha_n d\mathbf{R}. \quad (\text{П.3})$$

По сути, именно эта величина была введена в [2].

Подставим разложение (П.1) в уравнение Шрёдингера (предполагается, что спектр $E_n(t)$ не вырожден):

$$i\hbar \sum_m C_m \exp\left[i\gamma_m - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau\right] \times \{ \dot{\psi}_m + i\psi_m \dot{\gamma}_m - \frac{i}{\hbar} \psi_m E_m \} = \hat{H}(\mathbf{R}(t)) \sum_m C_m \psi_m \exp\left[i\gamma_m - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau\right],$$

или

$$i\hbar \sum_m C_m \exp\left[i\gamma_m - \frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau\right] \{ \dot{\psi}_m + i\psi_m \dot{\gamma}_m \} = 0.$$

Отсюда, если воспользоваться ортогональностью состояний ψ_m , получим следующую систему уравнений для геометрических фаз:

$$\dot{\gamma}_n = \frac{i}{C_n} \sum_m C_m \exp\left[i(\gamma_m - \gamma_n) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_m(\tau) - E_n(\tau)) d\tau\right] (\psi_n, \dot{\psi}_m), \quad (\text{П.4})$$

где $C_n = C_n(\mathbf{R}(0), 0) \neq 0$.

Так как зависимость от времени неявная, то эта система уравнений может быть преобразована к виду

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \gamma_n = \frac{i}{C_n} \sum_m C_m \exp\left[i(\gamma_m - \gamma_n) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_m(\tau) - E_n(\tau)) d\tau\right] (\psi_n, \vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \psi_m). \quad (\text{П.5})$$

Возникающие справа векторные поля

$$\mathbf{A}_{nm} = i(\psi_n, \vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \psi_m)$$

принято называть полями, *индуцированными* $\psi_n(q, \mathbf{R}(t))$. В интересующем нас случае эволюций спина нейтрона индексы m и n принимают два значения $+$ и $-$.

Заметим, что представление коэффициентов разложения (П.1) в виде

$$\exp(i\alpha_n) C_n(\mathbf{R}(0), 0),$$

на первый взгляд, усложняет вид стандартной линейной системы уравнений, получаемой для эволюционных коэффициентов в методе Дирака. Однако при анализе конкретной задачи может оказаться полезным как стандартное представление, так и через фазовые экспоненты.

Адиабатическая эволюция соответствует условию

$$(\psi_n, \dot{\psi}_m) = 0, \quad n \neq m. \quad (\text{П.6})$$

Следовательно, в адиабатическом пределе уравнения (П.3) сильно упрощаются и принимают вид (1)

$$\dot{\gamma}_n = i(\psi_n, \dot{\psi}_n),$$

или

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \gamma_n = i(\psi_n, \vec{\nabla}_{\mathbf{R}} \psi_n) = \mathbf{A}_{nn}.$$

Чтобы непосредственно вычислить полную геометрическую фазу в неадиабатике, необходимо в дополнение к (14), (15) определить недиагональные векторные поля

$$\mathbf{A}_{+-} = i(\psi_+, \vec{\nabla} \psi_-) = \left(0, 0, -\frac{1}{2H \sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right), \quad (\text{П.7})$$

$$\mathbf{A}_{-+} = \mathbf{A}_{+-}, \quad (\text{П.8})$$

подставить найденные матричные элементы в (П.3) и решить соответствующую систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Система этих уравнений для прецессирующего поля легко разрешима, и мы здесь не будем останавливаться на ходе решения. В результате приходим к выражениям (27), (28) для фаз Ааронова–Анандана. Таким образом, для прецессирующего поля удается строго доказать равенство неадиабатических фаз, рассчитываемых в расширенном нами подходе Берри и подходе Ааронова–Анандана. Следует отметить, что подход Берри в отличие от подхода Ааронова–Анандана не ограничен цикличностью волновой функции.

Список литературы

- Halpern O, Holstein T *Phys. Rev.* **59** 960 (1941)
- Berry M V *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **392** 45 (1984)
- Hannay J H *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** 221 (1985)
- Berry M V, *Ibid.*, p. 15
- Aharonov Y, Anandan J *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593 (1987); Moore D J *Phys. Rep.* **210** (1) (1991)
- Mukunda N, Simon R *Ann. Phys.* **228** 205 (1993) (ref. therein)
- Berry M *Physics Today* **Dec.** 34 (1990)
- Anandan J *Nature* **360** 307 (1992)
- Виницкий С И, Дербов В Л, Дубовик В М и др. *УФН* **160** 1 (1987)
- Клышко Д Н *УФН* **163** 1 (1993)
- Рытов С М *ДАН СССР* **28** 263 (1938); Владимирский В В *ДАН СССР* **31** 222 (1941); Pancharatnam S *Proc. Indian. Acad. Sci. Sect. A* **44** 247; **46** 1 (1956)
- Tomita A, Chiao R Y *Phys. Rev. Lett.* **66** 588 (1991)
- Bitter T, Dubbers D *Phys. Rev. Lett.* **59** 251 (1987)
- Richardson D J et al. *Phys. Rev. Lett.* **61** 2030 (1988)
- Weinfurter H, Badurek G *Phys. Rev. Lett.* **64** 1318 (1990)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963)
- Shun-Jin Wang *Phys. Rev. A* **42** 5103 (1990)
- Barut A O et al. *Phys. Rev. A* **47** 2581 (1993)
- Datta N, Ghosh G, Engineer M H *Phys. Rev. A* **40** 526 (1989)
- O'Brien M C M, Chancey C C *Am. J. Phys.* **61** 688 (1993); Auerbach A, Manini N, Tosatti E *Phys. Rev. B* **49** 12998 (1994)
- Thouless D et al. *Phys. Rev. Lett.* **49** 405 (1982)
- Tycko R *Phys. Rev. Lett.* **58** 2281 (1987)
- Korneev D A, Bodnarchuk V I, Davtyan L S *Physica B* **213** 8214 (1995)
- Бакай А С, Степановский Ю П *Адиабатические инварианты* (Киев: Наукова думка, 1981)

GEOMETRICAL PHASE EFFECTS IN NEUTRON OPTICS

V.I. Bodnarchuk, L.S. Davtyan, D.A. Korneev

I. M. Frank Laboratory of Neutron Physics, Joint Institute for Nuclear Research

141980 Dubna, Moscow Region, Russia

Tel. (7-09 621) 65-984, 64-156

Fax (7-09 621) 65-882

E-mail: bodnarch@nfsun1.jinr.dubna.su, davtyan@nfsun1.jinr.dubna.su, korneev@nfsun1.jinr.dubna.su

The aim of this paper is to give a detailed analysis of the geometric phase (Berry phase) and a discussion of the specifics of its measurements during neutron spin evolution in a precessing magnetic field, which is the most typical physical process as far as the manifestation of this type of effects is concerned.

PACS numbers: **03.65.-w, 42.50.-p**

Bibliography — 24 references

Received 20 February 1995, revised 10 August 1995