

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Волны в слабоанизотропных трехмернеоднородных средах: квазиизотропное приближение геометрической оптики

Ю.А. Кравцов, О.Н. Найда, А.А. Фуки

Изложены основы квазиизотропного приближения (КИП) геометрической оптики, предназначенного для описания поляризационной трансформации волн в неоднородных слабоанизотропных средах. Метод основан на предположении, что в слабоанизотропной среде волны сохраняют поперечную структуру, как в изотропной среде. Достоинства КИП продемонстрированы на задачах распространения электромагнитных волн в плазме в слабом магнитном поле, на ряде оптических задач (жидкие кристаллы, спиральные среды, одномодовые световоды), на задачах акустики слабоанизотропных сред, а также на квантовомеханических поляризационных эффектах типа Штерна–Герлаха. Описаны новые модификации КИП: метод расщепленных лучей и синтетический метод, применимый даже в сильноанизотропных средах.

PACS numbers: 42.15.-i, 42.25. Bs, 42.68.Ay, 92.60.Ta

Содержание

1. Введение (141).
 - 1.1. Трансформация поляризации векторных полей в слабоанизотропных средах. 1.2. Основные методы описания волновых полей в слабоанизотропных средах.
2. Квазиизотропное приближение геометрической оптики трехмернеоднородных анизотропных сред (143).
 - 2.1. Общая схема метода геометрической оптики. 2.2. Геометрическая оптика изотропных сред (метод Рытова). 2.3. Взаимодействующие нормальные волны в анизотропной среде (метод Куранта–Лакса). 2.4. Волны в слабоанизотропной среде. Квазиизотропное приближение (КИП).
3. Модификации и обобщения уравнений КИП (147).
 - 3.1. Уравнения КИП для вектора электрической индукции. 3.2. Уравнения КИП в форме уравнений для взаимодействующих мод. 3.3. Метод расщепленных лучей в случае слабой анизотропии. 3.4. Обобщение метода расщепленных лучей на сильноанизотропные среды (синтетический подход).
4. Электромагнитные волны в неоднородной плазме в слабом магнитном поле (152).
 - 4.1. Квазипродольное и квазипоперечное распространение. 4.2. Коэффициенты трансформации на участке квазипопереч-

- ного распространения волны. 4.3. Другие поляризационные эффекты в плазме.
5. Оптические эффекты в слабоанизотропных средах (157).
 - 5.1. "Касательная" коническая рефракция. 5.2. Распространение света в спиральных средах и неоднородных жидких кристаллах. 5.3. Поляризация света в деформированных одномодовых световодах. 5.4. Оптический эффект Магнуса. 5.5. Поляризационные эффекты в нелинейной оптике.
6. Акустика слабоанизотропных сред (161).
 - 6.1. Квазиизотропное приближение геометрической акустики. 6.2. Геометрическая акустика изотропной неоднородно напряженной среды.
7. Квантовомеханические аналоги волн в слабоанизотропных средах (163).
 - 7.1. Эффект Штерна–Герлаха как двойное лучепреломление спинорной волновой функции в магнитном поле. 7.2. Уравнения КИП для спинорной волновой функции. 7.3. Приближение деформированных нормальных волн.
8. Заключение (165).

Список литературы (166).

1. Введение

1.1. Трансформация поляризации векторных полей в слабоанизотропных средах

Проблемы распространения электромагнитных, упругих и иных волн в анизотропных средах составляют заметную часть волновой физики. Одна из актуальных проблем — изучение волн в слабоанизотропных неоднородных средах. С этой проблемой приходится сталкиваться во многих разделах физики. Распространение электромагнитных волн различных диапазонов в слабозамagnetизированной плазме (лабораторной, ионосферной, около-солнечной, межзвездной), прохождение электромагнитных волн через магнитные конденсированные среды,

Ю.А. Кравцов. Институт космических исследований РАН, 117810 Москва, ул. Профсоюзная 84/32, Россия
Тел. (095) 333-52-79

E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

О.Н. Найда. Камышинский технологический институт, 403850 Камышин, ул. Ленина 6а, Волгоградская обл., Россия
Тел. (84457) 3-43-53

А.А. Фуки. Геофизический центр РАН, 117296 Москва, ул. Молодежная 3, Россия
Тел. (095) 930-05-06

Статья поступила 12 мая 1995 г.,
после доработки 12 сентября 1995 г.

пьеzo- и ферромагнетики, световые волны в спиральных средах и жидких кристаллах, поляризационные явления в деформированных световодах, распространение акустических волн в слабоанизотропных и/или слабдеформированных упругих средах, расщепление пучков частиц со спином в магнитных полях — вот далеко не полный перечень вопросов, связанных с теорией волновых процессов в слабоанизотропных средах.

Главная особенность неоднородных слабоанизотропных сред состоит в их способности существенно изменять поляризацию векторных полей той или иной физической природы. Поляризационные изменения на слабоанизотропных участках неоднородной среды обусловлены интенсивным взаимным преобразованием нормальных волн в условиях, когда плавно появляется или снимается поляризационное вырождение. В анизотропной среде электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух нормальных волн, каждая из которых характеризуется определенной, ей присущей поляризацией, тогда как в изотропной среде поперечные электромагнитные волны поляризационно вырождены и состояние их поляризации полностью не определено.

Прежде чем войти в существенно анизотропную среду, поляризационно вырожденная волна испытывает метаморфозу в слабоанизотропном слое, сопрягающем изотропную среду с анизотропной (рис. 1). В глубине анизотропной среды такая волна превращается в суперпозицию независимых нормальных волн.

Линейное взаимодействие волн в неоднородной анизотропной среде, связанное со снятием поляризационного вырождения, — это общезначимая проблема, важная и в теоретическом, и в практическом отношении. Анализ этой проблемы и посвящен обзор.

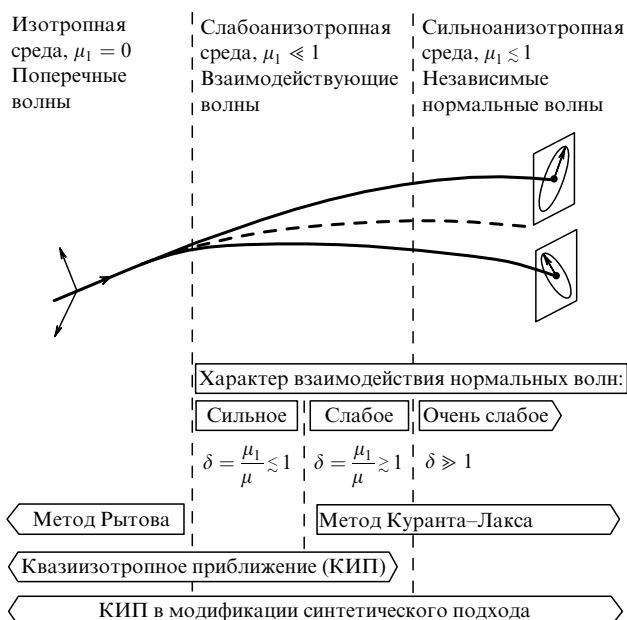


Рис. 1. Превращение поперечной поляризационно вырожденной волны в суперпозицию независимых нормальных волн в слабоанизотропном слое, разделяющем изотропную и анизотропную среды; происходит в области сильного взаимодействия нормальных волн $\delta < 1$. КИП осуществляет сшивку поляризационно вырожденных поперечных волн в изотропных средах (метод Рывова) с независимыми нормальными волнами в анизотропных средах (метод Куранта-Лакса)

1.2. Основные методы описания волновых полей в слабоанизотропных средах

Пусть электромагнитная волна определенной поляризации (скажем, линейной) распространяется из изотропной среды в слабоанизотропную. В слабоанизотропной неоднородной среде нормальные волны подчиняются связанным уравнениям, что позволяет говорить о линейном взаимодействии нормальных волн. Конечное состояние поляризации ("предельная поляризация") векторного волнового поля зависит от характера неоднородности слабоанизотропной среды. Описание процесса трансформации волн в такой среде представляет собой достаточно сложную математическую задачу, не вполне решенную до сих пор.

Удовлетворительная теория линейного взаимодействия нормальных волн была разработана Бадденом [1, 2] для плоскостойкой плазмы (метод Баддена). В слоистой среде, где уравнения Максвелла трансформируются в систему четырех связанных дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, метод Баддена позволяет существенно (до двух) понизить общий порядок этой системы уравнений. Метод Баддена излагается во многих учебниках [3–5] и широко используется в прикладных исследованиях.

Первоначально метод Баддена имел дело только с электромагнитными волнами в плазме, но позднее результаты Баддена были распространены на произвольные диэлектрические слоистые среды, описываемые тензором $\varepsilon_{ik}(z)$ [6, 7]. Всесторонний анализ результатов, вытекающих из метода Баддена, дали Железняков, В. Кочаровский и Вл. Кочаровский [8].

Иной подход к описанию волн в неоднородных слабоанизотропных средах предложил Кравцов [9]. Этот подход — квазиизотропное приближение (КИП) геометрической оптики — не ограничен плоскостойкими средами, а применим к произвольным трехмерно-неоднородным средам. В рамках КИП, как и в методе Баддена, среда считается плавнео неоднородной, т.е. предполагается малость геометрикооптического параметра:

$$\mu \sim \frac{1}{k_0 l} \ll 1, \quad (1.1)$$

где l — характерный масштаб неоднородности среды, $k_0 = \omega/c$.

В основе КИП лежит предположение, что в нулевом приближении электромагнитное поле имеет поперечную структуру, как в изотропной среде. В отличие от изотропной среды, где поляризация вектора поля в плоскости, поперечной лучу, произвольна, в анизотропной среде поляризация поля однозначно определяется тензором анизотропии

$$v_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_0 \delta_{ik}. \quad (1.2)$$

Здесь ε_{ik} — тензор диэлектрической проницаемости, ε_0 — его основная изотропная часть, например $\varepsilon_0 = (1/3)\text{Sp } \hat{\varepsilon}$. Малость анизотропии характеризуется параметром

$$\mu_1 = \max_{i,k} |v_{ik}| \ll 1, \quad (1.3)$$

который в рамках КИП служит параметром асимптотического разложения волнового поля наряду с геометрикооптическим малым параметром μ .

Отношение

$$\delta = \frac{\mu_1}{\mu} \quad (1.4)$$

служит критерием силы анизотропии. При $\delta \gg 1$ уравнения КИП переходят в уравнения независимых нормальных волн, т.е. в уравнения Куранта–Лакса [10–12], тогда как при $\delta \rightarrow 0$ они переходят в уравнения геометрической оптики изотропной среды (метод Рытова [13]). Таким образом, КИП позволяет проследить непрерывный переход от поперечных волн в изотропной ($\delta \rightarrow 0$) среде к независимым нормальным волнам в сильноанизотропной ($\delta \gg 1$) среде (см. рис. 1). Такой переход еще сравнительно недавно считался трудно осуществимым [12].

В дальнейшем уравнения КИП подверглись анализу и обобщениям. Найда применил методы теории возмущений к решению уравнений КИП [14–17], предложил метод расщепленных лучей и сформулировал уравнения КИП для вектора электрической индукции [18, 19], вывел уравнения КИП для электромагнитных волн в движущихся средах [20] и для акустических волн в слабоанизотропных упругих средах [21, 22], совместно с Прудковским сформулировал уравнения КИП для квантовомеханической задачи расщепления пучков с разными спинowymi состояниями в магнитном поле [23].

Оказалось, что уравнения КИП по форме проще уравнений Баддена и чаще удобнее последних при конкретных расчетах, хотя и уступают уравнениям Баддена в универсальности по отношению к степени анизотропии μ_1 : если в рамках КИП должно выполняться условие малости сразу для двух параметров, $\mu \ll 1$, $\mu_1 \ll 1$, то в методе Баддена требуется малость только геометрооптического параметра μ , тогда как параметр анизотропии μ_1 может быть сравним с единицей. Правда, позднее удалось модифицировать КИП таким образом, чтобы описать трансформацию волн и в сильноанизотропных средах с $\mu_1 \sim 1$ (см. раздел 3.4).

С помощью КИП удалось рассчитать эффекты квазипоперечного (к внешнему магнитному полю) распространения электромагнитных волн в трехмерноеоднородной плазме [19, 24, 25], провести анализ ряда задач ионосферного распространения радиоволн [26], выявить поляризационные особенности рассеяния радиоволн в полярной ионосфере [25, 27, 28], рассчитать деполяризацию электромагнитных волн в случайнонеоднородной плазме [29, 30], систематически проанализировать эффекты линейной трансформации волн при вхождении в трехмерноеоднородную плазму [8].

К этому надо добавить ряд сравнительно новых явлений, которые могут быть описаны при помощи КИП: линейное взаимодействие волн в области нейтрального магнитоактивного поля в плазме [5], эффект "касательной конической рефракции" [31], взаимодействие спиральных волн в жидких кристаллах [32], трансформация поляризации света в одномодовых световодах (см. раздел 5.3) и др.

Цель данного обзора состоит в систематическом изложении различных модификаций КИП применительно к описанию разнообразных поляризационных эффектов в неоднородных слабоанизотропных средах.

Модификациям и обобщениям КИП посвящен раздел 3. Раздел 3.3 содержит концептуально новый подход (метод расщепленных лучей), который учитывает расще-

пление лучей, сопровождающее разделение полного поля на независимые нормальные волны. Метод расщепленных лучей допускает эффективное обобщение даже на сильноанизотропные неоднородные среды. Как и в методе Баддена, такое обобщение не требует малости параметра μ_1 , но в то же время, в отличие от метода Баддена, применимого только к плоскостойким неоднородным средам, позволяет описывать трансформацию волн в произвольных трехмерноеоднородных средах.

Отдельные разделы посвящены электромагнитным волнам в магнитоактивной плазме (раздел 4), световым волнам в деформированных средах и световодах (раздел 5), акустическим волнам в деформированных упругих средах (раздел 6).

Саму мысль об использовании анизотропии как малого возмущения в свое время высказал еще Паули [33] в отношении уравнения Дирака в связи с анализом опыта типа Штерна и Герлаха. Анизотропия здесь обусловлена слабым магнитным полем. В дальнейшем результаты Паули были усовершенствованы сначала Галаниным [34], а затем Рубиновым и Келлером [35], хотя и без рассмотрения расщепления пучков поляризованных частиц в магнитном поле. В наиболее отчетливой форме движение спина в магнитном поле по расщепленным траекториям изложено в книге Ахиезера и Берестецкого [36]. Из методических соображений мы сочли целесообразным посвятить поведению спинорной волновой функции частиц в магнитном поле раздел 7, осветив проблему с позиции КИП.

2. Квазиизотропное приближение геометрической оптики трехмерноеоднородных анизотропных сред

2.1. Общая схема метода геометрической оптики

Эйкональная подстановка и уравнение эйконала. Напомним основные элементы метода геометрической оптики на примере уравнений Максвелла [37]. Для простоты ограничимся случаем монохроматической волны (зависящей от времени как $\exp(-i\omega t)$) в неоднородной гиротропной стационарной среде. Поглощением мы пренебрегаем, а магнитную проницаемость считаем равной единице. При этих условиях вектор электрического поля \vec{E} подчиняется уравнению

$$k_0^2 \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = 0 \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \varepsilon_{mn}^* = \varepsilon_{mn} \right). \quad (2.1)$$

При распространении электромагнитных волн в плавноеоднородных средах уравнения Максвелла естественно решать методом геометрической оптики. Пусть для определенности электромагнитная волна с "широким" фазовым фронтом задана "на входе" в неоднородную среду. Задача состоит в том, чтобы найти поле во всех точках неоднородной среды, опираясь на предположение о плавности среды в масштабе длины волн.

Основным геометрооптическим приемом служит эйкональная подстановка

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})], \quad (2.2)$$

позволяющая разделить в волне быстрые осцилляции поля и относительно медленные (в $k_0 l$ раз меньше)

изменения параметров среды и связанных с ними параметров волны.

Эйконоальная подстановка (2.2) приводит векторное уравнение (2.1) к виду

$$k_0^2 \hat{\epsilon} \mathbf{E} + [\mathbf{k}[\mathbf{kE}]] - i([\mathbf{k}, \text{rot } \mathbf{E}] + \text{rot} [\mathbf{kE}]) - \text{rot rot } \mathbf{E} = 0, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{k} = \nabla \varphi$ — локальный волновой вектор.

В нулевом приближении в уравнении (2.3) мы оставляем лишь члены, квадратичные по k_0 и \mathbf{k} . Это дает для $\mathbf{E}^{(0)}$ векторное уравнение:

$$k_0^2 \hat{\epsilon} \mathbf{E}^{(0)} + [\mathbf{k}[\mathbf{kE}^{(0)}]] = 0, \quad (2.4)$$

которое представляет собой систему трех линейных уравнений для компонент $E_x^{(0)}, E_y^{(0)}, E_z^{(0)}$. Условие совместности этой системы приводит, как известно, к уравнению эйконала:

$$\det(k_0^2 \epsilon_{mn} + k_m k_n - \delta_{mn} k^2) = 0 \quad \left(k_m = \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \right). \quad (2.5)$$

Отношение $n(\mathbf{r}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|) = |\mathbf{k}|/k_0$ служит коэффициентом преломления и, в свою очередь, удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\det(n^{-2} \epsilon_{mn} + t_m t_n - \delta_{mn}) = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{t} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ — единичный вектор в направлении \mathbf{k} . При $t_x = t_y = 0, t_z = 1$ следует известная формула:

$$n_{1,2}^{-2} = \frac{1}{2}(\chi_{xx} + \chi_{yy}) \pm \left[\frac{1}{4}(\chi_{xx} - \chi_{yy})^2 + |\chi_{xy}|^2 \right]^{1/2}, \quad (2.7)$$

где χ_{xx}, \dots означают компоненты обратного тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\chi} = \hat{\epsilon}^{-1}$ [38].

Уравнения Гамильтона для лучей. Если рассматривать локальное дисперсионное уравнение (2.5) как алгебраическое уравнение по отношению к частоте $\omega = k_0 c$, то оно, как правило, имеет среди своих решений два положительных:

$$\omega = \Omega_{1,2}(\mathbf{r}; \mathbf{k}). \quad (2.8)$$

В анизотропной среде, за исключением выделенных направлений, $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Будем считать, что $\Omega_1 > \Omega_2$ и что Ω_1 отвечает необыкновенной волне, а Ω_2 — обыкновенной. В изотропной среде $\Omega_1(\mathbf{r}; \mathbf{k}) = \Omega_2(\mathbf{r}; \mathbf{k}) = \varepsilon^{-1/2} |\mathbf{k}|$.

Как в изотропной, так и в анизотропной среде лучи, отвечающие выбору нулевого приближения в форме (2.4), (2.5), даются уравнениями Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \Omega_a}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \Omega_a}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.9)$$

где t — время, а $\partial \Omega_a / \partial \mathbf{k}$ — групповая скорость. Здесь a — поляризационный индекс волны: $a = 1$ для необыкновенной и $a = 2$ для обыкновенной волн.

В изотропной среде уравнения (2.9), отвечающие разным значениям a , совпадают между собой. Их можно упростить в соответствии с (2.9):

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{ds} = k_0 \nabla n, \quad ds = dt \frac{d\Omega}{d\mathbf{k}}. \quad (2.10)$$

Эйконалы φ_1 и φ_2 нормальных волн даются формулами

$$\varphi_a = \int \mathbf{k}_a d\mathbf{r}_a = \int \mathbf{k}_a \frac{\partial \Omega_a}{\partial \mathbf{k}} \bigg|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_a} dt, \quad a = 1, 2. \quad (2.11)$$

В случае изотропной среды формула (2.11) упрощается:

$$\varphi = k_0 \int \varepsilon^{1/2} ds = k_0 \int n ds. \quad (2.12)$$

Все формулы для лучей, эйконалов и коэффициентов преломления, свойственные обыкновенным и необыкновенным лучам в анизотропной среде, непрерывно переходят в соответствующие "изотропные" формулы при непрерывном переходе ($v_{\alpha\beta} \rightarrow 0$) от анизотропной среды к изотропной. Такой непрерывностью, однако, не обладают уравнения для амплитуд волн, взятые из традиционных геометрооптических теорий, т.е. уравнения Куранта для анизотропных сред, с одной стороны, и уравнения Рытова для изотропных, с другой.

Независимые нормальные волны. В случае анизотропной среды уравнение (2.4) однозначно определяет в нулевом приближении поляризацию каждого из решений $\mathbf{e}_1^{(0)}, \mathbf{e}_2^{(0)}$ уравнения (2.1) (или каждого из решений $\mathbf{E}_1^{(0)}, \mathbf{E}_2^{(0)}$ уравнения (2.3)), отвечающих необыкновенной либо обыкновенной волнам:

$$\mathbf{E}_a^{(0)} = C_a \mathbf{e}_a, \quad \tilde{\mathbf{E}}_a^{(0)} = C_a \mathbf{e}_a \exp(i\varphi_a) \quad (a = 1, 2). \quad (2.13)$$

Поляризационные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 удовлетворяют векторному уравнению (2.4). Поляризация каждой из нормальных волн по правилам, определенным уравнением (2.4), отслеживает повороты осей анизотропии среды, задаваемых тензором $\hat{\epsilon}(\mathbf{r})$.

Выражения для $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ наиболее просто даются в правой ортогональной системе вещественных ортов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{t}$. В этом случае, как известно [38],

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= (e_{11}\mathbf{q}_1 + e_{12}\mathbf{q}_2)n_1^2, \quad \mathbf{d}_2 = (e_{21}\mathbf{q}_1 + e_{22}\mathbf{q}_2)n_2^2, \quad \mathbf{d}_3 = 0, \\ \mathbf{e}_1 &= \hat{\chi}\mathbf{d}_1 = e_{11}\mathbf{q}_1 + e_{12}\mathbf{q}_2 + e_{13}\mathbf{t}, \\ \mathbf{e}_2 &= \hat{\chi}\mathbf{d}_2 = e_{21}\mathbf{q}_1 + e_{22}\mathbf{q}_2 + e_{23}\mathbf{t}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где коэффициенты преломления $n_{1,2}$ даются формулой (2.7). Через e_{ij} здесь обозначены величины

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{22} = (1 + K_1^2)^{-1/2}, \quad e_{12} = e_{21} = -iK_1(1 + K_1^2)^{-1/2}, \\ e_{13} &= n_1^2(\chi_{31}e_{11} + \chi_{32}e_{12}), \quad e_{23} = n_2^2(\chi_{31}e_{21} + \chi_{32}e_{22}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

отвечающие нормировке поперечной (относительно \mathbf{t}) компоненты $\mathbf{e}_{a\perp}$ к единице: $|\mathbf{e}_{a\perp}|^2 = 1$. Кроме того, в (2.15) обозначено

$$\begin{aligned} K_1 &= JK^J, \quad J = -\text{sgn Im } \chi_{12}, \quad K = Q - (1 + Q^2)^{1/2}, \\ Q &= \frac{i(\chi_{22} - \chi_{11})}{\chi_{12}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Курантом и Лаксом [10–12] было получено обыкновенное дифференциальное уравнение для каждой из амплитуд C_a в формулах (2.13). Выражения (2.13) с этими амплитудами хорошо аппроксимируют точные решения, но лишь при достаточно сильной анизотропии,

когда параметр $\delta = \mu_1/\mu$ велик, $\delta \gg 1$, и теряют силу при слабой анизотропии. В некоторых случаях трансформацию волн в рамках теории нормальных волн удается рассчитать по теории возмущений [3, 38a].

Поляризационная структура поля в изотропной среде. В случае изотропной среды уравнение (2.4) уже не определяет однозначно ориентацию векторной амплитуды $\mathbf{E}^{(0)}$, что отвечает поляризационному вырождению. Из (2.4) в этом случае следует лишь, что

$$\mathbf{E}^{(0)} = C_1 \mathbf{q}_1 + C_2 \mathbf{q}_2, \quad \tilde{\mathcal{E}}^{(0)} = (C_1 \mathbf{q}_1 + C_2 \mathbf{q}_2) \exp\left(ik_0 \int n ds\right), \quad (2.17)$$

где \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 — любые линейно независимые векторы, перпендикулярные касательной \mathbf{t} . В частности, в качестве \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 можно выбирать нормаль \mathbf{n} и бинормаль \mathbf{b} к лучу [13, 37], так что

$$\mathbf{E}^{(0)} = E_n \mathbf{n} + E_b \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathcal{E}}^{(0)} = (E_n \mathbf{n} + E_b \mathbf{b}) \exp\left(ik_0 \int n ds\right). \quad (2.18)$$

Таким образом, в случае изотропной среды общий вид нулевого приближения (2.18) радикально отличается от соответствующей формулы (2.13) для независимых нормальных волн. Соответственно для амплитуд C_1, C_2 в (2.17) получается не одно уравнение, а система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Формальное различие между (2.13) и (2.18) настолько затрудняет плавное сопряжение поляризационно вырожденных поперечных волн в изотропной среде с независимыми нормальными волнами в анизотропной среде, что долгое время не были даже ясны пути решения этой задачи.

Между тем, плавное сопряжение волн, переходящих из изотропной среды в анизотропную, удается получить в рамках квазиизотропного приближения (КИП), которое, с одной стороны, сохраняет поперечную структуру поля в изотропной среде, а с другой — допускает переход к независимым нормальным волнам в существенно анизотропной среде.

Универсальная геометрооптическая процедура. Для сопоставления различных, на первый взгляд даже несовместимых разновидностей лучевой теории удобно записать уравнения Максвелла в такой форме, чтобы из нее естественно вытекали все известные варианты лучевого метода. Рискнув несколько преувеличить значение предлагаемого подхода и в то же время не желая отказываться от вполне подходящего к делу термина, мы назовем излагаемую ниже процедуру *универсальной*, тем более, что эта процедура приводит еще и к новым результатам, например к расщеплению лучей.

В трехмерноеоднородной среде построение лучевых решений упрощается благодаря тому, что вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \tilde{\mathcal{E}}$ почти поперечен (в нулевом приближении — строго поперечен) по отношению к волновому вектору \mathbf{k} . Указанная поперечность имеет место как в изотропной, так и в анизотропной среде. Поэтому естественно использовать в уравнении (2.3) правую тройку ортов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{t}$, такую, что $(\mathbf{q}_m^*, \mathbf{q}_n) = \delta_{mn}$ ($m, n = 1, 2$).

Произведем в уравнении (2.3) подстановку

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{q}_1 + E_2 \mathbf{q}_2 + E_3 \mathbf{t} \quad (2.19)$$

и введем обозначение

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E} = D_1 \mathbf{q}_1 + D_2 \mathbf{q}_2 + D_3 \mathbf{t}. \quad (2.20)$$

Результат подстановки (2.19) в уравнения Максвелла (2.3) умножим скалярно на некоторые пока произвольные (не обязательно поперечные, но и не коллинеарные лучу) векторы $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$, а также на орт \mathbf{t} . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 (\mathbf{D} - n^2 [\mathbf{t}[\mathbf{t} \mathbf{E}]]) - ik_0^{-1} \mathbf{Q}_1 (n[\mathbf{t}, \text{rot } \mathbf{E}] + \text{rot}[\mathbf{n} \mathbf{t}, \mathbf{E}]) + \\ + k_0^{-2} \mathbf{Q}_1 \text{rot rot } \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{Q}_2 (\mathbf{D} - n^2 [\mathbf{t}[\mathbf{t} \mathbf{E}]]) - ik_0^{-1} \mathbf{Q}_2 (n[\mathbf{t}, \text{rot } \mathbf{E}] + \text{rot}[\mathbf{n} \mathbf{t}, \mathbf{E}]) + \\ + k_0^{-2} \mathbf{Q}_2 \text{rot rot } \mathbf{E} = 0; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$D_3 - ik_0^{-1} \mathbf{t} (n[\mathbf{t}, \text{rot } \mathbf{E}] + \text{rot}[\mathbf{n} \mathbf{t}, \mathbf{E}]) + k_0^{-2} \mathbf{t} \text{rot rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2.22)$$

Выбор векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ и $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ диктуется соображениями удобства.

Преимущество записи (2.21), (2.22) перед (2.3) состоит в том, что уравнение (2.22) делает явной малость продольной компоненты D_3 . В итоге мы получаем основание полностью исключить продольную компоненту $D_3^{(0)}$ из нулевого приближения: $D_3^{(0)} = 0$.

Универсальные соотношения (2.21) и (2.22) позволяют построить обыкновенные дифференциальные уравнения для амплитудных коэффициентов во всех модификациях метода геометрической оптики: в методе Рытова (раздел 2.2), в методе независимых нормальных волн (метод Куранта–Лакса, раздел 2.3) и в квазиизотропном приближении (раздел 2.4). Эти соотношения применимы и в методе расщепленных лучей (разделы 3.3 и 3.4).

2.2. Геометрическая оптика изотропных сред (метод Рытова)

В изотропной среде имеет место поляризационное вырождение, и поле нулевого приближения принимает вид (2.18), т.е. в этом случае $\mathbf{q}_1 = \mathbf{n}, \mathbf{q}_2 = \mathbf{b}$. В универсальных соотношениях (2.21) естественно выбрать также $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{n}, \mathbf{Q}_2 = \mathbf{b}$.

Тогда из (2.21) следует система двух уравнений для амплитуд нулевого приближения E_n и E_b [13, 37]:

$$\begin{aligned} \frac{dE_n}{ds} - T^{-1} E_b + E_n \left(d \ln \frac{\varepsilon^{1/4}}{ds} + \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{t} \right) = 0, \\ \frac{dE_b}{ds} + T^{-1} E_n + E_b \left(d \ln \frac{\varepsilon^{1/4}}{ds} + \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{t} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $T = \mathbf{b} \, d\mathbf{n}/ds$ — радиус кручения луча. От последних слагаемых в каждом из уравнений системы (2.23) легко избавиться, если ввести нормализованные амплитуды Γ_n и Γ_b , положив

$$\tilde{\mathcal{E}} = \Phi_0 \varepsilon^{-1/4} (\Gamma_n \mathbf{n} + \Gamma_b \mathbf{b}) \exp\left(ik_0 \int n ds\right), \quad (2.24)$$

где Φ_0 — вещественный множитель, удовлетворяющий закону сохранения потока энергии в лучевой трубке $\text{div}(\Phi_0^2 \mathbf{t}) = 0$. Нормализованные амплитуды имеют единичную интенсивность: $|\Gamma_n|^2 + |\Gamma_b|^2 = 1$.

С учетом (2.24) уравнения (2.23) переписываются в виде

$$\frac{d\Gamma_n}{ds} - T^{-1} \Gamma_b = 0, \quad \frac{d\Gamma_b}{ds} + T^{-1} \Gamma_n = 0. \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует известное уравнение Рытова [13]:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -T^{-1} \quad (2.26)$$

для угла

$$\vartheta = \arctg \frac{E_b}{E_n} = \arctg \frac{\Gamma_b}{\Gamma_n}$$

между вектором \mathbf{E} и ортом \mathbf{n} . Эти уравнения полностью определяют поле нулевого приближения в изотропной среде. Рытовский закон вращения поляризации (2.26) является частным случаем более общей закономерности — эффектов Берри [80, 80a].

2.3. Невзаимодействующие нормальные волны в анизотропной среде (метод Куранта–Лакса)

В теории Куранта–Лакса для каждой из скалярных амплитуд C_1 и C_2 в (2.13) выводится обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение переноса), локализованное вдоль лучей (2.9). Применительно, например, к необыкновенному лучу (т.е. в отношении C_1) имеем уравнение

$$\frac{dC_1}{dt} + P^1 C_1 = 0, \quad (2.27)$$

где $P^1 = (1/2)c(\mathbf{h}_1^* \text{rot} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^* \text{rot} \mathbf{h}_1)$.

В первом порядке теории возмущений амплитуда $C_2^{(1)}$ дается выражением

$$C_2^{(1)} = ik^{-2}(n_1^2 - n_2^2)^{-1} \mathbf{e}_2^* \{ [\mathbf{k}_1, \text{rot}(C_1 \mathbf{e}_1)] + \text{rot}[\mathbf{k}_1, C_1 \mathbf{e}_1] \}. \quad (2.28)$$

Нетрудно видеть, что поправка (2.28) расходится при подходе к изотропной среде, где $n_1 = n_2$. Это и означает, что метод Куранта–Лакса при $\delta \ll 1$ теряет силу (расходится) и не способен решить проблему предельной поляризации.

2.4. Волны в слабоанизотропной среде. Квазиизотропное приближение (КИП)

Основные уравнения КИП. Квазиизотропное приближение основано на выборе нулевого приближения $\mathcal{E}^{(0)}$ в такой же форме (2.18), как если бы анизотропии не было [9, 37], т.е. если бы обращался в нуль тензор анизотропии $v_{mn} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_0 \delta_{mn}$. В рамках этого подхода нулевое приближение имеет вид поперечной волны (2.24), где следует подставить $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

Таким образом, мы применяем изотропную эйкональную формулу (2.24) к описанию волн в слабоанизотропной среде. Орты \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} представляют собой касательную, нормаль и бинормаль к "изотропному" лучу. Последний подчиняется уравнениям Гамильтона (2.10), в которых следует подставить $n = n_0 = \varepsilon_0^{1/2}$. На рис. 1 "изотропный" луч изображен штриховой линией. В дальнейшем мы рассмотрим усовершенствованный вариант метода, при котором место "изотропного" луча занимают "расщепленные" лучи, отвечающие нормальным волнам (метод расщепленных лучей, разделы 3.3 и 3.4).

Условия совместимости (2.21) уравнений первого приближения приобретают (в ортах \mathbf{n} , \mathbf{b}) вид

$$\frac{d\Gamma_n}{ds} - \frac{1}{2} ik_0 n_0^{-1} (v_{nn} \Gamma_n + v_{nb} \Gamma_b) - T^{-1} \Gamma_b = 0,$$

$$\frac{d\Gamma_b}{ds} - \frac{1}{2} ik_0 n_0^{-1} (v_{bn} \Gamma_n + v_{bb} \Gamma_b) + T^{-1} \Gamma_n = 0. \quad (2.29)$$

Здесь индексы n , b отвечают нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} к лучу.

Вводя поляризационный параметр $\vartheta = \arctg E_b/E_n$ (вообще говоря, комплексный), можно переписать систему уравнений (2.29) как разновидность уравнения Риккати [9, 37]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} + \left[T^{-1} + \frac{1}{2} ik_0 n_0^{-1} (v_{nb} - v_{bn}) \right] + \\ + \frac{1}{4} ik_0 n_0^{-1} [(v_{nn} - v_{bb}) \sin 2\vartheta - (v_{nb} + v_{bn}) \cos 2\vartheta] = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Комплексный угол ϑ характеризует все параметры эллипса поляризации. Вещественная часть $\vartheta' = \text{Re} \vartheta$ дает наклон большой оси эллипса поляризации относительно нормали \mathbf{n} к лучу. Гиперболический тангенс мнимой части $\vartheta'' = \text{Im} \vartheta$ равен отношению малой оси b к большой a : $|\text{th} \vartheta''| = b/a$, тогда как знак величины ϑ'' характеризует направление вращения векторов поля: при $\vartheta'' > 0$ вектор вращается по часовой стрелке, а при $\vartheta'' < 0$ — против часовой стрелки, если смотреть вдоль луча.

В изотропной среде ($\hat{v} = 0$) уравнения (2.29) переходят в уравнения Рытова (2.25), а уравнение типа Риккати (2.30) — в рытовский закон вращения плоскости поляризации (2.26).

Уравнения КИП в подвижных осях. Эйкональную формулу (2.24) и уравнения (2.29) во многих случаях удобно записать в подвижных осях $\mathbf{q}_1(s)$, $\mathbf{q}_2(s)$, удовлетворяющих условию ортогональности $\mathbf{q}_1 \perp \mathbf{q}_2 \perp \mathbf{t}$. В качестве осей \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 можно использовать, например, собственные оси двумерного тензора с компонентами $\text{Re}(\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{nb}, \varepsilon_{bn}, \varepsilon_{bb})$.

Положив $\mathbf{q}_1 = \mathbf{n} \cos \psi + \mathbf{b} \sin \psi$, $\mathbf{q}_2 = -\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{b} \cos \psi$, где ψ — переменный угол поворота от нормали \mathbf{n} к орту \mathbf{q}_1 : $\psi = \arctg(\mathbf{b}\mathbf{q}_1/\mathbf{n}\mathbf{q}_1)$, и, используя подстановку

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathbf{E} \exp \left(ik_0 \int n_0 ds \right), \quad \mathbf{E} = \Phi_0 \varepsilon_0^{-1/4} (\Gamma_1 \mathbf{q}_1 + \Gamma_2 \mathbf{q}_2), \quad (2.31)$$

для $\Gamma_{1,2}$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_1}{ds} - \frac{1}{2} ik_0 \varepsilon_0^{-1/2} (v_{11} \Gamma_1 + v_{12} \Gamma_2) - T_{\text{ef}}^{-1} \Gamma_2 = 0, \\ \frac{d\Gamma_2}{ds} - \frac{1}{2} ik_0 \varepsilon_0^{-1/2} (v_{21} \Gamma_1 + v_{22} \Gamma_2) + T_{\text{ef}}^{-1} \Gamma_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Индексы 1, 2 отвечают здесь ортам \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 : $v_{\alpha\beta} = (\mathbf{q}_\alpha, \hat{v} \mathbf{q}_\beta)$, а величина

$$T_{\text{ef}}^{-1} = T^{-1} + \frac{d\psi}{ds} \quad (2.33)$$

представляет собой эффективное кручение луча в подвижных осях \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 . Можно показать, что квазиизотропное приближение инвариантно в первом порядке по μ_1 по отношению к указанным вариациям функции $\varepsilon_0(\mathbf{r})$.

Переход от КИП к "упрощенным" нормальным волнам. В однородной среде, где $T^{-1} = 0$, $\Phi_0 = \text{const}$,

$\varepsilon_{\alpha\beta} = \text{const}$, уравнения (2.29) дают выражения, напоминающие независимые нормальные волны:

$$\vec{E}_{1,2} = C_{1,2} \vec{e}_{1,2} \exp(ik_0 \vec{n}_{1,2} s). \quad (2.34)$$

Отличие от точных нормальных волн состоит в том, что вместо точных поляризационных векторов $\mathbf{e}_{1,2}$ и показателей преломления $n_{1,2}$ сюда входят упрощенные выражения $\tilde{\mathbf{e}}_{1,2}$ и $\tilde{n}_{1,2}$, отличающиеся от точных значений (2.7) и (2.15) отбрасыванием членов второго порядка малости относительно анизотропии $\mu_1^2 \sim |v_{\alpha\beta}|^2$. Поэтому выражения (2.34) можно назвать "упрощенными" нормальными волнами.

Методы решения уравнений КИП. Уравнения КИП (2.29) представляют собой систему двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Такие уравнения встречаются во многих разделах физики, описывая ряд родственных явлений: адиабатные возмущения в нестационарных задачах квантовой механики и явление переброса спина в пучках поляризованных частиц [39], линейное взаимодействие нормальных колебаний в нестационарных системах [40], трансформация волн в нестационарных волноводах [41]. Для решения связанных уравнений разработаны специальные методы, описанные, например, в книге [42].

Методы, развитые при решении упомянутых проблем, могут оказаться полезными и при решении уравнений КИП. В частности, полезными могут быть различные варианты теории возмущений и асимптотических методов, метод линеаризации коэффициентов и ряд других подходов. Некоторые примеры мы приведем ниже.

3. Модификации и обобщения уравнений КИП

3.1. Уравнения КИП для вектора электрической индукции

Предположение о поперечности поля \vec{E} , принятое в первоначальной версии КИП, справедливо лишь в рамках нулевого приближения. Продольная компонента поля E_3 в действительности отлична от нуля и, в принципе, может быть найдена в первом приближении по параметру μ_1 . Между тем, если построить уравнения КИП для вектора индукции \vec{D} , который для плоских волн в однородной среде всегда обладает свойством перпендикулярности, то продольную компоненту E_3 можно найти уже из нулевого приближения. Модификация КИП для вектора \vec{D} была реализована Найдой [18, 19, 31].

В рамках стандартного КИП связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} в нулевом приближении осуществляется формулами

$$D_1 = \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2, \quad D_2 = \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2, \quad (3.1)$$

тогда как в действительности они связаны соотношениями

$$D_1 = \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 = \det(\hat{\varepsilon}) \frac{\chi_{22} E_1 - \chi_{12} E_2}{\varepsilon_{33}},$$

$$D_2 = \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 = \det(\hat{\varepsilon}) \frac{-\chi_{21} E_1 + \chi_{11} E_2}{\varepsilon_{33}}, \quad (3.2)$$

которые вытекают из условия поперечности вектора \mathbf{D} по отношению к волновому вектору \mathbf{k} , т.е. из условия $D_3 = 0$.

Без риска ухудшить точность КИП, т.е. с точностью до членов второго порядка малости относительно μ_1 , заменим в (3.1) множитель $\det(\hat{\varepsilon})/\varepsilon_{33}$ на ε_0^2 и учтем это при переходе от уравнений (2.21) к уравнениям КИП для вектора \vec{D} . В результате вид формулы (2.31) и уравнения (2.32) останутся без изменений, но фигурирующие там компоненты тензора v_{ik} следует заменить значениями v'_{ik} , задаваемыми формулами

$$\begin{aligned} v'_{11} &= \varepsilon_0^2 (\varepsilon_0^{-1} - \chi_{11}), & v'_{12} &= -\varepsilon_0^2 \chi_{12}, \\ v'_{21} &= -\varepsilon_0^2 \chi_{21}, & v'_{22} &= \varepsilon_0^2 (\varepsilon_0^{-1} - \chi_{22}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Компоненты используемого здесь тензора анизотропии $v'_{ik} = \varepsilon_0^2 (\varepsilon_0^{-1} \delta_{ik} - \chi_{ik})$ отличаются от исходного тензора $v_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_0 \delta_{ik}$ только членами второго порядка малости по параметру μ_1 , поскольку

$$\chi_{ik} = (\hat{\varepsilon}^{-1})_{ik} = \varepsilon_0^{-1} \delta_{ik} - \varepsilon_0^{-2} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_0 \delta_{ik}) + O(\mu_1^2).$$

При замене v_{ik} на v'_{ik} все уравнения КИП, записанные ранее (см. раздел 2.4) для компонент вектора \mathbf{E} , становятся справедливыми для аналогичных компонент вектора \mathbf{D} .

Хотя формальные изменения, связанные с заменой v_{ik} на v'_{ik} , на первый взгляд незначительны, "новые" уравнения КИП имеют ряд преимуществ перед старыми. Во-первых, отличия в квадратичных по μ_1 членах могут быть существенными при приближении к границам применимости. В этом отношении уравнения для вектора \mathbf{D} имеют преимущества перед уравнениями для вектора \mathbf{E} . Во-вторых, поперечность \mathbf{D} радикально облегчает описание расщепления "изотропных" лучей на обыкновенные и необыкновенные лучи в области взаимодействия. Этот аспект проблемы мы рассмотрим в разделах 3.3 и 3.4.

3.2. Уравнения КИП в форме уравнений для взаимодействующих мод

Деформированные нормальные волны. Уравнениям КИП можно придать форму, описывающую взаимодействие нормальных волн. В качестве вещественных ортов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ возьмем собственные вещественные орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ двумерного тензора $\chi_{nn}, \chi_{nb}, \chi_{bn}, \chi_{bb}$, играющие роль векторов поляризации. Эти орты ортогональны лучу.

Переход к нормальным волнам можно осуществить двумя различными, хотя и эквивалентными способами, в зависимости от того, к какой из двух волн, необыкновенной или обыкновенной, мы хотим приблизиться.

Поле, отвечающее необыкновенной волне, запишется как

$$\begin{aligned} \vec{E}_e &= \Phi_0 n_0^{3/2} (n_1^{-2} C_1 \mathbf{e}_1 + n_2^{-2} C_2 \mathbf{e}_2) \times \\ &\times \exp \left[ik_0 \int \left(\frac{3}{2} n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 n_1^{-2} \right) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Проектируя уравнение (2.21) на векторы $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{e}_1^*, \mathbf{Q}_2 = \mathbf{e}_2^*$, получаем уравнения для определения амплитудных

коэффициентов C_1 и C_2 [18]:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{ds} + p_{11}C_1 + p_{12}C_2 &= 0, \\ \frac{dC_2}{ds} + ik_0(n_1 - n_2)C_2 + p_{21}C_1 + p_{22}C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{22}^* = \frac{2iJK}{1+K^2} T_{\text{ef}}^{-1} = -\frac{iJ}{(1+Q^2)^{1/2}} T_{\text{ef}}^{-1}, \\ p_{12} &= -p_{21}^* = i\Psi + \frac{K^2 - 1}{1+K^2} T_{\text{ef}}^{-1} = i\Psi - \frac{Q}{(1+Q^2)^{1/2}} T_{\text{ef}}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Величины J , K и q даются формулами (2.16); роль вектора \mathbf{t} в этих формулах выполняет касательный орт к "изотропному" лучу. Кроме того, здесь $\Psi = (-1/2) d \arctg Q/ds$.

Связанные уравнения (3.5) для амплитуд C_1 и C_2 описывают взаимодействие нормальных мод 1 и 2. В однородной среде, где все $p_{\alpha\beta} = 0$, уравнения (3.5) допускают решение $C_1 = \text{const} \neq 0$, $C_2 = 0$, отвечающее обыкновенной волне \vec{E}_1 , описываемой формулой (2.34).

Аналогичным образом для приближения к обыкновенной волне положим

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \Phi_0 n_0^{3/2} (n_1^{-2} C_1' \mathbf{e}_1 + n_2^{-2} C_2' \mathbf{e}_2) \times \\ &\times \exp \left[ik_0 \int \left(\frac{3}{2} n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 n_2^{-2} \right) ds \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где амплитудные коэффициенты C_1' и C_2' подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dC_1'}{ds} + ik_0(n_2 - n_1)C_1' + p_{11}C_1' + p_{12}C_2' &= 0, \\ \frac{dC_2'}{ds} + p_{21}C_1' + p_{22}C_2' &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

а коэффициенты p_{ik} по-прежнему даются формулами (3.6).

С точностью до членов порядка μ_1^2 показатели экспонент в формулах (3.4) и (3.7) равны соответственно $ik_0 \int n_1 ds$ и $ik_0 \int n_2 ds$. Заметим, что эти соотношения становятся точными при выборе $n = n_1$ в формуле (3.4) и при выборе $n = n_2$ в формуле (3.7).

Деформированные нормальные волны. В области сравнительно сильного двулучепреломления $\delta \gg 1$, где нормальные волны слабо взаимодействуют друг с другом, можно построить решения уравнений (3.5) и (3.8) в форме деформированных нормальных волн, близких к нормальным волнам (2.13). Для этого прибегнем к помощи итерационного подхода, предложенного Найдой [18]. В нулевом приближении примем, что существует только одна нормальная волна, притом в недеформированном виде (2.13). Эту волну примем в качестве "затравки" в итерационной процедуре. Скажем, необыкновенная волна (с индексом 1) будет служить затравкой с $C_1^{(0)} \neq 0$ и $C_2^{(0)} = 0$ в уравнении (3.5), тогда как обыкновенная волна будет затравкой к уравнению (3.8) при $C_1^{(0)} = 0$ и $C_2^{(0)} \neq 0$. В интересующей нас области слабого взаимодействия волн коэффициент $k_0(n_1 - n_2)$ велик по сравнению с $1/l$. Поэтому для C_1 и C_2 можно построить

формальное асимптотическое разложение по обратным степеням большого параметра $\delta = k_0(n_1 - n_2)l \gg 1$.

В случае "необыкновенной" затравки это означает, что начальные члены разложения $C_\alpha = C_\alpha^{(0)} + C_\alpha^{(1)} + C_\alpha^{(2)} + \dots$ ($\alpha = 1, 2$) в ряд по обратным степеням большого параметра $\delta \gg 1$ следует подчинить условию

$$C_1^{(0)}(s_{\text{in}}) \neq 0, \quad C_2^{(0)} \equiv 0. \quad (3.9)$$

В силу равенства нулю коэффициента $C_2^{(0)}$ система уравнений (3.5) упрощается и теперь определяет динамику поведения только коэффициента $C_1^{(0)}$:

$$\frac{dC_1^{(0)}}{ds} + p_{11}C_1^{(0)} = 0.$$

Последующие члены асимптотического разложения по степеням $1/\delta$ находятся из рекуррентных формул

$$C_2^{(m)} = ik_0^{-1}(n_1 - n_2)^{-1} \left[\frac{dC_2^{(m-1)}}{ds} + p_{21}C_1^{(m-1)} + p_{22}C_2^{(m-1)} \right],$$

$$\frac{dC_1^{(m)}}{ds} + p_{11}C_1^{(m)} + p_{12}C_2^{(m)} = 0, \quad C_1^{(m)}(s_{\text{in}}) \equiv 0 \quad (m \geq 1). \quad (3.10)$$

Аналогичную процедуру можно осуществить и в отношении уравнений (3.8) с "обыкновенной" затравкой $C_2^{(0)} \neq 0$ и $C_1^{(0)} \equiv 0$.

Коэффициенты, полученные из "необыкновенной" затравки (3.9) в области слабого взаимодействия $\delta = k_0 l |n_1 - n_2| \gg 1$, удовлетворяют оценке

$$|C_2| \ll |C_1|, \quad (3.11)$$

которая отвечает *слабой деформации* нормальных волн. В этих условиях не будет большой ошибкой заменить n_2^{-2} на n_1^{-2} перед малой амплитудой C_2 в (3.4) и n_0 на n_1 в показателе экспоненты этой формулы. В результате формула КИП (3.4) для деформированной необыкновенной компоненты упрощается и приобретает вид

$$\vec{E}_e = \Phi_0 n_1^{-1/2} (C_1 \mathbf{e}_1 + C_2 \mathbf{e}_2) \exp \left(ik_0 \int n_1 ds \right). \quad (3.12)$$

Соответствующие операции с обыкновенной затравкой $C_1^{(0)} = 0$, $C_2^{(0)} \neq 0$ приводят к деформированной обыкновенной волне

$$\vec{E}_o = \Phi_0 n_2^{-1/2} (C_1' \mathbf{e}_1 + C_2' \mathbf{e}_2) \exp \left(ik_0 \int n_2 ds \right). \quad (3.13)$$

Важно, что оба решения, (3.12) и (3.13), при $\delta = \mu_1/\mu \gg 1$ не содержат осциллирующих членов. При переходе в область относительно слабого двулучепреломления $\delta = \mu_1/\mu \lesssim 1$, где итерации перестают сходиться, осцилляции в амплитудах волн (3.12) и (3.13) тоже не появляются, но теперь уже по другой причине, а именно, в силу малости параметра $\delta \lesssim 1$. В итоге волновые решения (3.12) и (3.13) по своей фазовой структуре близки к нормальным волнам (2.13) как при $\delta \gg 1$, так и при $\delta \lesssim 1$, но имеют деформированную по сравнению с (2.13) поляризационную структуру. Деформации поляризации достаточно слабы при $\delta \gg 1$, но усиливаются (до 100 %) при $\delta \lesssim 1$. Решения (3.12) и (3.13) мы назовем *деформированными нормальными волнами*. С их помо-

стью легко устанавливается связь КИП с уравнениями Баддена, а также описывается процесс расщепления необыкновенных и обыкновенных лучей.

Уравнения для взаимодействующих мод. Связь с уравнениями Баддена. Если пренебречь малыми поправками порядка μ , то формулу (3.4) для необыкновенной затравки и соответствующую формулу для обыкновенной затравки можно представить в объединенном виде:

$$\vec{E} = \Phi_0(n_1^{-1/2}F_1\mathbf{e}_1 + n_2^{-1/2}F_2\mathbf{e}_2).$$

Здесь амплитуды

$$F_1 = C_1 \exp i\varphi_1 + C'_1 \exp i\varphi_2,$$

$$F_2 = C_2 \exp i\varphi_1 + C'_2 \exp i\varphi_2$$

удовлетворяют уравнениям КИП в форме *взаимодействующих нормальных волн*:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{ds} - ik_0 n_1 F_1 + p_{11} F_1 - p_{12} F_2 &= 0, \\ \frac{dF_2}{ds} - ik_0 n_2 F_2 + p_{21} F_1 + p_{22} F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

с теми же коэффициентами, что и в уравнениях (3.5) и (3.8). В плоскостной среде эти уравнения переходят в уравнения взаимодействующих волн Баддена [1–5].

Таким образом, КИП вполне органично сопрягается с классическими методами Баддена и Куранта–Лакса. Достоинство КИП состоит в том, что оно применимо не только для плоскостной среды, как метод Баддена, но также и для трехмерноеоднородной среды. Недостаток же в том, что уравнения КИП ограничены условием слабой анизотропии $\mu_1 \ll 1$, тогда как методы Баддена и Куранта–Лакса не имеют этого ограничения. В разделе 3.4 мы укажем, как модифицировать уравнения КИП, чтобы они были пригодны и при сильной анизотропии ($\mu_1 \sim 1$).

3.3. Метод расщепленных лучей в случае слабой анизотропии

Уравнения КИП, опирающиеся на расщепленные лучи. При всем внешнем сходстве упрощенных нормальных волн (3.12) и (3.13), которые получаются из КИП, с независимыми нормальными волнами Куранта и Лакса между ними сохраняется существенное различие: исходная форма КИП игнорирует расщепление лучей на обыкновенные и необыкновенные, тогда как нормальные волны распространяются по различным лучам. Вследствие этого фазы упрощенных волн тоже отличаются от точных выражений (2.11). Однако оба эти недостатка КИП сравнительно легко устранимы. Этой целью служит предложенная Найдой [18, 19, 31] модификация КИП, которую мы назовем *методом расщепленных лучей*.

Основная идея излагаемого подхода состоит в том, чтобы отказаться от изотропных лучей и заменить их расщепленными лучами упрощенных нормальных волн (см. рис. 1). На этих лучах надлежит далее построить деформированные нормальные волны с помощью уравнений типа (3.5) и (3.8). Лучи, отвечающие упрощенным нормальным волнам, удовлетворяют уравнениям (2.10), в которых надо сделать обычные для КИП упрощения, а именно, отбросить слагаемые порядка μ_1^2 .

Для того чтобы было удобнее пользоваться малостью анизотропии $v_{\alpha\beta} \sim \mu_1 \ll 1$, поперечные лучу орты \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 целесообразно выразить через орты $\tilde{\mathbf{n}}_1$ и $\tilde{\mathbf{b}}_1$, которые были бы близки соответственно к нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} "изотропного" луча. Например, в качестве $\tilde{\mathbf{b}}$ можно взять вектор, перпендикулярный одновременно касательной к лучу \mathbf{t}_1 и нормали к изотропному лучу \mathbf{n} . Тогда

$$\mathbf{q}_1 = \tilde{\mathbf{n}} \cos \psi + \tilde{\mathbf{b}} \sin \psi, \quad \mathbf{q}_2 = -\tilde{\mathbf{n}} \sin \psi + \tilde{\mathbf{b}} \cos \psi.$$

По аналогии в разделе 3.1 будем искать решения уравнений (2.1) вдоль необыкновенных лучей (с индексом 1) в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_e &= \Phi_1 n_1^{3/2} \hat{\chi} (\tilde{F}_1 \mathbf{q}_1 + \tilde{F}_2 \mathbf{q}_2) \times \\ &\times \exp \left[i\varphi_1 + \frac{1}{4} ik_0 \int n_1^3 (n_1^{-2} - n_2^{-2}) ds_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь ds_1 — элемент длины необыкновенного луча, φ_1 — соответствующий эйконал, вычисляемый по формуле (2.11). Значения коэффициентов преломления n_1 и n_2 в формуле (3.15) берутся на необыкновенном луче и являются функциями двух векторных аргументов \mathbf{r} и $\mathbf{t} = \mathbf{k}_1/|\mathbf{k}_1|$. Амплитудный фактор Φ_1 удовлетворяет закону сохранения $\text{div}(\Phi_1^2 \mathbf{t}) = 0$.

Подставим теперь (3.15) в (2.1) и спроектируем результат подстановки на $\tilde{\mathbf{n}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$, т.е. фактически перейдем к уравнениям (2.21). Пренебрегая затем поправками порядка μ_1^2 , получаем для коэффициентов \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 систему уравнений КИП [18, 19]

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{F}_1}{ds_1} + \frac{i}{2} k_0 n_1^3 (\Delta\chi \tilde{F}_1 + \chi_{12} \tilde{F}_2) - T_{ef}^{-1} \tilde{F}_2 &= 0, \\ \frac{d\tilde{F}_2}{ds_1} + \frac{i}{2} k_0 n_1^3 (\chi_{21} \tilde{F}_1 - \Delta\chi \tilde{F}_2) + T_{ef}^{-1} \tilde{F}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\Delta\chi = (\chi_{11} - \chi_{22})/2$. Уравнения, "привязанные" к обыкновенному лучу, получаются из (3.16) заменой индексов y ds и n .

Таким образом, уравнения КИП расщеплены здесь на две ветви, которые отвечают двум нормальным волнам (необыкновенной и обыкновенной) и опираются на соответствующие лучи. В области сравнительно сильного двулучепреломления $\delta \gg 1$ метод расщепленных лучей обеспечивает правильный по фазе предельный переход к невзаимодействующим нормальным волнам (2.13).

Оценки точности. Согласие КИП с уравнениями Баддена в случае плоского слоя дает возможность уверенно оценивать точность метода, не прибегая к детальному анализу всех остаточных членов, отброшенных в уравнениях (3.16). Учитывая, что погрешность метода Баддена имеет порядок $\mu \sim k_0^{-1} l^{-1}$, заключаем, что в области относительно сильного двулучепреломления $\delta = \mu_1/\mu \gg 1$ выполняется оценка

$$\left| \frac{\delta E}{E} \right| \lesssim \max(\mu, \mu_1), \quad \mu_1, \mu \ll 1. \quad (3.17)$$

Ей можно придать равномерную форму

$$\max_{(s)} \left| \frac{\delta E}{E} \right| \lesssim \max \left[k_0^{-1} l_r^{-1}, \max_{(s)} v(s) \right], \quad (3.18)$$

где символ l_r означает значение масштаба l на границе области взаимодействия, где $\delta \approx 1$.

Область локализации расщепления лучей. Эффективная взаимная трансформация необыкновенной и обыкновенной волн и расщепление какого-либо луча на необыкновенный и обыкновенный лучи локализованы в области $\delta \lesssim 1$.

Механизм локализации линейной трансформации волн именно в области $\delta \lesssim 1$ можно пояснить следующим образом. Внутри области слабого двулучепреломления $\delta \ll 1$ пространственный масштаб биений между поляризационными компонентами $\Lambda = k^{-1}|n_1 - n_2|^{-1}$ значительно превышает масштаб неоднородности l среды, так что медленные биения с масштабом Λ просто не видны на фоне вариаций параметров среды. Заметного расщепления волн и лучей в этих условиях не происходит. С другой стороны, в области сравнительно сильного двулучепреломления ($\delta \gg 1$) волны \vec{E}_1 и \vec{E}_2 почти независимы и не испытывают взаимной трансформации. Таким образом, взаимная трансформация волн отсутствует как при $\delta \ll 1$, так и при $\delta \gg 1$ и локализована в области $\delta \lesssim 1$. Эти соображения были хорошо известны еще со времен Баддена [1–5, 8].

Сшивание решения по методу КИП с нормальными волнами. Такое сшивание целесообразно выполнять в какой-либо точке области сильного двулучепреломления $\delta \gg 1$, еще достаточно близкой к области взаимодействия $\delta \sim 1$ [9]. Детали этого способа уточнялись впоследствии Найдой [16, 17].

Процедура сшивания существенно упрощается, если использовать уравнения для вектора электрической индукции в версии расщепленных лучей. Тогда сшивание выполняется только в областях локализации $\delta \sim 1$. Сшиванию всякий раз подвергаются три волны, имеющие одинаковый волновой вектор \mathbf{k} : волна, приходящая в точку сшивания, и две нормальные волны, выходящие из нее.

Линейная трансформация возникает во всех локальных экстремумах параметра δ . Если в области экстремума $\delta \gg 1$, то линейная трансформация весьма мала $\sim \exp(-\delta)$. Поэтому локальные экстремумы величины δ в области $\delta \gg 1$ следует игнорировать.

В противоположность этому взаимодействием волн в окрестности экстремумов, расположенных в области слабого двулучепреломления, $\delta \lesssim 1$, пренебрегать нельзя.

Процедуру сшивания решений КИП с нормальными волнами поясняют приведенные ниже типичные примеры.

Пример 1. Падение волны на двупреломляющий слой с единственным максимумом параметра δ в толще слоя (рис. 2). Пусть начальная точка A (см. рис. 2) характеризуется общим направлением \mathbf{t}^A волновых векторов обыкновенной и необыкновенной волн. Построение поля в окрестности этой точки состоит из следующих этапов сшивания решений по методу КИП с нормальными волнами.

а) Через точку A проведем необыкновенный (1) и обыкновенный (2) лучи, отвечающие начальному направлению \mathbf{t}^A волновых векторов. Вдоль этих лучей найдем фазы φ_1 и φ_2 , построим поляризационные орты — соответственно \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , — а также амплитудные функции Φ_1 и Φ_2 , удовлетворяющие закону сохранения.

б) На каждом из лучей отыщем точки B_1 и B_2 , в которых параметр $\delta = kl|n_1 - n_2|$ достигает максимума.

в) В области сильного двулучепреломления $\delta \gg 1$ в обе стороны от каждой из точек B_1 и B_2 построим

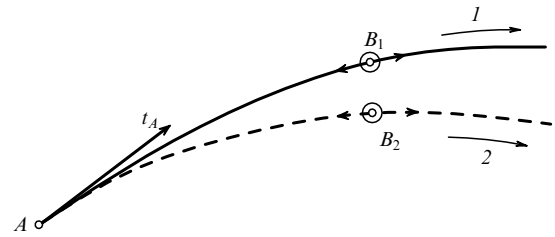


Рис. 2. Пояснения к итерационной процедуре в методе расщепленных лучей при наличии локального максимума величины $|n_1 - n_2|$. Сплошная линия — необыкновенный луч, A — начальная точка, в которой оба луча соответствуют одному и тому же направлению волнового вектора, B_1 и B_2 — точки, где достигается экстремум величины $|n_1 - n_2|$; в окрестности этих точек строится итерационная процедура. Стрелки на луче указывают направление интегрирования уравнений (2.15) (необыкновенная затравка) или их аналога для обыкновенной волны; стрелки рядом с лучами обозначают направление распространения волн

итерационные процедуры для каждого из лучей, используя необыкновенную или обыкновенную затравку, например,

$$C_1^{(0)}(s_{\text{lin}}) = 1, \quad C_2^{(0)}(s_{\text{lin}}) = 0.$$

г) Амплитуды $C_1(s_1)$, $C_2(s_1)$, $C'_1(s_2)$, $C'_2(s_2)$, полученные при помощи итерационной процедуры, используем как начальное условие для решения системы уравнений (3.16) и аналогичной системы для обыкновенной волны. С учетом этих начальных условий по обе стороны от точек B_1 и B_2 строятся "деформированные" необыкновенная и обыкновенная волны: 1) решение $\tilde{F}_1(s_1)$, $\tilde{F}_2(s_1)$ системы уравнений (3.16) и выражение для нормированного поля $\vec{E}_e^{\text{norm}}(s_1)$ находятся по формуле (3.15); 2) решение $\tilde{F}_1(s_2)$, $\tilde{F}_2(s_2)$ системы уравнений (3.16) (переписанной для обыкновенных волн) и выражение для поля $\vec{E}_o^{\text{norm}}(s_2)$ — по формуле (3.15), переписанной для обыкновенной волны.

д) Ищутся коэффициенты $K_{1,2}$ разложения первичного поля на лучи 1 и 2:

$$\vec{E}^A = K_1 \vec{E}_e^{\text{norm}}(A) + K_2 \vec{E}_o^{\text{norm}}(A). \quad (3.19)$$

Суперпозиция (3.19) двух деформированных нормальных волн

$$\vec{E}_e(s_1) = K_1 \vec{E}_e^{\text{norm}}(s_1) \quad \text{и} \quad \vec{E}_o(s_2) = K_2 \vec{E}_o^{\text{norm}}(s_2),$$

каждая из которых локализована на своем луче, представляет искомое решение геометрикооптической задачи.

Пример 2. Наблюдение точечного источника через двупреломляющий слой с единственным максимумом параметра $\delta = k_0 l |n_1 - n_2|$ (рис. 3). Пусть точечный источник расположен в точке A . Это означает, что на некоторой малой сфере S^A , окружающей точку A , заданы направления \mathbf{t}^A волновых векторов и начальные значения полей \vec{E}^A . Требуется найти поле \vec{E} в заданной точке B .

Решение в этом случае включает в себя кроме пяти этапов, перечисленных в примере 1, еще один предварительный этап: отыскиваются два луча $A \rightarrow B$ типов 1 и 2, которые соединили бы источник A с точкой наблюдения B . Для каждого из этих лучей отыскиваются точки пересечения A_1 или A_2 с начальной сферой S^A . Теперь задача распадается на две части, связанные с лучами $A_1 B$

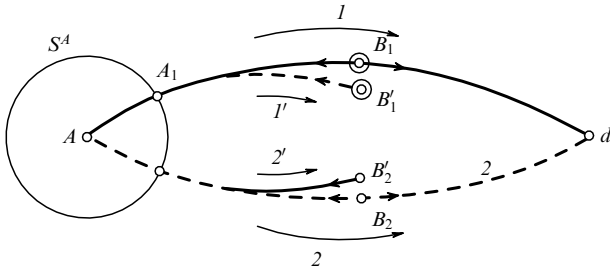


Рис. 3. Излучение точечного источника A (окрыжен малой сферой S^A) в двулучепреломляющем слое с локальным максимумом величины $|n_1 - n_2|$; I и 2 — основные лучи, достигающие точки наблюдения d , I' и $2'$ — вспомогательные лучи, $B_{1,2}$ и $B'_{1,2}$ — точки, в которых величина $|n_1 - n_2|$ максимальна. Стрелки на лучах указывают направления итераций; стрелки рядом с лучами — направление распространения волн

и A_2B . В отношении каждого из этих лучей постановка задачи такая же, как в примере 1. Так, на луче A_1B заданы начальное направление t^{A_1} волновых векторов и начальное поле \vec{E}_e^A , заданное в точке A_1 . Теперь в соответствии с этапом а) примера 1 через точку A_1 необходимо провести второй луч с тем же направлением t^{A_1} волнового вектора, но отвечающий типу 2 нормальной волны. Соответственно, через точку A_2 тоже необходимо провести дополнительный луч, но теперь уже типа 1. Естественно, что в точку B эти дополнительные лучи не попадают, но они необходимы для того, чтобы найти составляющие начальных полей \vec{E}_e^A и \vec{E}_o^A , отвечающие лучам A_1B и A_2B , в соответствии с этапом д).

Дальнейшее ясно из рис. 3. В точке B мы имеем сумму двух волн, пришедших по разным лучам A_1B и A_2B . Из точки B будут видны два источника: один в поляризации 1, а второй — в поляризации 2. Уравнения типа (3.16) для необыкновенных и обыкновенных волн необходимо решать на всех четырех лучах, появляющихся в задаче. На двух основных лучах A_1B и A_2B затравочные итерации строятся по обе стороны от точки максимума параметра δ на луче, а на двух дополнительных — только в сторону источника A .

Пример 3. Падение волны на двулучепреломляющий слой с двумя максимумами и одним минимумом параметра $\delta = k_0|n_1 - n_2|$ (рис. 4). Мы подразумеваем, что в области минимума (точки C на рис. 4) параметр δ не превышает единицы: $\delta_{\min} \lesssim 1$, иначе коэффициенты трансформации будут экспоненциально малы.

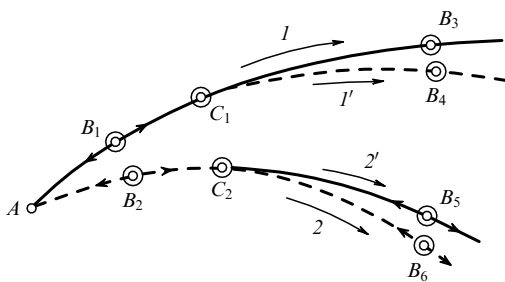


Рис. 4. Итерационная процедура при наличии локальных минимумов величины $|n_1 - n_2|$; C_1 и C_2 — точки расположения минимумов, в которых происходит расщепление лучей и сшивание решений; B_1, \dots, B_6 — точки локальных максимумов. Остальные обозначения — те же, что и на рис. 2 и рис. 3

Последовательность операций в рассматриваемом случае ясна из рис. 4. В итоге исходный луч расщепляется на четыре луча, порождая два луча типа 1 и два — типа 2.

Критерии различимости расщепившихся лучей. Как известно, лучи имеют двойственную природу. С одной стороны, луч — это математический объект, т.е. бесконечно тонкая линия в пространстве, на который нанизывается (одевается, пришивается) волновое поле в приближении геометрической оптики. С другой стороны, — это физический объект, параметры которого, скажем толщину, можно измерить. Физические аспекты концепции луча обсуждались Кравцовым и Орловым в статье [43] и книге [37], а также Кравцовым в обзоре [44]. Согласно этой концепции, физический луч ассоциируется с "френелевским объемом", окружающим этот луч, а физическая различимость лучей обусловлена возможностью разделить френелевские объемы. (Френелевский объем — это объединение всех первых зон Френеля, нанизанных на луч.)

Подобный же критерий различимости лучей должен действовать и в анизотропной среде: как только френелевские объемы лучей перестанут пересекаться, лучи можно признать "самостоятельно существующими", т.е. допускающими различимость физическими приборами. К последним относятся отверстия, щели, линзы, зеркала, антенны, фазированные решетки и т.д.

В анизотропной среде к измерительным приборам можно добавить еще и анализаторы поляризации, осуществляющие поляризационную селекцию, и антенны бегущей волны, различающие обыкновенную и необыкновенную волны по их фазовой скорости.

Разумеется, в области взаимодействия $\delta \lesssim 1$ лучи невозможно различить никакими физическими приборами. Нам представляется, что вопрос о различимости лучей на выходе из области взаимодействия в слабоанизотропной среде требует еще детального изучения.

3.4. Обобщение метода расщепленных лучей на сильноанизотропные среды (синтетический подход)

Только что рассмотренная версия метода расщепленных лучей ограничена требованием слабой анизотропии $\mu_1 \ll 1$. Между тем, можно отказаться и от этого весьма ограничивающего требования, если оперировать не с "упрощенными", а непосредственно с исходными нормальными волнами, не прибегая к разложениям по параметру анизотропии μ_1 в показатели преломления и поляризационных векторах.

Такая модификация метода расщепленных лучей была первоначально предложена Найдой [18], математически обоснована Найдой и Прудковским [23] и впоследствии получила название "синтетический подход". Этот подход соединяет достоинства КИП в форме расщепленных лучей, который способен описывать взаимодействие волн в трехмерноеоднородных средах, но не пригоден для сильноанизотропных сред с $\mu_1 \sim 1$, с достоинствами метода Баддена, который допускает сильную анизотропию, но применим только в слоистых, т.е. одномерноеоднородных средах. Тем самым синтетический подход осуществляет и синтез КИП с методом Куранта–Лакса, который хотя и применим в трехмерноеоднородных средах и допускает сильную анизотропию, но лишен третьего компонента, присущего КИП и методу Баддена: метод Куранта–

Лакса не в состоянии описывать трансформацию нормальных волн.

При указанном синтезе КИП, метода Баддена и метода Куранта–Лакса появляется возможность описывать взаимодействие нормальных волн даже в сильно-анизотропной среде, именно в окрестностях особых "вырожденных" направлений волнового вектора \mathbf{k} . В таких направлениях совпадают показатели преломления двух нормальных волн: $n_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = n_2(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, что способствует интенсивному взаимодействию этих волн, имеющих почти параллельные фазовые фронты. Первая, сравнительно прямолинейная попытка [45] построить теорию взаимодействия волн в окрестностях вырожденных направлений ("квазивырожденное" приближение геометрической оптики) оказалась не вполне успешной. Здесь мы излагаем более последовательную версию, которая учитывает расщепление лучей в области взаимодействия.

Уравнения для взаимодействующих волн в сильно-анизотропной среде записываются по аналогии с разделом 3.3 с заменой упрощенных нормальных волн их полными версиями. Мы ограничимся здесь только констатацией этой аналогии, хотя в тени остаются важные детали обоснования метода. Синтетический метод первоначально был предложен Найдой [8] как естественная модификация метода Куранта–Лакса. Метод расщепления волн КИП возник в работе [18] как субасимптотика синтетического метода при слабой анизотропии.

Переход от упрощенных (принимающих в расчет только линейные по μ_1 члены) волн к полным нормальным волнам возможен в условиях локализованного взаимодействия, когда трансформация волн происходит на ограниченном отрезке l , где $\delta \lesssim 1$. На этом отрезке упрощенные нормальные волны еще слабо отличаются от полных версий нормальных волн, а вне отрезка l взаимодействие резко ослабляется — это и позволяет отказаться от "услуг" упрощенных нормальных волн в пользу полных их версий. Выигрыш состоит в том, что вне области взаимодействия решения синтетической модификации КИП вовсе не требуется сшивать с независимыми нормальными волнами, так как синтетические решения асимптотически превращаются в независимые нормальные волны вне области взаимодействия [18, 23].

4. Электромагнитные волны в неоднородной плазме в слабом магнитном поле

4.1. Квазипродольное и квазипоперечное распространение

Уравнения КИП для магнитоактивной плазмы. Запишем уравнения КИП для нормированного вектора электромагнитной индукции $\vec{\mathcal{E}} = \epsilon_0^{-1} \mathbf{D}$, где $\epsilon_0 = 1 - v$ — диэлектрическая проницаемость плазмы в отсутствие магнитного поля, $v = 4\pi e^2 N_e / m \omega^2$, e — заряд, m — масса электрона, N_e — концентрация электронов. Используя известные выражения для компонент тензора магнитоактивной электронной плазмы [3–5], нетрудно получить выражения для компонент тензора анизотропии $v'_{ik} = \hat{\chi} - \hat{\chi}_0$, $\hat{\chi} = \hat{\epsilon}^{-1}$, входящих в уравнения КИП для компонент вектора \vec{D} :

$$v'_{11} = -v'_{22} = -\frac{1}{2}(1-v)^{-1}uv \sin^2 \alpha,$$

$$v'_{12} = -v'_{21} = i v u^{1/2} \cos \alpha. \quad (4.1)$$

Здесь $u = e H^0 / (m c \omega)^2$, H^0 — напряженность магнитного поля, α означает угол между касательным к лучу ортом \mathbf{t} и вектором \mathbf{H}^0 .

Выберем орты $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ таким образом, чтобы они образовывали правую тройку с касательным ортом \mathbf{t} и чтобы орт \mathbf{q}_2 лежал в плоскости \mathbf{t}, \mathbf{H}^0 (рис. 5).

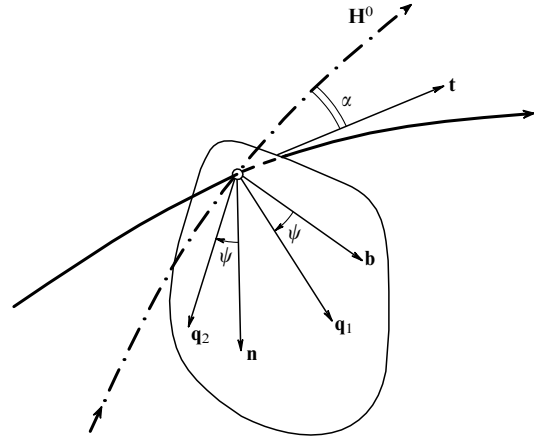


Рис. 5. Взаимное расположение вектора внешнего магнитного поля \mathbf{H}^0 , касательной к лучу \mathbf{t} , нормали \mathbf{n} , бинормали \mathbf{b} и вспомогательных ортов \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2

Подставляя (4.1) в уравнения (2.32), имеем

$$\vec{\mathcal{E}} = \Phi_0 \epsilon_0^{-1/4} (\Gamma_1 \mathbf{q}_1 + \Gamma_2 \mathbf{q}_2) \times \exp \left\{ i k_0 \int \left[(1-v)^{1/2} - \frac{uv(1+\cos^2 \alpha)}{4(1-v)^{3/2}} \right] ds \right\}, \quad (4.2)$$

где Γ_1 и Γ_2 подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_1}{ds} &= -\frac{1}{2} i G (1-v)^{-1} u^{1/2} \sin^2 \alpha \Gamma_1 - (G \cos \alpha - T_{\text{ef}}^{-1}) \Gamma_2, \\ \frac{d\Gamma_2}{ds} &= (G \cos \alpha - T_{\text{ef}}^{-1}) \Gamma_1 + \frac{1}{2} i G (1-v)^{-1} u^{1/2} \sin^2 \alpha \Gamma_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$G = \frac{1}{2} k_0 (1-v)^{-1/2} v u^{1/2}; \quad (4.4)$$

ψ — угол между бинормалью к лучу \mathbf{b} и плоскостью \mathbf{t}, \mathbf{H}^0 (см. рис. 5); $T_{\text{ef}}^{-1} = T^{-1} + d\psi/ds$ — эффективное кручение луча, учитывающее вращение силовых линий магнитного поля относительно луча.

Качественная картина взаимодействия кругополяризованных волн в неоднородной магнитоактивной плазме. Распространение электромагнитной волны через однородную магнитоактивную плазму проще всего описывается в двух предельных случаях:

а) продольного распространения (волновой вектор \mathbf{k} параллелен внешнему магнитному полю \mathbf{H}^0 , $\alpha = 0$);

б) поперечного распространения (волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен \mathbf{H}^0 , $\alpha = \pi/2$).

При продольном распространении собственные волны кругополяризованы, что соответствует эффекту

Фарадея. Поперечное распространение характеризуется линейной поляризацией собственных волн, что приводит к эффекту Коттона–Мутона. В промежуточных случаях собственные волны имеют эллиптическую поляризацию. В итоге по обе стороны от точки ортогональности Q , в которой $\mathbf{H}^0 \perp \mathbf{k}$, происходит перестройка поляризации нормальной волны: волна, первоначально поляризованная по правому кругу (вдали от точки Q), перестраивается в эллиптически поляризованную, затем (в точке Q) — в линейно поляризованную, затем снова в эллиптически поляризованную (с левым направлением вращения), а затем в поляризованную по левому кругу. Эволюция нормальной волны, первоначально поляризованной по левому кругу, происходит в обратном порядке.

Обозначим характерную длину интервала поляризационной перестройки через l_{\perp} . Из формулы (2.7) следует, что разность $|n_1 - n_2|$ коэффициентов преломления имеет локальный минимум в точке поперечного распространения, где $\cos \alpha = 0$. Локальный минимум имеет и параметр $\delta = l_{\perp}^{-1} k_0^{-1} |n_1 - n_2|$. В указанной области как раз и происходит наиболее интенсивная взаимная трансформация необыкновенной и обыкновенной волн.

Нетрудно указать параметр, определяющий интенсивность взаимной трансформации право- и левополяризованных волн на участке поляризационной перестройки. Таким параметром служит разность фаз $p = k_0 l_{\perp} |n_1 - n_2|$ на участке длиной l_{\perp} . Если разность фаз p велика

$$p = k_0 l_{\perp} |n_1 - n_2| \Big|_Q = k l_{\perp} u v (1 - v)^{-3/2} \Big|_Q \gg 1,$$

то всюду на интервале поляризационной перестройки выполнено условие независимости нормальных волн. Следовательно, в точке ортогональности Q нормальные волны почти не трансформируются: обыкновенная (например, правополяризованная) волна остается обыкновенной (левополяризованной), а необыкновенная (левополяризованная) — необыкновенной (правополяризованной); соответственно, коэффициент η взаимной трансформации право- и левополяризованных волн близок к единице.

Если разность фаз поляризационных компонент на рассматриваемом интервале l_{\perp} близка к нулю, то кругополяризованные волны сохраняют свою поляризацию почти без изменений, но меняют свое "имя". Коэффициент взаимной трансформации обыкновенных и необыкновенных волн, соответственно, близок к единице.

Картина взаимодействия поляризационных мод существенно упрощается в случае слабого внешнего магнитного поля. Этот случай широко распространен в солнечной атмосфере и ионосфере Земли. В слабом магнитном поле поляризация собственных волн близка к круговой в очень широком диапазоне углов α между волновым вектором \mathbf{k} и внешним полем \mathbf{H}^0 . Отличие поляризации собственных волн от круговой становится существенным лишь внутри конуса:

$$2|\cos \alpha| \lesssim u^{1/2} (1 - v)^{-1} \sin^2 \alpha. \quad (4.5)$$

Участок, где выполнено условие (4.5), называется участком квазипоперечного распространения волны. В слабом магнитном поле размеры l_{\perp} этого участка значительно меньше, чем радиусы кривизны луча или магнитных силовых линий.

В самом деле, в уравнениях (4.3) эффекту Фарадея отвечают члены $G \Gamma_{1,2} \cos \alpha$, а эффекту Коттона–Мутона — члены $(1/2) G (1 - v)^{-1} u^{1/2} \Gamma_{1,2} \sin^2 \alpha$. "Фарадеевские" члены преобладают над "коттон-мутоновскими" при так называемом квазипродольном распространении, когда $2|\cos \alpha| \gg (1 - v)^{-1} u^{1/2} \sin^2 \alpha$. В этом случае перекрестные члены в уравнениях (4.3) малы, и эти уравнения описывают независимое распространение двух кругополяризованных волн. На участке же квазипоперечного распространения, когда выполняется противоположное неравенство (4.5), в (4.3) существенны перекрестные коттон-мутоновские члены, ответственные за трансформацию волн. С другой стороны, в силу предполагаемой малости параметра $u^{1/2} (1 - v)^{-1}$ из неравенства (4.5) следует, что величина $\cos \alpha$ на всем участке квазипоперечности тоже мала. На этом основании можно положить

$$\cos \alpha \cong \frac{s}{\rho} + O\left(\frac{s^3}{\rho^3}\right), \quad \sin^2 \alpha \cong 1 - O\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right), \quad (4.6)$$

где s — длина луча, отсчитываемая от точки ортогональности $\cos \alpha = 0$, а $\rho = (d \cos \alpha / ds)^{-1}$ — характерный масштаб изменения угла α на луче, зависящий как от кривизны луча, так и от конфигурации магнитного поля. В частности, если луч целиком лежит в плоскости магнитного меридиана, то $|\rho^{-1}| = |\rho_{\perp}^{-1} \pm \rho_H^{-1}|$, где ρ_{\perp} — радиус кривизны луча, а ρ_H — расстояние от точки ортогональности до условного центра линий магнитного поля, где пересекаются касательные к линиям \mathbf{H}^0 .

Из выражений (4.6) и оценки (4.5) следует, что на участке квазипоперечного распространения $2|s/\rho| \lesssim u^{1/2} (1 - v)^{-1}$. В результате длина участка взаимодействия удовлетворяет оценке

$$l_{\perp} \sim 2|s| \cong |\rho| u^{1/2} (1 - v)^{-1} \ll |\rho|, \quad (4.7)$$

т.е. l_{\perp} мало по сравнению с радиусом кривизны $|\rho|$.

Мы будем предполагать также выполненным неравенство

$$l_{\perp} \ll l, \quad (4.8)$$

где l — масштаб неоднородности среды. При выполнении неравенства (4.8) можно говорить о пространственной локализации эффекта.

Из оценки (4.7) следует оценка для параметра p , определяющего интенсивность трансформации

$$p = k l_{\perp} |n_1 - n_2| \Big|_Q \sim k \rho u^{3/2} v (1 - v)^{-5/2}. \quad (4.9)$$

Для случая $v \ll 1$ эта оценка была впервые получена Коэнном [46], а в общем случае — Мелроузом [47] на основе уравнений Баддена и в работе [48] на основе метода фазовых интервалов. Полный анализ проблемы осуществлен в работе [8].

4.2. Коэффициенты трансформации на участке квазипоперечного распространения волны

Уравнения КИП для амплитуд кругополяризованных волн. Эффект взаимодействия кругополяризованных волн в магнитоактивной плазме в области квазипоперечного магнитного поля (для краткости будем говорить о "квазипоперечном" взаимодействии) привлекался для объяснения особенностей солнечного радиоизлучения

[5, 46–48] и некоторых аномалий эффекта Фарадея в ионосфере Земли [49, 50]. Все расчеты этого эффекта проводились в рамках упрощенной постановки задачи: плоские волны в однородной плазме, помещенной в неоднородное магнитное поле. Единственный значимый аналитический результат для коэффициентов трансформации принадлежал Железнякову и Злотник [48], которые использовали метод фазовых интегралов.

Более радикальное решение проблемы было дано Кравцовым и Найдой [24], а также Найдой [19]. Интересуясь трансформацией кругополяризованных волн, перейдем в уравнениях (4.2) к переменным

$$\gamma_{1,2} = 2^{-1/2}(\Gamma_2 \mp i\Gamma_1), \quad (4.10)$$

которые подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{ds} &= i(G \cos \alpha - T_{\text{ef}}^{-1})\gamma_1 + \frac{1}{2} iGu^{1/2}(1-v)^{-1}\gamma_2 \sin^2 \alpha, \\ \frac{d\gamma_2}{ds} &= \frac{1}{2} iGu^{1/2}(1-v)^{-1}\gamma_1 \sin^2 \alpha - i(G \cos \alpha - T_{\text{ef}}^{-1})\gamma_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

и условию нормировки $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = 1$. Если волна, падающая со стороны отрицательных s , поляризована по правому кругу, то систему уравнений (4.10) следует решать с начальными условиями

$$|\gamma_1(-\infty)| = |\gamma_1^r(-\infty)| = 1, \quad \gamma_2(-\infty) = \gamma_2^r(-\infty) = 0, \quad (4.12)$$

а если по левому, то с начальными условиями

$$\gamma_1(-\infty) = \gamma_1^l(-\infty) = 0, \quad |\gamma_2(-\infty)| = |\gamma_2^l(-\infty)| = 1. \quad (4.13)$$

Аналитическое решение уравнений КИП при локализованном взаимодействии. Если область взаимодействия локализована, т.е. длина области взаимодействия l_{\perp} мала не только по сравнению с ρ , но и по сравнению с характерным масштабом неоднородности плазмы l , система (4.11) допускает приближенное решение, обладающее тем не менее достаточной универсальностью. В самом деле, при $l_{\perp} \ll l$ плазменные параметры u и v , а также эффективное кручение T_{ef}^{-1} в пределах области взаимодействия можно заменить их локальными значениями в точке ортогональности. Тогда с учетом (4.6) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{ds} &= i(G\rho^{-1}s - T_{\text{ef}}^{-1})\gamma_1 + \frac{1}{2} iG(1-v)^{-1}u^{1/2}\gamma_2, \\ \frac{d\gamma_2}{ds} &= \frac{1}{2} iG(1-v)^{-1}u^{1/2}\gamma_1 - i(G\rho^{-1}s - T_{\text{ef}}^{-1})\gamma_2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если ввести безразмерную переменную

$$\xi = \left(\frac{G}{|\rho|}\right)^{1/2} (s - \rho G^{-1} T_{\text{ef}}^{-1}), \quad (4.15)$$

то уравнения (4.14) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{d\xi} &= -i\xi\gamma_1 \operatorname{sgn} \rho + \frac{1}{2} ip^{1/2}\gamma_2, \\ \frac{d\gamma_2}{d\xi} &= \frac{1}{2} ip^{1/2}\gamma_1 + i\xi\gamma_2 \operatorname{sgn} \rho. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Уравнения (4.16) содержат единственный параметр

$$p = Gu|\rho| = \frac{1}{2} kvu^{3/2}|\rho|(1-v)^{-5/2}, \quad (4.17)$$

с которым мы встретились при качественном анализе задачи: это разность фаз нормальных волн на участке взаимодействия l_{\perp} (см. (4.9)).

Можно убедиться, что компонента γ_2 удовлетворяет уравнению Вебера–Эрмита и что решение системы уравнений (4.16) выражается через функции параболического цилиндра $D_n(z)$. При начальном условии (4.12) (первоначальный правый круг) интенсивности циркулярно поляризованных волн при $\xi \rightarrow +\infty$ равны

$$\begin{aligned} |\gamma_1^r(+\infty)|^2 &= \exp\left(-\frac{\pi p}{4}\right), \\ |\gamma_2^r(+\infty)|^2 &= 1 - \exp\left(-\frac{\pi p}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, величина

$$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{\pi p}{4}\right) \quad (4.19)$$

представляет собой коэффициент взаимной трансформации правополяризованной и левополяризованной волн.

Формула (4.19), разумеется, совпадает с выражением для коэффициента трансформации, полученным в одномерной постановке задачи методом фазовых интегралов [48, 51], но результаты КИП оказываются во многих отношениях более емкими. Во-первых, КИП применимо для трехмерно искривленных лучей. Во-вторых, КИП позволяет получить не только значение коэффициента трансформации η , но и значения поля во всех точках на луче. В результате появляется возможность вычислять η даже в условиях, когда источник находится внутри области взаимодействия, что важно для ионосферных исследований. В-третьих, оказалось, что кручение луча и вращение магнитных силовых линий не влияют на величину η , поскольку эффективное кручение T_{ef}^{-1} вообще выпало из уравнений (4.16). Наконец, в-четвертых, из исходных уравнений (4.11) можно установить малость трансформации волн в протяженной области квазипродольного распространения и найти поправки к коэффициенту трансформации (4.19), обусловленные "неполной локализацией" эффекта взаимодействия. Мы вернемся к этому вопросу ниже.

О возможностях "коттон-мютоновской" диагностики плазмы. В отличие от эффекта Фарадея, который дает сведения об интегральных характеристиках плазмы, квазиперечное взаимодействие, обусловленное эффектом Коттона–Мютона, может служить источником информации о локальных характеристиках плазмы в точке ортогональности. В частности, речь может идти об определении локального значения электронной концентрации N_e при известных значениях других параметров.

В условиях, когда эффект квазиперечного взаимодействия пространственно локализован (условие (4.8)), коэффициент трансформации дается выражением (4.19), и тогда по измеренным значениям η можно определить параметр p , характеризующий локальные свойства плазмы в точке ортогональности:

$$p \equiv G_o u_o |\rho| = \frac{4}{\pi} \ln \frac{1}{1-\eta}. \quad (4.20)$$

Такого рода возможность, вытекающая из результатов работ Козна [46] и Железнякова и Злотник [48], широко и успешно используется при интерпретации данных о поляризации солнечного излучения, в частности, для оценок магнитного поля H_0 в короне Солнца на основании предварительных оценок других параметров плазмы. Однако применительно к ионосферной и лабораторной плазме возможности коттон-мутонской диагностики ранее широко не обсуждались, в частности, из-за того, что отсутствовала эффективная теория трансформации нормальных волн в случае искривленных лучей.

В условиях земной ионосферы характерный масштаб ρ составляет (в рамках дипольной модели магнитного поля) 3000–6000 км, тогда как вертикальный масштаб неоднородности плазмы $l_{\text{верт}} \sim 100$ км. В силу выражения (4.7) эффект квазипоперечного взаимодействия будет локализован при $u^{1/2} \ll l_{\perp}/|\rho| \sim 1/30 - 1/60$, т.е. при $\lambda \leq 4 - 7$ м. Таким образом, в диапазоне ультракоротких волн можно рассчитывать на измерение локальной электронной концентрации ионосферной плазмы в точках ортогональности. При наклонном распространении радиоволн, когда эффективный масштаб l неоднородности плазмы вдоль луча возрастет в несколько раз (поскольку $l_{\text{гориз}} \sim 1000$ км), пороговая длина волны увеличивается тоже в несколько раз (до 20–30 м).

В условиях лабораторной плазмы величины N_e , H_0 и ρ могут меняться в очень широких пределах и поэтому вполне вероятно, что при подходящем выборе частоты и направления распространения микроволнового излучения можно прозондировать значительные объемы плазмы с целью определения локальной электронной концентрации. Этому могло бы способствовать также целенаправленное управление величиной и конфигурацией магнитного поля, если это допустимо в условиях эксперимента.

При решении задач диагностики плазмы кроме локализации эффекта (условие (4.8)) следует также стремиться к максимальной его "видности", которую можно характеризовать, например, степенью линейной поляризации $\beta_{\text{лин}} = 2[\eta(1 - \eta)]^{1/2}$. Эта величина максимальна при $\eta = 1/2$, чему отвечают значение параметра $p_{1,2} = 4\pi^{-1} \ln 2 = 0,88$ и частота излучения

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = (0,57\omega_0^{-2}\omega_{\text{н}}^3|\rho|c^{-1})^{1/4}.$$

Вообще говоря, на этой частоте "наилучшей видности" эффекта могут нарушаться неравенства (4.4) или (4.8). Чтобы этого не произошло, необходимо, как показывают простые расчеты, чтобы плазменная частота ω_0 заключалась в пределах

$$\omega_{\text{н}}^{3/2} \left(\frac{|\rho|}{c} \right)^{1/2} \gg \omega_0 \gg \omega_{\text{н}}^{1/2} \left(\frac{|\rho|}{c} \right)^{-1/2},$$

а это, в свою очередь, возможно при условии $\omega_{\text{н}}|\rho|/c \gg 1$. Эти неравенства указывают диапазон значений $\omega_{\text{н}}$ и ω_0 , в котором возможна как пространственная локализация, так и хорошая видность эффекта.

Учет неполной локализации эффекта Коттона–Мутона. Оценки погрешностей, связанных с переходом от точных уравнений КИП (4.11) к уравнениям (4.14) с линеаризованными коэффициентами, можно получить разными методами.

Простейший способ состоит в том, чтобы в области квазипродольного распространения решить уравнения (4.11) методом возмущений по параметру $q = u^{1/2} \sin^2 \alpha / (2 \cos \alpha)$, который мал именно в этой области. Для учета же неполной локализации в области взаимодействия $|s| \lesssim l_{\perp} = u^{1/2}|\rho|$ можно построить ряд теории возмущений на основе уравнений (4.14), учтя в них квадратичные по s члены разложений для $\cos \alpha$ и $\sin^2 \alpha$, которые были отброшены в (4.6), и линейные по s члены плазменных параметров u , v , T_{ef}^{-1} . Сшивая оба ряда теории возмущений на границе области взаимодействия ($|s| \sim l_{\perp} \sim |\rho|u^{1/2}$) так, чтобы результат минимально зависел от места сшивки, можно найти поправку к вычисленному коэффициенту трансформации (4.19).

Ионосферные проявления эффекта Коттона–Мутона: слабая деполаризация радиоволн. Уже первые публикации по КИП были ориентированы на описание поляризации радиоволн в ионосфере. Простой способ описания слабой деполаризации, вызванной распределенным, нелокализованным эффектом Коттона–Мутона, был предложен еще в работе [9].

Запишем уравнение Риккати (2.30) для плазмы, помещенной в слабое магнитное поле. С учетом (4.1) для ϑ имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} = T^{-1} + \frac{1}{2} k_0 v (1 - v)^{-1} u^{1/2} \cos \alpha + \\ + \frac{i}{4} k_0 v u \sin^2 \alpha \sin 2(\vartheta + \varphi). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Первое слагаемое в этом уравнении описывает рывок-кручение, второе — фарадеевское вращение плоскости поляризации, а третье (мнимое) слагаемое отвечает эффекту Коттона–Мутона.

Для большей части лучей третье слагаемое мало по сравнению со вторым, и поэтому уравнение (4.21) можно решать методом итераций. Для этого напомним уравнение (4.21) в виде

$$\frac{d\vartheta}{ds} = T^{-1} + \frac{1}{2} k_0 v (1 - v)^{-1} u^{1/2} \cos \alpha + i M(s, \vartheta), \quad (4.22)$$

где $M(s, \vartheta) = -(1/2)k_0 v u \sin^2 \alpha \sin 2(\vartheta + \varphi)$. Положив $M = 0$, получим нулевое приближение

$$\vartheta_0(s) = \vartheta(0) + \int_0^s \frac{ds}{T} + \vartheta_F(s), \quad (4.23)$$

где ϑ_F — фарадеевский угол поворота

$$\vartheta_F(s) = \frac{1}{2} k_0 \int_0^s v (1 - v)^{-1} u^{1/2} \cos \alpha ds. \quad (4.24)$$

Первая итерация дает малую мнимую добавку к $\vartheta_0(s)$:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(s) = \vartheta_0(s) + i \int_0^s M(s, \vartheta_0) ds = \\ = \vartheta_0(s) - \frac{i}{4} k_0 \int_0^s v u \sin \alpha \sin 2(\vartheta_0 + \varphi) ds. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Мнимая добавка $\vartheta_1(s) = i\vartheta_1''$ ответственна за превращение линейно поляризованной волны в эллиптически поляризованную с малой осью

$$\text{tg } \vartheta_1'' \approx \text{Im } \vartheta_1 = \frac{1}{4} k_0 \int_0^s v u \sin^2 \alpha \sin 2(\vartheta_0 + \varphi) ds. \quad (4.26)$$

Таким образом, при распространении радиоволн в ионосфере состояние поляризации характеризуется углом поворота большой оси эллипса поляризации (4.23) и малой осью (4.26), определяющей деполяризацию волны.

Фуки [25] построил другую версию итерационной процедуры, которая обладает улучшенной сходимостью. Запишем уравнение (4.22) в виде двух связанных уравнений для $\vartheta' = \operatorname{Re} \vartheta$ и $\vartheta'' = \operatorname{Im} \vartheta$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta'}{ds} &= T^{-1} + \frac{d\vartheta_F}{ds} + \frac{1}{4} k_0 v u \sin^2 \alpha \cos 2(\vartheta' + \varphi) \operatorname{sh} 2\vartheta'', \\ \frac{d\vartheta''}{ds} &= -\frac{1}{4} v u \sin^2 \alpha \sin 2(\vartheta' + \varphi) \operatorname{ch} \vartheta'', \end{aligned} \quad (4.27)$$

где ϑ_F — фарадеевский угол поворота (4.24). Из второго уравнения (4.27) следует, что

$$\operatorname{sh} 2\vartheta'' = \operatorname{tg} [\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2\vartheta''(0) - L(s, \vartheta')], \quad (4.28)$$

где

$$L(s, \vartheta') = \frac{1}{2} k_0 \int_0^s v u \sin^2 \alpha \sin 2(\vartheta' + \varphi) ds,$$

а $\vartheta''(0)$ — начальное значение ϑ'' .

Подставив (4.28) в первое уравнение (4.27), получим замкнутое уравнение для ϑ' , которое можно представить в интегральной форме:

$$\vartheta'(s) = \vartheta'(0) + \int_0^s \frac{ds}{T} + \vartheta_F(s) + R(s, \vartheta'), \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} R(s, \vartheta') &= -\frac{1}{4} k_0 \int_0^s v u \sin^2 \alpha \cos 2(\vartheta' + \varphi) \times \\ &\times \operatorname{tg} [\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2\vartheta''(0) - L(s, \vartheta')] ds. \end{aligned}$$

Пользуясь малостью R , уравнение (4.29) естественно решать методом итераций. Если в нулевом приближении положить

$$\vartheta'_0(s) = \vartheta'(0) + \int_0^s \frac{ds}{T} + \vartheta_F(s),$$

то в m -м приближении

$$\begin{aligned} \vartheta'_m(s) &= \vartheta'_0(s) + R(s, \vartheta'_{m-1}), \\ \operatorname{sh} 2\vartheta''_m(s) &= \operatorname{tg} [\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2\vartheta''(0) - L(s, \vartheta'_m)]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

В простейшем случае, когда падающая волна линейно поляризована и $\vartheta''(0) = 0$, в первом приближении для малой поправки ϑ'_1 получим выражение (4.26).

Для большинства задач ионосферного распространения коротких и ультракоротких радиоволн приближения (4.26) вполне достаточно для оценки деполяризации. В противном случае следует обращаться к итерационной схеме (4.30).

В работе [26] проведены детальные расчеты поляризации радиоволн для конкретных моделей ионосферы. Уравнения КИП решались численным интегрированием методом Рунге–Кутты. Согласно этой работе рытовским

вращением плоскости поляризации в большинстве случаев можно пренебречь по сравнению с фарадеевским вращением, поскольку радиус кручения луча T обычно очень велик даже в условиях перехода от дневной области ионосферы к ночной. Именно в этой области вклад кручения максимален, тогда как в пределах ночной и дневной ионосферы, имеющей плоскоструйную структуру, кручение практически отсутствует.

Поляризационные эффекты при рассеянии радиоволн в полярной и экваториальной ионосфере. Деполяризацию радиоволн нужно учитывать при рассеянии на неоднородностях полярной и экваториальной ионосферы. Деполяризация радиоволн обусловлена двумя причинами: 1) трансформацией волн на пути от источника к точке рассеяния и обратно и 2) анизотропией неоднородностей непосредственно в точке рассеяния. Как показано в работе [27], локальная деполяризация в точке рассеяния обычно пренебрежимо мала, и результирующая деполяризация связана с накоплением поляризационных изменений вдоль всего луча.

В дальнейшем Фуки [25, 28] уточнил эти результаты и построил корреляционную матрицу рассеянного поля с учетом эффектов Фарадея и Коттона–Муттона. Эти работы позволили объяснить результаты описанных в [52] экспериментов по измерению поляризации радиоволн, рассеянных на неоднородностях полярной ионосферы, вытянутых вдоль земного магнитного поля. Обсуждаемые результаты могут быть использованы при анализе радиоэха от сильно вытянутых неоднородностей экваториальной ионосферы, а также при анализе некогерентного (томсоновского) рассеяния на тепловых флуктуациях электронной концентрации в ионосфере.

Во многих случаях рассеянные сигналы служат помехой работе радиотехнических систем различного назначения (радиосвязь, радиолокация, радионавигация и др.). В работе [53] предложены методы поляризационного подавления помех от авроральных или экваториальных радиоэхо. При ширине основного лепестка диаграммы направленности радара около 1° степень подавления авроральных радиоэхо за счет поляризационной селекции может составить 25–30 дБ.

4.3. Другие поляризационные эффекты в плазме

Трансформация нормальных волн в области нулевого магнитного поля в солнечной короне. Выше мы сосредоточились только на одном, хотя и важном, вопросе об изменениях поляризации в области квазипоперечного распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Анализируя причины, которые могли бы повлиять на поляризацию электромагнитных волн, излучаемых солнечной короной, Железняков [54] обнаружил, что заметная трансформация нормальных волн происходит также в областях нейтрального магнитного поля. В сложных магнитных полях обращение \mathbf{H}^0 в нуль в некоторых точках является скорее правилом, чем исключением.

В окрестности точки нейтрального поля мы как бы дважды встречаемся с проблемой предельной поляризации: сначала распространяющиеся в магнитоактивной плазме нормальные волны становятся поперечными при $\mathbf{H}^0 \rightarrow 0$, а затем поперечная волна расщепляется на суперпозицию нормальных волн по другую сторону нейтральной точки. Полные результаты анализа этой проблемы изложены в обзорной статье [8].

Трансформация волн в неоднородной плазме при наличии шири силовых линий магнитного поля. Эта проблема была изучена в работе [55]. Главный результат этой работы состоит в установлении факта, что даже малый шир силовых линий может привести к заметной трансформации волн. Этот эффект может быть использован для диагностики плазмы в новых областях параметров.

Поляризационные эффекты в движущейся плазме. Неоднородное движение как лабораторной, так и любой другой плазмы приводит к слабой анизотропии. В сущности, эта анизотропия подобна оптическому эффекту Максвелла (появление анизотропии в сдвиговом течении жидкости). Механизмы возникновения слабой анизотропии в плазме, обсуждаемые в работах [56–58], связаны с пространственной дисперсией, индуцированной неоднородным течением плазмы. Разумеется, поляризационные эффекты в неоднородно движущейся плазме могут быть описаны в рамках КИП.

Слабая анизотропия, обусловленная неоднородностью среды. Неоднородность среды, обладающей пространственной дисперсией, неизбежно должна приводить к анизотропии, поскольку в среде появляется выделенное направление $\nabla \varepsilon_0$, где ε_0 — проницаемость изотропной среды в отсутствие неоднородности. Расчет тензора неоднородностей плазмы, произведенный в работе [59], подтвердил это ожидание. Анизотропия, индуцированная неоднородностью, оказалась незначительной, но на больших расстояниях такая анизотропия может быть обнаружена поляризационными методами. В сущности, даже рыговское вращение плоскости поляризации можно интерпретировать как результат появления слабой анизотропии, обусловленной неоднородностью среды.

Поляризационные эффекты в случайнеоднородной плазме. В работе Апресяна [29] (см. также [30]) рассмотрена задача о влиянии слабых флуктуаций анизотропной среды на поляризацию волны, проходящей толстый случайнеоднородный слой. Эта задача встречается, в частности, при описании поляризации высокочастотных волн в магнитоактивной космической плазме. В указанной работе использовались уравнения КИП с флуктуирующим тензором диэлектрической проницаемости, на базе которых получены уравнения для среднего значения вектора Стокса, описывающего поляризацию волны. Оказалось, что средний вектор Стокса в пределе толстого слоя асимптотически приближается к некоторому направлению, связанному со средним значением тензора диэлектрической проницаемости среды. Поэтому измерение средней поляризации позволяет получить дополнительную информацию о средних свойствах среды и тем самым помогает решению обратной задачи.

5. Оптические эффекты в слабоанизотропных средах

5.1. "Касательная" коническая рефракция

Общая картина эффекта. Как известно, коническая рефракция (внутренняя) возникает при падении плоской волны на однородный кристалл, если коэффициенты преломления для двух типов нормальных волн с одинаковым направлением \mathbf{k} совпадают между собой [51]:

$$n_1(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{e}}) = n_2(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{e}}). \quad (5.1)$$

В анизотропной плавнеоднородной среде условие (5.1) будет выполняться не во всем объеме, занятом волной, как в классическом эффекте конической рефракции, а лишь на "особой" линии (рис. 6), где волновой вектор $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ должным образом ориентирован относительно главных осей тензора $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$. "Особая" линия возникает потому, что условие (5.1) отвечает пересечению двух поверхностей в координатном пространстве. В результате вместо картины рассеяния лучей в конус (5.1), свойственная классическому эффекту конической рефракции, в плавнеоднородной среде наблюдается специфическая трансформация волн, которую естественно трактовать как касательную коническую рефракцию (Найда [31]).

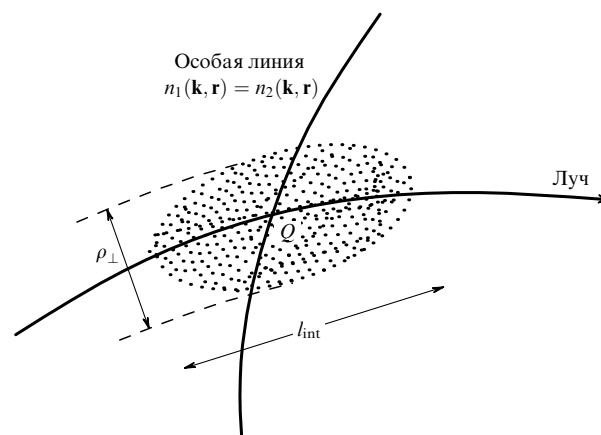


Рис. 6. Явление касательной конической рефракции наблюдается в окрестности точки Q , в которой луч пересекает "особую" линию, выделенную условием (5.1). На этой линии совпадают показатели преломления двух нормальных волн в слабоанизотропной среде. Область интенсивной трансформации нормальных волн заштрихована (l_{int} — продольный, а ρ_{\perp} — поперечный масштабы области взаимодействия)

"Касательная" коническая рефракция может возникать в неоднородно деформированном кристалле, в неоднородно деформированном стекле, в котором оптическая анизотропия вызывается упругооптическим эффектом, наконец эффект может наблюдаться в движущейся жидкости с неоднородным полем скоростей, в которой оптическая анизотропия обусловлена эффектом Максвелла, а также в неодимовых стеклах, подвергаемых неоднородной тепловой нагрузке в мощных лазерах [60, 60a].

Поместим двупреломляющую среду, в которой происходит трансформация волн в окрестности точки (5.1), между скрещенными поляроидами. Вследствие трансформации волн изменится интерференционная картина на экране. Характер интерференционной картины, которую мы обсудим ниже, показан на рис. 7.

В особых точках (5.1) выполняются соотношения

$$\chi_{11} = \chi_{22}, \quad \text{Re } \chi_{12} = 0.$$

Простейшая схема наблюдения эффекта. На рис. 7 изображено простейшее экспериментальное устройство, на котором можно наблюдать эффект. Устройство включает в себя стеклянный прямоугольный параллелепипед длиной $2L$ и стороной a квадратного основания ($L \gg a$), два скрещенных поляроида P_1 и P_2 , источник

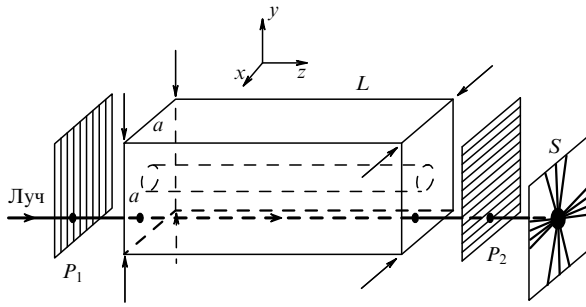


Рис. 7. Схема наблюдения касательной конической рефракции; P_1 и P_2 — скрещенные поляризаторы, S — экран. Прозрачный прямоугольный цилиндр размерами L_{max} с малым продольным цилиндрическим отверстием подвергается внешним механическим напряжениям, прикладываемым к углам параллелепипеда (показаны стрелками). Радиальные усилия, создаваемые сжатой жидкостью в малом отверстии, не показаны. На экране S наблюдается крестообразная интерференционная картина взаимодействующих поляризационных мод [31]

монохроматического света, экран. К парам противоположных боковых граней (AB , CD и BC , AD) могут прикладываться распределенные усилия (сжатия), равномерно возрастающие от центрального сечения к торцам. Текущее значение внешнего давления обозначим через $P(z)$; при этом $P > 0$ при сжатии в направлении ориентации выходного поляроида (ось x) и $P < 0$ при сжатии в перпендикулярном направлении; максимальное значение $|P(z)|$ у торцов обозначим через P_m .

По оси параллелепипеда просверлено цилиндрическое отверстие радиуса R , много меньшее, чем ширина грани a . В отверстие закачивается жидкость под давлением P_1 . В окрестности этого отверстия стекло может подвергаться осесимметричным деформациям.

Ясно, что если ни наружных, ни внутренних усилий не прикладывать, то экран будет темным. То же самое будет и при наличии одних только внешних усилий, т.е. при $P_1 = 0$. Просветления из-за краевых эффектов могут возникнуть лишь в областях, примыкающих к внешней и внутренней поверхностям.

В отсутствие внешних усилий "особых" точек (5.1) на лучах нет, поэтому и линейной трансформации волн не происходит. При одновременном воздействии внешних усилий ($P_m \neq 0$) и внутреннего давления P_1 на срединных плоскостях $x = 0$ и $y = 0$ появляются "особые" линии, поэтому вблизи этих плоскостей возникает взаимная трансформация нормальных волн. На заданном расстоянии r от центра "особой" точки появляются при $P_m \geq |\sigma_{rr}^0(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^0(r)|$, где σ_{rr}^0 и $\sigma_{\varphi\varphi}^0$ — радиальное и азимутальное собственные значения тензора напряжений $\hat{\sigma}^0$, отвечающие внутреннему (радиальному) усилию. Возникнув при данном r на одном из торцов при $P_m = |\sigma_{rr}^0(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^0(r)|$, по мере возрастания P_m "особая" точка перемещается к центральному сечению параллелепипеда. Соответственно возрастают и изменения, вносимые взаимной трансформацией волн в интерференционную картину на экране.

При указанных выше условиях, т.е. при $|\sigma_{rr}^0(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^0(r)| \ll P_m$, на луче появляются "особые" точки. В результате на экране на фоне равномерной максимальной освещенности появится темный крест (см. рис. 7), который тем шире, чем меньше отношение

$|\sigma_{rr}^0(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^0(r)|/P_m$. Формулы КИП из раздела 2 позволяют рассчитать конкретные параметры этого креста.

Коэффициенты трансформации нормальных волн при локализованной конической рефракции. Детальная процедура расчета полей и коэффициентов трансформации в рамках КИП изложена в работе [31]. Практически она ничем не отличается от той расчетной процедуры, которая была описана в разделе 4 применительно к квазиперечному распространению волн в плазме. В случае продольной локализации взаимодействия (длина взаимодействия l_{int} меньше масштаба неоднородности среды l) коэффициенты уравнений КИП можно линейризовать по расстоянию от особой точки.

В случае продольной локализации получается следующее выражение для коэффициента трансформации (по мощности) η набегающей нормальной линейно поляризованной волны в нормальную волну, имеющую перпендикулярное направление поляризации, но прежнее название [31]:

$$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{\pi p}{4}\right), \quad (5.2)$$

где

$$p = 2n_0^7 k v^{-1} |\chi_{12}(Q)|^2. \quad (5.3)$$

Здесь $k = \omega/c$, n_0 — коэффициент преломления в "особой" точке Q и

$$v = \frac{1}{2} n_0^4 \left| \frac{\partial(\chi_{11} - \chi_{22})}{\partial s} \right|_Q. \quad (5.4)$$

В частности, для волны, проходящей через "особую" точку Q , коэффициент трансформации η при вещественном тензоре $\hat{\varepsilon}$ равен нулю, поскольку в этом случае $p = 0$.

Для продольного размера h области трансформации Найда [31] получил оценку

$$l_{\text{int}} \sim n_0^{1/2} k^{-1/2} v^{-1/2}. \quad (5.5)$$

Малость этой величины по сравнению с l определяет условие применимости формулы (5.3).

Если мал и поперечный размер ρ_{\perp} области трансформации, то формула (5.3) переписывается в виде

$$p = 2n_0^7 k v^{-1} \left[|\text{Im} \chi_{12}|^2 + X^2 \left| \frac{\partial \text{Re} \chi_{12}}{\partial X} \right|^2 \right]_Q. \quad (5.6)$$

В качестве параметра ρ_{\perp} удобно принять значение прицельного параметра $|X|$, при котором в отсутствие гирации достигается половинная освещенность экрана ($\eta = 1/2$):

$$\rho_{\perp} = (2\pi^{-1} \ln 2)^{1/2} n_0^{-1/4} k^{-1/2} v^{1/2} \left| \frac{\partial \text{Re} \chi_{12}(Q)}{\partial X} \right|^{-1}. \quad (5.7)$$

Малость этой величины по сравнению с l (поперечная локальность) служит условием применимости формулы (5.6), основанной на линейризации коэффициентов.

5.2. Распространение света в спиральных средах и неоднородных жидких кристаллах

Фотоупругий эффект обычно приводит к слабой оптической анизотропии упругих тел. Сравнительно слабый

анизотропией характеризуются и жидкие кристаллы. Поэтому для описания световых волн в жидких кристаллах и в диэлектриках, подвергнутых неоднородным напряжениям, естественно использовать квазиизотропное приближение геометрической оптики.

Одним из интересных объектов анализа служит распространение света в спиральной среде, оптическая ось которой вращается относительно луча с определенным пространственным периодом. Этот объект интересен в двух отношениях.

Во-первых, исторически это был первый пример, продемонстрировавший неприменимость геометрической оптики в форме независимых нормальных волн в пределе слабой анизотропии (Гинзбург, [61]). Во-вторых, диэлектрик с равномерно вращающимися оптическими осями допускает точное решение как исходных уравнений Максвелла [61–63], так и всех мыслимых приближенных уравнений, в том числе и уравнений КИП. Поэтому на данном примере можно проверить условие применимости приближенных методов.

Проблемы распространения винтовых волн в неоднородных средах имеют практическое значение для оптики жидких кристаллов. Как показано в работе [64], в неоднородных (т.е. с неравномерным вращением оптических осей) жидких кристаллах холестерического типа возможно линейное взаимодействие винтовых волн. В этой работе проанализированы также многие другие аспекты вопроса и даны многочисленные литературные ссылки.

5.3. Поляризация света в деформированных одномодовых световодах¹

Факторы, влияющие на состояние поляризации в световодах. Электромагнитные волны в аксиально-симметричных световодах характеризуются двукратным поляризационным вырождением, как и поперечные волны в изотропной среде. В реальных световодах поляризационное вырождение снимается по многим причинам: из-за технологических нарушений аксиальной симметрии, из-за анизотропии материала волокна, из-за искусственной анизотропии за счет механических напряжений (фотоупругость), а также из-за изгибов и кручений световода.

Обозначим через h_1 и h_2 постоянные распространения двух поляризационных мод при снятии поляризационного вырождения. Если h_1 и h_2 достаточно сильно отличаются друг от друга ($\Delta h = |h_1 - h_2| \gg 1/l$, где l — характерный масштаб продольной неоднородности волновода), то нормальные волны можно считать практически независимыми. В этом случае, возбуждая волну определенного типа, можно рассчитывать на сохранение поляризации поля в световоде, что важно для практических применений. В противоположном же случае ($\Delta h \lesssim 1/l$) происходит интенсивная трансформация нормальных волн. Такая трансформация сопровождается неустойчивым состоянием поляризации поля в световоде, что нежелательно для коммуникационных систем.

Для описания трансформации нормальных мод в световодах естественно прибегнуть к уравнениям, подобным уравнениям КИП, которые обеспечили бы плавный переход и к поляризационному вырождению ($\Delta h \rightarrow 0$), и

к независимым нормальным волнам ($\Delta h \gg 1/l$). Роль параметра анизотропии μ_1 здесь играет относительная разность постоянных распространения двух поляризационных мод, $\mu_1 \approx |\Delta h|/h$. Учитывая, что параметр $\mu \sim (k_0 l)^{-1} \sim (hl)^{-1}$ сохраняет обычный геометрический смысл, легко проверить, что роль параметра $\delta = \mu_1/\mu$ теперь играет произведение Δhl .

Квазиизотропное приближение принимает во внимание почти все факторы, ответственные за состояние поляризации в световодах: изгибы и кручение волокна, слабая анизотропия материала, малое отличие от аксиальной симметрии. Поэтому КИП претендует на унифицированное рассмотрение всех мыслимых поляризационных эффектов в световодах, за исключением разве что весьма слабого рассеяния на мелких неоднородностях.

Локальные криволинейные координаты. Малые параметры задачи. При описании электромагнитных волн в световоде целесообразно ввести криволинейные координаты, отсчитывая переменную ζ вдоль оси световода (ось световода вводится как геометрическое место центров тяжести распределения проницаемости $\varepsilon_0 = (1/3) \text{Sp } \varepsilon_{ik}$ в поперечных сечениях), а переменные ξ и η — поперек оси, направив ось ξ вдоль нормали, а ось η — вдоль бинормали к осевой линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\zeta)$. В результате радиус-вектор произвольной точки \mathbf{r} представится суммой

$$\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{n}(\zeta)\xi + \mathbf{b}(\zeta)\eta + \mathbf{r}(\zeta). \quad (5.8)$$

В каждом сечении волновода выделим аксиально-симметричную часть $\varepsilon_{ax}(\rho, \zeta)$, зависящую от расстояния ρ до оси волновода. Тогда разность

$$\gamma = \varepsilon(\xi, \eta, \zeta) - \varepsilon_{ax}(\rho, \zeta), \quad \rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad (5.9)$$

будет характеризовать отличие от аксиальной симметрии. Мы припишем этой разности малый параметр $\mu_2 = \max(|\gamma|/\varepsilon_0) \ll 1$, сохранив обозначение μ_1 за слабой анизотропией $v_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_0 \delta_{ik}$.

Кроме малых параметров μ , μ_1 и μ_2 в данной задаче возникает еще малый параметр $\mu_3 \sim a/l \ll 1$, характеризующий малость радиуса a сердцевинки световода по сравнению с характерными длинами неоднородностей l . В качестве l могут выступить радиус кривизны осевой линии $R = 1/K_1$ или ее радиус кручения $T = 1/K_2$, так что фактически $\mu'_3 \sim aK_1$ или $\mu''_3 = aK_2$. Малость параметра μ_3 гарантирует отсутствие резких изгибов и скруток световода. Всем параметрам μ , μ_1 , μ_2 , μ_3 мы припишем одинаковый порядок малости, руководствуясь которым мы проведем разложение искомых полей в световоде.

Уравнения Максвелла в криволинейных координатах. В симметричном одномодовом световоде электрическое поле представляет собой суперпозицию двух поляризационных состояний

$$\mathbf{E} = (\Phi_1 \mathbf{e}_1 + \Phi_2 \mathbf{e}_2) \exp(ih_0 \zeta), \quad (5.10)$$

где h_0 — постоянная распространения, а векторные функции \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 описаны, например, в [65, 66]. Эти функции имеют как продольные, так и поперечные составляющие, причем поперечные составляющие ортогональны друг другу: $\mathbf{e}_{1\perp} \mathbf{e}_{2\perp} = 0$.

В слабонеоднородном и слабоанизотропном световоде поле в нулевом приближении сохраняет невозму-

¹ Материал этого раздела подготовлен Ю.А. Кравцовым в сотрудничестве с А.Н. Пилипецким.

ценную структуру (5.10), но в первом порядке по малому параметру μ скалярные амплитуды Φ_1 и Φ_2 становятся переменными величинами, $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(\zeta)$, и будут взаимозависимы. Связь между амплитудами Φ_1 и Φ_2 можно найти, записав уравнения Максвелла в криволинейных координатах ζ, η, ξ . В нулевом порядке относительно μ уравнения Максвелла удовлетворяются в силу (5.10), а условие совместимости уравнений первого приближения дадут связанные уравнения для Φ_1 и Φ_2 , аналогичные уравнениям КИП. Для упрощения анализа мы рассмотрим порознь вклады изгибов и кручений, анизотропии и асимметрии, хотя в действительности эти факторы действуют одновременно.

Влияние изгибов и кручений. При учете только кручений и изгибов волновода мы получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} &= -ih_0 K_1^2 a_{\text{ef}}^2 \Phi_1 + K_2 \Phi_2, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} &= -K_2 \Phi_1 + ih_0 K_1^2 a_{\text{ef}}^2 \Phi_2,\end{aligned}\quad (5.11)$$

где величина a_{ef} характеризует эффективный радиус световода.

Слагаемые с кручением K_2 в (5.11) описывают рытовское вращение векторов поля по отношению к трехграннику $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$, связанному с осью световода. Слагаемые же с K_1 описывают двулучепреломление в изогнутом волноводе. При $K_1 = \text{const}$ и $K_2 = 0$ (световодное кольцо) из (5.11) следуют результаты, полученные в работе [67] на основе иного подхода. Поправки к невозмущенной постоянной распространения h_0 оказываются различными для двух поляризаций. Эти поправки имеют второй порядок малости относительно параметра $\mu_3 \sim K_1 a$. Мы искусственно отнесли их к членам первого порядка малости в уравнениях Максвелла, но зато получили двулучепреломление, обусловленное изгибами световода. Результаты, извлекаемые из уравнений (5.11), вполне согласуются с результатами других работ [68–70], в которых проанализирована роль изгибов и кручений на другой методической основе.

Заметим, что рытовское вращение плоскости поляризации, хотя и было изучено 50 с лишним лет назад [13], экспериментально измерено совсем недавно при помощи световодов [71–73].

Влияние эллиптичности (несимметричности) сердцевин. Разложим асимметричную часть γ проницаемости (5.9) в ряд Фурье по угловой переменной в плоскости поперечного сечения световода всех членов этого разложения в условии совместимости уравнений Максвелла. В итоге дифференциальные уравнения для Φ_1 и Φ_2 принимают вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = \frac{ik_0}{2} (\delta_c \Phi_1 + \delta_s \Phi_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} = \frac{ik_0}{2} (\delta_s \Phi_1 - \delta_c \Phi_2), \quad (5.12)$$

где величины δ_c и δ_s характеризуют взаимодействие двух поляризационных мод вследствие аксиальной несимметричности световода. Из (5.12) вычисляются поправки распространения поляризационных мод $\Delta h_{1,2} = \pm(\delta_c^2 + \delta_s^2)^{1/2}$. Эти поправки согласуются с результатами расчетов, опубликованных в работах [74–76]. Заметим, что простые формулы для δ_c и δ_s позволяют легко

рассчитать поправки к постоянным распространения для произвольной формы асимметрии, скажем, для волокна с эллиптической сердцевиной или же с двумя сердцевинами. Нам представляется, что этот подход проще и нагляднее, чем существующие.

Влияние анизотропии. Различают две разновидности оптической анизотропии в волокнах: "вмороженная" анизотропия, возникшая в процессе изготовления световода, и "деформационная" анизотропия, появляющаяся под действием механических напряжений, в частности при изгибах световода [77–79].

Учет анизотропии материала световода приводит к уравнениям типа (5.12). Входящие в него коэффициенты представляют собой линейные комбинации компонент тензора v_{ik} , усредненных с квадратом поперечной или с квадратом продольной волновой функции или с произведением продольной и поперечной функций.

Не приводя этих выражений ради экономии места, отметим, что трансформация поляризационных мод определяется не только поперечными компонентами тензора анизотропии, но и продольной компонентой, которая в неоднородном волноводе также способна "связывать" поляризационные моды. Согласно этим уравнениям, постоянные распространения поляризационных мод получают поправки порядка $\Delta h \sim k_0 |v_{ik}|$.

При одновременном действии многих факторов в дифференциальных уравнениях для Φ_1 и Φ_2 появляется суперпозиция всех упомянутых выше слагаемых, поскольку все расчеты мы провели в первом порядке относительно μ , с единственным исключением для коэффициентов, характеризующих вклад изгибов: они пропорциональны $\mu_3^2 \sim (ka)^2$.

Достоинство излагаемого подхода состоит в том, что мы учли все возможные факторы одновременно, добившись тем самым унифицированного описания разнородных эффектов, снимающих поляризационное вырождение. Еще одно достоинство такого подхода состоит также в возможности сравнивать действие различных причин, снимающих вырождение, и устанавливать условия, поддерживающие стабильное состояние поляризации в световоде. В сущности, мы возвращаемся к условию $\delta \sim \Delta h l \gg 1$, о котором мы говорили в начале раздела. Это условие гарантирует слабость взаимодействия поляризационных мод. При выполнении противоположного условия $\delta \lesssim 1$ взаимная трансформация мод делает состояние поляризации в световоде неустойчивым. Дополнительные практические детали проблемы читатель найдет в работах [81–84].

5.4. Оптический эффект Магнуса

Упомянем еще один интересный эффект, связанный со слабой оптической анизотропией. Речь идет об оптическом аналоге эффекта Магнуса. Оптический эффект Магнуса состоит в том, что в неоднородной изотропной среде луч испытывает смещение, зависящее от его поляризации [85]. Так, лучи, отвечающие левой и правой круговым поляризациям, смещаются в разные стороны.

Оптический эффект Магнуса дает еще один повод отметить тесную связь между анизотропией и неоднородностью среды. В частности, мы уже указывали в разделе 4.3, что изотропная среда, обладающая пространственной дисперсией, при наличии неоднородности приобретает слабую анизотропию. В случае оптического эффекта Магнуса анизотропия не возникает, но

наблюдается более слабый эффект: смещение лучей, зависящее от поляризации.

Согласно работе [85], оптический эффект Магнуса изменяет уравнение луча: вместо первого уравнения (2.10) следует писать

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} - \frac{\sigma}{k_0 n} (\mathbf{t} \ln n_0),$$

где \mathbf{t} — касательная к лучу, а величина

$$\sigma = \text{Im} \left(\frac{2E_1^* E_2}{|E_1|^2 + |E_2|^2} \right)$$

характеризует степень циркулярности поля (величины E_1 и E_2 — это проекции поля на два поперечных орта): для правой циркулярной поляризации $\sigma = +1$, а для левой $\sigma = -1$. Для промежуточных состояний $-1 < \sigma < +1$.

Указанное смещение луча можно интерпретировать как взаимодействие спина фотона (его поляризации) с неоднородностью среды, т.е. как своего рода спин-орбитальное взаимодействие фотона в неоднородной среде. В определенном смысле эффект обратен рывтовскому вращению плоскости поляризации, при котором кручение луча влияет на поляризацию поля: в оптическом эффекте Магнуса сама поляризация влияет на траекторию луча.

Экспериментально оптический эффект Магнуса наблюдался в световодах как смещение (поворот) спекл-картины при замене правой круговой поляризации поля на левую [86].

5.5. Поляризационные эффекты в нелинейной оптике

Интенсивные электромагнитные волны в нелинейных изотропных средах индуцируют разнообразные поляризационные эффекты: самовращение эллипса поляризации мощной световой волны [87], возникновение нелинейной анизотропии [88, 89], самоиндуцированное вращение плоскости поляризации в кубических кристаллах за счет анизотропии нелинейного поглощения [90].

Широкий круг нелинейных поляризационных эффектов затронут в монографии [91], посвященной оптической бистабильности. Сюда относятся поляризационная мультистабильность, поляризационная неустойчивость, поляризационный хаос, деполяризационная неустойчивость при двухфотонном поглощении, поляризационная неустойчивость в средах с двулучепреломлением и др. Обзор нелинейных поляризационных явлений на страницах УФН давали Аракелян [92] и Желудев [93]. Отметим еще недавние публикации [94, 95, 120].

Упомянув об этих работах, мы хотели бы обратить внимание на то, что при анализе нелинейных поляризационных эффектов де факто применяются приемы КИП. Дело в том, что нелинейные поправки к тензору электрической проницаемости всегда считаются малыми величинами, которые учитываются в уравнениях для амплитуд поля как возмущения. Если нелинейные поправки имеют тензорный характер, то происходит снятие поляризационного вырождения по мере увеличения интенсивности. В результате уравнения для поляризационных мод "зацепляются" друг с другом, и мы приходим к системе нелинейных уравнений КИП. Зависимость анизотропии от амплитуд и приводит к нелинейным поляризационным эффектам, упомянутым выше.

6. Акустика слабоанизотропных сред

6.1. Квазиизотропное приближение геометрической акустики

В данном разделе мы применим метод КИП к акустическим задачам (Найда [21, 22]). Уравнения КИП позволяют сопрягать геометрическую акустику трехмерно-неоднородных изотропных сред (работы [96, 97]) с методом независимых нормальных волн Куранта–Лакса (последний был применен к акустике трехмерно-неоднородной анизотропной среды в работах [98–101]). Необходимость такого сопряжения вполне созрела в связи с задачами сейсмологии и ультразвукового неразрушающего контроля.

Волны деформации в неоднородной анизотропной среде описываются уравнением [102]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \quad (6.1)$$

где ρ — плотность среды, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения, $a_{\alpha\beta\gamma\nu}$ — тензор модулей упругости ($a_{\alpha\beta\gamma\nu} = a_{\gamma\nu\alpha\beta}$), $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений, связанный со смещениями x_ν формулой

$$\sigma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\nu} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\nu}. \quad (6.2)$$

По повторяющимся греческим индексам в этом разделе всюду подразумевается суммирование от 1 до 3. В предельном случае изотропной среды тензор $a_{\alpha\beta\gamma\nu}$ равен

$$a_{\alpha\beta\gamma\nu}^0 = \lambda' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + \mu' (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma}). \quad (6.3)$$

К слабоанизотропным отнесем среды, в которых относительная разница фазовых скоростей поперечных мод $\Delta v_\perp / v_\perp$ мала по сравнению с единицей: $\mu_1 \sim \Delta v_\perp / v_\perp \ll 1$. При $\mu_1 = 0$ справедлива геометрическая акустика изотропных сред [96, 97], тогда как при $\delta \gg \mu_1 / \mu \gg 1$ вступает в силу геометрическая оптика в форме независимых нормальных волн [98–102].

Квазиизотропное приближение описывает упругие волны в промежуточном случае и тем самым обеспечивает предельный переход от анизотропной среды к изотропной. В слабоанизотропной упругой среде возможно подобрать коэффициенты Ламе λ' , μ' так, чтобы составленный из них изотропный тензор $a_{\alpha\beta\gamma\nu}^0$ слабо отличается от исходного тензора $a_{\alpha\beta\gamma\nu}$, т.е. чтобы выполнялись условия малости анизотропии:

$$\mu_1 \sim (\mu' + \lambda') \Delta a_{\alpha\beta\gamma\nu} = (\mu' + \lambda')^{-1} \max_{\alpha, \beta, \gamma, \nu} |a_{\alpha\beta\gamma\nu} - a_{\alpha\beta\gamma\nu}^0| \ll 1. \quad (6.4)$$

Произведем в уравнениях (6.2) эйкональную подстановку:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \exp(-i\omega t + \varphi). \quad (6.5)$$

Получив для амплитуды \mathbf{U} уравнение

$$[(\omega^2 \rho - \mu' p^2) U_\alpha - (\lambda' + \mu') (\mathbf{p} \mathbf{U}) p_\alpha] = \Delta a_{\alpha\beta\gamma\nu} p_\beta p_\nu U_\gamma - i X_\alpha + \dots, \quad (6.6)$$

где

$$\mathbf{X} = (\lambda' + \mu')(\nabla(\mathbf{p}\mathbf{U}) + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{U}) + \mu'(\mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{p} + 2(\mathbf{p}\nabla)\mathbf{U}) + (\mathbf{p}\mathbf{U})\nabla\lambda' + (\nabla\mu', \mathbf{p})\mathbf{U} + (\nabla\mu', \mathbf{U})\mathbf{p},$$

учтем, что эйконал поперечных волн подчиняется уравнению $\omega^2\rho - \mu'(\Delta\varphi)^2 = 0$, и умножим уравнение (6.6) последовательно на векторы нормали и бинормали к лучу. В результате мы получим два уравнения для компонент векторной амплитуды \mathbf{U} .

Подстановка

$$\mathbf{U} = U_0(\rho\mu)^{-1/4}(\mathcal{Q}_n\mathbf{n} + \mathcal{Q}_b\mathbf{b}),$$

где U_0 подчиняется закону сохранения энергии в лучевой трубке, дает для \mathcal{Q}_n и \mathcal{Q}_b систему уравнений КИП [21]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Q}_n}{ds} + \frac{1}{2}i\omega\rho^{1/2}\mu^{-3/2}(\Delta a_{nnt}\mathcal{Q}_n + \Delta a_{nbt}\mathcal{Q}_b) - T^{-1}\mathcal{Q}_b &= 0, \\ \frac{d\mathcal{Q}_b}{ds} + \frac{1}{2}i\omega\rho^{1/2}\mu^{-3/2}(\Delta a_{bnt}\mathcal{Q}_n + \Delta a_{bbt}\mathcal{Q}_b) + T^{-1}\mathcal{Q}_n &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Таким образом, уравнения (6.7) имеют ту же структуру, что и уравнения КИП для электромагнитных волн. Это позволяет почти без изменения перенести в акустику не только разнообразные методы расчета поляризационных эффектов, но и некоторые методы диагностики слабоанизотропных сред, известные в электродинамике. Более того, в акустику переносятся некоторые эффекты. Так, обсуждавшийся в разделе 4 метод поляризационной диагностики плазмы почти без изменений может быть использован для акустической поляризационной диагностики предварительно напряженных сред. По тем же причинам можно предвидеть существование акустического аналога "касательной конической рефракции" (раздел 5.1).

6.2. Геометрическая акустика

изотропной неоднородно напряженной среды

Пусть акустическая волна распространяется в изотропной, предварительно деформированной среде, которая, как известно, подобна анизотропной среде с тензором [103]

$$a_{\alpha\beta\gamma\nu} = \frac{\partial^2 W}{\partial(\partial w_\alpha/\partial x_\beta) \partial(\partial w_\gamma/\partial x_\nu)} \Big|_{w=u^0},$$

где W — энергия деформации, отнесенная к единице недеформированного объема, а $\mathbf{u}^0(\mathbf{r})$ — вектор смещения, отвечающий предварительной деформации. При малых начальных деформациях

$$a_{\alpha\beta\gamma\nu} = a_{\alpha\beta\gamma\nu}^0 + \Delta a_{\alpha\beta\gamma\nu},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a_{\alpha\beta\gamma\nu} &= W_{\alpha\beta\gamma\nu\epsilon\theta} \frac{\partial u_\epsilon^0}{\partial x_\theta}, \\ W_{\alpha\beta\gamma\nu\epsilon\theta} &= \frac{\partial^3 W}{\partial(\partial w_\alpha/\partial x_\beta) \partial(\partial w_\gamma/\partial x_\nu) \partial(\partial w_\epsilon/\partial x_\theta)} \Big|_{\partial w_\mu/\partial x_\theta=0}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В координатной системе, где ось x_1 параллельна волновому вектору \mathbf{k} , достаточно знать лишь компоненты $a_{\alpha 1 \gamma 1}$ и $W_{\alpha 1 \gamma 1 \epsilon \theta}$. Оказывается, что различных ненулевых компонент $W_{\alpha 1 \gamma 1 \nu \epsilon \theta}$ всего шесть:

$$\begin{aligned} W_{111111} &= C_1 = 6\mu' + 3\lambda' + 2A + 6B + 2C = \\ &= 6\mu' + 3\lambda' + 4m + 2l, \\ W_{111122} &= W_{111133} = C_2 = \lambda' + 2B + 2C = \lambda' + 2l, \\ W_{212111} &= W_{212122} = W_{112121} = W_{211121} = W_{313111} = \\ &= W_{313133} = W_{113131} = W_{311131} = W_3 = \\ &= 2\mu' + \lambda' + \frac{1}{2}A + B = 2\mu' + \lambda' + m, \\ W_{212133} &= W_{313122} = W_4 = \lambda' + B = \lambda' + m - \frac{1}{2}n, \\ W_{112112} &= W_{211112} = W_{113113} = W_{311113} = W_5 = \\ &= \mu' + \frac{1}{2}A + B = \mu' + m, \\ W_{213123} &= W_{213132} = W_{312132} = W_{312123} = W_6 = \\ &= \mu' + \frac{1}{4}A = \mu' + \frac{1}{4}n, \end{aligned}$$

где l, m, n — модули Мурнагана [104]:

$$n = A, \quad m = \frac{1}{2}A + B, \quad l = B + C.$$

Вычисляя компоненты $\Delta a_{\alpha 1 \gamma 1}$ по формулам (6.8) и подставляя их в уравнения (6.7), мы получаем уравнения КИП для предварительно напряженной изотропной среды:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U_0(\mathcal{Q}_n\mathbf{n} + \mathcal{Q}_b\mathbf{b})(\rho\mu')^{-1/4} \exp \left\{ -i\omega t + i\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\omega \int \rho^{1/2}(\mu')^{-3/2} \left[C_3 w_{tt} + \frac{1}{2}(C_3 + C_4)(w_{nn} + w_{bb}) \right] ds \right\}, \\ \frac{d\mathcal{Q}_n}{ds_0} &= -iG\mathcal{Q}_n + (T^{-1} - iH)\mathcal{Q}_b, \\ \frac{d\mathcal{Q}_b}{ds_0} &= (-T^{-1} + iH)\mathcal{Q}_n + iG\mathcal{Q}_b, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \frac{\omega\rho^{1/2}}{2\mu^{3/2}} C_6(w_{nn} - w_{bb}), \quad H = \frac{\omega\rho^{1/2}}{2\mu^{3/2}} C_6(w_{nb} + w_{bn}), \\ w_{nn} &= n_\alpha n_\beta \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta}, \quad w_{nb} = n_\alpha b_\beta \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta}, \\ w_{bb} &= b_\alpha b_\beta \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta}, \quad w_{tt} = t_\alpha t_\beta \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Конкретные расчеты трансформации упругих волн могут быть выполнены для однородной деформации однородной среды, для осесимметричного кручения однородного цилиндра и для некоторых других систем [21, 22]. Изложенная теория может найти также применение в задачах сейсмического зондирования (слабая анизотропия земной коры была выявлена совсем недавно [105, 106] и в задачах акустики жидких кристаллов [107].

7. Квантовомеханические аналоги волн в слабоанизотропных средах

7.1. Эффект Штерна–Герлаха как двойное лучепреломление спинорной волновой функции в магнитном поле

В данном разделе мы сопоставим КИП с квазиклассической асимптотикой уравнений Паули для частиц спина 1/2 в магнитном поле. Случай спина 1/2 и уравнения Паули (а не Дирака, например) выбраны здесь для того, чтобы избежать сложных выкладок и продемонстрировать суть новшеств, привносимых КИП в эту хорошо исследованную проблему.

Существуют два подхода к построению квазиклассического приближения для частиц со спином: подход Паули и подход де Бройля. Подход Паули [33] основан на предположении, что квазиклассическая траектория частицы не связана с ее магнитным моментом. Это вполне аналогично первоначальной версии КИП в электродинамике: в нулевом порядке КИП дает траекторию (луч), не зависящую от спина (поляризации). В свое время Паули не удалось получить полную (т.е. с учетом поляризации) квазиклассическую асимптотику. Впервые это осуществил Галанин [34]. Позже этот результат был воспроизведен в более четкой форме Рубиновым и Келлером [35].

Другой подход был намечен де Бройлем [108], который предположил, что траектории частиц со спином 1/2 уже в нулевом приближении квазиклассики связаны с их магнитным моментом. Де Бройль намеревался дополнить квазиклассические формулы Паули слагаемым, которое зависело бы от магнитного момента и внешнего магнитного поля. Соответствующие добавочные члены возникли бы в уравнениях эйконала и в уравнениях Гамильтона, а последнее означало бы зависимость мировых линий от спиновых состояний частиц, что, собственно говоря, и имеет место в эффекте Штерна–Герлаха. Однако найти конкретное выражение для добавочного члена де Бройль не сумел.

Реализовать намеченную де Бройлем программу удалось десять лет спустя Шиллеру [109, 110], но очень громоздким путем. Между тем, картина эффекта сразу проясняется, если признать, что эффект Штерна–Герлаха представляет собой двойное лучепреломление спинорной ψ -функции внешним магнитным полем. Встав на эту точку зрения, для уравнений Паули и Дирака можно найти решения типа тех, которые предлагает электродинамика анизотропных неоднородных сред.

Указанный подход был реализован в работе Найды и Прудковского [23], которой мы и будем следовать ниже. По аналогии с процедурой расщепления лучей в электродинамике анизотропных сред мы получим геометрические решения уравнений Паули, отвечающие расщепленным пучкам в эффекте Штерна–Герлаха, к чему, собственно говоря, и стремился де Бройль. Эти решения допускают как частные случаи и штерн-герлаховские траектории частиц, и решения типа Паули–Галанина–Рубинова–Келлера.

7.2. Уравнения КИП для спинорной волновой функции

Пусть пучок нерелятивистских, поляризованных частиц со спином 1/2 (например, нейтронов) попадает в неоднородное магнитное поле (рис. 8). Такой пучок, вообще

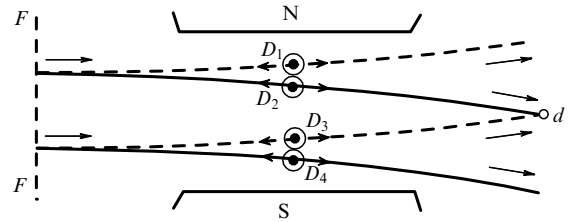


Рис. 8. К расчету интерференционной картины пучка нейтронов в точке d в опыте Штерна–Герлаха; FF — начальная поверхность постоянной фазы. Сплошные (штриховые) линии отвечают траекториям частиц, спин которых параллелен (антипараллелен) магнитному полю. $B_{1,2,3,4}$ — точки локального максимума магнитного поля $|\mathbf{H}|$ на траекториях частиц; в окрестности этих точек осуществляется итерационная процедура с обыкновенной или необыкновенной затравкой. Внешние стрелки обозначают направление траекторий частиц, а стрелки на самих траекториях — направление интегрирования при итерационной процедуре [23]

говоря, расщепляется на два пучка, обладающих различными поляризациями. Задача состоит в том, чтобы вычислить поляризации, интенсивности и фазы в этих пучках.

Заметим, что нейтроны как предмет для иллюстрации удобнее, чем атомы Ag или K в состояниях $^2S_{1/2}$, реально использовавшиеся в опытах Штерна–Герлаха или Фриша–Сегре [116] по перебросу спинов вблизи нейтральной точки магнитного поля. Дело в том, что в атомах необходимо учитывать еще и магнитный момент ядра, а это сильно усложняет картину (Раби [117], Мотц, Розе [118]).

Решение сформулированной выше проблемы сводится к построению надлежащего квазиклассического решения уравнения Паули

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu_n (\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}) \right] \psi, \quad (7.1)$$

где m — масса нейтрона, μ_n — его магнитный момент, \mathbf{H} — магнитное поле, а $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор, составленный из матриц Паули.

Чтобы получить квазиклассические решения уравнения Паули (7.1), выполним прежде всего эйкональную подстановку

$$\psi(x) = A(x) \exp[i\varphi(x)] \quad (7.2)$$

для спинорной двухкомпонентной волновой функции ψ и запишем уравнение эйконала с учетом магнитного момента:

$$\begin{aligned} \det \left(-\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 - \mu_n \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} \right) = \\ = \left(-\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 \right)^2 - \mu_n^2 \mathbf{H}^2 = 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{k} = \nabla\varphi$, $\omega = -\partial\varphi/\partial t$. Решая это уравнение, получаем

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} \mathbf{k}^2 \pm \frac{\mu_n}{\hbar^2} |\mathbf{H}|. \quad (7.3)$$

Соответствующее уравнение для траекторий частиц имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \pm \mu_n |\mathbf{H}(\mathbf{r})|; \quad (7.4)$$

тогда для эйконала φ получается выражение

$$\varphi = \varphi(x_{\text{in}}) + \int_{x_{\text{in}}}^x (-\omega dt + \mathbf{k} d\mathbf{r}).$$

Здесь интегрирование проводится вдоль мировой линии (7.4), а вместо вектора \mathbf{k} подставляется $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$. Выбор верхних (нижних) знаков в формулах (7.4), (7.3) и в дальнейших формулах отвечает ориентации спина вдоль (против) магнитного поля. Таким образом, имеется два различных эйконала и два различных семейства мировых линий для частиц, как и предполагал де Бройль [108].

Подставляя (7.2) в (7.1), получаем квазиклассическое уравнение для амплитуды $A(x)$

$$\left(-\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2\right) A + i\hbar \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} \mathbf{k} \nabla A + A \frac{\hbar}{2m} \operatorname{div} \mathbf{k}\right) + \mu_n(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})A = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 A. \quad (7.5)$$

Отбрасывая в этой формуле малую правую часть, представим амплитуду A в виде $A = \gamma(x) a(x)$, где a подчиняется квазиклассическому уравнению

$$\frac{da}{dt} - i \frac{\mu_n}{\hbar} [\mp |\mathbf{H}| + (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] a = 0, \quad (7.6)$$

а $\gamma(x)$ удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial \gamma^2}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \gamma^2) = 0. \quad (7.7)$$

Эйкональная подстановка (7.2) вполне аналогична той "квазиизотропной" подстановке (применительно к электронейтральной частице спина 1/2), которой фактически пользовались Паули, Галанин, а также Рубинов и Келлер. Закон сохранения (7.7) был получен еще Паули [33]. Уравнение (7.6) эквивалентно уравнению прецессии, которое получили в нерелятивистском квазиклассическом пределе Галанин [34], а затем Рубинов и Келлер [35].

В этом можно убедиться, введя новую амплитуду

$$\tilde{a} = a \exp\left(\pm i \int_0^t \mu_n \frac{|\mathbf{H}|}{\hbar} dt\right), \quad (7.8)$$

для которой из (7.6) следует уравнение Паули в системе покоя частицы, движущейся по мировой линии (7.4):

$$i\hbar \frac{d\tilde{a}}{dt} = -\mu_n(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})\tilde{a}. \quad (7.9)$$

Соответственно, вдоль каждой из мировых линий (7.4) для вектора магнитного момента $\mathbf{M} = \mu_n(a^*, \boldsymbol{\sigma}a) = \mu_n(\tilde{a}^*, \boldsymbol{\sigma}\tilde{a})$ выполняется обычное уравнение прецессии

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 2\mu_n \hbar^{-1} [\mathbf{M}\mathbf{H}]. \quad (7.10)$$

Совмещение формул (7.2) и (7.8) дает итоговую эйкональную подстановку

$$\psi(x) = \gamma(x) \tilde{a}(x) \exp\left\{i \int [(\omega \mp \hbar^{-1} \mu_n |\mathbf{H}|) dt + \mathbf{k} d\mathbf{r}]\right\}, \quad (7.11)$$

которая решала бы проблему в постановке де Бройля. Формула (7.11), как легко видеть, отвечает направле-

нию спина, параллельного или антипараллельного текущему вектору \mathbf{H} , что и реализуется в эффекте Штерна–Герлаха.

Таким образом, излагаемая асимптотика КИП, представленная уравнениями (7.4) для мировых линий, эйкональной подстановкой (7.11) и спиновыми уравнениями (7.9), отличается от метода Паули–Галанина следующим:

а) частицы принадлежат двум разным типам траекторий, отвечающим разным спиновым ориентациям частиц по отношению к внешнему магнитному полю;

б) фазы ψ -функций содержат поправки, связанные с магнитным моментом.

7.3. Приближение деформированных нормальных волн
Фигурирующая в правой части (7.5) вторая производная для амплитуды A имеет порядок

$$|\nabla^2 A| \sim |A| \left(\frac{\mu_n |\mathbf{H}|}{\hbar v}\right)^2 + \dots \quad (7.12)$$

и отвечает осцилляциям величин a , A с ларморовской частотой. Соответствующая погрешность δa , содержащаяся в решениях уравнения (7.6) (по отношению к решениям уравнения (7.5)) будет нарастать вдоль луча:

$$\frac{|\delta a|}{|a|} \sim \frac{\hbar}{m} \int \left(\frac{\mu_n |\mathbf{H}|}{\hbar v}\right)^2 dt. \quad (7.13)$$

В тех случаях, когда погрешность (7.13) представляется приемлемой, расчеты пучка можно проводить непосредственно по уравнению (7.6), выбрав произвольно верхние и нижние знаки в формулах (7.6), (7.3), (7.4) и используя заданное начальное условие для волновой функции ψ_{in} непосредственно для уравнения (7.6). Расщепление траектории в этом случае фактически не происходит, поскольку это расщепление скрывается за погрешностями, оцениваемыми формулой (7.13).

Нарастающую погрешность (7.13) можно исключить, если начальное условие для уравнения (7.6) наложить в области сильного магнитного поля, потребовав, чтобы в этой области выполнялось равенство

$$[(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}) \mp |\mathbf{H}|] a = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{H}| = \max. \quad (7.14)$$

В этом случае в области сильного поля амплитуда $a(x)$ будет изменяться плавно (без осцилляций), и вместо оценки (7.12) получим

$$|\nabla^2 A| \sim l^{-2} |A|.$$

Ошибки, накапливающиеся в области сильного магнитного поля, не будут тогда превышать величину μ . С другой стороны, в области слабого магнитного поля правая часть формулы (7.5) также мала согласно оценке (7.12). Таким образом, если выбирать начальное условие к уравнению (7.6) по формуле (7.14), то решения уравнения (7.6) обеспечиваются как бы двойной благоприятной асимптотикой как со стороны сильного поля, так и со стороны слабого. Естественно, это обещает и высокую общую точность, удовлетворяющую оценке

$$\frac{|\delta a|}{|a|} \sim \lambda l^{-1}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mv}. \quad (7.15)$$

В данном случае l_r по порядку величины совпадает с длиной пробега частицы за ларморовский период $l \sim v\hbar/\mu_n|\mathbf{H}| = vT_L$.

Как и в случае электромагнитных волн, для достижения предельной точности (7.15) необходимо уточнять начальное условие (7.14) с помощью итерационной процедуры

$$a = (C_{(0)}^1 + C_{(1)}^1 + C_{(2)}^1 + \dots)a_{\mp} + (C_{(1)}^2 + C_{(2)}^2 + \dots)a_{\pm}, \quad (7.16)$$

где амплитуды поляризационных мод a_{+} и a_{-} подчиняются условиям

$$[\mathbf{H}\sigma \mp |\mathbf{H}|]a_{\mp} = 0, \quad a_{+}^*a_{+} + a_{-}^*a_{-} = 1, \quad a_{+}^*a_{-} = 0.$$

Коэффициент $C_{(0)}^1$ находится из уравнения

$$\frac{dC_{(0)}^1}{dt} + a_{\mp}^* \frac{da_{\mp}}{dt} C_{(0)}^1 = 0, \quad C_{(0)}^1|_{t=t_{in}} = 1, \quad (7.17)$$

а прочие $C_{(n)}^1, C_{(n)}^2$ — из рекуррентных формул

$$C_{(n)}^2 = \pm \frac{i\hbar}{2\mu_n|\mathbf{H}|} \left[\frac{dC_{(n-1)}^2}{dt} + \left(a_{\pm}^* \frac{da_{\mp}}{dt} \right) C_{(n-1)}^1 + \left(a_{\pm}^* \frac{da_{\pm}}{dt} \right) C_{(n-1)}^2 \right],$$

$$\frac{dC_{(n)}^1}{dt} + a_{\mp}^* \frac{da_{\mp}}{dt} C_{(n)}^1 = -a_{\mp}^* \frac{da_{\pm}}{dt} C_{(n)}^2. \quad (7.18)$$

Начальные значения $C_{(n)}^1(t_{in})$ в последнем уравнении удобно считать нулевыми.

Ряд (7.16) представляет собой асимптотическое разложение решения уравнения (7.6) в области сильного поля. Условие сходимости ряда (7.16) выражается неравенством $l \gg v\hbar/\mu_n|\mathbf{H}|$, так что значение $l_r \sim v\hbar/\mu_n|\mathbf{H}|$ является граничным для этого неравенства. Построенные указанным образом ψ -функции аналогичны деформированным нормальным волнам в электродинамике (см. раздел 3).

Стремясь достичь предельной точности (7.15), необходимо прибегнуть к процедуре расщепления траекторий, сущность которой иллюстрирует рис. 8. Через точки начального фронта проведем по два луча соответственно двум типам поляризации. Каждый из них строится по уравнению (7.4) с соответствующим знаком. В начальных точках траектории должны быть перпендикулярны поверхности постоянной фазы. Если на каждой из траекторий имеется по одному локальному максимуму величины $|\mathbf{H}|$ (как это и предполагается на рис. 8), то в окрестности каждой траектории необходимо воспользоваться приближением деформированных нормальных волн и итерационной процедурой с затравкой (7.16)–(7.18) при числе шагов

$$N \approx \frac{\ln \mu}{\ln [v\hbar(\mu_n|\mathbf{H}|)^{-1}]}, \quad (7.19)$$

где μ — требуемая точность. После этого, используя результат итерации как начальное условие, необходимо решать уравнения (7.6), каждое на своей траектории и со своим начальным условием, удаляясь от начальной области в обе стороны. Обозначим полученные решения

через b^{\pm} . Сшивая спиноры b^{\pm} на начальном фронте с начальным условием, получаем для каждого из лучей амплитуды b^{+} и b^{-} . Построенные таким образом поляризационные моды

$$\psi^{\pm}(x) = b^{\pm}(x)\gamma_{\pm}(x) \exp \left\{ i \int_{x_{in}}^x (-\omega_{\pm} dt_{\pm} + \mathbf{k}_{\pm} d\mathbf{r}_{\pm}) \right\} \quad (7.20)$$

формируют искомое приближенное решение

$$\psi(x) = \psi^{+}(x) + \psi^{-}(x). \quad (7.21)$$

Интересуясь картиной интерференции штерн-герлаховских компонент волны, в рассматриваемую точку d (рис. 8) необходимо провести от начального фронта по одной траектории каждого из двух типов и далее на каждой траектории осуществить изложенную выше процедуру построения соответствующего решения ψ^{+} или ψ^{-} с использованием формул (7.16)–(7.20). Эта процедура и дает искомую математическую модель эффекта Штерна–Герлаха.

Если на траекториях имеется более чем один локальный максимум величины $|\mathbf{H}|$ (как в опыте Фриша–Сегре [116]), то изложенную выше процедуру расщепления траекторий и "сшивания" решений необходимо проводить не только в начальной точке, но и в каждой точке локального минимума величины $|\mathbf{H}|$. Соответственно затравочную итерацию необходимо строить в окрестности каждого локального максимума величины $|\mathbf{H}|$, а в формуле (7.21) следует брать сумму решений, получающихся не по двойным, а по многократным (четырех-, восьмикратным и т.п.) разветвлениям лучей. Как видим, описанная процедура вполне идентична соответствующей процедуре в электродинамике двупреломляющих сред (раздел 3.3).

При расщеплении лучей следует учитывать, что интенсивность отщепляющихся пучков не превышает $\exp[-v\hbar/(\mu_n|\mathbf{H}|l)]$, и если этот фактор мал, то некоторые расщепления можно пренебречь.

Ясно, что КИП может быть применено также для описания поляризованных пучков атомов и ионов в магнитном поле, — разумеется, с учетом магнитного момента ядра. Нет препятствий и для применения метода к квадратированным уравнениям Дирака.

8. Заключение

Приступая к работе над обзором, авторы не представляли себе в полной мере, насколько обширны приложения квазиизотропного подхода. Он применим к векторным полям произвольной физической природы: электромагнитным, упругим, спинорным и т.д. Наибольшее применение метод находит в задачах плазменной физики (плазма межпланетная, межзвездная, солнечная, ионосферная, лабораторная и т.д.) и в оптике жидких кристаллов. Новым объектом квазиизотропного приближения стали поляризационные явления в световодах.

Явления касательной конической рефракции в оптике и в теории упругих волн представляют пока что теоретический интерес, но практический интерес к произвольно деформированным оптическим и акустическим средам в последнее время выражен весьма отчетливо.

Хотя мы и старались собрать воедино все относящиеся к обсуждаемой проблеме сведения, но ряд интересных вопросов все же остался не освещенным.

Во-первых, мы ограничились упоминанием только некоторых механизмов трансформации волн в плазме, в частности солнечной короне, но саму физику источников поляризованного радиоизлучения были вынуждены оставить за рамками нашего рассмотрения. К счастью, мы имеем возможность сослаться на книгу [5] и на прекрасную обзорную статью Железнякова, В. Кочаровского и Вл. Кочаровского [8], где проблема источников изучена в деталях.

Во-вторых, мы вынуждены были ограничиться здесь только фрагментами информации об оптике неоднородных жидких кристаллов и вовсе обошли молчанием прохождение микроволн через слабоанизотропные искусственные диэлектрики, через растительные покровы [119] и через другие слабоанизотропные объекты. Наконец, в-третьих, за пределами обзора остались вопросы трансформации волн в деформированных диэлектрических и металлических волноводах кругового и квадратного сечения, подверженных поляризационному вырождению.

Мы надеемся, что концепция квазиизотропного приближения и конкретные результаты, полученные при помощи КИП и изложенные в обзоре, имеют междисциплинарный характер и будут полезны широкому кругу читателей.

Авторы признательны А.Н. Пилипецкому за любезное предоставление материалов для раздела 5.3 и Н.Ю. Комаровой за неоценимую помощь при подготовке рукописи к печати.

Список литературы

- Budden K G *Proc. Roy. Soc. A* **215** 215 (1952)
- Budden K G *Radio Waves in the Ionosphere* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1961)
- Гинзбург В Л *Электромагнитные волны в плазме* (М.: Наука, 1967)
- Davis K *Ionospheric Radio Waves* (Wallham Mass: Blaisdell, 1969)
- Железняков В В *Распространение электромагнитных волн в космической плазме* (М.: Наука, 1977)
- Cheng X A, Fung Z *Astrophys. and Space Sci.* **49** 367 (1977); **50** 361 (1977)
- Oldano C *Phys. Rev.* **40** 6014 (1987)
- Железняков В В, Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *УФН* **141** 257 (1983)
- Кравцов Ю А *ДАН СССР* **183** 74 (1968)
- Courant R, Lax P D *Proc. Nat. Acad. US* **42** 872 (1956)
- Lax P D *Duke Math. J.* **24** 627 (1957)
- Курант Р *Уравнения с частными производными* (М.: Мир, 1964)
- Рытов С М *ДАН СССР* **18** 263 (1938)
- Найда О Н *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **13** 751 (1970)
- Найда О Н *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **14** 1843 (1971)
- Найда О Н *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **15** 751 (1972)
- Найда О Н *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **17** 896 (1974)
- Найда О Н *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **20** 383 (1977)
- Найда О Н *Радиотехн. и электрон.* **23** 2489 (1978)
- Найда О Н *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **17** 1833 (1974)
- Найда О Н *ДАН СССР* **236** 842 (1977)
- Найда О Н *Акуст. журн.* **24** 731 (1978)
- Найда О Н, Прудковский А Г *ЯФ* **28** 1560 (1978)
- Кравцов Ю А, Найда О Н *ЖЭТФ* **71** 237 (1976)
- Фуки А А Препринт ВИНТИ Деп. 4136-В87 (М.: ВИНТИ, 1987)
- Токарь В Г, Рубинштейн Л И, Никитин М А *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **30** 36 (1987)
- Горышник Л Л, Кравцов Ю А *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **9** 279 (1969)
- Фуки А А Препринт РТИ АН СССР № 881 (М.: РТИ АН СССР, 1988)
- Апресян Л А *Астрон. журн.* **53** 53 (1976)
- Апресян Л А, Кравцов Ю А *Теория переноса излучения* (М.: Наука, 1983)
- Найда О Н *ЖЭТФ* **77** 471 (1979)
- Железняков В В, Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *ЖЭТФ* **79** 1735 (1980)
- Pauli W *Helv. Phys. Acta* **5** 179 (1932)
- Galanin A D *J. Phys. of USSR* **6** 35 (1942)
- Rubinov S I, Keller J B *Phys. Rev.* **131** 2789 (1963)
- Ахнестер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1969)
- Кравцов Ю А, Орлов Ю И *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1957)
- а. Кучеренко В В *Изв. АН СССР. Сер. Матем.* **38** 625 (1974)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963)
- Ерохин Н С, Моисеев С С *УФН* **109** 225 (1973)
- Каценеленбаум Б З *Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами* (М.: Изд-во АН СССР, 1961)
- Вазов В *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений* (М.: Мир, 1968)
- Кравцов Ю А, Орлов Ю И *УФН* **132** 475 (1980)
- Kravtsov Yu A, in *Progress in Optics* (Amsterdam: Nord Holland, 1987)
- Апресян Л А, Кравцов Ю А, Яшин Ю Я, Яшнов В А *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **19** 1296 (1976)
- Cohen M H *Astrophys. J.* **131** 664 (1960)
- Melrose D W *Austral. J. Phys.* **23** 31 (1974)
- Железняков В В, Злотник Е Я *Астрон. журн.* **40** 663 (1963)
- Titcheridge J E J *Atm. Terr. Phys.* **33** 1533 (1971)
- Kantor I J *Rai DB De Mendoca F IEEE Trans AP-19* 246 (1970)
- Железняков В В, Злотник Е Я *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **20** 1444 (1977)
- Горышник Л Л, Кравцов Ю А, Томашук Л Я, Фомин Б В *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **9** 873 (1969)
- Харитонов Р Ю, Фуки А А, Букатов М Д, в кн. *Радиолокационные методы в радиофизических исследованиях* (М.: РТИ АН СССР, 1989) с. 76
- Железняков В В *Радиоизлучение Солнца и планет* (М.: Наука, 1964)
- Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *Физика плазмы* **6** 565 (1980)
- Степанов Н С, Гавриленко В Г *ДАН СССР* **201** 577 (1971)
- Гавриленко В Г, Лупанов Г А, Степанов Н С *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **15** 183 (1972)
- Гавриленко В Г, Степанов Н С *Астрон. журн.* **53** 291 (1976)
- Кравцов Ю А, Кугушев А И, Черных А В *ЖЭТФ* **59** 2160 (1970)
- Кертес И Н и др. *ЖЭТФ* **59** 1115 (1970)
- а. Foster J D, Osterlink L H J. *Appl. Phys.* **41** 3656 (1970)
- Гинзбург В Л *ЖТФ* **14** 181 (1944)
- Суворов Е В *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **15** 1320 (1972)
- Беллюстин Н С *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **23** 133 (1980)
- Железняков В В, Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *ЖЭТФ* **79** 1735 (1980)
- Unger H G *Planar Optical Waveguides and Fibres* (Oxford: Clarendon Press, 1977)
- Snyder A W, Love J P *Optical Waveguide Theory* (London – New York: Chapman and Hall, 1983)
- Fang X S, Lin Z Q J. *Lightwave Technology* **3** 789 (1985)
- Smith A M *Appl. Opt.* **19** 2606 (1980)
- Ross L N *Opt. Quant. Electr.* **16** 456 (1984)
- Iton K, Saitoh T, Ohtsuka Y J. *Lightwave Technology* **5** 916 (1987)
- Chiao R Y, Wu Y S *Phys. Rev. Lett.* **57** 933 (1986)
- Tomita A, Chiao R Y *Phys. Rev. Lett.* **57** 937 (1986)
- Chiao R Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 1214 (1988)
- Tjaden D L *Phillips J. Res.* **33** 254 (1978)
- Love J P, Summut R A *Electron. Lett.* **15** 615 (1979)
- Garth S J, Pask C *Electron. Lett.* **21** 27 (1985)
- Kaminov I P, Ramaswamy H L *Appl. Phys. Lett.* **34** 268 (1979)
- Eickhoff W *Opt. Lett.* **7** 629 (1982)
- Varman M P et al. *J. Lightwave Technology* **1** 332 (1983)

80. Berry M V *Proc. Roy. Soc. (London) A* **392** 45 (1984)
а. Клышко Д Н *УФН* **163** 1 (1993)
81. Kaminov I P *IEEE J. Quantum. Electron.* **17** 15 (1981)
82. Payne D N, Barlow A J, Ramskov-Hausen J J *IEEE J. Quantum. Electron.* **18** 477 (1982)
83. Rashleigh S C, Stolen R H *Fiberoptics technology* **1** 155 (1983)
84. Rashleigh S C *J. Lightwave Technology* **1** 312 (1983)
85. Liberman V S, Zel'dovich B Ya *Phys. Rev. A* **46** 5199 (1992)
86. Dooghin A V, Kundikova N D, Liberman V S, Zel'dovich B Ya *Phys. Rev. A* **45** 8204 (1992)
87. Maker P D, Terhune R W, Savage C M *Phys. Rev. Lett.* **12** 507 (1964)
88. Ахманов С А, Жариков В И *Письма в ЖЭТФ* **6** 644 (1967)
89. Kaplan A E *Opt. Lett.* **8** 560 (1983)
90. Дышман М И, Тарасов Г Г *ЖЭТФ* **72** 2246 (1977)
91. Gibbs H M *Optical Bistability: Controlling Light by Light* (New York: Acad. Press, 1985)
92. Аракелян С М *УФН* **157** 683 (1989)
93. Желудев Н Н *УФН* **157** 683 (1989)
94. Evans M W *Phys. Lett. A* **147** 364 (1986)
95. Evans M W *Phys. Rev. Lett.* **64** 2909 (1990)
96. Левин М Л, Рытов С М *Акустич. журн.* **2** 173 (1956)
97. Karal F C, Keller J B *J. Acoust. Soc. Amer.* **31** 694 (1959)
98. Бабищ В М, в кн. *Вопросы динамической теории сейсмических волн* № 5 36 (1961)
99. Cerveny V *Geophys. J.* **29** 1 (1972)
100. Cerveny V, Psencik J Z. *Geophys.* **38** 565 (1972)
101. Cerveny V, Molotkov I A, Psencik J *Ray method in Seismology* (Praha: Univerzita Karlova, 1977)
102. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Наука, 1987)
103. Toupin R A, Bernstein B J. *Acoust. Soc. Amer.* **33** 216 (1961)
104. Murnaghan F D *Finite Deformation of an Elastic Solids* (New York: Acad. Press, 1959)
105. Blackman D K, Orcutt J A, Forsyth D W, Kendall J-M *Nature* **366** 675 (1994)
106. Romp J T *Nature* **366** 678 (1994)
107. Miyano K, Ketterson J B, in *Physical Acoustics* (New York: Acad. Press, 1979) p. 93
108. de Broglie L *La Theorie der Particles de Spin 1/2* (Paris, 1952)
109. Schiller R *Phys. Rev.* **125** 1116 (1961)
110. Schiller R *Phys. Rev.* **128** 1402 (1962)
111. Stern O Z. *Phys.* **7** 249 (1921)
112. Gerlach W, Stern O Z. *Phys.* **8** 110 (1921)
113. Gerlach W, Stern O Z. *Phys.* **9** 349 (1922)
114. Gerlach W, Stern O Z. *Phys.* **9** 353 (1922)
115. Gerlach W, Stern O *Ann. Phys.* **74** 673 (1924)
116. Frish R, Segre E Z. *Phys.* **20** 610 (1933)
117. Rabi I I *Phys. Rev.* **49** 324 (1935)
118. Motz L, Rose M E *Phys. Rev.* **50** 348 (1936)
119. Li X, Strahler H *IEEE Trans GE-24* 908 (1986)
120. Vacek R *Chirality in Nonlinear Media* (PIERS'95. July 24-28 1995. Seattle WA)

WAVES IN WEAKLY ANISOTROPIC 3D INHOMOGENEOUS MEDIA: QUASI-ISOTROPIC APPROXIMATION OF GEOMETRICAL OPTICS

Yu.A. Kravtsov

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences

ul. Profsoyuznaya 84/32, 117810 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 333-52 79

E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

O.N. Naida

Kamyshin Technological Institute

ul. Lenina 6a, 403850 Kamyshin, Volgograd Region, Russia

Tel. (7-84457) 3-43 53

A.A. Fuki

Geophysical Center, Russian Academy of Sciences

ul. Molodezhnaya 3, 117296 Moscow, Russia

Tel. (7-095) 930-05 06

The quasi-isotropic approximation (QIA) of geometrical optics is outlined. The main idea of the method is that electromagnetic waves in weakly anisotropic media preserve their transverse structure as they do in isotropic media. Advantages of the QIA are illustrated by considering electromagnetic wave propagation in plasma, a number of optical problems (liquid crystals, hiral media, single mode optical fibers), acoustical problems of weakly anisotropic elastic media, and quantum mechanical polarization effects of the Stern–Gerlach type. New modifications of the QIA are presented, namely the method of splitted rays and the synthetic approach, the latter being applicable even for strongly anisotropic media.

PACS numbers: **42.15.–i**, 42.25. Bs, 42.68.Ay, 92.60.Ta

Bibliography — 120 references

Received 12 May 1995, revised 12 September 1995