

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Особенности продолжения волновых полей

А.Г. Кюркчан, Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов

Дается обзор современного состояния задачи продолжения волновых полей. Эта проблема лежит на стыке радиофизики, акустики и оптики, с одной стороны, и математической физики и теории дифференциальных уравнений, с другой. Исследуются качественные характеристики проблемы. В частности, дается алгоритм вычисления особенностей волновых полей. Обсуждается связь между особенностями продолжения волновых полей и явлениями возникновения "вычислительных катастроф" при моделировании задач рассеяния. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами с подробными комментариями.

PACS numbers: 02.30.-f, 02.90.+p, 41.20.-q, 41.20.Jb

### Содержание

1. Введение (1285).
2. Математическая теория продолжения волновых полей (1288).
  - 2.1. Постановка задачи и обзор основных методов решения.
  - 2.2. Редукция к комплексной задаче Коши.
  - 2.3. Интегральное преобразование и решение задачи Коши.
  - 2.4. Примеры.
  - 2.5. Формула отражения для уравнения Гельмгольца.
  - 2.6. Продолжение решений для областей с кусочно-аналитической границей.
3. Прикладные аспекты теории продолжения волновых полей (1296).
  - 3.1. Аналитические представления волновых полей. Диаграмма волнового поля.
  - 3.2. Аналитические свойства диаграммы и границы областей существования аналитических представлений.
  - 3.3. Обратные задачи теории рассеяния и антенн.
  - 3.4. Аналитические свойства волновых полей и численные методы решения задач дифракции.
  - 3.5. Метод диаграммных уравнений.
4. Заключение (1307).

Список литературы (1307).

### 1. Введение

Предлагаемая статья посвящена задаче о продолжении волновых (электромагнитных) полей в так называемую "нефизическую" область пространства, а также основным положениям теории такого продолжения.

А.Г. Кюркчан. Московский технический университет связи и информатики, 111024 Москва, Авиамоторная ул. 8а, Россия

Тел. (095) 192-84-75

Факс (095) 274-00-32

Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Воробьевы горы, Россия

Тел. (095) 939-56-67, 297-20-52

Факс (095) 939-01-26

E-mail: boris@sternin.msk.su

Статья поступила 5 мая 1996 г., после доработки 15 июня 1996 г.

В настоящее время в мировой (главным образом, математической) литературе этой проблеме уделяется достаточно серьезное внимание, имеются и чисто результирующие статьи и обзоры. Напротив, в физической литературе в этой тематике есть серьезный пробел.

Постараемся кратко очертить контуры проблемы, с которой мы будем иметь дело.

Что же такое продолжение волнового поля и зачем оно нужно? Для ответа на этот вопрос мы проведем следующий мысленный эксперимент. Предположим, что мы рассматриваем изображение какого-либо объекта в плоском идеальном зеркале. Что при этом происходит? Каждому известно, что, собственно, зеркала мы не видим. Точнее, видим лишь дефекты на поверхности зеркала, посторонние налеты на нем и т.д. (всего этого в случае идеального зеркала нет). Видим же мы изображения всех объектов, расположенных перед зеркалом (в "физической" области пространства), причем эти изображения кажутся нам размещенными за зеркалом (в "нефизической" области пространства). Дело здесь в том, что наш мозг, анализируя информацию об электромагнитном поле (лучах света), поступающую в него через глаза, воссоздает те объекты, которые могли бы создать это электромагнитное поле, будучи расположенными в "зазеркалье". Иными словами, *если мы разместим в "зазеркалье" реальные предметы, в точности отвечающие тем изображениям, которые мы там видим, а само зеркало уберем, то волновое поле в физической области не изменится*. Фактически, наш мозг подсознательно осуществляет процедуру продолжения волнового поля в нефизическую область пространства и строит там "модели" объектов, создающих в физической области поле, регистрируемое нашими органами чувств.

Описанное наблюдение послужило отправной точкой ряда весьма плодотворных идей и, в частности, метода зеркальных изображений. Этот метод, первоначально используемый для плоских отражающих поверхностей, оказался настолько простым и эффективным, что возникло естественное желание обобщить его на случай

неплоских отражающих поверхностей. С этой целью продолжим наш мысленный эксперимент, постепенно искривляя отражающую поверхность. При этом очевидно, что изображение за зеркалом начнет изменяться; возникнет впечатление, что находящееся за зеркалом пространство начинает деформироваться как сплошная среда. При этом может произойти эффект исчезновения части изображения, или даже всего изображения объекта (хорошо известный всем, кто рассматривал изображение в кривых зеркалах, — вспомним комнату смеха). Этот эффект обязан своим происхождением образованию "складок" в гипотетической зазеркальной среде, т.е. таких областей, в которые должны попадать два (или более) изображения одновременно. При этом исчезающая часть изображения "прятается в складку".

Рассмотрим возникновение такой складки на простейшем примере (для простоты ниже мы осуществляем *негладкую* деформацию, однако основные эффекты остаются такими же и в случае гладкой деформации). Будем деформировать зеркало, предварительно разрезав его на две части точкой  $O$  и поворачивая полученные части "в зазеркалье" (рис. 1). Пусть в физической области пространства на биссектрисе угла, полученного продолжением линий зеркал  $OC_1$  и  $OC_2$ , расположен точечный источник света  $A$  (лампочка). В соответствии с законами геометрической оптики можно построить два изображения этого источника  $B_1$  и  $B_2$  относительно зеркал  $OC_1$  и  $OC_2$  соответственно. При этом наблюдатель, находящийся в зоне III (например, в точке  $Q$ ), увидит лишь изображение  $B_1$ , а в точке  $B_2$  увидит изображение того, что находится в точке  $A'$  физического пространства. Однако, переместившись в зону I, наблюдатель уже будет видеть в точке  $B_2$  изображение источника света. Таким образом, мы получаем, что продолжение волнового поля в нефизическую область, осуществленное через левую половину зеркала, отличается от продолжения поля, осуществленного через правую его половину. В "зазеркалье" при этом образуются (по меньшей мере) *два* продолжения волнового поля, и наблюдатель в зависимости от его положения видит либо то, либо другое продолжение. Приходится поэтому признать, что, например, в точке  $B_2$  существуют (одновременно!) два изображения; мы будем считать, что они расположены на двух "листах" своеобразной (римановой) поверхности, которая отображается на плоскость с наложением<sup>1</sup>. При этом наблюдатель в соответствии со своим положением видит лишь то, что расположено на одном из листов, достижимом из точки наблюдения по прямому лучу. Точкой ветвления полученной римановой поверхности является точка  $O$  излома зеркала; наблюдатель (неосознанно) осуществляет разрез этой поверхности по лучу  $OD$ , выходящему из точки  $O$  и являющемуся продолжением отрезка  $QO$ .

При перемещении из точки  $Q$  в зону II через границу раздела зон II и III в момент пересечения этой границы

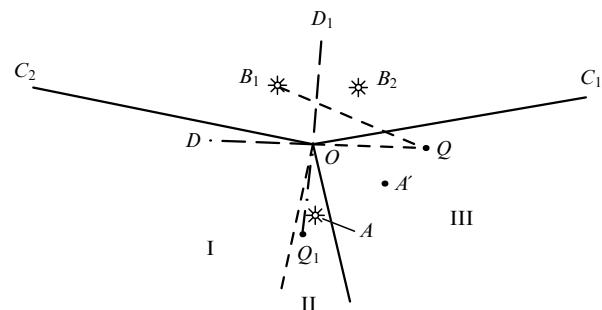


Рис. 1.

раздела наблюдатель перестанет видеть изображение  $B_1$ ; оно "спрячется в складке". Однако, если наблюдатель не пересечет еще границу раздела зон II и I, он не будет видеть и изображения  $B_2$ . Так что же: отраженное от источника поле в зоне II отсутствует вовсе? Очевидно, такой вывод (который был бы правильным с точки зрения чистой геометрической оптики) для волновых полей является неверным. Что же увидит наблюдатель, находящийся, например, в точке  $Q_1$  зоны II? Совершая разрез нашей римановой поверхности по лучу  $OD_1$ , наблюдатель (мысленно) моделирует поле, имеющее на линии разреза нерегулярность (с разных сторон разреза он "видит" поле, существующее на различных листах римановой поверхности). Поэтому каждая точка разреза начинает "светить"; все это излучение придет в точку наблюдения  $Q_1$  по лучу  $OQ_1$ , и наблюдатель увидит разрез  $OD_1$  как "светящуюся" точку  $O$ . Разумеется, то же самое имеет место и для точек наблюдения, находящихся в зонах I и III (разрез существует и в этих случаях).

Какие же выводы мы можем сделать на основании рассмотренного примера?

Во-первых, при использовании метода зеркальных изображений возникает *многозначное* продолжение волнового поля (внимательный читатель может заметить, что при более остром угле между  $OC_1$  и  $OC_2$  изображения  $B_1$  и  $B_2$  могут оказаться расположеными даже в *физической* области пространства, правда, на *нефизическом* листе римановой поверхности продолженного поля).

Во-вторых, при использовании этого метода первоначальный его вариант приходится "подправлять", добавляя к полю, индуцированному видимыми изображениями, еще и некоторые *интегралы по разрезам*.

В случае *гладкой* деформации зеркала ситуация аналогична с тем лишь отличием, что точки ветвления (складки) будут находиться не на самой поверхности, а на некотором расстоянии от нее. Так, если деформированное зеркало имеет параболическую форму (рис. 2), то точка ветвления  $O$  совпадает с фокальной точкой параболы.

Из разобранных примеров читатель мог заметить, что, в то время как продолжение поля и его точки ветвления (складки) имеют *объективный* характер, разрезы имеют уже характер *субъективный* (например, они зависят от точки наблюдения). Эти разрезы выбираются (осознанно или нет) наблюдателем, который с помощью них выбирает из *многозначного* продолжения *однозначную* его ветвь. Выбор системы разрезов определяется целью (которая опять-таки может быть неосоз-

<sup>1</sup> Ситуация здесь совершенно аналогична той, которая возникает при аналитическом продолжении функций комплексного переменного, приводящем, как известно, к понятию многозначной аналитической функции. Поэтому мы используем здесь терминологию, заимствованную из теории аналитических функций. Ниже читатель увидит, что связь между теорией продолжения волновых полей и теорией комплексно-аналитических функций отнюдь не ограничивается терминологическим сходством.

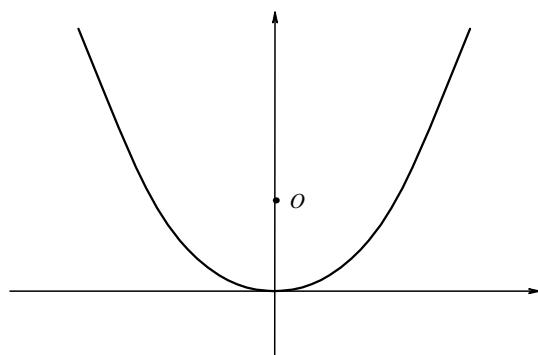


Рис. 2.

нанной) воссоздать реальное поле в некоторой подобласти физической области с помощью "изображений" объектов, находящихся в нефизической части римановой поверхности продолжения.

Таким образом, при моделировании поля методом зеркальных изображений в случае кривых отражающих поверхностей система разрезов может быть выбрана в значительной мере произвольно. Очевидно, что если нашей целью является моделирование поля во *всей* физической области, разрезы должны проходить *только* в нефизической области (напомним, что "нефизическая область" может включать в себя и "нефизические" листы римановой поверхности продолжения, лежащие над физической областью пространства). В остальном выбор разрезов не фиксирован и диктуется соображениями удобства, симметрии и т.д.

С математической точки зрения идея продолжения волнового поля также весьма естественна. Дело в том, что волновое поле, будучи вещественно-аналитической функцией пространственных переменных, имеет не более одного продолжения в "нефизическую область", которое, как правило, является многозначной вещественно-аналитической функцией. При некоторых условиях регулярности (сводящихся к аналитичности самой границы и данных на ней) такое продолжение существует всюду за исключением множества особенностей, лежащего в нефизической области и имеющего в общем случае размерность на две единицы меньшую, чем размерность пространства. Проблема продолжения, таким образом, сводится к

- 1) формулировке условий регулярности, обеспечивающих существование продолжения исходного волнового поля всюду, кроме (вещественно-аналитического) множества особенностей — теоретический аспект проблемы;

- 2) локализации положения особенностей продолженного поля — вычислительный аспект проблемы.

В чем важность обсуждаемой проблемы и почему ей в последнее время уделяют все большее внимание? Дело в том, что описанное выше обобщение метода зеркальных изображений на неплоские отражающие поверхности привело к появлению целого ряда методов решения граничных задач теории гармонических колебаний в электродинамике, акустике, оптике, квантовой теории рассеяния, теории упругости и др. Краеугольным камнем при построении *вычислительных алгоритмов* в этих методах является информация об аналитических свойствах решений, в частности, о расположении особенностей

продолжения решений в нефизическую область. Подобная информация может служить также отправной точкой при построении различного рода *качественных моделей* в задачах рассеяния волн или теории потенциала. Наконец, информация об аналитических свойствах волнового поля имеет принципиальное значение при решении *обратных задач рассеяния* и антенн. Например, хорошо известно, что диаграммами направленности антенн с плоским излучающим раскрытием могут быть лишь целые функции конечной степени. Класс функций, которые могут быть диаграммами рассеяния тел или диаграммами излучения антенн с неплоским излучающим раскрытием, может быть строго определен лишь при использовании информации об особенностях продолжения волнового поля в нефизическую область пространства.

Несколько слов о содержании работы.

В разделе 2 рассматривается математическая теория продолжения электромагнитных волновых полей. Обсуждаются два типа задач продолжения: задачи о заметании тока и краевые задачи электродинамики.

Задачи первого типа (постановка этих задач восходит для статического случая к классическим работам Пуанкаре, Герглотца и Шварца) суть задачи продолжения волнового поля, заданного известной системой токов, внутрь области, первоначально занятой этими токами. Такие задачи возникают, например, при построении антенн минимального размера, излучающих данное поле.

Задачи второго типа есть, по существу, задачи математической теории дифракции. Здесь изучается продолжение электромагнитного поля, полученного при рассеянии электромагнитной волны на препятствиях, внутрь области, первоначально занятой этими препятствиями. Как уже говорилось выше, такие задачи возникают при рассмотрении численных алгоритмов теории дифракции, изучении диаграмм направленности антенн и др.

Изучение продолжения волновых полей, проведенное в этом разделе, основано на теории дифференциальных уравнений с частными производными в комплексных пространствах, разработанной Стерниным и Шаталовым [1]. С помощью этих методов удается получить явные формулы, позволяющие провести *локализацию особенностей* продолжения волновых полей для задач рассмотренных выше типов.

Особого внимания заслуживает обсуждаемая здесь *формула отражения* для уравнения Гельмгольца. Эта формула является обобщением принципа симметрии Шварца для гармонических функций, однако существенно отличается от последнего своим нелокальным характером. Она позволяет не только определить местоположение особенностей продолжения решений краевых задач, но и *синтезировать* в явном виде токи, порождающие заданное волновое поле.

Здесь же рассматриваются и задачи обоих типов для областей, ограниченных *кусочно-аналитической границей*. Изучаются особенности волновых полей, возникающие в угловых точках таких областей, а также особенности, возникающие за счет "многократных отражений" волнового поля от различных частей границы рассматриваемой области.

В разделе 3 рассмотрены аналитические представления волновых полей, применяющиеся при решении

краевых задач теории распространения волн, такие, как представления в виде волновых потенциалов, разложения в ряды и интегралы по плоским волнам (ряды Рэлея и интегралы Зоммерфельда – Вейля), разложения в ряды по цилиндрическим и сферическим гармоникам, а также ряды Уилкокса (по обратным степеням расстояния). Показано, что границы областей существования таких представлений определяются *геометрией множества особенностей продолжения* волнового поля. Установлены точные границы областей существования всех названных представлений. Обсуждается связь между асимптотикой диаграммы волнового поля в окрестности бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости угла наблюдения и особенностями продолжения волнового поля.

Рассмотрены также некоторые *численные методы* граничных задач теории рассеяния, известные в литературе как метод Уотермэна (или метод нуль-поля), МММ (Мейзел, Меррил, Миллер)-метод [2], метод *T*-матриц [3], метод вспомогательных токов и дискретных источников, а также метод диаграммных уравнений, сводящий краевую задачу к уравнению относительно диаграммы рассеяния, либо к системе уравнений относительно коэффициентов разложения диаграммы по некоторому базису. Обсуждаются причины появления неустойчивостей при решении задач перечисленными методами и связь этих причин с аналитическими свойствами решения. Устанавливаются условия существования решений обратных задач теории рассеяния и антенн. Приводятся примеры.

Предлагается подборка литературы по данной тематике, содержащая как классические работы, так и самые последние достижения в этой области науки.

## 2. Математическая теория продолжения волновых полей

В этом разделе излагается метод продолжения волновых полей за пределы их первоначальной области определения и локализации особенностей полученного продолжения, основанный на развитой в последние годы в цикле работ Стернина и Шаталова (см. [1] и приведенную там библиографию) по комплексной теории дифференциальных уравнений. Изложение будет проведено для решений уравнений Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) u(x) = 0 \quad (1)$$

в  $m$ -мерном векторном пространстве  $\mathbf{R}^m$  ( $m = 2$  или  $m = 3$ ), хотя разработанные методы могут быть применены в гораздо более общей ситуации.

### 2.1. Постановка задачи и обзор основных методов решения

Дадим прежде всего математическую постановку задачи продолжения. Пусть  $D \subset \mathbf{R}^m$  — некоторая область в  $\mathbf{R}^m$ . Область  $D$  можно трактовать как область, занятую рассеивателем, антенной и т.д. Пусть в дополнении  $\mathbf{R}^m \setminus D$  области  $D$  (т.е. "внешности" этой области) задано решение  $u(x)$  уравнения (1). Будем предполагать, что граница  $\Gamma$  области  $D$  является замкнутой аналитической поверхностью (кривой) в  $\mathbf{R}^m$ ; в дальнейшем мы ограничимся случаем, когда уравнение границы  $\Gamma$  задается полиномом. Постановка задачи продолжения выглядит следующим образом.

*Исследовать возможность продолжения функции  $u(x)$  как решения уравнения Гельмгольца (1) во внутренние точки области  $D$  и локализовать особенности полученного продолжения (исследовать их местоположение).*

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, сделаем несколько замечаний.

Во-первых, отметим, что если задача продолжения имеет решение, то это решение заведомо *единственно*. Это следует из вещественной аналитичности решений уравнения Гельмгольца (см., например, [4, 5]) и из теоремы единственности для аналитических функций.

Во-вторых, поставленная задача может *не иметь* решения. Например, решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения (1)

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) u(x) &= 0, \\ u(x) \Big|_{\Gamma} &= \varphi(x) \end{aligned}$$

с неаналитическими данными  $\varphi(x)$  непродолжимо через границу  $\Gamma$  ни в одной ее точке (в противном случае функция  $\varphi(x)$  была бы аналитической как след аналитической функции  $u(x)$  на аналитической поверхности  $\Gamma$ ). Поэтому при постановке задачи продолжения необходимо ввести дополнительные предположения, гарантирующие существование продолжения решения во внутренние точки области  $D$ .

В-третьих, анализ показывает, что продолжение решения  $u(x)$  внутрь области  $D$  представляет собой, вообще говоря, *многозначную* функцию, имеющую в  $D$  особенности типа ветвления. Поэтому для выделения однозначного решения требуется вводить систему разрезов, на которых полученное продолжение будет иметь разрывы первого рода.

Существуют, по меньшей мере, две постановки задачи продолжения, при которых можно гарантировать разрешимость этой задачи. Это, во-первых, продолжение решений внешних краевых задач с аналитическими входными данными и, во-вторых, продолжение волновых полей, индуцированных заданным (аналитическим) распределением токов в  $D$ , внутрь области, первоначально заданной токами, как решений однородного уравнения. Первая задача возникает, например, при рассмотрении дифракции электромагнитной волны на рассеивателе, вторая, получившая для статических полей название "задачи о заметании заряда", — при рассмотрении задачи оптимизации размера антennы, излучающей заданное электромагнитное поле.

Дадим краткий обзор методов, применяемых при решении задач продолжения. По-видимому, первым методом, применявшимся для решения таких задач, был метод, основанный на *принципе симметрии Шварца* (см. [6–9]). Этот метод (в его первоначальной постановке) годится для продолжения решений *статических* волновых полей в двумерном случае и основан на том, что любая гармоническая функция, обращающаяся в нуль на аналитической кривой  $\Gamma$ , удовлетворяет соотношению

$$u(x, y) + u(R(x, y)) = 0, \quad (2)$$

где  $(x, y) \rightarrow R(x, y)$  — антиконформное отображение, определенное в окрестности кривой  $\Gamma$  и представляющее части  $U_1$  и  $U_2$ , на которые кривая делит эту окрестность.

Отметим, что отображение  $R$  зависит только от кривой  $\Gamma$ . Модификация соотношения (2) для случая условий Неймана (когда на кривой  $\Gamma$  обращается в нуль нормальная производная  $\partial u / \partial n$  рассматриваемой гармонической функции  $u(x)$ ) имеет вид

$$u(x, y) - u(R(x, y)) = 0. \quad (3)$$

Однако, как выяснилось впоследствии, принцип симметрии в форме (2), (3) не имеет места (даже в двумерном случае) уже для уравнения Гельмгольца (1); в трехмерном же случае и для уравнения Лапласа этот принцип верен только, если поверхность  $\Gamma$  есть плоскость или сфера (см. [10]). Причина этого заключается в том, что связь между значениями функции  $u(x)$ , удовлетворяющей уравнению (1), в областях  $U_1$  и  $U_2$  носит не точечный (как в формулах (2) и (3)), а интегральный характер. Соответствующая формула отражения будет обсуждена в разделе 2.5.

Дальнейший прогресс в исследовании задач продолжения связан с работами Векуа [11] и Леви [12]. В этих работах изучается задача о продолжении для общих операторов в двумерном случае, и они основаны на методе Римана решения задачи Коши. Уже в этих работах выясняется, что для исследования задачи о продолжении решений в вещественном пространстве естественно распространить рассматриваемое уравнение в комплексную область. Это связано с тем обстоятельством, что уравнение Гельмгольца (1) (как и более простое уравнение Лапласа) имеет комплексные характеристики, вдоль которых распространяются особенности решения этих уравнений. Таким образом, для решения задачи о продолжении естественно применять следующую схему (см. [13–15]):

- а) провести редукцию задачи к некоторой задаче в комплексной области;
- б) исследовать особенности решений полученной комплексной задачи;
- в) получить особенности решения исходной вещественной задачи как "след" комплексных особенностей для вещественных значений переменных.

Следует также упомянуть здесь работы Гарабедяна [16, 17], исследовавшего характер формул отражения в многомерном случае. Отметим, что в этих работах не получено явных формул отражения, годящихся для решения задачи о локализации особенностей.

Большое распространение в последнее время получили методы, основанные на технике интегральных уравнений, она использовалась многими авторами; мы упомянем здесь работы Миллара [18, 19] (более подробно см. [14] и приведенную там библиографию, а также недавние работы авторов [20, 21]). Следует также отметить серию работ Хавинсона и Шапиро (см. также [14]), использовавших метод унитарного решения уравнения.

Наконец, разработанный Стерниным и Шаталовым метод интегральных преобразований комплексно-аналитических функций (см. [1, 22–24]) дает возможность исследования задач продолжения решений в общей ситуации. Обсуждение этого метода дано в разделе 2.3.

## 2.2. Редукция к комплексной задаче Коши

Здесь мы проиллюстрируем применение методов комплексной теории дифференциальных уравнений на при-

мере задачи о "заметании заряда" (см. [1, 13–15, 25]) (возможно, для уравнения Гельмгольца было бы лучше говорить о "заметании источников" или "заметании токов", однако такие термины не являются общепринятыми). Рассмотрение методов продолжения волновых полей в ситуации краевых задач будет проведено в разделе 2.6 сразу для случая кусочно-аналитической границы.

Для любой (обобщенной) функции  $f(x)$  обозначим через  $U^f$  решение задачи

$$(\Delta + k^2) U^f(x) = f(x), \quad (4)$$

удовлетворяющее на бесконечности условию излучения. Пусть вначале функция  $f(x)$  совпадает в области  $D$  с некоторой функцией, обладающей аналитическим продолжением на все комплексные значения  $x$  (допуская некоторую вольность, мы обозначаем эту функцию также через  $f(x)$ ) и равна нулю вне области  $D$ . Решение  $u(x)$  задачи (4) можно трактовать как электромагнитное поле, индуцированное распределением токов  $f(x)$  в области  $D$  (антенной). Задача о заметании заряда в этом случае имеет следующую формулировку: *найти такую (обобщенную) функцию  $w(x)$  с возможно меньшим носителем (лежащим внутри области  $D$ ), что решение  $U^w$  уравнения*

$$(\Delta + k^2) U^w(x) = w(x)$$

*совпадает с  $U^f$  вне области  $D$ .*

Таким образом, требуется найти распределение токов  $w(x)$ , занимающее объем меньший первоначального, но создающее то же самое электромагнитное поле вне области  $D$ .

Для построения функции  $w(x)$  рассмотрим разность  $u(x) = U^f(x) - U^w(x)$ . Поскольку  $\text{supp } w$  (носитель функции  $w(x)$ ) лежит внутри  $D$  (рис. 3), то в некоторой окрестности границы  $\Gamma$  функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2) u(x) = f(x). \quad (5)$$

Кроме того, поскольку  $U^f(x) = U^w(x)$  вне  $D$ , функция  $u(x)$  тождественно равна нулю вне  $D$ .

Включение  $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^m)$  ( $L_2(\mathbf{R}^m)$  — пространство функций, интегрируемых с квадратом на всем  $\mathbf{R}^m$ ) вместе с уравнением (5) показывает, что функция  $u(x)$

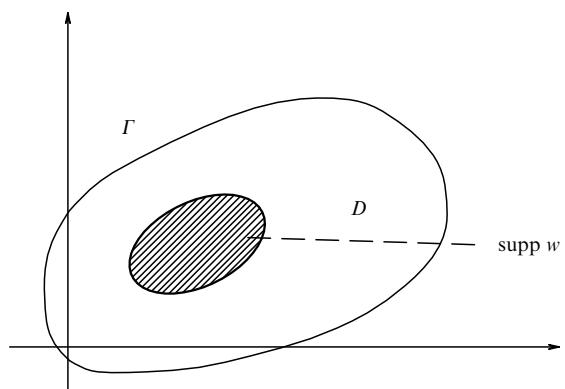


Рис. 3.

непрерывна на границе  $\Gamma$  области  $D$  вместе с первыми производными. Поэтому имеем

$$u\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0.$$

Таким образом, функция  $u(x)$  в области  $D \setminus \text{supp } w$  удовлетворяет задаче Коши

$$(\Delta + k^2)u(x) = f(x),$$

$$u\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Обратно, если  $u(x)$  — решение задачи (6), то можно положить

$$U^w(x) = U^f(x) - u(x) \quad \text{в } D \setminus \text{supp } w,$$

$$U^w(x) = U^f(x) \quad \text{вне } D$$

и продолжить эту функцию внутрь области  $\text{supp } w$  произвольным образом (при этом значения функции  $U^w$ , возможно, придется изменить в сколь угодно малой окрестности множества  $\text{supp } w$ ). Таким образом, решение задачи о продолжении редуцируется к решению задачи Коши (6) внутри области  $D$ . Носителем будущего "заметенного заряда"  $w(x)$  служит, очевидно, множество особенностей решения  $u(x)$  задачи (6) (точнее, произвольно малая окрестность этого множества).

Как уже говорилось выше, особенности решения задач типа (6) естественно исследовать в комплексном пространстве. Поэтому для построения решения задачи (6) рассмотрим *комплексификацию* этой задачи:

$$(\Delta + k^2)u_c(x) = f_c(x),$$

$$u_c(x) \text{ имеет нуль второго порядка на } \Gamma_c, \quad (7)$$

где  $x = (x^1, \dots, x^m)$  являются уже комплексными переменными в комплексном арифметическом пространстве  $\mathbb{C}^m$ , правая часть  $f_c(x)$  есть *аналитическое продолжение* функции  $f(x)$  на комплексные значения переменных, а  $\Gamma_c$  — *комплексификация* поверхности  $\Gamma$ , т.е. множество в  $\mathbb{C}^m$ , обладающее тем же уравнением, что и  $\Gamma$  (напомним, что, по предположению, уравнение поверхности  $\Gamma$  является полиномиальным). Очевидно, что если  $u_c(x)$  — решение задачи (7), то ограничение этой функции на вещественные значения переменных  $x$ , лежащие в области  $D$ , дает решение задачи (6). При этом *вещественные особенности функции  $u(x)$  являются пересечением комплексных особенностей функции  $u_c(x)$  с вещественной областью  $D$* . Это пересечение и дает нам носитель "заметенного заряда".

Построенная редукция задачи о продолжении к задаче Коши (7) показывает, что особенности продолженного поля "приносятся" в точки области  $D$  из комплексной области вдоль (комплексных) характеристик уравнения Гельмгольца (1).

### 2.3. Интегральное преобразование и решение задачи Коши

Решение задачи Коши (7) может быть получено с использованием упомянутого выше интегрального преобразования комплексно-аналитических функций. В данном разделе мы обсудим основные определения и теоремы, связанные с этим интегральным преобразова-

нием. Изложение по необходимости будет кратким; за подробностями мы отсылаем читателя к книге [1].

Пусть  $f(x)$  — аналитическая (возможно, многозначная) функция комплексных переменных  $x = (x^1, \dots, x^m)$ .

Преобразованием Лапласа—Радона функции  $f(x)$  мы называем функцию

$$\overset{\vee}{f}(p) = \overset{\vee}{f}(p_0, p_1, \dots, p_m) = \int_{h(p)} \text{Res} \frac{f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m}{p_0 + p_1 x^1 + \dots + p_m x^m}, \quad (8)$$

где  $\wedge$  — знак внешнего произведения форм (см., например, [26]),  $\text{Res}$  — вычет на плоскости

$$L_p = \{x | p_0 + p_1 x^1 + \dots + p_m x^m = 0\} \quad (9)$$

(см. [1, 27–29]), а  $h(p)$  —  $(m-1)$ -мерная поверхность (класс гомологий), лежащая в  $L_p$  и имеющая границу в  $\Gamma_c$ . Проиллюстрируем определение (8) в двумерном случае ( $m=2$ ).  $\downarrow$

Поскольку функция  $f(p)$ , заданная формулой (8), является однородной функцией переменных степени  $-1$ , то, очевидно, достаточно вычислить интеграл (8) при  $p_1 = 1$ . Подынтегральное выражение этого интеграла в указанном случае равно

$$\text{Res} \frac{f(x^1, x^2) dx^1 \wedge dx^2}{x^1 + (p_0 + p_2 x^2)}. \quad (10)$$

Вычет (10) можно вычислить, например, по переменной  $x^1$  как обычный одномерный вычет; при этом дифференциал  $dx^2$  игнорируется и без изменения переходит в ответ. Так как форма (10) имеет полярную особенность первого порядка при  $x^1 = -(p_0 + p_2 x^2)$ , получаем

$$\text{Res} \frac{f(x^1, x^2) dx^1 \wedge dx^2}{x^1 + (p_0 + p_2 x^2)} = f(-p_0 - p_2 x^2, x^2) dx^2. \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой дифференциальную форму на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  переменной  $x^2$ . (Напомним (см., например, [26]), что вычет 2-формы с особенностью на гиперплоскости есть 1-форма на этой плоскости.) Эту форму можно проинтегрировать по любой кривой  $h(p)$  в этой плоскости с границей в  $\Gamma_c$  (рис. 4). Очевидно, что границы контура  $h(p)$ , являющиеся точками пересечения плоскости (9) с множеством  $\Gamma_c$ , меняются при изменении  $p$ , что приводит к изменению самого контура  $h(p)$  в зависимости от  $p$ . Таким образом, в двумерном случае имеем

$$\overset{\vee}{f}(p_0, 1, p_2) = \int_{h(p)} f(-p_0 - p_2 x^2, x^2) dx^2.$$

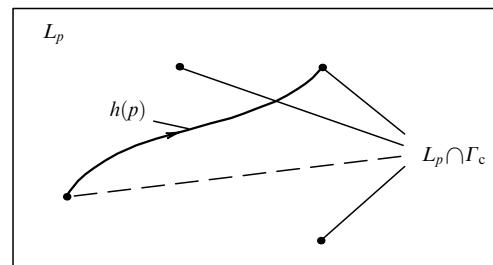


Рис. 4.

Разумеется, можно было бы проводить вычисления функции  $\overset{\vee}{f}$  также при  $p_2 = 1$ , используя для вычисления вычета переменную  $x^2$ . Нетрудно убедиться, что результат вычислений при этом оказывается тем же самым; при этом необходимо учесть антикоммутативность внешнего произведения  $dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$ .

В дальнейшем большую роль будет играть изучение особенностей интеграла типа (8) в случае, если известны особенности функции  $f(x)$ . Причины возникновения особенностей интеграла следующие:

А. Совпадение граничных точек контура  $h(p)$  между собой; при этом контур  $h(p)$  "исчезает" (что породило для таких контуров название "исчезающий класс гомологий"; см. [1, 27, 28]).

Б. Совпадение одной из граничных точек контура  $h(p)$  с одной из точек особенности функции  $f(x)$ .

В. "Зашемление контура"  $h(p)$  между двумя точками особенности функции  $f(x)$  (такое явление в теории фейнмановских интегралов носит название "пинча"; см. [28]).

Г. Уход одной из граничных точек контура  $h(p)$  на бесконечность.

Ситуации А – Г могут быть легко описаны в терминах взаимного расположения плоскости  $L_p$ , множества  $\Gamma_c$  и множества особенностей функции  $f(x)$ . Дадим это описание.

Ситуация А, очевидно, может иметь место лишь тогда, когда плоскость  $L_p$  либо является касательной к  $\Gamma_c$ , либо проходит через одну из особых точек этой поверхности.

Ситуация Б может иметь место только в том случае, если плоскость  $L_p$  проходит через одну из точек пересечения  $\Gamma_c$  с множеством особенностей функции  $f(x)$ .

Ситуация В может иметь место, лишь если плоскость  $L_p$  касается множества особенностей  $f(x)$  или проходит через одну из особых точек этого множества.

Несколько особняком в этом ряду стоит ситуация Г. Однако она может быть описана в аналогичных терминах, если включить в рассмотрение "бесконечные" (несобственные) точки комплексного пространства  $C^2$ . Мы продемонстрируем эту технику в разделе 2.4 на примерах. Заметим здесь лишь то, что бесконечные точки комплексного пространства могут индуцировать реальные особенности в задачах продолжения. Такая ситуация имеет место, например, при рассмотрении двумерной задачи рассеяния электромагнитной волны на диске или трехмерной задачи рассеяния электромагнитной волны на шаре.

В трехмерном случае задача исследования особенностей интеграла (8) является несколько более сложной. При этом приходится *стратифицировать* объединение  $\Gamma_c$  и множества сингулярностей функции  $f(x)$ , т.е. разбивать это множество на гладкие многообразия (страты) различной размерности и рассматривать касание плоскости  $L_p$  каждого полученного страта (см., например, [1]).

Опишем теперь основные свойства преобразования Лапласа – Радона<sup>2</sup>.

Во-первых, это преобразование *обратимо*, и обратное преобразование имеет аналогичный вид. Роль плоскости  $L_p$  в обратном преобразовании играет плоскость

$$\tilde{L}_x = \{p | p_0 + p_1 x^1 + \dots + p_m x^m = 0\}.$$

<sup>2</sup> Подробности читатель может найти в книге [1].

Во-вторых, для этого преобразования имеет место следующая *формула коммутации* с дифференцированием:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^{\vee}(p) = -p_i \frac{d}{dp_0} \overset{\vee}{f}(p).$$

Мы не останавливаемся здесь на описании функциональных классов, в которых действует преобразование Лапласа – Радона, поскольку эта информация не используется прямо при исследовании особенностей продолжений решений уравнений Гельмгольца.

Теперь мы можем описать процедуру решения задачи (7). Применяя к уравнению, входящему в (7), преобразование Лапласа – Радона, мы получаем уравнение

$$(p_1^2 + \dots + p_m^2) \frac{d^2 \overset{\vee}{u}(p)}{dp_0^2} + k^2 \overset{\vee}{u}(p) = \overset{\vee}{f}(p). \quad (12)$$

Можно показать, что если функция  $u(x)$  удовлетворяет нулевым данным Коши на поверхности  $\Gamma_c$ , то функция  $\overset{\vee}{u}(p)$  удовлетворяет нулевым данным Коши на преобразовании Лежандра  $\mathcal{L}\Gamma_c$  поверхности  $\Gamma_c$ , которое (преобразование) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Gamma_c = \\ = \overline{\{p | L_p \text{ касается } \Gamma_c \text{ в некоторой регулярной точке}\}}, \end{aligned} \quad (13)$$

и черта означает замыкание. Дополняя уравнение (12) нулевыми данными Коши на  $\mathcal{L}\Gamma_c$ , получаем для  $\overset{\vee}{u}(p)$  задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (точнее, семейства) (12) с постоянными коэффициентами, которая может быть решена явно. Заметим, что особенности решения  $\overset{\vee}{u}(p)$  этой задачи Коши состоят из

- 1) особенностей правой части  $\overset{\vee}{f}(p)$ ;
- 2) особенностей, появляющихся за счет особенностей начальной поверхности (13);
- 3) особенностей, появляющихся за счет вырождения уравнения (12); эти особенности возникают при

$$p_1^2 + \dots + p_m^2 = 0. \quad (14)$$

Все перечисленные особенности могут быть *явно вычислены* с помощью лишь алгебраических операций даже без решения задачи Коши для уравнения (12). Это дает возможность исследовать особенности продолженного поля *чисто алгебраическими методами*. В следующем разделе мы проиллюстрируем процедуру вычисления особенностей на простых примерах.

## 2.4. Примеры

Рассмотрим вначале задачу о "заметании заряда" для единичного круга в плоскости:

$$\Delta u(x^1, x^2) + k^2 u(x^1, x^2) = f(x),$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x^1)^2 + (x^2)^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } (x^1)^2 + (x^2)^2 > 1. \end{cases}$$

Соответствующая комплексная задача Коши имеет вид

$$\Delta u(x^1, x^2) + k^2 u(x^1, x^2) = 1,$$

$u(x^1, x^2)$  имеет нуль второго порядка

$$\text{на } \Gamma_c = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}. \quad (15)$$

Вычислим вначале преобразование Лапласа–Радона  $\overset{\vee}{f}(p)$  для правой части  $f(x)$  задачи (15) равной единице. В силу формулы (8) имеем

$$\overset{\vee}{f}(p_0, 1, p_2) = \int_{h(p)} dx^2, \quad (16)$$

где  $h(p)$  — кривая, соединяющая точки пересечения плоскости  $L_p$  с кривой  $\Gamma_c$ . Уравнения этого пересечения суть

$$p_0 + x^1 + p_2 x^2 = 0,$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1,$$

откуда

$$x^2 = \frac{1}{p_2^2 + 1} \left( -p_0 p_2 \pm \sqrt{p_2^2 + 1 - p_0^2} \right).$$

Таким образом, интеграл (16) равен

$$\overset{\vee}{f}(p_0, 1, p_2) = \frac{2\sqrt{p_2^2 + 1 - p_0^2}}{p_2^2 + 1}.$$

Учитывая степень однородности функции  $\overset{\vee}{f}$ , окончательно имеем

$$\overset{\vee}{f}(p) = \frac{2\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_0^2}}{p_1^2 + p_2^2}. \quad (17)$$

Функция (17) имеет особенности на множествах  $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$  и  $p_1^2 + p_2^2 = 0$ . Дадим геометрическую трактовку этих особенностей. Прежде всего очевидно, что особенности при  $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$  появляются за счет касания плоскости  $L_p$  поверхности  $\Gamma_c$  (см. А в разделе 2.3). Таким образом,

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$$

есть уравнение преобразования Лежандра множества  $\Gamma_c = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$ .

Для геометрического описания особенностей функции (17), лежащих на множестве  $p_1^2 + p_2^2 = 0$ , необходимо ввести "бесконечные" (несобственные) точки комплексного пространства  $\mathbf{C}^2$ . Для этого представим каждую точку  $(x^1, x^2) \in \mathbf{C}^2$  как луч в комплексном пространстве  $\mathbf{C}^3$  с координатами  $(x^0, x^1, x^2)$ , проходящий через начало координат и точку  $(1, x^1, x^2)$  (см. рис. 5, где, разумеется, представлен вещественный аналог рассматриваемой ситуации). Таким образом, каждая точка  $(x^0, x^1, x^2) \in \mathbf{C}^3$  с  $x^0 \neq 0$  представляет точку  $(x^1/x^0, x^2/x^0)$  пространства  $\mathbf{C}^2$ .

Очевидно, эта точка не меняется при одновременном умножении координат  $(x^0, x^1, x^2)$  на одно и то же ненулевое число  $\lambda$  и, следовательно, зависит лишь от пропорции  $x^0 : x^1 : x^2$ . Пропорции  $x^0 : x^1 : x^2$ , отвечающие  $x^0 = 0$ , не определяют никаких точек  $\mathbf{C}^2$ ; эти про-

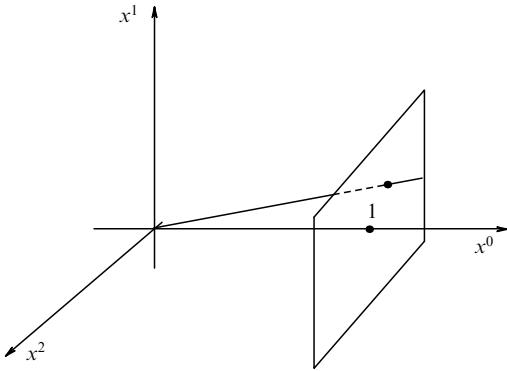


Рис. 5.

порции и будут называться несобственными точками  $\mathbf{C}^2$ . Множество всех пропорций  $x^0 : x^1 : x^2$ , где хотя бы одно из  $x^i$  отлично от нуля, называется комплексным проективным пространством и обозначается через  $\mathbf{CP}^2$ . В окрестности  $x^0 = 0, x^1 \neq 0$  координатами в  $\mathbf{CP}^2$  служат числа  $x^0/x^1, x^2/x^1$ , а в окрестности  $x^0 = 0, x^2 \neq 0$  — числа  $x^0/x^2, x^1/x^2$ . Очевидно, уравнение  $\Gamma_c$  в пространстве  $\mathbf{CP}^2$  имеет вид

$$\left(\frac{x^1}{x^0}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^0}\right)^2 = 1 \quad \text{или} \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 = (x^0)^2. \quad (18)$$

Пересечение множества (18) с множеством  $\{x^0 = 0\}$  несобственных точек  $\mathbf{CP}^2$  состоит из точек

$$(0, 1, i), \quad (0, 1, -i). \quad (19)$$

Очевидно, что если плоскость  $L_p$  (в  $\mathbf{CP}^2$ ) приближается к плоскости, содержащей одну из точек (19), то одна из точек пересечения  $L_p \cap \Gamma_c$  уходит на бесконечность. Поскольку уравнение  $L_p$  в координатах  $(x^0, x^1, x^2)$  пространства  $\mathbf{CP}^2$  имеет вид

$$x^0 p_0 + x^1 p_1 + x^2 p_2 = 0,$$

описанная ситуация имеет место при  $p_1 = \pm ip_2$ , т.е. при  $p_1^2 + p_2^2 = 0$ , что и описывает соответствующие особенности функции (17).

Теперь выпишем задачу (12) для рассматриваемого случая:

$$(p_1^2 + p_2^2) \frac{d^2 \overset{\vee}{u}}{dp_0^2} + k^2 \overset{\vee}{u} = \frac{2\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_0^2}}{p_1^2 + p_2^2},$$

$\overset{\vee}{u}$  имеет нуль второго порядка при  $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$ .

Нетрудно видеть, что особенности решения  $\overset{\vee}{u}$  лежат на одном из трех множеств:

$$\begin{aligned} p_1 &= ip_2, \\ p_1 &= -ip_2, \\ p_1^2 + p_2^2 &= p_0^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Поэтому особенности решения  $u(x)$  задачи (15) лежат при тех значениях  $(x^1, x^2)$ , для которых плоскость  $\tilde{L}_x$  проходит через одну из точек пересечения поверхностей (20) или касается одной из этих поверхностей. Для нас

основной интерес представляет условие прохождения  $\tilde{L}_x$  через точки  $(0, 1, i)$  и  $(0, 1, -i)$  пересечения первых двух линий (20) с третьей. Это условие дает  $x^1 = \pm ix^2$  или

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0. \quad (21)$$

Можно показать, что ни прохождение  $\tilde{L}_x$  через точку  $(1, 0, 0)$ , ни касание  $\tilde{L}_x$  одной из поверхностей (20) не дает новых особенностей функции  $u(x)$ . Таким образом, множество комплексных особенностей задачи (15) задается формулой (21).

Из раздела 2.2 теперь вытекает, что носителем "заметенного заряда" в рассматриваемой задаче является пересечение множества (21) с вещественным пространством  $\mathbf{R}^2$ , т.е. центр круга  $x^1 = x^2 = 0$ . Отметим здесь, что особенности продолжения "пришли" в центр круга по комплексным прямым  $x^1 = \pm ix^2$  из бесконечных точек поверхности  $\Gamma_c$ .

Приведем здесь (без вычислений) два трехмерных примера исследования особенностей продолжения. В этих примерах  $f(x^1, x^2, x^3)$  везде означает функцию, продолжающуюся до целой функции на комплексные значения аргументов.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x^3 \geq (x^1)^2 + (x^2)^2, \\ 0 & \text{при } x^3 < (x^1)^2 + (x^2)^2. \end{cases} \quad (22)$$

Для этой задачи особенности аналитического продолжения  $u_c(x)$  имеют вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + \left(x^3 - \frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

Носителем "заметенного заряда" в задаче (22) является поэтому луч, идущий вдоль оси  $x^3$  из точки  $(0, 0, 1/4)$  в  $+\infty$ .

Для задачи

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } (x^1)^2 + (x^2)^2 + \frac{(x^3)^2}{a^2} \leq 1, \\ 0 & \text{при } (x^1)^2 + (x^2)^2 + \frac{(x^3)^2}{a^2} > 1 \end{cases}$$

особенности функции  $u_c(x)$  задаются уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3 \pm \sqrt{a^2 - 1})^2 = 0 \text{ и } (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0.$$

Особенности продолжения функции  $u(x)$  внутрь эллипсоида

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \frac{(x^3)^2}{a^2} \leq 1$$

лежат поэтому на отрезке  $[-\sqrt{a^2 - 1}, \sqrt{a^2 - 1}]$  оси  $x^3$  при  $a > 1$  (вытянутый эллипсоид) и на окружности  $x^3 = 0$ ,  $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1 - a^2$  в случае  $a < 1$  (сплюснутый эллипсоид). Носитель заметенного заряда в случае  $a > 1$  совпадает с упомянутым отрезком. В случае же  $a < 1$  в качестве носителя заметенного заряда можно выбрать диск  $x^3 = 0$ ,  $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1 - a^2$ ; необходимость в дополнении множества особенностей таким диском следует из необходимости проведения разреза внутри эллипсоида для выделения однозначного решения.

## 2.5. Формула отражения для уравнения Гельмгольца

Остановимся теперь на формуле, обобщающей для уравнения Гельмгольца принцип симметрии Шварца (2), (3). Эта формула будет использована в следующем разделе при исследовании особенностей продолжения решений краевых задач. Мы приведем здесь лишь формулировки результатов, детали читатель может найти в работах [30, 31].

Итак, пусть  $\Gamma$  — алгебраическая кривая в пространстве  $\mathbf{R}^2$ , делящая пространство на две области  $U_1$  и  $U_2$ , а  $u(x^1, x^2)$  — решение уравнения (1), обращающееся в нуль на  $\Gamma$ . *Формула отражения* — это формула, позволяющая выразить значения функции  $u(x)$  в произвольной точке  $x_0$  области  $U_1$  через значения той же самой функции в области  $U_2$ .

Для того чтобы выписать формулу отражения для уравнения Гельмгольца, нам понадобится понятие *функции Шварца*, отвечающей кривой  $\Gamma$ . Пусть уравнение кривой  $\Gamma$  имеет вид

$$\varphi(x^1, x^2) = 0, \quad (23)$$

где  $\varphi(x)$  — многочлен от переменных  $x^1, x^2$  с вещественными коэффициентами. Уравнение (23) можно рассматривать так же, как уравнение комплексификации  $\Gamma_c$  кривой  $\Gamma$ , считая  $x^1$  и  $x^2$  комплексными переменными. После замены переменных

$$z = x^1 + ix^2, \quad \zeta = x^1 - ix^2$$

уравнение кривой  $\Gamma_c$  может быть переписано в виде

$$\Phi(z, \zeta) = \varphi\left(\frac{z + \zeta}{2}, \frac{z - \zeta}{2i}\right) = 0. \quad (24)$$

Обозначим через  $\zeta = S(z)$  решение уравнения (24) относительно  $\zeta$ , а через  $z = \tilde{S}(\zeta)$  — решение этого уравнения относительно  $z$ . Функция  $S(z)$  называется *функцией Шварца* кривой  $\Gamma$  (см. [6–10, 14] и др.). Очевидно, что  $S(z)$  и  $\tilde{S}(\zeta)$  являются алгебраическими функциями своих переменных, причем, если  $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$  на  $\Gamma$ , то эти функции регулярны в некоторой окрестности вещественной части  $\Gamma$  кривой  $\Gamma_c$ .

Отождествляя пространство  $\mathbf{R}^2$  с комплексной плоскостью  $\mathbf{C}$  с помощью соотношения  $z = x^1 + ix^2$ , мы определим отображение  $R$  формулой

$$R(x^1, x^2) = R(z) = \overline{S(z)}, \quad (25)$$

где черта означает комплексное сопряжение. Отображение (25) обладает следующими свойствами.

1. Отображение  $R$  определено и регулярно в некоторой окрестности кривой  $\Gamma$ .

2. Отображение  $R$  переставляет области  $U_1$  и  $U_2$  в пределах этой окрестности.

3. Отображение  $R$  является идемпотентным, т.е.  $R(R(x, y)) = (x, y)$ .

4. Отображение  $R$  тождественно в точках кривой  $\Gamma$ .

Заметим, что определенное здесь отображение  $R$  есть в точности отображение, входящее в формулы (2) и (3), описывающие принцип симметрии Шварца.

Пусть  $V_0(x^1, x^2, y^1, y^2)$  — функция Римана для оператора Гельмгольца. Известно, что

$$V_0(x^1, x^2, y^1, y^2) = J_0\left(k\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}\right),$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. В частности, функция  $V_0$  является целой функцией своих аргументов. Мы определим функции  $V_1$  и  $V_2$  как решения следующих двух задач Коши — Гурса в пространстве  $\mathbf{C}^2$ :

$$\begin{aligned} (\Delta_y + k^2) V_1(x, y) &= 0, \\ V_1(x, y) &= V_0(x, y) \text{ при } y \in \Gamma_c, \\ V_1 &= 1 \text{ при } y^1 - iy^2 = S(x^1 + ix^2) \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} (\Delta_y + k^2) V_2(x, y) &= 0, \\ V_2(x, y) &= V_0(x, y) \text{ при } y \in \Gamma_c, \\ V_2 &= 1 \text{ при } y^1 + iy^2 = \tilde{S}(x^1 - ix^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Решения задач (26) и (27) существуют в  $\mathbf{C}^2$  как многозначные аналитические функции переменных  $x, y$ , причем особенности этих функций (как по  $x$ , так и по  $y$ ) совпадают с особенностями функций  $S(z)$  и  $\tilde{S}(\zeta)$ . Введем функцию

$$V(x, y) = V_1(x, y) - V_2(x, y),$$

которую будем называть *отраженной функцией Римана*, отвечающей кривой  $\Gamma$ .

Формула отражения тогда имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) = -u(R(x)) + & \\ + \frac{1}{2i} \int_{\Gamma}^{R(x)} \left\{ \left[ u(y) \frac{\partial V}{\partial y^1}(x, y) - V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y^1}(y) \right] dy^2 - \right. & \\ \left. - \left[ u(y) \frac{\partial V}{\partial y^2}(x, y) - V(x, y) \frac{\partial u}{\partial y^2}(y) \right] dy^1 \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где интеграл берется по любой кривой, соединяющей какую-либо точку кривой  $\Gamma$  с точкой  $R(x)$ . Отметим, что значение интеграла, стоящего в правой части формулы (28), не зависит от выбора такой кривой.

Частными случаями формулы (28) являются классические формулы симметрии вида (2) для уравнения Лапласа и для уравнения Гельмгольца в том случае, когда  $\Gamma$  представляет собой прямую линию. Для этих случаев непосредственное вычисление показывает, что  $V = 0$  и поэтому интегральный член в правой части формулы (28) обращается в нуль. Однако уже в случае, когда кривая  $\Gamma$  является окружностью ( $k \neq 0$ ), легко показать, что интегральный член в этой формуле не исчезает; это и является причиной, по которой "чистый" принцип симметрии вида (2) несправедлив для уравнения Гельмгольца.

## 2.6. Продолжение решений для областей с кусочно-аналитической границей

Рассмотрим сначала задачу о замечании заряда. Пусть  $D \subset \mathbf{R}^m$ ,  $m = 2$  или  $m = 3$  — область, граница  $\Gamma$  которой состоит из  $r$  кусков  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ ; уравнение каждого из кусков может быть записано в виде

$$P_j(x) = 0, \quad (29)$$

где  $P_j(x)$  — неприводимые многочлены с вещественными коэффициентами. Пусть  $U(x)$  — решение уравнения

$$(\Delta + k^2)U = f, \quad (30)$$

а функция  $f$ , как и выше, равна нулю вне области  $D$  и совпадает с некоторой целой функцией (которую мы также обозначаем через  $f$ ) в этой области.

Для упрощения рассуждений предположим, что пересечения характеристических коноидов<sup>3</sup> комплексификаций поверхностей  $\Gamma_j$  и  $\Gamma_l$ ,  $j \neq l$  с вещественным пространством  $\mathbf{R}^m$ , во-первых, не имеют общих точек между собой, во-вторых, не имеют общих точек с границей области  $D$ .

Рассмотрим задачу продолжения функции  $U$  как решения однородного уравнения Гельмгольца в область  $D$ , граница которой состоит из двух кусков  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 6). Итак, пусть в  $\mathbf{R}^m \setminus D$  задана функция  $U(x)$ , являющаяся решением однородного уравнения

$$(\Delta + k^2)U = 0.$$

Обозначим через  $\tilde{U}_1$  разность

$$\tilde{U}_1 = U - u.$$

Для того чтобы функция  $\tilde{U}_1$  была продолжением решения однородного уравнения в область  $D$  через часть границы  $\Gamma_1$ , функция  $u$  должна быть решением уравнения

$$(\Delta + k^2)u = f$$

и при этом должна иметь нуль второго порядка на поверхности  $\Gamma_1$ . Однако функция  $\tilde{U}_1$ , построенная таким образом вне области  $D$  (в окрестности поверхности  $\Gamma_2$ ), не будет решением однородного уравнения, поскольку

$$L\tilde{U}_1 = LU - Lu = -f. \quad (31)$$

Если же провести разрез по  $\Gamma_2$ , то функция  $\tilde{U}_1$  в  $\mathbf{R}^m$  будет решением однородного уравнения, имеющим внутри области  $D$  особенности, соответствующие пересечениям характеристического коноида комплексификации поверхности  $\Gamma_1$  с вещественным пространством  $\mathbf{R}^m$ .

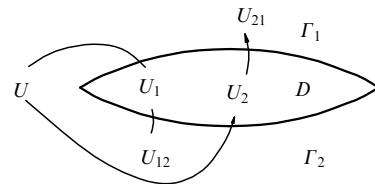


Рис. 6.

Если продолжить решение однородного уравнения через часть границы  $\Gamma_2$ , то при помощи тех же рассуждений можно построить функцию  $\tilde{U}_2$ , являющуюся решением однородного уравнения в  $\mathbf{R}^m$  с разрезом по поверхности  $\Gamma_1$ .

Таким образом, решение задано на римановой поверхности, накрывающей область  $D$  по крайней мере дважды.

<sup>3</sup> Под *характеристическим коноидом* поверхности понимается объединение всех характеристик, выпущенных из характеристических точек этой поверхности; точные определения см. в [1].

Если продолжить функцию  $\tilde{U}_1$  через поверхность  $\Gamma_2$ , то получим функцию

$$\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_1 - v,$$

где функция  $v$  должна удовлетворять уравнению (31) и иметь нуль второго порядка на поверхности  $\Gamma_2$ . Аналогично продолжением решения  $\tilde{U}_2$  через поверхность  $\Gamma_1$  можно построить функцию  $\tilde{U}_{21}$ . Продолжая функции  $\tilde{U}_{12}$  и  $\tilde{U}_{21}$  через поверхности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно, получим функции  $\tilde{U}_{121}$  и  $\tilde{U}_{212}$ , ...

Описанный процесс определяет, очевидно, риманову поверхность на  $\mathbf{R}^m$ , имеющую ветвление в точках пересечения частей границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а также в точках пересечения характеристических коноидов комплексификаций поверхностей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с вещественным пространством  $\mathbf{R}^m$ .

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 1.** В сформулированных выше предположениях решение уравнения (30) продолжается как решение однородного уравнения Гельмгольца до многозначной аналитической функции, заданной на построенной выше римановой поверхности.

Обратимся теперь к краевым задачам. Эти задачи будут исследованы в двумерном случае с помощью формулы отражения. Итак, рассмотрим область  $D \subset \mathbf{R}^2$ , имеющую кусочно-аналитическую границу  $\Gamma = \cup_j \Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , причем компоненты  $\Gamma_j$  границы описываются, как и ранее, уравнениями (29). Пусть функция  $u(x, y)$  является решением однородного уравнения

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad (32)$$

в области  $D$ , а на границе этой области удовлетворяет условиям

$$u(x, y) \Big|_{\Gamma_j} = f_j(x). \quad (33)$$

При этом функции  $f_j$  на соседних участках границы предполагаются согласованными.

Для простоты предположим, что граница области  $D$  состоит из трех алгебраических кусков  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  (рис. 7). При этом предполагается, что особенности функции Шварца  $S_j(x + iy)$  каждой из кривых  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , не попадают на границу области  $D$ .

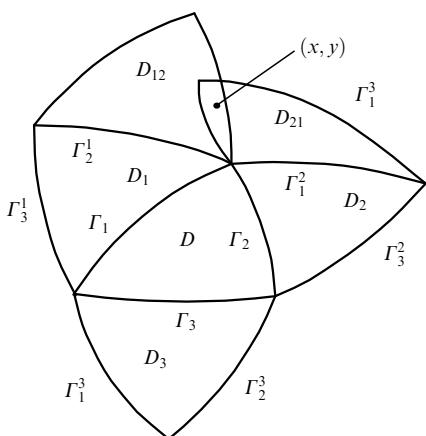


Рис. 7.

Каждому участку границы  $\Gamma_j$  можно поставить в соответствие отображение  $R_j: D \rightarrow D_j$ , определяемое формулой

$$R_j(x, y) = \overline{S_j(x + iy)}. \quad (34)$$

При этом отображении кривые  $\Gamma_l$  для  $l \neq j$  переходят в кривые  $\Gamma_l^j$ , а кривая  $\Gamma_j$  переходит сама в себя (см. рис. 7), поскольку  $R_j(x, y)|_{\Gamma_j} = \text{id}$  (тождественное отображение). Мы обозначаем через  $D_j$  образ области  $D$  при отображении  $R_j$ .

Функция  $u(x, y)$  может быть продолжена в область  $D_j$ , причем продолжение происходит следующим образом. Вблизи границы используется формула отражения

$$u(x_0, y_0) = -u(R_j(x_0, y_0)) + \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_j}^{R_j(x_0, y_0)} \omega_j + F[f_j(x, y)], \quad (35)$$

а затем, двигая точку  $(x_0, y_0) \in D_j$  вдоль некоторой кривой так, чтобы ее образ оставался в области  $D$ , осуществляем аналитическое продолжение интеграла, стоящего в правой части формулы (35). Здесь точка  $(x_0, y_0) \in D_j$ , отображения  $R_j$  определены формулами (34),  $\omega_j$  — известная дифференциальная форма, линейно зависящая от функции  $u(x, y)$  и ее первых производных с коэффициентами, определяемыми кривой  $\Gamma_j$  (см. выше формулу (28)),  $F$  — известный функционал, а интеграл берется по любой кривой, соединяющей  $\Gamma_j$  с точкой  $R_j(x_0, y_0) \in D$ .

Области  $D_j$  могут быть "подклеены" к области  $D$  по соответствующим кривым  $\Gamma_j$ . Тем же способом каждая область  $D_j$  может быть отражена относительно кривой  $\Gamma_l^j$ ,  $l \neq j$ , в область  $D_{jl}$  (см., например, область  $D_{12}$  на рис. 7), в которую также может быть продолжена функция  $u(x, y)$ .

Заметим, что все отраженные области надо рассматривать на соответствующей римановой поверхности. В отраженную область могут попасть особенности функции Шварца, приводящие к особенностям отображения  $R_j$ . Таким образом, мы получаем риманову поверхность, на которую может быть продолжена функция  $u(x, y)$ .

Очевидно, что значения функции  $u(x, y)$ , продолженной вдоль кривой, проходящей через области  $D_1$  и  $D_{12}$ , в некоторую точку  $(x, y)$ , не совпадут со значением этой функции, полученным при продолжении через области  $D_2$  и  $D_{21}$ , т.е. точки пересечения участков границы области  $D$  являются точками ветвления.

Следовательно, построенная риманова поверхность имеет в качестве точек ветвления точки пересечения аналитических участков границы (области  $D$  или соответствующих отраженных областей), а также особенности функций Шварца кривых, соответствующих этим участкам.

Итак, пусть  $u(x, y)$  — произвольное решение уравнения Гельмгольца (32), удовлетворяющее граничным условиям (33). Справедлива следующая

<sup>4</sup> Выше было дано обсуждение формулы отражения в случае, когда рассматриваемая функция удовлетворяет однородному краевому условию. Распространение этой формулы на случай неоднородных краевых условий (33) также возможно. Подробности читатель может найти в книге [1].

**Теорема 2.** В сформулированных выше предположениях функция  $u(x, y)$  продолжается до многозначной аналитической функции, заданной на построенной выше римановой поверхности. При этом продолжение в каждую отраженную область может быть последовательно осуществлено при помощи формулы отражения (35).

### 3. Применение аспекты теории продолжения волновых полей

В этом разделе для определенности речь будет идти о внешних задачах дифракции и рассеяния волн. Это связано также с тем обстоятельством, что именно для внешних задач к настоящему времени получено наибольшее количество результатов по обсуждаемому вопросу. Само осознание существования проблемы продолжения решения краевой задачи за пределы области его первоначального определения пришло после целой серии неудач при попытках численной реализации ряда классических (и не только) вычислительных схем. Дело в том, что при разработке вычислительного алгоритма решения внешней краевой задачи часто отправляются от некоторого представления искомого решения. Выбор того или иного представления в значительной степени "навязывает" определенные аналитические свойства искомому решению. Например, решение краевой задачи можно представить в виде разложения по некоторой полной системе функций, каждая из которых удовлетворяет исходному уравнению (скажем, уравнению Гельмгольца), а также некоторым дополнительным условиям (например, условию излучения). Коэффициенты этого разложения находят затем из краевого условия. Это, разумеется, одна из простейших схем построения вычислительного алгоритма решения краевой задачи. Существует еще целый ряд других схем, о которых речь пойдет в разделе 3.4. Здесь мы укажем лишь на одно весьма важное обстоятельство. Описанная (и аналогичные ей) схема может быть успешно реализована только в том случае, когда область существования выбранного аналитического представления решения включает в себя область (вместе с границей), в которой ищется решение. К сожалению, это условие выполняется крайне редко, что выяснилось сравнительно недавно, хотя причина невыполнения в большинстве случаев отмеченного условия достаточно очевидна. Дело в том, что решение уравнения Гельмгольца (или уравнений Максвелла в стационарном случае) является, как уже отмечалось, вещественно-аналитической функцией, обращающейся в нуль на бесконечности (в соответствии с условием излучения) и в силу этого имеющей особенности в окрестности начала координат. Эти особенности лежат, естественно, вне области, в которой ищется решение, или на ее границе, однако геометрия расположения особенностей определяет границы областей существования аналитических представлений решения, причем эти границы лишь в исключительных случаях (например, для сферы) совпадают с границей области, в которой ищется решение.

Остановимся на этом вопросе подробнее. Для упрощения последующего изложения мы будем рассматривать лишь скалярные волновые поля, отметив при этом, что все результаты, полученные для скалярных полей, полностью остаются справедливыми и в векторном случае.

#### 3.1. Аналитические представления волновых полей.

##### Диаграмма волнового поля

Итак, под волновым полем мы будем понимать функцию  $u$ , удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad (36)$$

условию на бесконечности, например, следующего вида:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0 \quad (37)$$

( $k = \text{const}$  — волновое число), а также краевым условиям, заданным на некоторой поверхности  $\Gamma$ . При этом мы ограничимся рассмотрением лишь двух вариантов поверхности  $\Gamma$ : замкнутая поверхность, ограничивающая компактное тело (область  $D$ ), и бесконечная периодическая поверхность. (В последнем случае условие на бесконечности имеет иной вид, нежели приведенный выше.) Если  $\Gamma$  — граница компактного тела, то волновое поле  $u$  представляют часто в виде следующих двух разложений [32–35]:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{mn} (-i)^{n+1} h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (38)$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{\exp(-ikr)}{kr} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(\theta, \varphi)}{(kr)^p}. \quad (39)$$

Разложение (38) часто называют представлением Рэлея или рядом по волновым гармоникам (метагармоническим функциям [36]). Соотношение (39) носит название ряда Аткинсона–Уилкокса. В этих формулах  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты точки наблюдения,  $h_n^{(2)}(kr)$  — сферическая функция Ганкеля второго рода ( $n$ -го порядка),  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенный полином Лежандра. Для векторных полей аналогичные разложения приведены, например, в [34, 35, 37].

Из (39) видно, что при  $kr \rightarrow \infty$  имеет место следующая асимптотическая формула:

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{\exp(-ikr)}{kr} f(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right), \quad (40)$$

где  $f(\theta, \varphi) = a_0(\theta, \varphi)$  — диаграмма направленности волнового поля. Остальные коэффициенты в (39) определяются через диаграмму  $f(\theta, \varphi)$  при помощи рекуррентных соотношений

$$a_p = \frac{i}{2p} [p(p-1) + D] a_{p-1}, \quad a_0 \equiv f, \quad (41)$$

в которых

$$D = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— оператор Бельтрами.

Нетрудно показать (см., например, [38]), что ряд Фурье для диаграммы имеет вид

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{mn} P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (42)$$

причем коэффициенты  $a_{mn}$  в разложениях (42) и (38) одни и те же. Таким образом, из соотношения (40) видно, что в так называемой дальней зоне, т.е. при  $kr \gg 1$  волновое поле полностью (с точностью до величин порядка  $1/(kr)^2$ ) определяется функцией  $f(\theta, \varphi)$  — диаграммой волнового поля. С другой стороны, соотношения (38) и (39) вместе с равенствами (41) и (42) позволяют по известной диаграмме  $f(\theta, \varphi)$  восстановить волновое поле всюду вне некоторой окрестности начала координат. Границы этой окрестности мы установим в следующем разделе. Отметим, что в области своего существования ряды (38) и (39) переходят друг в друга после соответствующей перегруппировки слагаемых [35].

В двумерном случае разложение Рэлея имеет следующий вид:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-i)^n H_n^{(2)}(kr) \exp(in\varphi), \quad (43)$$

причем  $r, \varphi$  — полярные координаты точки наблюдения, а  $a_n$  — коэффициенты Фурье диаграммы  $f(\varphi)$  волнового поля, определяемой соотношением

$$u(r, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(-ikr + \frac{i\pi}{4}\right) \left[ f(\varphi) + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right]. \quad (44)$$

Здесь, как и в трехмерном случае, соотношение (43) позволяет, зная диаграмму  $f(\varphi)$ , т.е. асимптотику поля в дальней зоне, восстановить его всюду вне некоторой окрестности начала координат. В отличие от трехмерного случая ряд (43) не может быть перегруппирован в разложение по степеням  $1/kr$ . Соответствующее разложение имеет вид [35]

$$u(r, \varphi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(-ikr + \frac{i\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{P}_n}{(kr)^n} f(\varphi),$$

где

$$\hat{P}_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{s=1}^n \left[ \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{d\varphi^2} \right],$$

и представляет собой асимптотический ряд.

Широко распространен еще один способ аналитического представления волнового поля — интегралы плоских волн или представления Зоммерфельда — Вейля [38, 39]. Эти представления в трехмерном случае имеют следующий вид:

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+i\infty} f(\alpha, \beta) \times \\ \times \exp\left\{-ikr[\sin\theta \sin\alpha \cos(\varphi - \beta) + \cos\theta \cos\alpha]\right\} \sin\alpha d\alpha d\beta. \quad (45)$$

В соотношении (45) интегрирование по параметру  $\alpha$  осуществляется вдоль пути, лежащего в комплексной плоскости  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ . Таким образом, диаграмма  $f(\alpha, \beta)$  волнового поля должна быть аналитически продолжима на всю комплексную плоскость  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ . Заметим, что соотношение (45) сохраняет свой вид и в векторном случае.

Для двумерных волновых полей имеем

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\pi+i\infty} f(\psi) \exp[-ikr \cos(\psi - \varphi)] d\psi. \quad (46)$$

Здесь интегрирование выполняется по контуру в комплексной плоскости  $\psi = \alpha + i\beta$ . Интегралы (45) и (46) сходятся, как будет показано, в полупространстве, ограниченном некоторой плоскостью  $z = z_0$  (прямой  $y = y_0$  в двумерном случае). Вращая систему координат, можно при помощи соотношений (45) и (46) осуществить продолжение волнового поля в некоторую окрестность начала координат. В работах [40–42] предложены модификации приведенных плосковолновых представлений, сходящиеся вне некоторой выпуклой окрестности начала координат.

В задачах рассеяния волновых полей периодическими границами раздела двух сред широко используется представление волнового поля рядом по плоским волнам (рядом Рэлея). В двумерном случае такое представление имеет следующий вид [43]:

$$u(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(w_n) \frac{\exp(-iw_n x) \exp(-iv_n y)}{v_n}. \quad (47)$$

Здесь  $b$  — период границы, описываемой уравнением  $y = f(x) = f(x + b)$ ,

$$w_n = \frac{2\pi}{b} n + k \sin \theta, \quad v_n = \sqrt{k^2 - w_n^2}, \quad (48)$$

причем выбирается та ветвь корня, для которой  $\operatorname{Re} v_n \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} v_n \leq 0$ ,  $\theta$  — угол падения плоской волны,  $g_0(w_n)$  — диаграмма центрального периода (см. раздел 3.2).

Ряд (47) так же, как и интеграл (46), сходится в некоторой полуплоскости  $y > y_0$ . Коэффициенты рассеяния  $m$ -х спектральных порядков связаны с величиной  $g_0(w_m)$  следующим соотношением:

$$R_m = \frac{2}{b} \frac{g_0(w_m)}{v_m}. \quad (49)$$

Таким образом, зная коэффициенты рассеяния всех спектральных порядков или, что то же самое, зная диаграмму одного периода, можно восстановить волновое поле всюду вне некоторой окрестности  $y \leq y_0$  оси абсцисс.

В трехмерном случае соответствующее представление имеет совершенно аналогичный характер (см., например, [15, 44, 45]).

Все рассмотренные представления волновых полей могут быть получены из представления посредством волновых потенциалов:

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \left[ \mu(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial n'} - v(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right] ds'. \quad (50)$$

В этом соотношении  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор точки интегрирования на  $\Gamma$  — некоторой достаточно гладкой замкнутой поверхности (в двумерном случае — контура),  $\partial/\partial n'$  — дифференцирование в направлении внешней к  $\Gamma$  нормали,  $\mu$  и  $v$  — плотности потенциалов двойного и простого слоя соответственно,  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  — функция Грина. В трехмерном

случае

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (51)$$

в двумерном —

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (52)$$

где  $H_0^{(2)}$  — функция Ганкеля второго рода нулевого порядка. Наконец, в двумерных задачах рассеяния волн периодической границей

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{2bi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-iw_n(x - x') - iv_n|y - y'|]}{v_n}. \quad (53)$$

В качестве плотностей  $\mu$  и  $v$  потенциалов обычно берут следующие величины:

$$\mu = u(\mathbf{r}') \quad \text{либо} \quad \mu = \hat{u}(\mathbf{r}'),$$

$$v = \left. \frac{\partial u}{\partial n'} \right|_{\Gamma} \quad \text{либо} \quad v = \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial n'} \right|_{\Gamma},$$

где  $u(\mathbf{r}')$ ,  $\partial u / \partial n'|_{\Gamma}$  — значения волнового поля и его нормальной производной на  $\Gamma$ . Величина  $\hat{u}$  — это полное поле, т.е.  $\hat{u} = u + u^0$ , где  $u^0$  — некоторое заданное (первичное) волновое поле, удовлетворяющее неоднородному уравнению Гельмгольца.

Аналогичные по смыслу представления имеют место и в векторном случае (см., например, [33, 34]).

Из сказанного в преамбуле к этому разделу ясно, что все особенности волнового поля  $u(\mathbf{r})$  должны лежать внутри поверхности (контура)  $\Gamma$ . Это очень важное обстоятельство, имеющее принципиальное значение для некоторых численных методов (см. раздел 3.4).

### 3.2. Аналитические свойства диаграммы и границы

**областей существования аналитических представлений**  
Воспользовавшись асимптотикой при  $r \gg r'$ ,  $kr \gg 1$  функций Грина (51) и (52), получим следующие выражения для диаграммы волнового поля:

$$f = \kappa \int_{\Gamma} \left( \mu \frac{\partial}{\partial n'} - v \right) \exp(ikr' \cos \gamma) ds', \quad (54)$$

где  $\kappa$  — числовой коэффициент,  $\kappa = k/4\pi$ ,  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$  в трехмерном случае и  $\kappa = 1/4i$ ,  $\cos \gamma = \cos(\varphi - \varphi')$  — в двумерном.

В задачах рассеяния волн периодической границей диаграмма  $g_0(w)$  равна следующему интегралу [43]:

$$g_0(w) = \frac{1}{4i} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \mu \frac{\partial}{\partial n'} - v \right) \times \\ \times \exp[iwx + ivf(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (55)$$

где  $v = \sqrt{k^2 - w^2}$ ,  $\operatorname{Im} v \leq 0$ .

С целью сокращения изложения мы будем обсуждать, главным образом, двумерный случай, а для трехмерного приведем лишь окончательные результаты. Итак, рассмотрим интеграл (54), в котором для простоты положим  $\mu = 0$ . Это будет соответствовать случаю

$$\mu = \hat{u}(\mathbf{r}') \Big|_{\Gamma}, \quad v = \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial n'} \right|_{\Gamma},$$

когда на  $\Gamma$  выполняется краевое условие Дирихле  $\hat{u}|_{\Gamma} = 0$ . Интеграл (54) принимает вид

$$f(\varphi) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n'} \exp[ikr' \cos(\varphi - \varphi')] ds'. \quad (56)$$

Пусть в полярной системе координат уравнение контура  $\Gamma$  имеет вид  $r = \rho(\varphi)$ . Тогда выражение (56) перепишется следующим образом:

$$f(\psi) = \int_0^{2\pi} q(\varphi) \exp[ik\rho(\varphi) \cos(\psi - \varphi)] d\varphi. \quad (57)$$

Здесь мы заменили переменные  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\varphi' \rightarrow \varphi$  и ввели обозначение

$$q(\varphi) = \frac{i}{4} \left[ \rho(\varphi) \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \right] \Big|_{r=\rho(\varphi)}.$$

Легко видеть, что диаграмма  $f(\psi)$  продолжима на всю комплексную плоскость  $\psi = \alpha + i\beta$  как целая функция [40, 41]. Воспользовавшись простым соотношением

$$\cos(\psi - \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ R [\cos(\varphi - \alpha) \pm i \sin(\varphi - \alpha)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{R} [\cos(\varphi - \alpha) \mp i \sin(\varphi - \alpha)] \right\},$$

в котором  $R = \exp |\beta|$  и верхний знак берется при  $\beta > 0$ , а нижний — при  $\beta < 0$ , нетрудно показать, что при  $R \rightarrow \infty$  имеют место следующие асимптотические равенства:

$$f(\alpha \pm i|\beta|) = f_{\mp}^E(z_{\mp}) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right], \quad (58)$$

в которых

$$f_{\mp}^E(z_{\mp}) = \int_0^{2\pi} q(\varphi) \exp\left[\frac{ik\rho(\varphi)}{2} \exp(\pm i\varphi) z_{\mp}\right] d\varphi \quad (59)$$

— целые функции конечной степени переменных

$$z_{\mp} = \exp(|\beta| \mp i\alpha).$$

В самом деле, оценивая интегралы (57) при помощи неравенства Коши–Буняковского, получим, что

$$\max_{|z|=R} |f_{\mp}^E(z)| < \exp\left[R\left(\frac{kr_0}{2} + \varepsilon\right)\right],$$

где  $r_0 = \max_{\varphi} \rho(\varphi)$  — радиус описанной вокруг  $\Gamma$  окружности,  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Из полученной оценки в силу произвольности  $\varepsilon$  имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \max_{|z|=R} |f_{\mp}^E(z)|}{R} = \sigma_{\mp} \leqslant \frac{kr_0}{2}, \quad (60)$$

т.е.  $f_{\mp}^E(z_{\mp})$  — целые функции первого порядка конечной степени  $\sigma_{\mp}$ , не превосходящей  $kr_0/2$ . Полученный результат остается справедливым и в том случае, когда  $\mu \neq 0$  на  $\Gamma$ . Таким образом, если некоторая функция  $f(\psi)$  является диаграммой волнового поля и представима вследствие этого интегралами типа (57) или (54), в которых  $\mu$  и  $v$  — интегрируемые функции (токи) на  $\Gamma$ , то

она аналитически продолжима на всю комплексную плоскость  $\psi = \alpha + i\beta$  и в окрестности бесконечно удаленной точки этой плоскости (при  $|\beta| \rightarrow \infty$ ) асимптотически совпадает (см. (58)) с некоторой функцией конечной степени комплексной переменной  $z = \exp(|\beta| - ix \operatorname{sign} \beta)$ . Назовем величину  $\sigma = \max(\sigma_+, \sigma_-)$  степенью диаграммы волнового поля.

Заметим, что, как хорошо известно [32, 46], диаграмма направленности системы с плоской апертурой является целой функцией конечной степени. Диаграмма токов, распределенных на некоторой замкнутой поверхности  $\Gamma$ , не являющейся частью плоскости, уже не будет целой функцией экспоненциального типа, а лишь совпадает (в смысле асимптотического равенства (58)) в окрестности бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости своего аргумента с некоторой целой функцией конечной степени. Тем не менее этого оказывается достаточно для того, чтобы можно было воспользоваться многими свойствами целых функций экспоненциального типа.

Одним из таких свойств, важным для дальнейшего, является тот факт, что коэффициенты  $c_n^\mp$  всюду сходящихся степенных рядов

$$f_\mp^E(z_\mp) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\mp z_\mp^n \quad (61)$$

удовлетворяют следующим предельным соотношениям [46]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |c_n^\mp|} = \sigma_\mp. \quad (62)$$

Эти соотношения дают возможность установить точные границы областей существования представлений волнового поля рядами (38) и (43) по метагармоническим функциям, а также рядом (39) Аткинсона – Уилкокса.

Обратимся к ряду (43). Его коэффициенты  $a_m$ , как легко видеть, могут быть найдены с помощью следующих соотношений:

$$a_m = i^m \int_0^{2\pi} q(\varphi) J_m(k\rho(\varphi)) \exp(-im\varphi) d\varphi. \quad (63)$$

Воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя при  $|m| \rightarrow \infty$ , из (63) получим

$$a_m = \frac{i^{|m|}}{|m|!} \int_0^{2\pi} q(\varphi) \left( \frac{k\rho(\varphi)}{2} \right)^{|m|} \exp(-im\varphi) d\varphi \left[ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]. \quad (64)$$

С другой стороны, из (59) для коэффициентов  $c_n^\mp$  ряда (61) имеем

$$c_n^\mp = \frac{i^n}{n!} \int_0^{2\pi} q(\varphi) \left( \frac{k\rho(\varphi)}{2} \right)^n \exp(\pm in\varphi) d\varphi, \quad n \geq 0. \quad (65)$$

Из сравнения формул (64) и (65) следует, что при  $|m| \rightarrow \infty$  имеют место соотношения

$$a_{|m|} = c_m^+ \left[ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right], \quad a_{-|m|} = c_m^- \left[ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]. \quad (66)$$

Введем в рассмотрение функции  $g_+(\xi_+)$  и  $g_-(\xi_-)$ , ассоциированные по Борелю соответственно функциям

$f_+^E(z_+)$  и  $f_-^E(z_-)$  [47]:

$$g_\pm(\xi_\pm) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{c_n^\pm}{\xi_\pm^{n+1}}. \quad (67)$$

Функции  $g_+(\xi_+)$  и  $g_-(\xi_-)$  регулярны соответственно в областях  $|\xi_+| > \sigma_+$  и  $|\xi_-| > \sigma_-$  [46]. Разложение (43) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (-i)^m H_m^{(2)}(kr) \exp(im\varphi) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} (-i)^m H_m^{(2)}(kr) \exp(-im\varphi) \equiv \\ &\equiv F_1(r, \varphi) + F_2(r, \varphi). \end{aligned}$$

С использованием асимптотики для функций  $H_m^{(2)}(kr)$  при  $m \rightarrow \infty$  можно показать, что сходимость рядов для функций  $F_1$  и  $F_2$  эквивалентна сходимости соответственно рядов

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(w_1) &= \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (m-1)! w_1^{-m}, \\ \widehat{F}_2(w_2) &= \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (m-1)! w_2^{-m}, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$w_1 = \frac{ikr}{2} \exp(-i\varphi), \quad w_2 = \frac{ikr}{2} \exp(i\varphi). \quad (69)$$

Сравнивая теперь степенные ряды (68) и (67), мы видим, что области регулярности функций  $F_1$  и  $g_+$ , а также  $F_2$  и  $g_-$  совпадают, иными словами, функция  $F_1$  регулярна в области

$$|w_1| \equiv \frac{kr}{2} > \sigma_+,$$

а  $F_2$  — в области

$$|w_2| \equiv \frac{kr}{2} > \sigma_-.$$

Итак, мы выяснили, что разложение (43) справедливо в области

$$\frac{kr}{2} > \sigma \equiv \max(\sigma_+, \sigma_-). \quad (70)$$

Поскольку разложение (43) в своих бесконечных остатках есть степенной ряд (см. (68)), то на окружности  $r = 2\sigma/k$  имеется по крайней мере одна особая точка функции  $u(r, \varphi)$ , которая, очевидно, может находиться лишь внутри области  $D$  или на ее границе  $\Gamma$ . Соотношение (43) позволяет таким образом осуществить продолжение волнового поля  $u(r, \varphi)$  внутрь области  $D$  вплоть до окружности  $r = 2\sigma/k$ .

Рассмотрим теперь представление (46). Интеграл (46) будет сходящимся или нет в зависимости от поведения подынтегрального выражения в окрестностях точек  $-i\infty$ ,  $\pi + i\infty$ . Вблизи этих точек показатель экспоненты подынтегрального выражения (46) имеет вид

$$-\frac{ikr}{2} z \exp(is\varphi) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right], \quad s = \pm 1,$$

а для функции  $f(\psi)$  имеет место асимптотика (58). Таким образом, сходимость интеграла (46) эквивалентна существованию интегралов

$$g_+(w_1; 0) = \int_0^{\infty \exp(i0)} f_+^E(\xi_+) \exp(-w_1 \xi_+) d\xi_+,$$

$$g_-(w_2; -\pi) = \int_0^{\infty \exp(-i\pi)} f_-^E(\xi_-) \exp(-w_2 \xi_-) d\xi_-,$$

являющихся преобразованиями Бореля функций  $f_+^E$  и  $f_-^E$  для полуплоскостей

$$\operatorname{Re}\{w_1 \exp(i0)\} > h_+(0), \quad \operatorname{Re}\{w_2 \exp(-i\pi)\} > h_-(-\pi),$$

в которых функции  $g_+$  и  $g_-$  регулярны, где  $h_{\pm}(\gamma)$  — индикаторы роста [46] функций  $f_{\pm}^E(\xi_{\pm})$ . С учетом (69) получаем, что интеграл (46) сходится в области

$$r \sin \varphi \equiv y > \frac{2}{k} \sigma_s \equiv \frac{2}{k} \max[h_+(0), h_-(-\pi)], \quad (71)$$

а на прямой  $y = 2\sigma_s/k$  функция  $u(r, \varphi)$  имеет по крайней мере одну особую точку, лежащую внутри или на границе области  $D$ .

В работах [40, 41] была предложена следующая модификация представления (46):

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2-i\infty}^{\pi/2+i\infty} f(\varphi + \psi) \exp(-ikr \cos \psi) d\psi. \quad (72)$$

Можно показать, что интеграл (72) регулярен в области  $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}_0$ , где  $\overline{B}_0$  — выпуклая оболочка особенностей продолжения функции  $u(r, \varphi)$  внутрь области  $D$ . Из изложенного выше очевидно, что  $\overline{B}_0$  — это наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее множества  $\overline{B}_+$  и  $\overline{B}_-$  — сопряженные диаграммы функций  $f_+^E$  и  $f_-^E$  соответственно. Таким образом, интеграл (72) позволяет осуществить аналитическое продолжение функции  $u(r, \varphi)$  в область  $D$  внутри  $\Gamma$  вплоть до границы множества  $\overline{B}_0$ .

Представление (47) в виде ряда по плоским волнам волнового поля, рассеянного периодической границей, регулярно (абсолютно и равномерно сходится) в любой замкнутой области, лежащей внутри полуплоскости (71) [43].

В трехмерном случае для диаграммы  $f(\theta, \varphi)$  волнового поля имеет место на комплексной плоскости  $\theta = \theta_1 + i\theta_2$  аналогичное (58) асимптотическое равенство [38]

$$f(\theta, \varphi) = f^E(z, \varphi) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right], \quad (73)$$

в котором

$$z = R \exp(\pm i\theta_1), \quad R = \exp|\theta_2|,$$

$f^E(z, \varphi)$  — целая по переменной  $z$  функция конечной степени  $\sigma$ , не превосходящей  $kr_0/2$ , где  $r_0$  — радиус описанной вокруг  $\Gamma$  сферы. Как и выше, величину  $\sigma$  назовем степенью диаграммы. Ряды (38) и (39) сходятся в области  $r > 2\sigma/k$ , а соответствующие плосковолновые представления — в полупространстве  $z \equiv r \cos \theta > 2\sigma_s/k$ , где  $\sigma_s = h(-\pi/2)$ , а  $h(\gamma)$  — индикаторы роста целой функции  $f^E(z, \varphi)$ , причем величины  $\sigma$ ,  $\sigma_s$  — характеристики роста функции  $f^E$ , не зависящие от  $\varphi$ .

Во многих ситуациях, например, как это следует из раздела 2 (см. также [44, 15, 48]), в задачах рассеяния плоской волны препятствием, ограниченным некоторой гладкой поверхностью  $\Gamma$ , величины  $\sigma$  и  $\sigma_s$  могут быть найдены при помощи довольно простых соотношений. В двумерном случае они имеют следующий вид [40, 41]:

$$\sigma = \max_{\varphi_0, s} \left| \frac{k\rho(\varphi_0)}{2} \exp(is\varphi_0) \right|, \quad (74)$$

$$\sigma_s = \max_{\varphi_0, s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k\rho(\varphi_0)}{2} \exp\left[is\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \right\},$$

где  $\varphi_0$  — корни уравнений

$$\left. \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -is, \quad \exp(is\varphi_0) = 0, \quad s = \frac{\beta}{|\beta|}, \quad (75)$$

причем максимум в (74) следует искать среди тех корней (75), которые при отображении, например, вида  $\xi = \rho(\varphi) \exp(i\varphi)$ , переводящем точки контура  $\Gamma$  в контур  $C$  на плоскости  $z = r \exp(i\varphi)$ , оказываются внутри  $C$ . Заметим, что уравнение  $\exp(is\varphi_0) = 0$  соответствует случаю  $\Gamma$  появления особенностей в интегrale (8) из раздела 2.

В трехмерном случае [38]

$$\sigma = \max_{\theta_0^s, \varphi_0, s} \left| \frac{k\rho(\theta_0^s, \varphi_0)}{2} \exp(is\theta_0^s) \right|, \quad (76)$$

$$\sigma_s = \max_{\theta_0^s, \varphi_0, s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k\rho(\theta_0, \varphi_0)}{2} \exp(is\theta_0^s) \right\},$$

причем  $\theta_0^s$ ,  $\varphi_0$  находятся из условий

$$\left. \frac{\rho'_\theta(\theta, \varphi)}{\rho(\theta, \varphi)} \right|_{\theta_0^s, \varphi_0} = -is, \quad \left. \rho'_\varphi(\theta, \varphi) \right|_{\theta_0^s, \varphi_0} = 0,$$

$$\exp(is\theta_0^s) = 0, \quad s = \pm 1,$$

$r = \rho(\theta, \varphi)$  — уравнение поверхности  $\Gamma$  в сферической системе координат. Здесь также максимум в (76) ищут среди тех корней уравнений (77), которые при замене  $\xi = \rho(\theta, \varphi) \exp(i\theta)$  оказываются внутри контуров  $C_\varphi$ , являющихся отображением сечения поверхности  $\Gamma$  плоскостью  $(\varphi, \varphi + \pi)$  на плоскости  $z = r \exp(ix)$ .

Наконец, в задачах рассеяния плоской волны периодической границей  $y = f(x)$  имеем [43]

$$\sigma_s = \max_{x_0, z=\pm R} \operatorname{Re}\{F(x_0)\}, \quad (78)$$

причем здесь

$$F(x) = -s \frac{k}{2} [x - isf(x)] \exp(-is\beta),$$

а  $x_0$  — корни уравнения

$$\left. f'(x) \right|_{x=x_0} = -is.$$

Величины  $s$  и  $\beta$  здесь имеют тот же смысл, что и в соотношениях (75). В случае, если граница  $\Gamma$  имеет неаналитические точки, максимум в соотношениях (74), (76), (78) следует брать также и по этим точкам.

Многочисленные примеры использования приведенных соотношений даны в работах [15, 38, 42–44] и ряде других.

### 3.3. Обратные задачи теории рассеяния и антенн

Результаты предыдущего раздела позволяют установить условия существования решений обратных задач теории рассеяния и антенн [40, 41, 48]. Эти условия целесообразно сформулировать в виде следующих теорем.

**Теорема 3.** Заданная на интервале  $[0, 2\pi]$  функция  $f(\alpha)$ , аналитически продолжимая на всю комплексную плоскость  $\psi = \alpha + i\beta$ , является диаграммой поля, регулярного вне круга радиуса  $a$ , в том и только в том случае, если при  $|\beta| \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические равенства (58), в которых  $f_{\mp}^E(z_{\mp})$  — целые функции переменных  $z_{\mp} = \exp(|\beta| \mp iz)$  конечной степени  $\sigma \leq ka/2$ .

В трехмерном случае аналогичная теорема формулируется следующим образом:

**Теорема 4.** Регулярная функция  $f(\theta_1, \varphi)$ , определенная на единичной сфере ( $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) и аналитически продолжимая на всю комплексную плоскость  $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ , является диаграммой поля, не имеющего особенностей вне сферы радиуса  $a$ , в том и только в том случае, если при  $\exp|\theta_2| \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое равенство (73), в котором  $f^E(z, \varphi)$  — некоторая целая по переменной

$$z = \exp\left(|\theta_2| - i \frac{\theta_2}{|\theta_2|} \theta_1\right)$$

функция конечной степени, не превосходящей  $ka/2$ .

Аналогичные по смыслу теоремы, однако в значительно более сложной формулировке, представлены в [32]. Эти теоремы позволяют, в частности, доказать единственность решения обратных задач рассеяния, а также указать подходы к проблеме определения формы рассеивателя по заданной диаграмме направленности. Мы не будем обсуждать здесь эти вопросы, отсылая интересующихся к монографии [32] и перечисленной там литературе.

Рассмотрим здесь более простой, но в то же время важный вопрос о смысле ограничений, содержащихся в формулировках приведенных теорем 3 и 4.

Хорошо известно (см., например, [46]), что антенна с плоским раскрытием обладает диаграммой направленности, ширина которой довольно жестко связана с размерами раскрытия и не может быть сделана сколь угодно малой без серьезного снижения излученной антенной мощности по отношению к подводимой к антенне мощности. Такие антенны, в которых велика доля неизлучаемой или реактивной мощности, принято называть *сверхнаправленными*. Распределение токов (полей) на раскрытии таких антенн имеет быстроосциллирующий, переменно-фазный характер и трудно реализуемо [49]. Математическая задача по нахождению таких распределений по заданной диаграмме направленности оказывается неустойчивой, и небольшое изменение входных данных приводит к сильному изменению распределения поля на апертуре.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий важность ограничений, содержащихся в формулировках приведенных теорем. В качестве такого примера рассмотрим задачу синтеза антенной решетки, составленной из открытых концов волноводов, расположенных на дуге

окружности радиуса  $a$  [50, 51] (задача двумерная). Стенки волноводов перпендикулярны боковой поверхности идеально проводящего цилиндра.

Диаграмма  $f(\varphi)$  может быть реализована такой решеткой в соответствии с теоремой 3 лишь в том случае, если множество особенностей поля, соответствующего этой диаграмме, будет целиком содержаться внутри указанной окружности радиуса  $a$ .

Рассмотрим реализацию так называемой гауссовой диаграммы

$$f(\varphi) = \exp\left(-p \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right). \quad (79)$$

Для этой диаграммы, как легко видеть,

$$f^E(z) = \exp\left(-\frac{p}{2} + \frac{pz}{4}\right). \quad (80)$$

Обобщая (71), введем величину

$$\sigma_S(\gamma) = \max\{h_+(\gamma), h_-(\pi - \gamma)\}. \quad (81)$$

Тогда в системе координат, повернутой на угол  $\gamma$ , поле, соответствующее диаграмме (79), будет регулярно в области (см. (71))  $y_{\gamma} > (2/k)\sigma_S(\gamma)$ , где  $y_{\gamma}$  — ордината в повернутой на угол  $\gamma$  системе координат. Иначе, поле, имеющее диаграмму (79), регулярно вне полуплоскости

$$y_{\gamma} \leq \frac{2}{k} \sigma_S(\gamma), \quad (82)$$

а на прямой  $y_{\gamma} = (2/k)\sigma_S(\gamma)$  поле имеет по крайней мере одну особую точку. Поэтому область  $\overline{B_0}$ , являющаяся результатом пересечения полуплоскостей (82) для всех углов  $\gamma$ , и есть выпуклая оболочка особенностей поля, имеющего диаграмму (79). Так как [46]

$$h(\gamma) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln |f^E(R \exp(i\gamma))|}{R},$$

то с учетом (81) получим, что для рассматриваемого примера

$$\sigma_S(\gamma) = \frac{p}{4} |\cos \gamma|. \quad (83)$$

Поэтому в рассматриваемом случае множество  $\overline{B_0}$  есть отрезок  $-p/2k \leq y \leq p/2k$  оси ординат.

Степень  $\sigma$  функции (80), как следует из (71), (81) и (83), равна  $\sigma = p/4$ . Поэтому в соответствии с теоремой 3 диаграмма (79) может быть реализована рассматриваемой решеткой лишь в том случае, когда радиус  $a$  цилиндра будет больше, чем  $p/4$ .

На рисунке 8 приведено непрерывное амплитудное, а на рис. 9 — фазовое распределение составляющей  $E_{\varphi}$  поля, реализующего диаграмму (79) с показателем  $p = 15$ . При этом номера кривых соответствуют следующим значениям радиуса  $ka$  цилиндра: 1 —  $ka = 40$ , 2 —  $ka = 20$ , 3 —  $ka = 16$ , 4 —  $ka = 8$ . Видно, что последнее распределение (кривая 4) близко к "сверхнаправленному", хотя окружность с  $ka = 8$  еще охватывает отрезок  $\overline{B_0}$  (критический радиус для заданной диаграммы  $ka = 7,5$ ).

Критерий реализуемости заданной диаграммы направленности, содержащийся в теореме 3, как видно

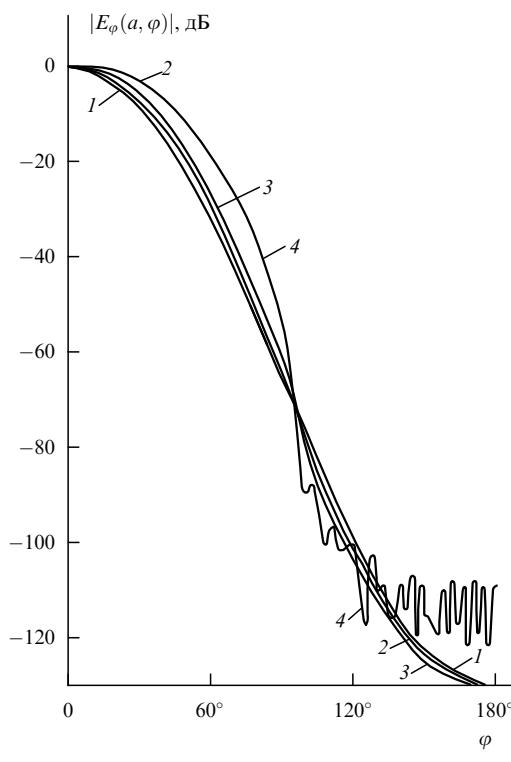


Рис. 8.

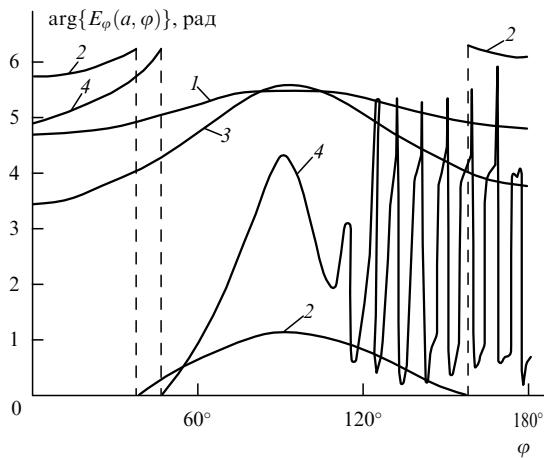


Рис. 9.

из приведенного примера, может быть обобщен, например, в виде следующего утверждения [50, 51]:

Пусть  $\bar{B}$  — некоторая выпуклая замкнутая область, тогда заданная на отрезке  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  функция  $f(\alpha)$ , аналитически продолжимая на всю комплексную плоскость  $\psi = \alpha + i\beta$ , может быть реализована как диаграмма интегрируемых токов, распределенных на произвольном замкнутом контуре Ляпунова, охватывающем  $\bar{B}$ , в том и только в том случае, если при  $|\beta| \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические равенства (58), в которых  $f_{\mp}^E(z_{\mp})$  — целые функции конечной степени переменных  $z_{\mp} = \exp(|\beta| \mp ix)$ , а соответствующее им множество  $\bar{B}_0$  (выпуклая оболочка особенностей поля, имеющего диаграмму  $f(\alpha)$ ) удовлетворяет соотношению  $\bar{B}_0 \subseteq \bar{B}$ .

Дальнейшие обобщения этого критерия даны в [50]. Коротко говоря, все варианты критериев реализуемости содержат одно требование: *особенности волнового поля, соответствующего заданной диаграмме направленности, должны содержаться внутри поверхности — носителя токов, реализующих эту диаграмму.*

Указанное требование в различных интерпретациях является определяющим и в целом ряде широко распространенных методов решения прямых задач теории дифракции.

При решении обратной задачи рассеяния — восстановления формы рассеивателя по его диаграмме направленности — информация о расположении особенностей волнового поля также чрезвычайно важна [32]. Зная, например, геометрию множества  $\bar{B}_0$  — выпуклой оболочки особенностей волнового поля, можно оценить размеры рассеивателя [32]. Приведенные выше соотношения (70), (71), (74), (76) позволяют найти множество  $\bar{B}_0$  в тех случаях, когда речь идет о задаче рассеяния плоской волны. В работах [15, 40–44] содержится большое количество примеров нахождения множества  $\bar{B}_0$  для рассеивателей различной геометрии. Так, например, в случае задачи дифракции плоской волны на трехосном эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

при  $a \geq b \geq c$  множество  $\bar{B}_0$  представляет собой эллипс в плоскости  $xy$  с полуосями  $\sqrt{a^2 - c^2}$ ,  $\sqrt{b^2 - c^2}$  (см. также пример в конце раздела 2.4). При  $a = b = c$  эллипсоид превращается в шар, а множеством особенностей оказывается точка в центре шара. Вполне естественным здесь будет вопрос о том, почему мы все же видим шар, а не светящуюся точку в его центре? Исчерпывающий ответ на этот вопрос, по-видимому, не может быть получен в рамках одной лишь теории дифракции. Однако ясно, что при одних и тех же условиях освещения шероховатый шар лучше распознается, чем идеально отполированный. А это уже объяснимо с точки зрения теории особенностей. Дело в том, что шероховатый шар на самом деле представляет собой некое тело с формой, близкой к сферической; его поверхность можно представить (в первом приближении) как функцию с кусочно-непрерывной производной. Таким образом, особые точки поля, рассеянного таким телом, будут располагаться в том числе и на его поверхности. Причем, чем меньше отличие от сферы, тем этих особенностей больше. В пределе эти особенности располагаются на сферической поверхности всюду плотно, но их "амплитуда" может стать пренебрежимо малой по сравнению с интенсивностью особенности, расположенной в центре шара, где, кстати говоря, поле имеет существенно особую точку [44, 15].

Из рассмотренного примера ясно, что для того, чтобы рассеиватель обладал свойствами "невидимки", т.е. был плохо распознаваемым, его форма должна быть как можно более близкой к идеальной аналитической поверхности, не иметь углов, выступов и иных иррегулярностей.

Эти соображения носят скорее интуитивный характер. Четкие качественные и количественные рекомендации могут быть сделаны лишь на основе детального анализа процесса рассеяния волн телами различной

геометрии и с различными материальными параметрами, который может быть выполнен при помощи соответствующей математической модели.

### 3.4. Аналитические свойства волновых полей и численные методы решения задач дифракции

Математические модели явления рассеяния и дифракции волн строят, используя те или иные численные методы. Большинство строгих методов основывается на каких-либо аналитических представлениях волнового (или дифракционного) поля. При этом наиболее распространенными являются представления по волновым гармоникам (метагармоническим функциям) вида (38) или (39) в виде рядов плоских волн (47), а также посредством волновых потенциалов (50). Далее с использованием краевого условия задачу сводят либо к алгебраической системе относительно коэффициентов разложений, либо к интегральному или интегродифференциальному уравнению относительно плотности потенциала (поверхностного или вспомогательного [52, 53] тока). На основании изложенного выше мы можем высказать предположение, что методы такого рода будут приводить к корректным вычислительным алгоритмам лишь при учете аналитических свойств решения. Существующая литература, посвященная численным методам решения краевых задач электродинамики и акустики, подтверждает это предположение. Так, при использовании разложений вида (38) или (43) [3] алгоритмы оказываются устойчивыми, лишь когда минимальная сфера (окружность), охватывающая все особенности волнового поля, целиком содержится внутри рассеивателя, т.е. выполняется неравенство

$$\rho_{\min} > \frac{2\sigma}{k}, \quad (84)$$

где  $\rho_{\min}$  — радиус минимальной сферы, вписанной в поверхность рассеивателя  $\Gamma$ , а  $\sigma$  — степень диаграммы волнового поля (см. раздел 3.2). Это обстоятельство, на первый взгляд, вступает в противоречие с известной теоремой Векуа о полноте метагармонических функций [36]

$$\psi_{nm}(r, \theta, \varphi) = h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(i m \varphi),$$

$$\psi_n(r, \varphi) = H_n^{(2)}(kr) \exp(in\varphi)$$

на любой поверхности (контуре) Ляпунова, а также линейной комбинации из этих функций в любой замкнутой подобласти вне рассеивателя. Объяснение этого противоречия заключается в том [54], что составленный из таких функций ряд, обеспечивающий наилучшую аппроксимацию волнового поля всюду вне рассеивателя и не являющийся, вообще говоря, абсолютно сходящимся, будучи перестроенным в ряд Рэлея ((38) или (43)), превращается, как уже отмечалось, в своих бесконечных остатках в степенной ряд по степеням  $1/r$  и, таким образом, будет сходящимся лишь вне сферы (окружности), проходящей через наиболее удаленную от начала координат особенность волнового поля.

Условие (84) для рассеивателя, например, в виде эллипсоида вращения означает, что эксцентриситет  $\varepsilon$  эллипсоида должен удовлетворять условию  $\varepsilon < 1/\sqrt{2}$  [15, 41].

Аналогичная ситуация возникает и при использовании разложений по плоским волнам вида (47). А именно,

алгоритмы, основанные на использовании разложений вида (47) [2], оказываются устойчивыми лишь при выполнении условия

$$y_{\min} > \frac{2\sigma_S}{k}, \quad (85)$$

где  $y_{\min}$  — минимальная ордината поверхности  $y = f(x)$ , а величина  $\sigma_S$  определена соотношением (71). Например, при рассеянии плоской волны поверхностью

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{b} x\right),$$

$a > 0$ ,  $b$  — период, условие (85) сводится к следующему ограничению [43]:

$$\frac{2\pi a}{b} < 0,447743\dots$$

Для трохоиды, задаваемой уравнениями

$$x = a(t + \tau \cos t), \quad y = at \sin t, \\ a > 0, \quad 0 < \tau \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

условие (85) ограничивает весь указанный диапазон изменений параметра  $\tau$  значениями  $\tau < 0,2784613\dots$  [55].

При практических численных исследованиях ограничения вида (84), (85) проявляются в виде так называемых "вычислительных катастроф" — полной потери устойчивости алгоритма при попытках повышения точности расчетов путем увеличения размерностей соответствующих алгебраических систем.

Ниже в этом разделе мы рассмотрим пример возникновения такого рода катастрофы в связи с другим классом численных методов — основанных на представлениях вида (50). Используя подобные представления, можно исходную краевую задачу свести к интегральным уравнениям первого или второго рода относительно поверхностных токов [32], т.е. токов, распределенных непосредственно на поверхности  $\Gamma$  рассеивателя. В последнее время широкое распространение получили методы (метод вспомогательных токов [52, 53], метод дискретных источников [56, 57]), основанные на представлениях вида (50), в которых носителем токов является не поверхность рассеивателя  $\Gamma$ , а некоторая другая поверхность  $\Sigma$ , проведенная внутри рассеивателя. Эти методы привлекательны в силу своей алгоритмической простоты, универсальности и высокого быстродействия. Однако эффективность алгоритмов, полученных с использованием названных методов, в значительной степени зависит от выбора вспомогательной поверхности  $\Sigma$  — носителя токов. Самый первый вариант обсуждаемых методов — метод неортогональных рядов — был предложен в работе [58], где, в частности, была доказана полнота системы функций  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n)$  (см. (51) и (52)) при произвольном расположении точек  $\mathbf{r}_n$  внутри  $\Gamma$ , когда точки, задаваемые радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  лежат на произвольной поверхности Ляпунова  $\Gamma$ . Этот факт, однако, быстро вошел в противоречие с вычислительной практикой, когда было обнаружено, что далеко не при всяком выборе точек  $\mathbf{r}_n$  внутри  $\Gamma$  можно получить устойчивый алгоритм. Причина этого явления становится совершенно ясной, если обратиться к результатам раздела 3.3. При решении краевых задач методом вспомогательных токов или его дискретным аналогом ищутся плотно-

сти волновых потенциалов, распределенные на некоторой вспомогательной поверхности  $\Sigma$  и реализующие требуемое волновое (дифракционное) поле. Распределение этих плотностей на  $\Sigma$  находится затем из краевого условия. Возникающее при этом интегральное уравнение первого рода с гладким ядром имеет, например, следующий вид [52, 53]:

$$\int_{\Sigma} v(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\sigma' = u^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' \in \Sigma, \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (86)$$

Теперь мы видим, что обсуждаемый подход имеет очень много общего с решением обратной задачи рассеяния — в обоих случаях задача сводится к интегральному уравнению первого рода с гладким ядром. Ясно, что при заданной правой части  $u^0(\mathbf{r})$  уравнение (86) далеко не всегда имеет решение. С другой стороны, нетрудно показать [52, 53], что если поверхность  $\Sigma$  охватывает все особенности волнового поля  $u(\mathbf{r})$ , то уравнение (86) имеет решение. Точнее говоря, имеет место следующая теорема [52, 53, 56]:

*Пусть  $\Sigma$  — произвольная замкнутая нерезонансная поверхность Ляпунова в  $D$  ( $D$  — область внутри  $\Gamma$ ), тогда необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения вида (86) в  $L_p(\Sigma)$ ,  $p \geq 1$ , заключается в том, чтобы поверхность  $\Sigma$  охватывала множество особенностей продолжения рассеянного поля внутрь  $D$ .*

Требование нерезонансности, т.е. отсутствия на данной частоте  $f = kc/2\pi$  собственных колебаний в области внутри  $\Sigma$  (решений внутренней однородной краевой задачи) связано с видом уравнения (86). Если же краевую задачу свести к уравнениям, содержащим обе плотности  $\mu$  и  $v$  потенциалов, то требование нерезонансности отпадает. Условие охвата поверхностью  $\Sigma$  всех особенностей волнового поля остается, разумеется, в силе и для дискретного аналога метода [52, 53].

Рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенное выше. На рисунках 10 и 11 показаны результаты решения задачи о рассеянии плоской волны эллиптическим цилиндром с размерами полуосей  $ka = 3$ ;  $kb = 1.2$ ;  $kf = 2.7495 \dots$  ( $2f$  — межфокусное расстояние) методом дискретных источников [59]. При этом интеграл в (86) заменялся суммой по формуле прямоугольников, а

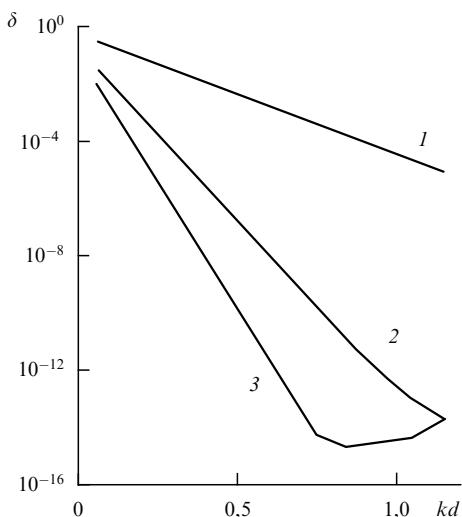


Рис. 10.

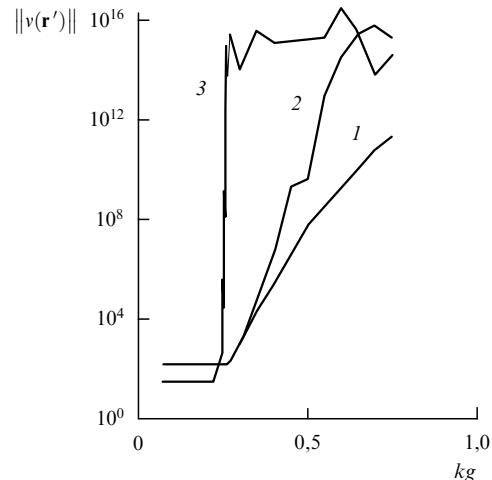


Рис. 11.

левые и правые части приравнивались в так называемых точках коллокации, количество которых может быть больше, чем слагаемых в сумме, заменяющей интеграл, т.е. источников. В последнем случае мы получим переопределенную алгебраическую систему.

Особенности волнового поля в этой задаче расположены в фокусах [44, 15]. На рисунке 10 приведены графики зависимости величины невязки  $\delta$  краевого условия от параметра  $kd$ , характеризующего удаленность вспомогательного контура  $\Sigma$  от контура  $\Gamma$  поперечного сечения цилиндра, причем в качестве  $\Sigma$  выбран софокусный эллипс, малая полуось которого была взята равной  $b_1 = b - d$ . Номерами 1, 2, 3 обозначены графики, полученные при использовании 30, 80 и 120 источников соответственно. Видно, что при правильном выборе вспомогательного контура (так, чтобы он охватывал межфокусный отрезок) может быть получена весьма высокая точность расчетов, причем разрушения алгоритма не наступает даже при довольно больших размерностях алгебраических систем. Величина невязки краевого условия является наиболее верным и весьма чувствительным индикатором правильности получаемого решения, так как интегральные характеристики (например, диаграмма рассеяния) рассчитываются со значительно более высокой точностью, чем та, с которой выполняются краевые условия. Однако об устойчивости алгоритма можно судить и по величине нормы тока на вспомогательном контуре.

На рисунке 11 приведены графики зависимостей нормы тока  $\|v(\mathbf{r}')\|$  от параметра  $kg$ , определяемого из соотношения  $g = a - a_1$ , где  $a_1$  — длина большой полуоси вспомогательного эллиптического контура, малая полуось которого была взята равной  $kb_1 = 0.7$ . Кривые 2 и 3 соответствуют размерностям алгебраической системы  $60 \times 60$  и  $120 \times 120$ . Кривая 1 соответствует случаю, когда количество точек коллокации было в 5 раз больше, чем число дискретных (вспомогательных) источников (размерность алгебраической системы  $60 \times 300$ ). Видно, что, как только вспомогательный контур перестает охватывать межфокусный отрезок (при  $kg > 0.25$ ), наступает вычислительная катастрофа — норма тока экспоненциально нарастает, притом тем быстрее, чем большее размерность системы, т.е. чем выше потенциальная точность расчетов (см. рис. 10).

Таким образом, проведенное в этом разделе рассмотрение показало важность учета аналитических свойств решения для построения корректных вычислительных алгоритмов решения краевых задач теории дифракции. В разделе 2 было показано, что эта информация может быть получена *a priori*, т.е. до решения соответствующей краевой задачи. В разделе 3.5 мы обсудим один метод решения краевых задач теории дифракции, в котором эта априорная информация об аналитических свойствах решения используется при разработке и обосновании вычислительного алгоритма.

### 3.5. Метод диаграммных уравнений

Названный метод был применен к решению задач рассеяния волн компактным препятствием [42, 60], периодической границей раздела двух сред [55, 61], группой рассеивателей и дифракционными решетками [62], а также к другим задачам. Построенные на основе этого метода алгоритмы оказались высокоеффективными и устойчивыми. При данном методе краевая задача сводится к интегрооператорному уравнению относительно диаграммы волнового поля, либо к алгебраической системе относительно коэффициентов разложения этой диаграммы по некоторому базису. Получаемые уравнения позволяют сразу найти диаграмму, минуя промежуточную стадию нахождения плотностей волновых потенциалов (токов) на поверхности рассеивателя (либо на границе раздела). Кроме того, поскольку диаграмма инвариантна в определенных пределах (см. раздел 3.3) по отношению к выбору носителя "токов", при решении обсуждаемым методом задачи рассеяния волн группой препятствий удается получить корректные алгоритмы при сближении рассеивателей вплоть до взаимного соприкосновения [62]. Другие преимущества метода будут указаны ниже в этом разделе.

Для определенности рассмотрим конкретную реализацию метода на примере задачи о рассеянии звуковой волны на трехмерном компактном рассеивателе с условием Дирихле на границе [42]. В этом случае для диаграммы рассеяния имеет место представление вида (54), в котором в соответствии с краевым условием следует положить  $\mu = 0$ . Далее, воспользовавшись некоторой модификацией интеграла (45), позволяющей по диаграмме  $f(\theta, \varphi)$  восстановить волновое поле  $u(r, \theta, \varphi)$  всюду вне выпуклой оболочки  $\bar{B}_0$  особенностей функции  $u$  [42], можно (если поверхность  $\Gamma$  охватывает  $\bar{B}_0$ ) найти плотность потенциала  $v(\Gamma)$  (см. текст после формулы (53)).

Наконец, подставив найденное для  $v(\Gamma)$  выражение в представление (54), получим требуемое интегрооператорное уравнение для диаграммы  $f(\theta, \varphi)$ . Если в полученное уравнение подставить разложение диаграммы в ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (87)$$

и выполнить интегрирование по поверхности единичной сферы, то мы получим с учетом ортогональности функций  $P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$  для коэффициентов  $a_{nm}$  разложения (87) алгебраическую систему следующего вида:

$$a_{nm} = a_{nm}^0 + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v G_{nm, v\mu} a_{v\mu}, \quad (88)$$

в которой

$$a_{nm}^0 = i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi q^0(\theta, \varphi) j_n(k\rho(\theta, \varphi)) \times \\ \times P_n^m(\cos \theta) \exp(-im\varphi) d\theta d\varphi, \quad (89)$$

$$G_{nm, v\mu} = i^{n-v} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ \times \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ k^2 \rho^2(\theta, \varphi) h_v^{(2)\prime}(k\rho) P_v^\mu(\cos \theta) \sin \theta - \right. \\ \left. - k\rho' h_v^{(2)}(k\rho) \frac{d}{d\theta} [P_v^\mu(\cos \theta)] \sin \theta - \right. \\ \left. - i\mu \frac{k\rho'_\varphi}{\sin \theta} h_v^{(2)}(k\rho) P_v^\mu(\cos \theta) \right\} j_n(k\rho) \times \\ \times P_n^m(\cos \theta) \exp[i(\mu-m)\varphi] d\theta d\varphi, \quad (90)$$

причем

$$q^0(\theta, \varphi) = -\frac{k}{4\pi} \left[ \rho^2(\theta, \varphi) \sin \theta \frac{\partial u^0}{\partial r} - \rho'_\theta(\theta, \varphi) \sin \theta \frac{\partial u^0}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{\rho'_\varphi(\theta, \varphi)}{\sin \theta} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} \right] \Big|_{r=\rho(\theta, \varphi)},$$

$j_n(x)$  — сферические функции Бесселя.

Мы видим, что матричные элементы алгебраической системы (88) определяются посредством двухкратных интегралов, а не четырехкратных, как в традиционно используемых методах, таких как, например, метод интегральных уравнений относительно поверхностных токов.

Дело в том, что в методе токовых интегральных уравнений переход к алгебраической системе осуществляют при помощи каких-либо проекционных соотношений, для чего необходимо два раза выполнить интегрирование по поверхности  $\Gamma$ : один раз при подстановке в интегральное уравнение разложения искомого тока в ряд, например, по метагармоническим функциям, а второй — при проектировании полученного равенства на некоторый базис. В обсуждаемом же методе второе интегрирование осуществляется по поверхности единичной сферы, на которой сферические функции ортогональны. В случае тела вращения система (88) и формулы (89), (90) существенно упрощаются [42].

Система (88) была получена из интегрального уравнения, которое имело место при условии, что множество  $\bar{B}_0$  целиком содержится внутри  $\Gamma$ . Однако при выводе системы уравнений пришлось выполнить ряд математических операций, которые могли изменить условия существования решения. Если провести оценку асимптотики (при  $n \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$ ) матричных элементов и свободных членов системы, то, воспользовавшись каким-либо из достаточных критериев разрешимости бесконечной алгебраической системы методом редукции (усечения), мы получим нужные нам условия.

Выполнив необходимые оценки интегралов (90), мы получим [42], что, например, при  $n \gg v$

$$|G_{nm, v\mu}| \leq \text{const} \cdot \frac{\sigma_1}{nn!},$$

где величина  $\sigma_1$  совпадает с параметром  $\sigma$ , определенным выше (см. соотношения (76) и (77)). Аналогично при  $v \gg n$  можно получить, что

$$|G_{nm,v\mu}| \leq \text{const} \cdot \frac{v!}{\sigma_2^n},$$

причем параметр  $\sigma_2$  определяется посредством соотношения

$$\sigma_2 = \min_{\theta_0^s, \varphi_0, s} \left| \frac{k\rho(\theta_0^s, \varphi_0)}{2} \exp(is\theta_0^s) \right|,$$

где минимум ищется на множестве корней уравнений (77), которым при замене  $\xi = \rho(\theta, \varphi) \exp(i\theta)$  соответствуют точки, лежащие вне контуров  $C_\varphi$  на плоскости  $z = r \exp(i\alpha)$  (см. текст после соотношений (77)).

Для свободных членов  $a_{nm}^0$  асимптотическая оценка интегралов (89) дает [42]

$$|a_{nm}^0| \leq \text{const} \cdot \frac{\sigma^n}{nn!}, \quad \sigma = \max(\sigma_1, \sigma_0),$$

причем  $\sigma_0 = kr_0/2$ , а  $r_0$  — расстояние до наиболее удаленной от начала координат точки внутри  $\Gamma$ , соответствующей особенности функции  $q^0(\theta, \varphi)$  при ее продолжении в область комплексных углов  $\theta$ . Для случая, когда  $u^0$  — поле плоской волны, имеем  $\sigma_0 = 0$ , т.е.  $\sigma = \sigma_1$ .

Как отмечалось выше, величина  $2\sigma/k$  равна расстоянию от начала координат до наиболее удаленной особенности дифракционного поля при продолжении внутрь  $\Gamma$ . Наоборот, величина  $2\sigma_2/k$  равна расстоянию от начала координат до ближайшей особой точки, появляющейся при продолжении поля с границы  $\Gamma$  во внешнюю по отношению к  $\Gamma$  область.

Если в системе (88) заменить неизвестные коэффициенты  $a_{nm}$  на новые, положив

$$a_{nm} = \frac{\sigma^n}{n!} x_{nm},$$

то для коэффициентов  $x_{nm}$  получаем новую алгебраическую систему, которая оказывается разрешимой при условии

$$\sigma_2 > \sigma, \quad (91)$$

т.е. в случае, когда область, в которую продолжимо внешнее дифракционное поле, имеет непустое пересечение с областью, в которую могло бы быть продолжено внутреннее поле (если бы, например, решалась внутренняя краевая задача). Условие (91) сохраняет свой вид, а величины  $\sigma$  и  $\sigma_2$  — свое значение независимо от характера краевых условий на  $\Gamma$ .

Рассмотрим два примера. На рисунке 12 приведена диаграмма рассеяния сплюснутого сфероида с полуосами  $ka = kb = 5$ ,  $kc = 0,125$  при падении на него плоской волны, идущей вдоль оси вращения (сплошная линия) [59]. Штриховой линией показана зависимость азимутальной составляющей векторной диаграммы рассеяния плоской электромагнитной волны, нормально падающей на тонкий диск радиуса  $ka = 5$ , взятая из [63].

В таблице приведены данные, иллюстрирующие скорость сходимости при расчете дифракции на сфероиде с полуосами  $ka = kb = 5$ ,  $kc = 0,5$ . Здесь  $\text{cond}$  — число обусловленности системы уравнений,  $S_i$  — инте-

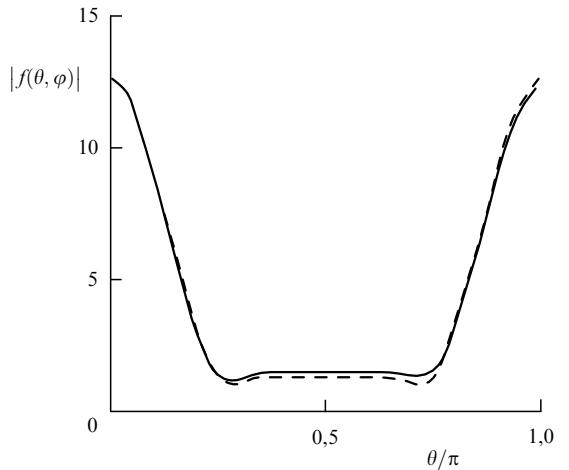


Рис. 12.

Таблица

Величина	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
cond	~ 1	~ 1	~ 1
$S_i/2\pi a^2$	1,0330	1,0330	1,0330
$ 1 - S_0/S_i $	$8 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$

гральное сечение,  $S_0$  — значение интегрального сечения рассеяния, полученное из оптической теоремы,  $N$  — верхний предел суммирования по  $v$  в системе вида (88).

Видно, что результаты стабилизируются во втором-третьем знаке после запятой при  $N \geq kd/2 + 2$ , где  $d$  — наибольший размер рассеивателя. Этот вывод сохраняется и при решении задач рассеяния препятствиями другой геометрии.

Этот весьма примечательный факт высокой сходимости алгоритмов метода диаграммных уравнений имеет простое объяснение. Дело все в том, что в этом методе задача формулируется сразу для диаграммы рассеяния (либо ее коэффициентов Фурье). Структура же диаграммы, т.е. ширина и уровень главного лепестка, количество боковых лепестков и т.п., определяется в основном отношением наибольшего размера рассеивателя к длине волны. Поэтому почти независимо от формы рассеивателя скорость сходимости получается такой же, как если бы решалась задача рассеяния на сфере, описанной вокруг рассеивателя.

Второй пример показывает, что условие (91) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы система алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $x_{nm}$  была разрешима методом редукции. На рисунке 13 показана зависимость величины  $|1 - S_0/S_i|$  от отношения  $a/c$  при  $kc = 1$  и различных значениях  $N$  для тела, образованного вращением кривой  $\rho(\theta) = c \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta$  вокруг полярной оси ("гантели"). Условие (91) для этого случая принимает вид  $a/c > 0,5$ . Из приведенного рисунка видно, что при  $a/c \approx 0,5$  наступает качественный скачок: при  $a/c > 0,5$  с ростом  $N$  погрешность уменьшается, а при  $a/c < 0,5$  возрастает, т.е. алгоритм разрушается.

Рассеиватели, граница  $\Gamma$  которых такова, что для нее справедливо неравенство  $\sigma_2 > \sigma_1$ , названы в [42, 60] слабо невыпуклыми. Таковыми являются, в частности, все выпуклые рассеиватели. Класс слабо невыпуклых рас-

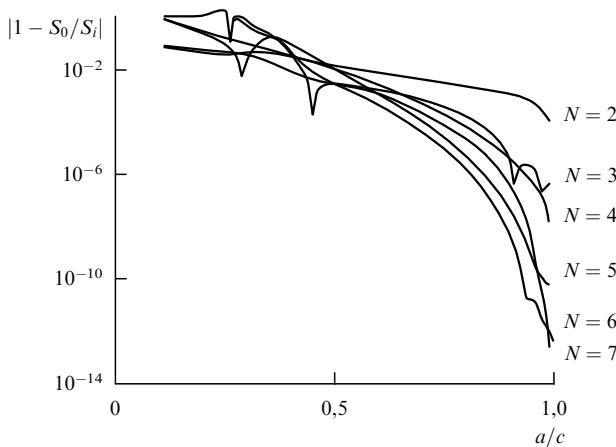


Рис. 13.

сеивателей значительно шире того множества тел, для которых применимы методы, основанные на представлении волнового поля в виде разложения (38) (т.е. тех рассеивателей, для которых справедлива так называемая гипотеза Рэлея). В то же время, как показали расчеты, метод диаграммных уравнений позволяет получать вычислительные алгоритмы, обладающие весьма высокой скоростью сходимости, близкой к той, которая имеет место при использовании метода разделения переменных (когда последний применим).

#### 4. Заключение

Резюмируя изложенное выше, сделаем вывод, что математическую часть проблемы продолжения решений уравнений Maxwella и Гельмгольца в целом можно считать решенной. В частности, имеется полная ясность с определением местонахождения особенностей продолжения. Что же касается физической или прикладной стороны проблемы, то здесь, по нашему мнению, работа только начинается. Напрашивается аналогия с ситуацией, которая возникла в 60–70-е годы после того, как было обнаружено, что диаграммы направленности так называемых апертурных антенн могут быть отнесены к некоторому классу целых функций. Это открытие позволило разрозненные вопросы конструирования антенн объединить в рамках строгой теории синтеза.

В данном обзоре мы попытались, в частности, продемонстрировать, что теория продолжения волновых полей не только позволяет глубже понять такое сложное явление, как дифракция электромагнитных и звуковых волн, но и дает конкретные рецепты по созданию высокоеффективных и надежных алгоритмов математического моделирования задач дифракции и рассеяния волн.

#### Список литературы

1. Sternin B, Shatalov V *Differential Equations on Complex Manifolds* (Dordrecht, Boston: Academic Publ., 1994)
2. Waterman P C *J. Acoust. Soc. Am.* **57** 791 (1975); Masel R I, Merrill R P, Miller W H *Phys. Rev. B* **12** 5545 (1975)
3. Ramm A G *J. Math. Phys.* **23** 1123 (1982)
4. Адамар Ж *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа* (М.: Наука, 1978)
5. Lewy H *Math. Ann.* **101** 609 (1929)
6. Davis Ph *The Schwarz Functions and its Applications* (Providence: Carus Mathematical Monographs, MAA, 1979)
7. Khavinson D, Shapiro H S *Research report TRITA-MAT-1989-36* (Stockholm: Royal Institute of Technology, 1989)
8. Schwarz H A *Monatsber. der König Akad. der Wiss. zu Berlin* **767** (1870)
9. Shapiro H S *The Schwarz Function and its Generalization to Higher Dimensions* (New York: John Wiley, 1992)
10. Khavinson D, Shapiro H S *J. d'Analyse Mathématique* **54** 60 (1989)
11. Векуа И Н *Новые методы решения эллиптических уравнений* (М.-Л.: Гостехиздат, 1948); Vekua I N *New Methods for Solving Elliptic Equations* (Amsterdam: North-Holland, 1967)
12. Lewy H *Bull. Am. Math. Soc.* **65** 37 (1959)
13. Стернин Б Ю, Шаталов В Е, в кн. *Геометрия и анализ* (Кемерово: Изд-во Кемеровского гос. университета, 1991) с. 22
14. Sternin B, Shatalov V *Lect. Notes in Math.* **1520** 237 (1992)
15. Кюркчан А Г, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *Радиотехника и электроника* **37** 777 (1992)
16. Garabedian P *J. Math. Mech.* **9** 241 (1960)
17. Garabedian P *Partial Differential Equations* (New York, London, Sidney: John Wiley, 1964)
18. Millar R F *Lect. Notes in Math.* **561** (1976)
19. Millar R F *IMA J. Appl. Math.* **37** (2) 155 (1986)
20. Sternin B, Shatalov V, Preprint 93 (Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1994)
21. Sternin B, Shatalov V, Preprint MPI/95-77 (Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1995)
22. Стернин Б Ю, Шаталов В Е *УМН* **43** (3) 99 (1988)
23. Стернин Б Ю, Шаталов В Е *ДАН СССР* **280** 553 (1985); Sternin B, Shatalov V *Soviet Math. Dokl.* **31** 125 (1985)
24. Sternin B, Shatalov V *Russian J. Math. Phys.* **1** (2) 239 (1992)
25. Стернин Б Ю, Шаталов В Е *Матем. заметки* **54** (6) 90 (1993)
26. Стернберг С *Лекции по дифференциальной геометрии* (М.: Мир, 1970)
27. Leray J *Bul. Soc. Math. de France* **3** (87) 81 (1959)
28. Pham F *Introduction a L'Étude Topologique des Singularités de Landau* (Paris: Gauthier-Villars, 1967)
29. Sternin B, Shatalov V *Lect. Notes in Math.* **1453** 109 (1990)
30. Савина Т В, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *ДАН СССР* **322** 48 (1992)
31. Савина Т В, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *Радиотехника и электроника* **38** 229 (1993)
32. Колтон Д, Кress Р *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния* (М.: Мир, 1987)
33. Хенл X, Мауз А, Вестфаль К *Теория дифракции* (М.: Мир, 1964)
34. Wilcox C H *Comm. Pure and Appl. Math.* **9** 115 (1956)
35. Кюркчан А Г *ДАН СССР* **319** 854 (1991)
36. Векуа И Н *ДАН СССР* **90** 715 (1953)
37. Борен К, Хафмен Д *Поглощение и рассеяние волн малыми частицами* (М.: Мир, 1986)
38. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **28** 1275 (1983)
39. Фелсен Л, Маркувиц Н *Излучение и рассеяние волн* (М.: Мир, 1978)
40. Кюркчан А Г *ДАН СССР* **265** 68 (1982)
41. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **27** 233 (1982)
42. Кюркчан А Г *Докл. РАН* **336** 728 (1994)
43. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **28** 1525 (1983)
44. Кюркчан А Г, Стернин Б Ю, Шаталов В Е, в кн. *Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн* (М.: НИИРФ, 1993) с. 268
45. Hill N R, Celli V *Phys. Rev. B* **17** 2478 (1978)
46. Хургин Я И, Яковлев В П *Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике* (М.: Физматгиз, 1962)
47. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **31** 1294 (1986)
48. Кюркчан А Г *ДАН СССР* **275** 48 (1984)
49. Фельд Я Н, Бахрах Л Д *Радиотехника и электроника* **8** 187 (1963)
50. Кюркчан А Г, в кн. *Обратные задачи. Материалы IX Всесоюзной школы по дифракции и распространению волн* (Казань: Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1988) с. 48
51. Кюркчан А Г, Зимнов М Х *Радиотехника и электроника* **33** 53 (1988)

52. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **29** 2129 (1984)  
 53. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **31** 20 (1986)  
 54. Millar R F *Radio Science* **8** 785 (1973)  
 55. Кюркчан А Г *Радиотехника и электроника* **38** 48 (1993)  
 56. Еремин Ю А, Свешников А Г *Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции* (М.: Изд-во МГУ, 1992)  
 57. Boag A, Leviatan Y, Boag A *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **41** 1265 (1993)  
 58. Купрадзе В Д *УМН* **22** (2) 59 (1967)  
 59. Кюркчан А Г, Клеев А И *Радиотехника и электроника* **41** 162 (1996)  
 60. Кюркчан А Г *ДАН СССР* **325** 273 (1992)  
 61. Кюркчан А Г *Докл. РАН* **339** 600 (1994)  
 62. Кюркчан А Г *Докл. РАН* **348** 603 (1996), **351** 599 (1996)  
 63. Уфимцев П Я *Метод краевых волн в физической теории дифракции* (М.: Сов. радио, 1962)

## Wave field continuation singularities

**A.G. Kyurkchan**

*Moscow Technical University of Communication and Informatic Science,  
ul. Aviamotornaya 8a, 111024 Moscow, Russia*

*Tel. (7-095) 192-84 75*

*Fax (7-095) 274-00 32*

**B.Yu. Sternin, V.E. Shatalov**

*M.V. Lomonosov Moscow State University,  
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia  
Tel. (7-095) 939-56 67, 297-20 52  
Fax (7-095) 939-01 26  
E-mail: boris@sternin.msk.su*

The state of the art of the problem of the analytical continuation of wave fields is reviewed. The problem is a multidisciplinary subject which involves radiophysics, acoustics, and optics on the one hand, and mathematical physics and the theory of differential equation, on the other. The qualitative aspects of the problem are examined. A computational algorithm for field singularities is given. The relation between the singularities and the ‘computational catastrophes’ of scattering models is discussed. To illustrate the theoretical material, numerous examples are discussed in great detail.

PACS numbers: **02.30.-f, 02.90.+p, 41.20.-q, 41.20.Jb**

Bibliography — 63 references

*Received 5 May 1996, revised 15 July 1996*