

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квантово-полевая ренормализационная группа в теории развитой турбулентности

Л.Ц. Аджемян, Н.В. Антонов, А.Н. Васильев

Дан обзор результатов, полученных в теории развитой турбулентности с помощью квантово-полевой ренормализационной группы. Приводятся необходимые сведения о квантово-полевой теории ренормирования, включая ренормировку составных операторов и операторное разложение. Техника ренормализационной группы излагается на примере стохастической модели изотропной однородной турбулентности, для которой она доказывает существование инфракрасного скейлинга с колмогоровскими размерностями. Обсуждаются размерности составных операторов, инфракрасные асимптотики различных корреляционных функций, а также расчет числовых амплитудных множителей в скейлинговых законах.

PACS numbers: 03.40.Ge, 47.10.+g

Содержание

1. Введение (1257).
2. Метод РГ в стохастической модели изотропной турбулентности (1258).
 - 2.1. Стохастическое уравнение Навье–Стокса. Феноменология развитой турбулентности. 2.2. Квантово-полевая формулировка. 2.3. ИК- и УФ-сингулярности диаграмм теории возмущений. 2.4. УФ-ренормировка. Уравнения РГ. 2.5. РГ-анализ стохастической гидродинамики. ИК-скейлинг. 2.6. Решение уравнений РГ. Инвариантные переменные. РГ-представления корреляционных функций. 2.7. ИК-скейлинг при фиксированных g_0 и v_0 . 2.8. ИК-скейлинг при фиксированных W и v_0 : независимость от v_0 и "замораживание" критических показателей при $\epsilon > 2$.
3. Составные операторы, операторное разложение, первая гипотеза Колмогорова (1268).
 - 3.1. Ренормировка составных операторов. Использование уравнений Швингера и галилеевой инвариантности. 3.2. Составные операторы в законах сохранения энергии и импульса. 3.3. Критические размерности старших операторов. 3.4. Исследование асимптотики $m \rightarrow 0$ с помощью операторного разложения. 3.5. Обоснование гипотезы 1 Колмогорова в интервале $0 < \epsilon < 2$ с помощью инфракрасной теории возмущений. 3.6. ИК-асимптотика тройного коррелятора скорости. 3.7. РГ-подход и уравнение спектрального баланса энергии. 3.8. О неколмогоровских решениях уравнения баланса энергии. 3.9. Проблема сингулярностей

при $\epsilon \rightarrow 2$ в безмассовой модели. Вычисление константы Колмогорова. 3.10. Об отклонениях от колмогоровского скейлинга. ИК-ренормгруппа.

4. Заключение (1282).
- Список литературы (1283).

1. Введение

Метод ренормализационной группы (РГ), развитый первоначально в рамках квантовой теории поля в связи с потребностями физики элементарных частиц, был с успехом применен в начале 70-х годов в работах К. Вильсона и других в теории критических явлений для обоснования критической масштабной инвариантности (скейлинга) и вычисления универсальных характеристик критического поведения (критических индексов и скейлинговых функций) в форме ϵ -разложений. Впоследствии он был обобщен и на другие задачи, для которых характерен скейлинг в инфракрасной области: критическую динамику, случайные блуждания, физику полимеров и, наконец, теорию развитой гидродинамической турбулентности. Настоящая статья является обзором основных результатов, полученных с помощью метода РГ в теории турбулентности за последние 15 с лишним лет.

В отличие от теории критического поведения аппарат РГ не стал пока общепринятым в теории турбулентности и используется в виде различных достаточно далеких друг от друга формализмов (квантово-полевая РГ, рекурсионные соотношения Вильсона, итерационное усреднение по модам околосеточных масштабов), что крайне затрудняет взаимопонимание работающих в этой области специалистов. Поэтому в настоящей работе систематически используется стандартная квантово-полевая техника РГ, имеющая надежную базу в форме квантово-полевой теории ренормировки и хорошо развитых методов расчета РГ-функций и критических

Л.Ц. Аджемян, Н.В. Антонов, А.Н. Васильев. Санкт-Петербургский государственный университет, Научно-исследовательский институт физики, Отдел теоретической физики, 198904 Санкт-Петербург, Петродворец, Ульяновская ул. 1, Россия
Тел. (812) 428-75-90
Факс (812) 428-72-40
E-mail: adjemyan@phim.niif.spb.su, antonov@phim.niif.spb.su, vasiljev@phim.niif.spb.su

Статья поступила 22 июня 1994 г.,
после доработки 26 августа 1996 г.

размерностей (аналитическая регуляризация, схема минимальных вычитаний и т.п.), и подробно излагаются не только физические результаты, но и сам аппарат РГ.

В разделе 2 рассматривается простейшая стохастическая модель развитой изотропной однородной турбулентности несжимаемой жидкости. Дано доказательство существования в этой модели инфракрасного скейлинга с колмогоровскими размерностями. В разделе 3 обсуждаются более сложные вопросы РГ-теории турбулентности, касающиеся ренормировки составных операторов, операторного разложения Вильсона и исследования инфракрасных асимптотик различных скейлинговых функций.

В РГ-теории турбулентности возник целый ряд новых проблем, с которыми не имели дела в теории критического поведения: замораживание критических размерностей, опасные составные операторы с отрицательными размерностями и др. Решение этих проблем требует выхода за рамки ϵ -разложений и совместного использования техники РГ с другими методами (инфракрасной теорией возмущений, операторным разложением, функциональными уравнениями типа Швингера и др.). Эти вопросы, требующие дальнейшего исследования, также рассматриваются в разделе 3.

Основные ссылки по физике развитой турбулентности — [1–4]; по квантово-полевой теории ренормировки — [5, 6]; по применению метода РГ в теории критического поведения — [7–10]; по функциональным методам квантовой теории поля — [11, 12].

2. Метод РГ в стохастической модели изотропной турбулентности

2.1. Стохастическое уравнение Навье–Стокса. Феноменология развитой турбулентности

В качестве микроскопической модели развитой (однородной, изотропной) турбулентности несжимаемой вязкой жидкости (газа) рассматривается стохастическое уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой [1, 3, 13, 14]

$$\nabla_t \varphi_i = v_0 \Delta \varphi_i - \partial_i p + F_i, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + (\varphi \partial). \quad (1)$$

Здесь φ_i — поперечное (в силу несжимаемости) векторное поле скорости, p и F_i — давление и поперечная внешняя случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от $x \equiv t, \mathbf{x}$), v_0 — кинематический коэффициент вязкости, ∇_t — галилеево-ковариантная производная. Задача (1) рассматривается на всей оси времени t и доопределяется условием запаздывания, а также нулевым асимптотическим условием для φ при $t \rightarrow -\infty$. Для F предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором

$$\langle F_i(x) F_j(x') \rangle = \delta(t - t') (2\pi)^{-d} \times \\ \times \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_F(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')], \quad (2)$$

в котором $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ — поперечный проектор, $d_F(k)$ — некоторая функция $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели, d — размерность пространства $\mathbf{x}$. Введение случайной силы феноменологически моделирует "накачку" энергии в систему за счет взаимодействия с крупномасштабными

движениями. Средняя мощность накачки энергии W связана с функцией d_F в (2) соотношением

$$W = \frac{d-1}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} d_F(\mathbf{k}). \quad (3)$$

Переход к стохастической задаче позволяет отвлечься от конкретных начальных и граничных условий и рассматривать непосредственно однородную развитую турбулентность [1, 13, 14], при этом поле φ в (1) соответствует лишь хаотической ("пульсационной") составляющей реальной скорости.

Уравнение (1) решается итерациями по нелинейности с последующим усреднением $\langle \dots \rangle$ по распределению случайной силы. Вычисляемыми величинами являются различные функции Грина — корреляционные функции $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$, а также функции отклика — вариационные производные корреляционных функций по неслучайной внешней силе, вводимой как аддитивная добавка в правую часть уравнения (1).

Упрощенная физическая картина турбулентности состоит в следующем [1, 4]: энергия внешнего источника (у нас — случайной силы) поступает в систему от крупномасштабных движений (вихрей) с некоторым характерным размером $l_{\max} \equiv 1/m$, затем переносится по спектру (дробление вихрей) за счет нелинейности в уравнении (1) и, наконец, начинает активно диссипировать на масштабах $l_{\min} \equiv 1/\Lambda$ (диссипативная длина), где становится существенной роль вязкости. Независимыми являются параметры W , v_0 и $m \equiv l_{\max}^{-1}$ (последний будем называть "массой" по формальной аналогии с квантово-полевыми моделями), все прочие выражаются через них по соображениям размерности: для нижних границ — через пару W, m , для верхних — через W, v_0 , в частности $\Lambda = W^{1/4} v_0^{-3/4}$. Развитая турбулентность характеризуется большим значением числа Рейнольдса $Re = (\Lambda/m)^{4/3}$ и, как следствие, наличием широкого инерционного интервала, определенного неравенствами $m \ll k \ll \Lambda$ для импульсов (волновых чисел) и $\omega_{\min} \equiv W^{1/3} m^{2/3} \ll \omega \ll \omega_{\max} \equiv v_0 \Lambda^2$ для частот [1].

Основные положения феноменологической теории Колмогорова–Обухова [1] были сформулированы в виде двух гипотез. Первую из них впоследствии пришлось модифицировать в сторону ослабления, и мы приведем сначала первоначальный вариант с обозначением 1':

Гипотеза 1' (см. [1], с. 319): в области $k \gg m$, $\omega \gg \omega_{\min} = W^{1/3} m^{2/3}$ распределение фурье-компонент $\varphi(\omega, \mathbf{k})$ случайной скорости $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$ зависит от полной мощности накачки W , но не зависит от "деталей ее устройства", в том числе и от конкретного значения m .

Гипотеза 2 (см. [1], с. 321): в области $k \ll \Lambda$, $\omega \ll \omega_{\max} = v_0 \Lambda^2$ распределение не зависит от коэффициента вязкости v_0 .

Из второй гипотезы, в частности, следует, что в области ее применимости парный коррелятор фурье-компонент скорости d -мерной задачи представим в виде

$$\langle \varphi_i(\omega, \mathbf{k}) \varphi_j(\omega', \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^{d+1} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \times \\ \times P_{ij}(\mathbf{k}) D(\omega, k), \quad (4)$$

$$D(\omega, k) = W^{1/3} k^{-d-4/3} f\left(\frac{Wk^2}{\omega^3}, \frac{m}{k}\right),$$

где f — некоторая функция двух независимых безразмерных аргументов.

Согласно гипотезе 1' в инерционном интервале должна исчезать зависимость от m , т.е. функция f в (4) должна иметь конечный предел при стремлении к нулю ее второго аргумента m/k . Но уже давно известно [1], что это не так: из-за кинематического эффекта переноса вихрей как целого крупномасштабными движениями с $k \simeq m$ предел $m/k \rightarrow 0$ в динамических объектах типа (4) не существует. Исправленная формулировка такова (см., например, [15]):

Гипотеза 1: в области $k \gg m$, $\omega \gg (Wm^2)^{1/3}$ конечный предел при $m/k \rightarrow 0$ существует для одновременной функции распределения пространственных фуры-компонент $\varphi(t, \mathbf{k})$ случайного поля скорости $\varphi(t, \mathbf{x})$.

Для статического парного коррелятора из гипотезы 2 (или интегрированием по частотам ω , ω' равенства (4)) получим представление

$$\langle \varphi_i(t, \mathbf{k}) \varphi_j(t, \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{ij}(\mathbf{k}) D_{st}(k),$$

$$D_{st}(k) = k^{-d} \left(\frac{W}{k} \right)^{2/3} f\left(\frac{m}{k}\right). \quad (5)$$

Гипотеза 1 гарантирует существование конечного предела $f(0)$ функции $f(m/k)$ при $m/k \rightarrow 0$, величина $f(0)$ просто связана с известной константой Колмогорова (см. раздел 3.9). Представление (5) справедливо для всех $k \ll \Lambda$, т.е. как в инерционном интервале $m \ll k \ll \Lambda$, где функцию $f(m/k)$ можно заменить константой $f(0)$, так и в энергосодержащей области (области накачки), где она нетривиальна.

Представления типа (4), (5) можно написать и для более сложных корреляционных функций с любым числом полей φ . Они вытекают только из гипотезы 2 и в совокупности означают наличие инфракрасного (поскольку условия $k \ll \Lambda$, $\omega \ll v_0 \Lambda^2$ гипотезы 2 не предусматривают ограничений снизу) скейлинга с вполне определенными "колмогоровскими" размерностями $\Delta_F \equiv \Delta[F]$ всех ИК-существенных величин $F = \{\varphi \equiv \varphi(x), m, t \sim \omega^{-1}, r \sim k^{-1}\}$ при несущественных W, v_0 :

$$\Delta_\varphi = -\frac{1}{3}, \quad \Delta_t = -\Delta_\omega = -\frac{2}{3}, \quad \Delta_k = -\Delta_r = \Delta_m = 1. \quad (6)$$

В заключение уточним вид функции накачки d_F в корреляторе (2), используемой в РГ-теории турбулентности. С одной стороны, по физическому смыслу реалистическая накачка должна быть инфракрасной, т.е. функция d_F должна содержать параметр $m \ll \Lambda$ и основной вклад в интеграл (3) должен набираться от масштабов $k \sim m$. С другой стороны, для использования стандартной квантово-полевой техники РГ важно, чтобы функция d_F имела степенную асимптотику при больших k . Этому условию удовлетворяет используемая в работах [15, 16] функция

$$d_F = D_0 k^{4-d} (k^2 + m^2)^{-\epsilon}, \quad (7)$$

где $\epsilon > 0$ — параметр отклонения от логарифмичности (подробно см. в разделе 2.4). Логарифмической теории соответствует значение $\epsilon = 0$, а инфракрасной накачка (7) становится лишь при $\epsilon > 2$. В области $0 < \epsilon < 2$ накачка (7) является ультрафиолетовой (УФ), интеграл (3) для нее на больших k расходится, тогда в нем подразумевается обрезание $k \leq \Lambda$ и интеграл набирается на масштабах $k \sim \Lambda$, т.е. в этом случае $W \sim D_0 \Lambda^{4-2\epsilon}$ в отличие от $W \sim D_0 m^{4-2\epsilon}$ для $\epsilon > 2$.

В большинстве работ по РГ-теории турбулентности используется более простая чисто степенная "накачка"

$$d_F = D_0 k^{4-d-2\epsilon}, \quad (8)$$

соответствующая $m = 0$ в (7). Это возможно, если интересоваться лишь обоснованием ИК-скейлинга и критическими размерностями (которые при любой накачке не зависят от m), а прочие объекты типа скейлинговых функций вычислять по диаграммам теории возмущений только в форме ϵ -разложений. Тогда переход к теории с $m = 0$ непротиворечив, поскольку коэффициенты ϵ -разложений диаграмм всегда имеют конечные пределы при $m \rightarrow 0$. Но это, конечно, не является доказательством гипотезы 1 Колмогорова, поскольку для конечных ϵ в реальной области ИК-накачки $\epsilon > 2$ предел $m \rightarrow 0$ может не существовать. (Простой пример — функция $m^{2-\epsilon}$. Коэффициенты ее ϵ -разложения при $m \rightarrow 0$ исчезают, а сама она для $\epsilon > 2$ расходится.) Поэтому гипотезу 1 можно обсуждать только в моделях типа (7) с параметром m и обязательно вне рамок ϵ -разложения. Но если не касаться этих вопросов, то можно пользоваться максимально упрощенной моделью (8). Для нее "реальным" считается значение $\epsilon_p = 2$, соответствующее границе области ИК-накачки в (7), поскольку для $\epsilon > 2$ интеграл (3) с функцией (8) не существует из-за ИК-расходимости, а при $\epsilon < 2$ накачка ультрафиолетовая. Отметим, что при $\epsilon = 2$ параметр D_0 в (8) приобретает размерность W . Отметим также, что идеализированной накачке бесконечно большими вихрями соответствует $d_F(\mathbf{k}) \propto \delta(\mathbf{k})$, а функцию Ck^{-d} при подходящем выборе амплитуды C можно считать степенной моделью d -мерной δ -функции (см. раздел 3.7). Более реалистической является, конечно, модель накачки (7) или ее обобщение

$$d_F = D_0 k^{4-d-2\epsilon} h\left(\frac{m}{k}\right), \quad h(0) = 1, \quad (9)$$

с произвольной "достаточно хорошей" функцией $h(m/k)$, обеспечивающей сходимость интеграла (3) при малых k и нормированной на единицу при $k \gg m$, где (9) переходит в (8). Большинство относящихся к инерционному интервалу результатов от выбора конкретной функции h не зависит, и мы будем излагать их для модели (9) с произвольной h .

2.2. Квантово-полевая формулировка

Известно [17, 18], что стохастическая задача

$$\partial_t \varphi(x) = V(x; \varphi) + F(x), \quad \langle F(x) F(x') \rangle = D_F(x, x'), \quad (10)$$

для поля или системы полей $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$ с произвольным, не содержащим производных φ по времени функционалом V и произвольным коррелятором D_F гауссовой случайной силы F при стандартном (как для (1)) доопределении эквивалентна квантовой теории удвоенного набора полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$ с функционалом действия

$$S(\Phi) = \frac{\varphi' D_F \varphi'}{2} + \varphi' (-\partial_t \varphi + V) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \iint dx dx' \varphi'(x) D_F(x, x') \varphi'(x') +$$

$$+ \int dx \varphi'(x) [-\partial_t \varphi(x) + V(x; \varphi)]. \quad (11)$$

Это значит, что статистические средние $\langle \dots \rangle$ случайных величин можно отождествить с функциональными средними с весом $\exp S(\Phi)$, поэтому производящие функционалы полных $\langle G(A) \rangle$ и связных $\langle W(A) \rangle$ функций Грина задачи (10) представляются функциональным интегралом

$$G(A) = \exp W(A) = \int \mathcal{D}\Phi \exp[S(\Phi) + A\Phi] \quad (12)$$

с произвольными источниками $A \equiv A_\phi, A_{\phi'}$ в линейной форме

$$A\Phi \equiv \int dx [A_\phi(x)\phi(x) + A_{\phi'}(x)\phi'(x)]. \quad (13)$$

Производящий функционал 1-неприводимых функций Грина определяется преобразованием Лежандра $W(A)$ по A :

$$\Gamma(\Phi) = W(A) - A(\Phi), \quad \Phi(x) = \frac{\delta W(A)}{\delta A(x)}. \quad (14)$$

Независимым аргументом здесь считается Φ , а $A = A(\Phi)$ определяется неявно вторым равенством (14). Источник $A_{\phi'}$ имеет смысл неслучайной внешней силы (добавки к V в (10)), поэтому, в частности, функция Грина $\langle \phi\phi' \rangle$ модели (11) совпадает с простейшей функцией отклика $\delta\langle \phi \rangle / \delta A_{\phi'}|_{A=0}$ в исходной задаче (10).

В дальнейшем мы всегда будем для краткости пользоваться приведенной в (11)–(13) компактной формой записи, подразумевая все нужные интегрирования по переменным $x \equiv t, \mathbf{x}$ и суммирование по индексам полей Φ и источников A .

Интеграл (12) — стандартная конструкция квантовой теории поля, поэтому все функции Грина имеют стандартные фейнмановские диаграммные представления (см., например, [12]). Роль линий в диаграммах играют элементы 2×2 -матрицы затравочных пропагаторов $\langle \Phi\Phi \rangle_0$, связанной соотношением $\langle \Phi\Phi \rangle_0 = K^{-1}$ с матрицей K в свободной (квадратичной по Φ) части действия $S_0 = -\Phi K \Phi / 2$. Если $V = L\phi +$ нелинейные члены (с некоторой линейной операцией L , $\text{Re } L \leq 0$), затравочные пропагаторы для действия (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \phi\phi' \rangle_0 &= \langle \phi' \phi \rangle_0^T = (\partial_t - L)^{-1}, \quad \langle \phi' \phi' \rangle_0 = 0, \\ \langle \phi\phi \rangle_0 &= \langle \phi\phi' \rangle_0 D_F \langle \phi' \phi \rangle_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где T — символ транспонирования линейной операции (перестановка аргументов в координатном представлении и $\partial^T = -\partial$ для производных). Пропагатор $\langle \phi\phi' \rangle_0$ — запаздывающий (это дополнительное условие к задаче (10)), $\langle \phi' \phi \rangle_0$ — опережающий, что вместе с равенством $\langle \phi' \phi' \rangle_0 = 0$ приводит к исчезновению любой 1-неприводимой функции Грина $\langle \phi \dots \phi \rangle_{1\text{-н}}$ только полей ϕ (без ϕ') из-за присутствия в ее диаграммах замкнутого цикла запаздывающих линий. По той же причине исчезают также все вакуумные петли и все связные функции $\langle \phi' \dots \phi' \rangle_{\text{св}}$ только полей ϕ' (без ϕ) [19].

Представление (11), (12) получено в работах [17, 18], но сама диаграммная техника типа (15) была сформулирована ранее в [14, 20–22]. В теории турбулентности она известна как диаграммная техника Уайльда [14]. Функциональная формулировка (11), (12) существенно облегчает получение точных функциональных соотношений типа уравнений Швингера (см. раздел 3.1) и, что осо-

бенно важно, позволяет применить к стохастической задаче (10) стандартную квантово-полевую технику РГ.

В [17, 18] и других работах к действию (11) добавляют слагаемое с закороченной линией $\langle \phi\phi' \rangle_0$, формально порождаемое определителем линейной операции $-\partial_t + \delta V / \delta \phi$. Эта добавка точно сокращает все диаграммы с закороченной линией $\langle \phi\phi' \rangle_0$, появляющиеся среди прочих по правилам фейнмановской диаграммной техники для действия (11), но не возникающие при построении диаграмм непосредственно итерациями стохастического уравнения (10). Следуя [19], условимся в дальнейшем просто доопределять в диаграммах закороченную линию $\langle \phi\phi' \rangle_0$ нулем. Такое доопределение приводит к одновременному исчезновению лишних диаграмм и компенсирующей их добавки к действию (11).

Применение сформулированной выше общей теоремы к стохастическому уравнению Навье–Стокса (1), (2) приводит к теории двух поперечных векторных полей $\Phi \equiv \phi, \phi'$ с функционалом действия

$$S(\Phi) = \frac{\phi' D_F \phi'}{2} + \phi' [-\partial_t \phi + v_0 \Delta \phi - (\phi \partial) \phi], \quad (16)$$

в котором D_F — коррелятор случайной силы (2). Поперечность поля ϕ' позволяет опустить в (16) чисто продольный вклад $\partial_i p$ из (1).

Затравочные пропагаторы (15) для модели (16) в импульсно-частотном представлении имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \phi\phi' \rangle_0 &= \langle \phi' \phi \rangle_0^* = (-i\omega + v_0 k^2)^{-1}, \quad \langle \phi' \phi' \rangle_0 = 0, \\ \langle \phi\phi \rangle_0 &= \frac{d_F(k)}{\omega^2 + v_0^2 k^4} \end{aligned} \quad (17)$$

с функцией $d_F(k)$ из (2). По векторным индексам все линии кратны поперечному проектору $P_{ij}(\mathbf{k})$, который в записи (17) опущен, но всегда будет подразумеваться. Взаимодействию в (16) отвечает трехконцевая вершина $-\phi'(\phi \partial) = \phi'_i V_{ijs} \phi_j \phi_s / 2$ с вершинным множителем

$$V_{ijs} = i(k_j \delta_{is} + k_s \delta_{ij}), \quad (18)$$

где $\mathbf{k}$ — импульс, втекающий в вершину через поле ϕ' . На рисунке 1 приведены для иллюстрации диаграммы точных функций Грина $\langle \phi\phi \rangle$ и $\langle \phi\phi' \rangle$ в однопетлевом приближении. Линиям диаграмм отвечают затравочные пропагаторы (17), вершинам — множители (18), подчеркнутый конец линии соответствует полю ϕ' , не подчеркнутый — полю ϕ . Роль параметра разложения в теории возмущений (константа связи или заряд в терминологии квантовой теории поля) играет $g_0 \equiv D_0 / v_0^3$ с D_0 из (9).

Рис. 1.

2.3. ИК- и УФ-сингулярности диаграмм теории возмущений

Поясним проблемы, возникающие в теории возмущений для модели (16) с накачкой типа (9), на примере парного коррелятора скорости, следуя работе [15]. При конечном

$\epsilon > 0$ все диаграммы коррелятора в области больших импульсов и частот сходятся, поэтому могут вычисляться без УФ-обрезания Λ . При таком способе вычислений возникающие при $\epsilon \rightarrow 0$ УФ-расходимости имеют вид полюсов по ϵ , а ряд теории возмущений для коррелятора записывается как

$$\langle \varphi \varphi \rangle = \langle \varphi \varphi \rangle_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_0 k^{-2\epsilon})^n A_n \left(\frac{\omega}{v_0 k^2}, \frac{m}{k}, \epsilon \right) \right], \quad (19)$$

где $g_0 = D_0/v_0^3$ с D_0 из (9), полюса по ϵ содержатся в коэффициентах A_n . Из (19) видно, что для определения асимптотики $k \rightarrow 0$ при фиксированном заряде g_0 и коэффициентах A_n необходимо суммировать весь ряд — в этом и состоит "первая ИК-проблема", которая будет решаться методом РГ. На уровне канонических размерностей — это проблема определения асимптотики $\lambda \rightarrow 0$ для выражения (19) с заменой $k \rightarrow \lambda k$, $\omega \rightarrow \lambda^2 \omega$, $m \rightarrow \lambda m$ при фиксированных несущественных переменных g_0, v_0 . При более точной формулировке первой ИК-проблемы, как следует из РГ-анализа (подробно в разделе 2.6), канонические значения показателей степеней λ для всех ИК-существенных переменных F следует заменить их критическими размерностями Δ_F , причем все они также подлежат определению (кроме $\Delta_k = 1$ — это просто условие нормировки размерностей).

Следует подчеркнуть, что сформулированная выше ИК-проблема нетривиальна при любом $\epsilon > 0$, в том числе и для области $0 < \epsilon < 2$, когда накачка (9) является ультрафиолетовой. В этой области из (3) имеем $W \simeq D_0 \Lambda^{4-2\epsilon}$ с точностью до несущественного безразмерного коэффициента порядка единицы, что вместе с определениями $\Lambda = (W/v_0^3)^{1/4}$ и $g_0 = D_0/v_0^3$ дает $g_0 \simeq \Lambda^{2\epsilon}$. Аналогично для области ИК-накачки $\epsilon > 2$ из (3) имеем $W \simeq D_0 m^{4-2\epsilon}$, откуда следует $g_0 \simeq (\Lambda/m)^4 m^{2\epsilon}$. В обоих случаях безразмерный параметр разложения $g_0/k^{2\epsilon}$ в искомой ИК-асимптотике не мал ($(\Lambda/k)^{2\epsilon}$ в первом случае и $\Lambda^4/(k^{2\epsilon} m^{4-2\epsilon})$ во втором), следовательно, ряд (19) нужно суммировать. Это и есть первая ИК-проблема. Поэтому нельзя отождествлять характер накачки и соответствующих сингулярностей: даже для накачки УФ-типа с $0 < \epsilon < 2$ в (9) ряд теории возмущений содержит ИК-сингулярности, которые и будут суммироваться методом РГ.

Из приведенных оценок видно, что эти сингулярности ослабевают с уменьшением параметра $\epsilon > 0$ и исчезли бы совсем при $\epsilon = 0$, если бы мы могли перейти в (19) к этому пределу. Но это невозможно из-за присутствия в (19) УФ-расходимостей — полюсов по ϵ . Устранение этих полюсов — классическая "УФ-проблема", общее решение которой дается теорией УФ-ренормировки. В рамках последней получают и уравнения РГ, выражающие простую идею неоднозначности ренормировки (подробно в разделе 2.4). Это поясняет, почему метод РГ, генетически связанный с проблемой УФ-расходимостей, оказывается полезным инструментом для решения на первый взгляд совершенно другой проблемы ИК-сингулярностей.

Решение первой ИК-проблемы приведет к обоснованию гипотезы 2 Колмогорова. Гипотеза 1 связана со второй ИК-проблемой — возможным наличием сингулярностей при $m/k \rightarrow 0$ коэффициентов A_n в (19). В нашей модели (9) с конечным значением ϵ такие сингулярности действительно существуют, так что проблема нетри-

виальна. Как уже говорилось (раздел 2.1), вторая ИК-проблема в отличие от первой не решается автоматически пересуммированием рядов теории возмущений с помощью обычной техники РГ. В моделях критического поведения аналогичные проблемы также существуют и решаются с помощью операторного разложения Вильсона [6, 10]. Эти вопросы будут подробно обсуждаться в разделе 3.4, а здесь лишь отметим, что вторую ИК-проблему всегда обсуждают уже в рамках общего решения первой: сначала выделяется только ведущий член ИК-асимптотики $\lambda \rightarrow 0$ (см. выше) при любом фиксированном отношении m/k , и уже потом обсуждается асимптотика $m/k \rightarrow 0$ этого выражения.

2.4. УФ-ренормировка. Уравнения РГ

Приведем необходимые для дальнейшего краткие сведения о квантово-полевой теории ренормировки и аппарате РГ (подробное изложение можно найти в монографиях [5, 6]).

Мы будем говорить о моделях, в которых диаграммы вычисляются без УФ-обрезания Λ (эта величина может входить лишь через параметры типа g_0), а УФ-расходимости проявляются в форме полюсов по некоторому безразмерному параметру отклонения от логарифмичности ϵ . Сюда относятся наши модели типа (16), а также различные конкретные модели теории критического поведения с размерной регуляризацией [8–10].

Устраняющая УФ-расходимости (в данном случае — полюса по ϵ) процедура мультипликативной ренормировки состоит в следующем: исходное действие $S(\Phi)$ объявляется неренормированным, его параметры e_0 (буквой e обозначен весь набор параметров) — затравочными, они считаются некоторыми (подлежащими определению) функциями новых ренормированных параметров e , а новым ренормированным действием считается функционал $S_R(\Phi) = S(Z_\Phi \Phi)$ с некоторыми (также подлежащими определению) константами ренормировки полей Z_Φ (по одной на каждую независимую компоненту поля Φ). В неренормированных полных функциях Грина $G_n = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ функциональное усреднение $\langle \dots \rangle$ проводится с весом $\exp S(\Phi)$, в ренормированных функциях G_n^R — с весом $\exp S_R(\Phi)$, из связи между функционалами S и S_R вытекает связь $G_n^R = Z_\Phi^{-n} G_n$ между соответствующими функциями Грина, при этом по определению $G_n = G_n(e_0, \epsilon, \dots)$ (многоточие — прочие аргументы типа координат или импульсов), а величины G_n^R и Z_Φ , по соглашению, выражаются через параметры e . Соответствие $e_0 \Leftrightarrow e$ в рамках теории возмущений является взаимно однозначным, поэтому независимыми переменными можно считать любой из наборов e_0 или e .

Для дальнейшего удобнее работать не с полными функциями Грина $G_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle$, а с их связными $W_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{\text{сн}}$ или 1-неприводимыми $\Gamma_n \equiv \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-н}}$ частями. Связь между соответствующими производящими функционалами выражается соотношением (12) и первым равенством (14), из которых по известному (см. выше) правилу ренормировки G_n находятся аналогичные формулы ренормировки для W_n и Γ_n , в подробной записи

$$\begin{aligned} W_n^R(e, \epsilon, \dots) &= Z_\Phi^{-n}(e, \epsilon) W_n(e_0(e, \epsilon), \epsilon, \dots), \\ \Gamma_n^R(e, \epsilon, \dots) &= Z_\Phi^n(e, \epsilon) \Gamma_n(e_0(e, \epsilon), \epsilon, \dots). \end{aligned} \quad (20)$$

Входящие сюда функции $e_0(e, \epsilon)$, $Z_\Phi(e, \epsilon)$ можно выбирать произвольно, что соответствует произволу выбора

нормировки поля и параметров e при заданных e_0 . Основное утверждение теории ренормировки состоит в том, что для так называемых мультипликативно-ренормируемых моделей эти функции можно выбрать так, чтобы обеспечить УФ-конечность (в данном случае конечность предела $\epsilon \rightarrow 0$) функций $W_n^R(e, \epsilon, \dots)$ при фиксированных параметрах e . При таком выборе все УФ-расходимости (полюса по ϵ) оказываются сосредоточенными в функциях $e_0(e, \epsilon)$ и $Z_\phi(e, \epsilon)$ и отсутствуют в ренормированных функциях Грина $W_n^R(e, \epsilon, \dots)$. Отметим, что из УФ-конечности какой-нибудь одной системы функций Грина (полных, связанных или 1-неприводимых) автоматически следует УФ-конечность и любой другой, в дальнейшем для определенности будем говорить о связанных функциях W_n .

Уравнения РГ пишутся для ренормированных функций W_n^R , которые отличаются от исходных неренормированных W_n только нормировкой и поэтому с равным правом могут использоваться для анализа критического скейлинга. Приведем элементарный вывод уравнений РГ [15]. Требование устранения расходимостей не определяет функции $e_0(e, \epsilon)$, $Z_\phi(e, \epsilon)$ однозначно, в них остается произвол, допускающий введение в эти функции (а через них и в W_n^R) дополнительного размерного параметра — ренормировочной массы μ :

$$W_n^R(e, \mu, \epsilon, \dots) = Z_\phi^{-n}(e, \mu, \epsilon) W_n(e_0(e, \mu, \epsilon), \epsilon, \dots). \quad (21)$$

Изменение μ при фиксированных e_0 ведет к изменению e , Z_ϕ и W_n^R при неизменных $W_n(e_0, \epsilon, \dots)$. Обозначим $\tilde{D}_\mu$ дифференциальную операцию $\mu \partial_\mu$ при фиксированных e_0 и подействуем ею на обе части равенства $Z_\phi^n W_n^R = W_n$. Это и даст основное дифференциальное уравнение РГ:

$$[\mathcal{D}_{\text{РГ}} + n\gamma_\phi] W_n^R(e, \mu, \epsilon, \dots) = 0, \quad \gamma_\phi \equiv \tilde{D}_\mu \log Z_\phi, \quad (22)$$

где $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ — оператор $\tilde{D}_\mu = \mu \partial_\mu|_{e_0}$, выраженный в переменных e, μ :

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} = \tilde{D}_\mu = \mu \partial_\mu + \sum_e (\tilde{D}_\mu e) \partial_e, \quad (23)$$

с суммированием по всем ренормированным параметрам e . Коэффициенты дифференциального оператора (23) и γ_ϕ из (22) называются РГ-функциями и вычисляются через различные константы ренормировки Z . Все РГ-функции УФ-конечны, т.е. не имеют полюсов по ϵ , это — следствие УФ-конечности функций W_n^R в (22). Отметим, что из формул ренормировки W_n^R в (20) получится аналогичное (22) уравнение с заменой $\gamma_\phi \rightarrow -\gamma_\phi$.

В общей теории ренормировки [6] различают неренормированное (S), ренормированное (S_R) и базовое (S_B) действие, последнее получается из S заменой всех затравочных параметров их ренормированными аналогами. УФ-расходимости устраняются добавкой к базовому действию S_B всех необходимых контрчленов ΔS , которые находятся по известным правилам (см. ниже). Если получаемое таким путем ренормированное действие $S_R(\Phi) = S_B(\Phi) + \Delta S(\Phi)$ можно воспроизвести изложенной выше процедурой переопределения полей и параметров в исходном неренормированном действии $S(\Phi)$, модель является мультипликативно-ренормируемой. Поэтому первый шаг при РГ-анализе любой модели состоит в определении явного вида всех необходимых для устранения УФ-расходимостей контрчленов и проверки мультипликативной ренормируемости теории.

Вид необходимых контрчленов определяется по каноническим размерностям 1-неприводимых функций Грина базовой теории с действием S_B . Динамические модели типа (11), в отличие от статических, двухмасштабны, т.е. каждой величине F (полям и параметрам в функционале действия) можно сопоставить [19] две независимые канонические размерности — импульсную d_F^k и частотную d_F^ω , определив их из естественных условий нормировки $d_k^k = -d_x^k = 1$, $d_k^\omega = d_x^\omega = 0$, $d_\omega^k = d_t^k = 0$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$ и требования безразмерности (импульсной и частотной) каждого слагаемого функционала действия. По d_F^k и d_F^ω можно затем ввести суммарную (полную) каноническую размерность d_F . Определение этой величины в общем случае зависит от модели; для нашей модели (16) следует положить $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$, поскольку в действие (16) входит комбинация $\partial_t + \text{const} \times \Delta$, т.е. $\omega \propto k^2$ по суммарной размерности (отметим, что существуют модели критической динамики, в которых $\omega \propto k^4$ [23]).

Суммарная размерность d_F играет в теории ренормировки динамических моделей такую же роль, как обычная (импульсная) размерность в статических задачах. Канонические размерности произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-н}}$ для d -мерной задачи определяются соотношениями

$$d_\Gamma^k = d - \sum_\Phi d_\Phi^k, \quad d_\Gamma^\omega = 1 - \sum_\Phi d_\Phi^\omega, \\ d_\Gamma = d_\Gamma^k + 2d_\Gamma^\omega = d + 2 - \sum_\Phi d_\Phi \quad (24)$$

с суммированием по всем полям Φ , входящим в данную функцию Γ . Значение суммарной размерности d_Γ в логарифмической теории, т.е. при $\epsilon = 0$, есть формальный индекс УФ-расходимости $\delta \equiv d_\Gamma(\epsilon = 0)$ (мы формулируем сейчас общие правила, в нашей модели (16) размерности (24) от ϵ не зависят, см. раздел 2.5). Поверхностные УФ-расходимости, для устранения которых требуются контрчлены, могут присутствовать только в тех функциях Γ , для которых δ — целое неотрицательное число [5, 6].

При анализе расходимостей нужно также учитывать следующие дополнительные соображения:

1) для любой динамической модели типа (11) все 1-неприводимые функции Грина только основных полей φ (без φ') обращаются в нуль (см. раздел 2.2) и поэтому не порождают контрчлены;

2) если по каким-либо причинам из всех диаграмм данной функции Грина выделяется наружу в виде множителей некоторое число внешних импульсов или частот, реальный индекс расходимости δ' оказывается меньше $\delta = d_\Gamma(\epsilon = 0)$ на соответствующее число единиц (функция Γ порождает контрчлены, только если δ' — неотрицательное целое число);

3) иногда формально разрешенные по размерности расходимости отсутствуют в силу требований симметрии, например галилеевой инвариантности модели (16);

4) ввиду обязательной локальности всех контрчленов нелокальные вклады действия (если они есть) никогда не ренормируются, т.е. одинаковы в $S_B(\Phi)$ и в $S_R(\Phi)$.

Эти общие соображения и формулы (24) позволяют для любой конкретной динамической модели перечислить все поверхностно расходящиеся функции Γ и найти явный вид соответствующих контрчленов — добавок $\Delta S(\Phi)$ к базовому действию $S_B(\Phi)$.

2.5. РГ-анализ стохастической гидродинамики.

ИК-скейлинг

В этом разделе мы воспроизведем основные результаты РГ-анализа модели (16), выполненного впервые в [16], следуя работе [15].

Рассмотрим сначала упрощенную "безмассовую" модель со степенной накачкой (8). Соответствующие неренормированное и базовое действия имеют вид

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} g_0 v_0^3 \varphi' k^{4-d-2\epsilon} \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + v_0 \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi], \quad (25)$$

$$S_B(\Phi) = \frac{1}{2} g \mu^{2\epsilon} v^3 \varphi' k^{4-d-2\epsilon} \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + v \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi]. \quad (26)$$

Нелокальный вклад записан символически, нужные суммирования по индексам поперечных векторных полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$ и интегрирования по $x \equiv t, \mathbf{x}$ подразумеваются, μ в (26) — ренормировочная масса, $e_0 \equiv \{v_0, g_0\}$ — затравочные, а $e \equiv \{v, g\}$ — соответствующие ренормированные параметры.

Канонические размерности полей и параметров модели для случая произвольной размерности d пространства $\mathbf{x}$ приведены в таблице. По этим размерностям из (24) находим $\delta = d_\Gamma = d + 2 - n_\varphi - (d-1)n_{\varphi'}$, где n_φ и $n_{\varphi'}$ — числа соответствующих полей в Γ . Из (18) видно, что на каждую внешнюю линию φ' в диаграммах Γ обязательно выделяется множитель δ . Отсюда следует, что число производных в контрчлене не меньше, чем $n_{\varphi'}$, и $\delta' = \delta - n_{\varphi'} = d + 2 - n_\varphi - d n_{\varphi'}$ по правилам раздела 2.4. По виду δ и δ' заключаем, что при $d > 2$ поверхностные расходимости есть лишь в 1-неприводимых функциях $\langle \varphi' \varphi \rangle$ ($\delta = 2, \delta' = 1$) и $\langle \varphi' \varphi \varphi \rangle$ ($\delta = 1, \delta' = 0$), а в соответствующих контрчленах обязательно есть символ ∂ . Поэтому первая функция порождает только контрчлен $\varphi' \Delta \varphi$ без добавки $\varphi' \partial_t \varphi$ той же размерности, а вторая порождает контрчлен с тремя полями $\varphi', \varphi, \varphi$ и одним ∂ , всегда сводящийся к $\varphi'(\varphi \partial) \varphi$ при учете поперечности всех полей. Но этот разрешенный по размерности контрчлен в действительности запрещен галилеевой инвариантностью [16], которая требует, чтобы операции ∂_t и $(\varphi \partial)$ входили в контрчлены лишь в виде ковариантной производной $\nabla_t = \partial_t + (\varphi \partial)$. Поэтому из отсутствия контрчлена $\varphi' \partial_t \varphi$ следует отсутствие $\varphi'(\varphi \partial) \varphi$. В особом случае $d = 2$ появляется новая поверхностная расходимость в функции $\langle \varphi' \varphi' \rangle_{1-\text{н}}$ ($\delta = 2, \delta' = 0$), порождающая контрчлен $\varphi' \Delta \varphi'$. Двумерная задача рассматривалась в работах [24, 25], но с ошибками, корректный анализ выполнен в [26]; мы же в дальнейшем будем рассматривать случай $d > 2$.

Для $d > 2$ нужен только один контрчлен $\varphi' \Delta \varphi$. Его добавка к (26) приводит к ренормированному действию

$$S_R(\Phi) = \frac{1}{2} g \mu^{2\epsilon} v^3 \varphi' k^{4-d-2\epsilon} \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + Z_v v \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi], \quad (27)$$

в котором Z_v — константа ренормировки. Она полностью безразмерна и поэтому может зависеть только от единственного полностью безразмерного ренормированного параметра g (зависимость от ϵ и d всегда подразумевается).

Явный вид Z_v зависит от выбора схемы вычитаний. Назначение контрчлена — сокращение полюсов по ϵ в

Таблица

Размерность	F						
	$\varphi(x)$	$\varphi'(x)$	A, m, μ	v, v_0	W	g_0	g
d_F^k	-1	$d+1$	1	-2	-2	2ϵ	0
d_F^ω	1	-1	0	1	3	0	0
d_F	1	$d-1$	1	0	4	2ϵ	0

диаграммах, поэтому коэффициент при контрчлене обязан содержать такие полюсы. Но его конечная часть может выбираться произвольно, ее фиксация и есть выбор схемы вычитаний. Наиболее удобна в практических расчетах схема минимальных вычитаний (MS) [6], в которой контрчлены содержат только полюсы по ϵ и никаких конечных вкладов. В некоторых работах по теории турбулентности, в частности в [27, 28], используется более традиционная схема, в которой конечный произвол ренормировки фиксируется заданием значения некоторых функций Γ_n^R в произвольно выбранной точке нормировки $k = \mu$, чем и вводится в данной схеме ренормировочная масса. Физические результаты от выбора конкретной схемы не зависят, поэтому выбор схемы — вопрос удобства, и мы всегда будем пользоваться принятой в большинстве современных работ схемой MS.

В этой схеме из расходящихся выражений при ренормировке вычитаются только полюсы по ϵ без изменения конечных вкладов, а константы ренормировки Z имеют следующий вид:

$$Z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g) \epsilon^{-k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \sum_{k=1}^n a_{nk} \epsilon^{-k}. \quad (28)$$

Коэффициенты a_{nk} в модели (16) могут зависеть только от размерности пространства d , отсутствие ϵ в вычетах $a_k(g)$ — специфика схемы MS.

Ренормированное действие (27) получается из неренормированного (25) следующей ренормировкой параметров:

$$v_0 = v Z_v, \quad g_0 = g \mu^{2\epsilon} Z_g, \quad Z_g = Z_v^{-3} \quad (29)$$

без ренормировки полей, т.е. $Z_\Phi = 1$. Модель мультипликативно ренормируема, и к ней приложима стандартная схема вывода РГ-уравнений типа (22), причем в данном случае $\gamma_\Phi = 0$ из-за отсутствия ренормировки полей. Таким образом, в модели (25) аномально мало расходимостей по сравнению с обычными моделями теории критического поведения типа φ^4 : есть лишь одна независимая константа ренормировки Z_v , а Z_g выражается через Z_v ввиду отсутствия ренормировки нелокального вклада коррелятора случайной силы в (27).

Все выводы сохраняются при замене степенной накачки (8) более реалистической моделью (7) или (9). При этом затравочный параметр m_0 не ренормируется ($m_0 = m$) и к соотношениям (29) добавляется тривиальное равенство

$$m_0 = m Z_m, \quad Z_m = 1. \quad (30)$$

Константы Z вычисляются непосредственно по диаграммам базовой теории. В общем случае по константе ренормировки Z_F любой величины F (поля или пара-

метра) определяется соответствующая РГ-функция $\gamma_F(g)$ — аномальная размерность данной величины F , а по любому заряду g (в общем случае зарядом следует считать любой полностью безразмерный параметр, от которого зависят константы Z) вводится соответствующая β -функция $\beta(g)$:

$$\beta \equiv \tilde{D}_\mu g, \quad \gamma_F \equiv \tilde{D}_\mu \log Z_F = \beta \partial_g \log Z_F, \quad (31)$$

где $\tilde{D}_\mu \equiv \mu \partial_\mu|_{e_0}$ (см. раздел 2.4). Из (29) имеем

$$\gamma_g = -3\gamma_v, \quad \beta = g(-2\epsilon - \gamma_g) = g(-2\epsilon + 3\gamma_v), \quad (32)$$

а РГ-оператор (23) с $e = \{g, v\}$ принимает вид

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} = \mathcal{D}_\mu + \beta(g)\partial_g - \gamma_v(g)\mathcal{D}_v, \quad \mathcal{D}_x \equiv x\partial_x, \quad (33)$$

где введено обозначение $\mathcal{D}_x \equiv x\partial_x$ для любого аргумента x ренормированных функций Грина.

Расчет Z_v для модели (27) в однопетлевом приближении дает [19]

$$Z_v = 1 - \frac{ag}{2\epsilon} + O(g^2), \quad a = \frac{C_d}{4(d+2)}, \quad (34)$$

где

$$C_d \equiv \frac{(d-1)S_d}{(2\pi)^d}, \quad S_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (35)$$

S_d в (35) — площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $a = 1/20\pi^2$ для $d = 3$.

Отсюда по формулам (32) находятся РГ-функции в однопетлевом приближении:

$$\gamma_v(g) = ag + O(g^2), \quad \beta_g = -2\epsilon g + 3ag^2 + O(g^3). \quad (36)$$

Положительность коэффициента a в (34) обеспечивает при малых $\epsilon > 0$ наличие в физической области $g > 0$ ИК-устойчивой (ИК-притягивающей) неподвижной (фиксированной) точки $g_* = 2\epsilon/3a + O(\epsilon^2)$ уравнения РГ ($\beta(g_*) = 0$, $\beta'(g_*) > 0$). Из условия $\beta(g_*) = 0$ и последнего равенства (32) значение $\gamma_v(g_*)$ находится точно без вычисления диаграмм: $\gamma_v(g_*) = 2\epsilon/3$ без поправок ϵ^2 , ϵ^3 и т.д. Явный расчет константы (34) по диаграммам нужен лишь для проверки положительности коэффициента a , т.е. для доказательства существования g_* в области $g > 0$.

Из решения уравнения РГ следует (см. раздел 2.6), что при наличии ИК-устойчивой неподвижной точки ведущие члены ИК-асимптотики функций Грина W_n^R любой однозарядной модели удовлетворяют РГ-уравнению (22) с заменой в нем $g \rightarrow g_*$. В нашей модели с учетом (33) и $\gamma_\phi = 0$ из (22) получаем

$$(\mathcal{D}_\mu - \gamma_v^* \mathcal{D}_v) W_n^R = 0, \quad \gamma_v^* \equiv \gamma_v(g_*) = \frac{2\epsilon}{3}. \quad (37)$$

Каноническая масштабная инвариантность выражается уравнениями

$$\left(\sum_F d_F^k \mathcal{D}_F - d_{W_n}^k \right) W_n^R = 0, \quad \left(\sum_F d_F^\omega \mathcal{D}_F - d_{W_n}^\omega \right) W_n^R = 0, \quad (38)$$

в которых F — набор всех аргументов W_n^R ; $n = \{n_\phi, n_{\phi'}\}$ и $d^{k,\omega}$ — канонические размерности величин F и W_n^R . Каждое из уравнений (37), (38) описывает скейлинг с растяжением тех переменных, производные по которым входят в дифференциальный оператор. Интересуясь скейлингом, в котором некоторые из переменных F фиксированы, нужно исключить соответствующие производные $\mathcal{D}_F$ путем комбинирования имеющихся уравнений. Для функций W_n^R модели типа (16) с $D_0 = g_0 v_0^3$ в координатном представлении имеем $F = \{t, x, \mu, v, g, m\}$, где t — набор всех времен, x — координат, и нас интересует скейлинг с растяжением t, x, m при фиксированных μ, v, g . Подставив в (37), (38) нужные размерности из таблицы, после исключения $\mathcal{D}_\mu$ и $\mathcal{D}_v$ получим искомое уравнение критического ИК-скейлинга

$$(-\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_m \mathcal{D}_m - \Delta_n) W_n^R = 0 \quad (39)$$

с коэффициентами

$$\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \gamma_v^*, \quad \Delta_n = d_{W_n}^k + \Delta_\omega d_{W_n}^\omega, \quad \Delta_m = d_m^k, \quad (40)$$

имеющими смысл соответствующих критических размерностей. Подстановка в (40) известных (см. (37) и таблицу) значений $\gamma_v^* = 2\epsilon/3$, $d_{W_n}^k = -n_\phi + (d+1)n_{\phi'}$, $d_{W_n}^\omega = n_\phi - n_{\phi'}$ (размерность связанной функции W_n^R равна сумме размерностей ее полей) приводит к следующим выражениям для критических размерностей:

$$\Delta_\phi = 1 - \frac{2\epsilon}{3}, \quad \Delta_{\phi'} = d - \Delta_\phi, \quad \Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \frac{2\epsilon}{3}, \quad \Delta_m = 1. \quad (41)$$

Они не имеют поправок ϵ^2 , ϵ^3 и т.д. и совпадают с колмогоровскими размерностями (6) при реальном значении $\epsilon = 2$.

В этом и состоит основной результат работы [16], воспроизведенный впоследствии многими авторами. Напомним, что точное РГ-уравнение (22) принимает вид (37) лишь для ИК-асимптотик функций Грина. Анализ точного уравнения и условий выхода в критический режим, а также расчет амплитудных множителей в скейлинговых законах обсуждаются в разделе 2.6.

2.6. Решение уравнений РГ.

Инвариантные переменные.

РГ-представления корреляционных функций

Рассмотрим решение уравнений РГ в модели (16) с накачкой типа (9) на примере парного коррелятора скорости $D = \langle \phi\phi \rangle$ при $d > 2$ [15]. Ввиду отсутствия ренормировки полей (раздел 2.5) их ренормированные функции Грина W_n^R совпадают с неренормированными W_n , различие состоит лишь в выборе переменных и формы теории возмущений (по g или по g_0). Из соображений размерности имеем (поперечный проектор везде опускаем)

$$D = vk^{-d} R(s, g, z, u), \quad s = \frac{k}{\mu}, \quad z = \frac{\omega}{vk^2}, \quad u = \frac{m}{k}, \quad (42)$$

где R — функция полностью безразмерных аргументов. Коррелятор $D = W_2^R$ удовлетворяет РГ-уравнению (22) с

$\gamma_\phi = 0$ и $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ из (33):

$$\mathcal{D}_{\text{РГ}} D = 0, \quad \mathcal{D}_{\text{РГ}} = \mathcal{D}_\mu + \beta(g) \partial_g - \gamma_v(g) \mathcal{D}_v. \quad (43)$$

Из (42) и (43) следует

$$D = \bar{v} k^{-d} R(1, \bar{g}, \bar{z}, \bar{u}), \quad \bar{z} = \frac{\omega}{\bar{v} k^2}, \quad \bar{u} = u = \frac{m}{k}, \quad (44)$$

где инвариантные переменные $\bar{g}$, $\bar{v}$, $\bar{u}$ — зависящие от масштабного параметра $s \equiv k/\mu$ первые интегралы уравнения (43), нормированные при $s = 1$ на g , v , u соответственно. Равенство $\bar{u} = u = m/k$ — следствие отсутствия $\mathcal{D}_m$ в операторе (43) из-за отсутствия ренормировки параметра m (см. (30)). Равенство (44) справедливо, поскольку обе его части удовлетворяют уравнению РГ и совпадают при $s = 1$ в силу условий нормировки для инвариантных переменных.

Аналогом (44) для статического (одновременного) коррелятора

$$D_{\text{st}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega D = v^2 k^{2-d} R(s, g, u) \quad (45)$$

является представление (учитываем $\bar{u} = u$)

$$D_{\text{st}} = \bar{v}^2 k^{2-d} R(1, \bar{g}, u). \quad (46)$$

Для оператора (43) инвариантный заряд $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$ неявно определяется соотношениями

$$\log s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad \bar{g}(1, g) = g, \quad (47)$$

а для инвариантной вязкости $\bar{v} = \bar{v}(s, v, g)$ имеем

$$\bar{v} = v \exp \left[\int_g^{\bar{g}} \gamma_v(x) \frac{dx}{\beta(x)} \right] = \left(\frac{g v^3}{\bar{g} s^{2\epsilon}} \right)^{1/3} = \left(\frac{g_0 v_0^3}{\bar{g} k^{2\epsilon}} \right)^{1/3}. \quad (48)$$

Второе равенство (48) следует из первого и связей (32) между РГ-функциями, а третье — из второго и формул ренормировки параметров (29). В однопетлевом приближении (36) получаемое из (47) выражение для $\bar{g}$ имеет вид

$$\bar{g}(s, g) = \frac{g g_*}{g_* s^{2\epsilon} + g(1 - s^{2\epsilon})}, \quad (49)$$

где $g_* = 2\epsilon/3a$ с константой a из (34) — координата неподвижной точки в данном приближении.

Выражения типа (44), (46) с указанием явного вида инвариантных переменных типа (47), (48) будем называть РГ-представлениями соответствующих функций Грина. Вычислив РГ-функции (31) и функции R в (42), (45) в некотором конечном порядке ренормированной теории возмущений по g и подставив их в РГ-представление, получим соответствующее приближение улучшенной теории возмущений, в котором частично просуммированы вклады старших порядков.

Формулы (47), (48) выражают инвариантные переменные $\bar{e} \equiv \{\bar{g}, \bar{v}\}$ через ренормированные параметры $e \equiv \{g, v\}$ и масштабную переменную $s = k/\mu$: $\bar{e} = \bar{e}(e, s)$, и обратно: $e = e(\bar{e}, s)$. Для дальнейшего удобно выразить $\bar{e}$ через импульс k и затравочные параметры $e_0 \equiv \{g_0, v_0\}$, имеющие в нашей модели непосредственный физический смысл. Это возможно, так как параметры e_0 ренорминвариантны ($\mathcal{D}_{\text{РГ}} e_0 = 0$ в силу определения операции $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$, см. раздел 2.4), т.е. являются некоторыми первыми

интегралами уравнения РГ и, как следствие, некоторыми функциями другого полного набора первых интегралов, в данном случае — переменных $\bar{e}$. С учетом характера зависимостей в формулах (29), (47), (48), соображений размерности (полностью безразмерными являются только g и $\bar{g}$) и условий нормировки получаем соотношения

$$g_0 k^{-2\epsilon} = \bar{g} Z_g(\bar{g}), \quad v_0 = \bar{v} Z_v(\bar{g}). \quad (50)$$

Входящие в них константы ренормировки Z в свою очередь можно выразить через более простые объекты — РГ-функции (32). Из формулы ренормировки заряда в (29) и определения β -функции в (31) вытекает соотношение $\partial_g \log Z_g = -1/g - 2\epsilon/\beta(g)$, интегрируя которое с учетом нормировки $Z_g(0) = 1$, получаем

$$Z_g(g) = \exp \left\{ - \int_0^g dx \left[\frac{2\epsilon}{\beta(x)} + \frac{1}{x} \right] \right\}. \quad (51)$$

Отметим, что для β -функции (32) добавка $1/x$ в (51) обеспечивает сходимость интеграла при $x = 0$. Кроме того, из приведенного выше выражения для $\partial_g \log Z_g$ вытекает равенство $\partial_g \log(g Z_g) = -2\epsilon/\beta(g) \geq 0$, доказывающее монотонное возрастание функции $g Z_g(g)$ в интервале $0 < g < g_*$, где β -функция отрицательна. При $g \rightarrow g_*$ функция $g Z_g(g)$ расходится.

На рисунке 2 сплошной линией показано поведение функции $\beta(g)$ (гарантированное при малых ϵ и предполагаемое при больших), а штриховой — функции $g Z_g(g)$; там же показано графическое решение уравнения ренормировки $g_0 \mu^{-2\epsilon} = g Z_g(g)$ (см. (29)) относительно g (аналогичное соотношение связывает величины $g_0 k^{-2\epsilon}$ и $\bar{g}$ согласно первому равенству (50)). Из него ясно, что:

1) значения g и $\bar{g}$ всегда остаются внутри интервала $[0, g_*]$ независимо от величины затравочного заряда, т.е. g и $\bar{g}$ — малые величины при малом $g_* \sim \epsilon$;

2) $\bar{g}(s, g) \rightarrow g_* \sim \epsilon$ при $s \equiv k/\mu \rightarrow 0$ и $\bar{g}(s, g) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, т.е. неподвижная точка $g_* \sim \epsilon$ является ИК-притягивающей (синонимы — ИК-устойчивой, ИК-стабильной), а тривиальная неподвижная точка $g_* = 0$ является УФ-притягивающей. Каждая из них управляет соответствующей асимптотикой функции Грина.

Конкретизируем общие формулы (50) в однопетлевом приближении (36). Из (51) находим $Z_g(g) = g_*/(g_* - g)$, откуда $g_0 \mu^{-2\epsilon} = g g_*/(g_* - g)$ согласно (29),

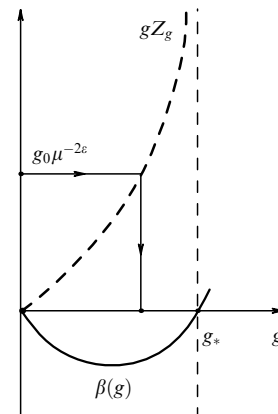


Рис. 2.

что позволяет получить для инвариантных переменных (47) и (48) выражения

$$\bar{g} = g_* \left(1 + \frac{g_*}{g_0 k^{-2\epsilon}} \right)^{-1}, \quad \bar{v} = v_0 \left(1 + \frac{g_0 k^{-2\epsilon}}{g_*} \right)^{1/3}, \quad (52)$$

не содержащие ренормировочной массы μ .

2.7. ИК-скейлинг при фиксированных g_0 и v_0

Рассмотрим интересующую нас ИК-асимптотику корреляторов (42) и (45). Она получается из общих РГ-представлений (44), (46) заменой всех инвариантных переменных $\bar{e}$ их асимптотическими выражениями, которые будем обозначать $\bar{e}_*$. Ключевую роль играет тот факт, что в данной асимптотике $\bar{g}_* = g_* = \text{const}$ — координата ИК-притягивающей неподвижной точки, в отличие от других величин типа $\bar{v}_*$, остающихся нетривиальными функциями своих аргументов. Таким образом, для ведущего члена ИК-асимптотики динамического коррелятора (44) получаем

$$D = \bar{v}_* k^{-d} f(\bar{z}_*, u), \quad \bar{z}_* \equiv \frac{\omega}{\bar{v}_* k^2}, \quad f(z, u) \equiv R(1, g_*, z, u), \quad (53)$$

а для статического коррелятора (46) аналогично

$$D_{\text{st}} = \bar{v}_*^2 k^{2-d} f(u), \quad f(u) \equiv R(1, g_*, u), \quad (54)$$

где $\bar{v}_*$ — ИК-асимптотика инвариантной переменной (48):

$$\bar{v}_* = \left(\frac{g_0 v_0^3}{g_* k^{2\epsilon}} \right)^{1/3} = \left(\frac{D_0}{g_*} \right)^{1/3} k^{-2\epsilon/3}. \quad (55)$$

Параметры g_0 и v_0 в $\bar{v}_*$ группируются в комбинацию $D_0 \equiv g_0 v_0^3$, входящую в коррелятор случайной силы (9).

Аналогичные (53), (54) асимптотические представления можно получить для любых функций Грина, они всегда удовлетворяют упрощенному РГ-уравнению (43) с заменой в нем $g \rightarrow g_*$.

При фиксированных g_0 и v_0 формулы (53)–(55) соответствуют ИК-скейлингу с критическими размерностями (41) независимо от явного вида содержащихся в (53), (54) скейлинговых функций f . При сопоставлении с (41) нужно учитывать, что в координатном представлении критическая размерность любой связной функции Грина равна сумме размерностей всех входящих в нее полей, а в импульсном для корреляторов имеем

$$\Delta[D(k, \omega)] = 2\Delta_\phi - \Delta_\omega - d, \quad \Delta[D_{\text{st}}(k)] = 2\Delta_\phi - d. \quad (56)$$

Скейлинговые функции f выражаются приведенными в (53), (54) формулами через соответствующие функции R в корреляторах (42), (45). Функции R можно вычислять непосредственно по диаграммам в форме рядов

$$R(g, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n R_n(\dots) \quad (57)$$

ренормированной теории возмущений, многоточием в (57) обозначены все отличные от g аргументы R . Сделав замену $g \rightarrow g_*$, разложив затем g_* и R_n по ϵ и сгруппировав вклады одного порядка, получим из (57) ϵ -разложение соответствующих скейлинговых функций:

$$f(z, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f_n(z, u), \quad f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f_n(u). \quad (58)$$

Важно, что для расчета любого конечного порядка по ϵ в (58) требуется лишь конечное число диаграмм, поскольку $g_* \sim \epsilon$, а коэффициенты R_n в (57) для ренормированных корреляторов не содержат полюсов по ϵ , которые могли бы компенсировать малость $g_* \sim \epsilon$. Отметим также, что в рассматриваемой модели все коэффициенты f_n в (58) оказываются конечными в пределе $u \equiv m/k \rightarrow 0$ в согласии с гипотезой 1' Колмогорова (хотя это не является ее доказательством при конечных ϵ , см. раздел 2.1).

В низшем (первом) порядке ренормированной теории возмущений для модели (9) имеем

$$D = \frac{g v^3 \mu^2 k^{4-d-2\epsilon} h(u)}{|\omega + v k^2|^2}, \quad D_{\text{st}} = \frac{g v^2 \mu^2 k^{2-d-2\epsilon} h(u)}{2}. \quad (59)$$

Первое из этих выражений получено подстановкой в соответствующий затравочный коррелятор (17) функции (9) с $D_0 = g_0 v_0^3$ и последующей заменой $v_0 \rightarrow v$, $g_0 \rightarrow g \mu^{2\epsilon}$, а второе — интегрированием первого по ω согласно (45). Из формул (59) легко находятся первые члены соответствующих рядов (57), (58).

В работах по теории турбулентности вместо статического коррелятора (45) часто рассматривают (одномерный) спектр пульсационной энергии $E_1(k)$, связанный с (45) соотношением

$$E_1(k) = \frac{C_d}{2} k^{d-1} D_{\text{st}}(k) \quad (60)$$

с C_d из (35). Его РГ-представление автоматически получается из (54). В низшем порядке из (59) находим

$$E_1(k) = \frac{1}{4} C_d \bar{g} \bar{v}^2 k h(u) \quad (61)$$

с $\bar{g}$, $\bar{v}$ из (52). В ИК-асимптотике $k^{2\epsilon}/g_0 \rightarrow 0$ получаем

$$E_1(k) = (C_d D_0)^{2/3} \left[\frac{\epsilon(d+2)}{24} \right]^{1/3} k^{1-4\epsilon/3} h(u). \quad (62)$$

При сужении на инерционный интервал $u \equiv m/k \ll 1$ функция $h(u)$ в этих формулах переходит в $h(0) = 1$ согласно (9).

Закончим этот раздел исторической справкой. Как уже говорилось, наличие скейлинга с размерностями (41) было установлено в работе [16]. Явные однопетлевые выражения для спектра (62) и инвариантной вязкости (52) в модели (8), т.е. с $h = 1$ в (62), были впервые получены в работе [29] для $d = 3$ с помощью специальной процедуры, близкой к РГ в форме рекурсивных соотношений Вильсона [30], но без обычных для этой техники масштабных преобразований параметров. Важную роль при этом играло отождествление величины $\bar{v}$ с эффективной вихревой вязкостью, феноменологически описывающей влияние мелкомасштабных компонент поля скорости на крупномасштабные [1]. Результат [29] впоследствии воспроизводился (для случая произвольных $d > 2$) и использовался во многих работах, в частности в [31–33, 27]. Так, в работе [27] он был получен более последовательным способом с помощью стандартной квантово-полевой техники РГ.

В работах [28, 34] предпринимались попытки выйти за рамки простейших приближений (52), (62). Так, в [34] был вычислен второй коэффициент R_2 с $u = 0$, $s = 1$ в представлении (57) для функции (42). Однако этого недостаточно для расчета соответствующего коэффициента в (58), так как для этого координату неподвижной точки g_* необходимо вычислить с учетом вклада ϵ^2 , чего пока не было сделано (для этого требуется вычислять двухпетлевые диаграммы, тогда как для расчета R_2 достаточно однопетлевых). В работе [28] вычислена поправка к выражению (62), связанная с однопетлевым учетом конечной (не содержащей полюсов по ϵ) ренормировки полей. Она нужна для используемой в работах [27, 28] ренормировочной схемы и соответствует в схеме MS (где ренормировка полей отсутствует) однопетлевой поправке R_2 в представлении (57) для функции (45). Но в этой работе также не вычислялись двухпетлевые поправки к РГ-функциям, дающие в РГ-представлениях вклады того же порядка, поэтому расчет [28] также не является полным.

Таким образом, в настоящее время конкретные формулы типа (62) известны лишь с однопетлевой точностью, что соответствует низшему порядку по ϵ в скейлинговых функциях (58). Расчет следующих порядков в (58) — сложная, но сугубо техническая проблема. Большого смысла в такой работе и нет, поскольку связанные с гипотезой 1 Колмогорова проблемы в рамках ϵ -разложения вообще не решаются (см. раздел 2.1), а с чисто количественной точки зрения учет поправок по ϵ при большом "реальном значении" $\epsilon_p \geq 2$ вряд ли приведет к практически более точным результатам. В действительности важно лишь то, что РГ-представления типа (44), (46) — точные формулы, гарантирующие наличие ИК-скейлинга с точными размерностями (41).

2.8. ИК-скейлинг при фиксированных W и v_0 : независимость от v_0 и "замораживание" критических показателей при $\epsilon > 2$

В этом разделе приводится доказательство [15] независимости функций Грина моделей типа (16), (9) от коэффициента вязкости v_0 во всей области ИК-накачки $\epsilon > 2$, а также "замораживания" критических размерностей (41) в этой области на колмогоровских значениях (6).

Полученные в разделе 2.5 выражения (41) для критических размерностей соответствовали ИК-скейлингу при фиксированных значениях g_0 и v_0 или g , v и μ в ренормированных терминах. Для моделей теории критического поведения задача так всегда и ставится, и формулы типа (41) являются окончательными ответами (хотя обычно там ряды по ϵ не обрываются). В данном случае это не совсем так, поскольку в теории Колмогорова – Обухова [1] речь идет о скейлинге при фиксированных v_0 и W . Мощность накачки W связана с параметром $D_0 = g_0 v_0^3 = g v^3 \mu^{2\epsilon}$ в (9) соотношением (3), и для получения окончательных ответов нужно выразить g_0 через W .

Взяв для определенности модель (7) и вычислив интеграл (3) с УФ-обрезанием $\Lambda = (W/v^3)^{1/4}$, получим

$$W = \frac{D_0 C_d}{4(2-\epsilon)} \left[(\Lambda^2 + m^2)^{2-\epsilon} + \frac{m^{4-2\epsilon}}{1-\epsilon} - \frac{(2-\epsilon)m^2(\Lambda^2 + m^2)^{1-\epsilon}}{1-\epsilon} \right] \quad (63)$$

с C_d из (35). Число Рейнольдса $Re \simeq (\Lambda/m)^{4/3}$ для развитой турбулентности очень велико, поэтому из (63) следует

$$D_0 \equiv g_0 v_0^3 = WB(\Lambda, m, \epsilon) \simeq \begin{cases} c_1 W \Lambda^{2\epsilon-4} & \text{при } 2 > \epsilon > 0, \\ c_2 W m^{2\epsilon-4} & \text{при } \epsilon > 2, \end{cases} \quad (64)$$

где $c_1 = 4(2-\epsilon)/C_d$, $c_2 = c_1(1-\epsilon)$. Определение точной функции $B(\Lambda, m, \epsilon)$ в (64) ясно из сопоставления с (63), в частности, $B(\Lambda, m, 2) = 2/[C_d \log(\Lambda/m)]$ при $\epsilon = 2$. Простые приближения (64) пригодны вне переходной области вблизи $\epsilon = 2$, ее ширина невелика (порядка $1/\log Re$), поэтому в дальнейшем будем считать приближения (64) верными всюду вплоть до $\epsilon = 2$. Отметим, что представление типа (64) справедливо для любой модели типа (9). От выбора конкретной модели зависят лишь несущественные для дальнейшего значения коэффициентов c_1 , c_2 и вид функции $B(\Lambda, m, \epsilon)$ в узкой переходной области вблизи $\epsilon = 2$.

Независимость ИК-асимптотик функций Грина от коэффициента вязкости v_0 в области $\epsilon > 2$ очевидна из (64) и того факта (впервые отмеченного в [29]), что параметры g_0 и v_0 входят в выражения типа (53) только через их комбинацию $g_0 v_0^3 \equiv D_0$ в представлении (55) для $\bar{v}_*$. В области $0 < \epsilon < 2$ так не будет, поскольку здесь останется зависимость от v_0 через Λ в (64).

Это утверждение доказывает при $\epsilon > 2$ гипотезу 2 Колмогорова (см. раздел 2.1), из которой автоматически вытекает ИК-скейлинг с колмогоровскими размерностями (6). Поясним механизм "замораживания" показателей (41) во всей области $\epsilon > 2$ на их колмогоровских значениях при $\epsilon = 2$.

Как уже говорилось, в теории Колмогорова – Обухова фиксированными (и в этом смысле критически безразмерными) считаются параметры v_0 и W , следовательно, и их функция $\Lambda = (W/v_0^3)^{1/4}$, тогда как m — размерный параметр с $\Delta_m = 1$. Из (64) видно, что при $0 < \epsilon < 2$ параметры D_0 и g_0 критически безразмерны, а при $\epsilon > 2$ они приобретают критическую размерность

$$\Delta[D_0] = \Delta[g_0] = 2\epsilon - 4, \quad \epsilon > 2. \quad (65)$$

Выражения (41) получаются из формул критического скейлинга (53), (55) в предположении безразмерности g_0 , поэтому они справедливы лишь в области $0 < \epsilon < 2$. При $\epsilon > 2$ учет (65) в формулах (53), (55) приводит к новым значениям размерностей $\Delta'_\phi = \Delta_\phi + \Delta[D_0]/3$, $\Delta'_\omega = \Delta_\omega + \Delta[D_0]/3$, $\Delta'_m = \Delta_m = 1$. Они не зависят от ϵ и совпадают с величинами (41) при $\epsilon = 2$, т.е. с колмогоровскими размерностями (6). В этом и состоит утверждение о замораживании размерностей в области $\epsilon \geq 2$ [15]. Оно согласуется с гипотезой 1 Колмогорова в том смысле, что размерности характеризуют поведение функций Грина и в инерционном интервале, где не должно быть зависимости от "деталей устройства накачки" (раздел 2.1), а выбор конкретного значения $\epsilon > 2$ в области ИК-накачки как раз и является одной из таких деталей.

Таким образом, стандартный РГ-анализ модели (16), (9) в переменных W , v_0 , m позволяет доказать независимость функций Грина от вязкости во всей области ИК-накачки $\epsilon > 2$, что доказывает в этой области гипотезу 2 Колмогорова. Основным нерешенным вопросом остается проблема зависимости скейлинговых функций от

аргумента m/k . Для обоснования гипотезы 1 необходимо доказать существование конечного предела при $m \rightarrow 0$ для статических корреляторов при всех $\epsilon > 2$. Как уже говорилось, эти вопросы выходят за рамки собственно метода РГ и будут обсуждаться в следующем разделе.

3. Составные операторы, операторное разложение, первая гипотеза Колмогорова

3.1. Ренормировка составных операторов.

Использование уравнений Швингера и галилеевой инвариантности

Составными операторами F называют любые локальные (если не оговорено противное) мономы или полиномы, построенные из полей и их производных в одной точке, например $\phi^2(x)$, $\phi'(x)\Delta\phi(x)$, $\phi_i(x)\partial_k\phi_j(x)$ и т.п. В нашей модели (16) в подробной записи $F = F(x; \Phi)$, $x = t, \mathbf{x}$, функциональный аргумент Φ будем обычно опускать. Из-за совпадения аргументов полей в функциях Грина, содержащих некоторый составной оператор $F(x)$, возникают дополнительные УФ-расходимости. Они устраняются специальной процедурой ренормировки составных операторов (подробнее ниже), для ренормированных функций Грина можно написать обычные уравнения РГ, предсказывающие ИК-скейлинг с определенными критическими размерностями $\Delta[F]$ некоторых базисных операторов F . Из-за ренормировки величина $\Delta[F]$ в общем случае не совпадает с простой суммой критических размерностей входящих в данный оператор полей и производных.

Исследование ренормировки составных операторов важно как само по себе, поскольку их размерности и корреляционные функции измеримы экспериментально и для некоторых операторов такие данные есть [35–38], так и в связи с проблемой обоснования гипотезы 1 Колмогорова (см. раздел 3.5). Общая теория ренормировки составных операторов излагается, например, в монографиях [6, 9, 10]. Ниже мы ограничимся лишь самыми необходимыми сведениями.

Составной оператор F называют УФ-конечным, если конечны (не имеют полюсов по ϵ) все функции Грина типа $\langle F(x)\Phi(y_1)\dots\Phi(y_n) \rangle$ с одним оператором F и любым числом $n \geq 0$ простых полей Φ , причем $\langle \dots \rangle$ понимается как усреднение с весом $\exp S_R(\Phi)$. Производящим функционалом связанных функций такого типа является величина

$$\langle F \rangle_A = \frac{\int \mathcal{D}\Phi F \exp[S_R(\Phi) + A\Phi]}{\int \mathcal{D}\Phi \exp[S_R(\Phi) + A\Phi]}, \quad (66)$$

поэтому УФ-конечность оператора F эквивалентна УФ-конечности определенного соотношением (66) функционала $\langle F \rangle_A$. Отметим, что простейшие операторы $F = 1$ и $F = \Phi(x)$ УФ-конечны и что из УФ-конечности F вытекает УФ-конечность всех операторов ∂F , $\partial\partial F$ с любым числом внешних производных по $x = t, \mathbf{x}$.

В общем случае составные операторы ренормируются со смешиванием, т.е. УФ-конечный ренормированный оператор представляет собой некоторую линейную комбинацию неренормированных, и наоборот. Полным базисом для составных операторов являются всевозможные неренормированные локальные мономы $F_\alpha(x)$ (α — нумерующий индекс), включая простейшие

$F = 1, \phi, \phi'$. Мономы классифицируются по величине размерности $d[F] \equiv d_F$ (размерность без уточнения всегда понимается как суммарная каноническая размерность), равной сумме размерностей всех составляющих F полей и производных (см. таблицу в разделе 2.5). По каждому моному F_α однозначно (для заданной схемы вычитаний) строится УФ-конечный ренормированный оператор $F_\alpha^R = F_\alpha +$ контрчлены. Последние — некоторая линейная комбинация самого F_α и (возможно) других подмешивающихся к F_α неренормированных мономов F_β с обязательным условием $d[F_\beta] \leq d[F_\alpha]$. Коэффициенты при всех операторных контрчленах в схеме MS содержат только полюсы по ϵ .

По величине d_F мономы группируются в конечные семейства. Если к семейству с данным d_F присоединить все "младшие" семейства меньшей размерности $d_F - 2, d_F - 4, \dots$, то получим замкнутую систему, все мономы которой могут смешиваться при ренормировке только между собой.

Матрица ренормировки Z_F и соответствующая матрица аномальных размерностей (РГ-функций) γ_F для данной замкнутой системы $F \equiv \{F_\alpha\}$ определяются соотношениями

$$F_\alpha = \sum_\beta (Z_F)_{\alpha\beta} F_\beta^R, \quad \gamma_F = Z_F^{-1} \tilde{\mu} Z_F. \quad (67)$$

Матрица Z_F в (67) является аналогом констант ренормировки полей Z_ϕ (раздел 2.4) и может вычисляться непосредственно по диаграммам с составными операторами в виде ряда по g , по ней в той же форме находится матрица аномальных размерностей $\gamma_F(g)$ из (67). Ее значение $\gamma_F^* \equiv \gamma_F(g_*)$ в неподвижной точке β -функции (32) определяет порождаемый ренормировкой операторов (67) вклад в полной матрице критических размерностей

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^* = d_F - \gamma_F^* d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad (68)$$

входящей в уравнение критического скейлинга для составных операторов:

$$(-D_x + \Delta_t D_t + D_m) F_\alpha^R(x) = \sum_\beta (\Delta_F)_{\alpha\beta} F_\beta^R(x). \quad (69)$$

Уравнение записано в обозначениях (39), d_F^k, d_F^ω, d_F в (68) — диагональные матрицы соответствующих размерностей (раздел 2.4) рассматриваемой системы операторов. Отметим, что диагональные элементы Δ_F без учета γ_F^* имеют смысл суммы критических размерностей составляющих данный оператор полей и производных, γ_F^* — добавка от ренормировки операторов. Если данный F не ренормируется (т.е. $F^R(x) = F(x)$), то его критическая размерность — простая сумма размерностей (41) всех полей и производных.

Определенными критическими размерностями обладают не сами F_α^R , а те их линейные комбинации (базисные операторы)

$$\bar{F}_\alpha^R = \sum_\beta (U_F)_{\alpha\beta} F_\beta^R, \quad (70)$$

которые диагонализуют при замене $F^R \rightarrow \bar{F}^R$ матрицу Δ_F в (69): $\Delta_F \rightarrow \bar{\Delta}_F = U_F \Delta_F U_F^{-1} = \text{diag}$. Это требование

определяет матрицу U_F в (70), диагональные элементы $\bar{\Delta}_F$ — искомые критические размерности базисных операторов (70). В "безмассовой" модели, когда нет примесей младших (с меньшими d_F) операторов, матрица U_F находится из условия $U_F \Delta_F U_F^{-1} = \text{diag}$, а критические размерности — собственные значения Δ_F . Но и в массивной модели типа (9) ввиду блочной треугольности всех матриц (см. выше) критические размерности старших (с максимальным d_F) операторов можно найти по собственным значениям блока "старшие–старшие" в Δ_F . Полный расчет матрицы Δ_F нужен лишь для определения примесей младших операторов в (70).

В дальнейшем будем всегда считать, что диагональные элементы U_F равны 1. При таком дополнительном условии матрица U_F в (70) определяется по Δ_F однозначно (в отсутствии случайного вырождения), поэтому однозначно определено соответствие между F_α и $\bar{F}_\alpha^R$ и понятие "ассоциированная с данным F_α критическая размерность":

$$\Delta_{as}[F_\alpha] \equiv \Delta[\bar{F}_\alpha^R]. \quad (71)$$

Если некоторый замкнутый относительно ренормировки набор составных операторов $\{F_\alpha\}$ разбивается на два поднабора $\{F_\beta\}$ и $\{F_\gamma\}$ таким образом, что любой оператор F_γ не примешивается при ренормировке к любому F_β , то матрица Z_F в (67) является блочно-треугольной, $(Z_F)_{\beta\gamma} = 0$, и таковы же матрицы Δ_F в (68) и U_F в (70). В этом случае ассоциированные с набором F_β размерности $\Delta_{as}[F_\beta]$ и соответствующие базисные операторы $\bar{F}_\beta^R$ полностью определяются блоком $(Z_F)_{\beta\beta'}$, тогда как блок $(Z_F)_{\gamma\gamma'}$ определяет размерности $\Delta_{as}[F_\gamma]$, но не базисные элементы $\bar{F}_\gamma^R$ (они содержат примесь операторов F_β^R , определяемую ненулевыми матричными элементами $(U_F)_{\gamma\beta}$).

Таким образом, набор $\{F_\beta\}$ оказывается также замкнутым относительно ренормировки. Примерами могут служить все младшие операторы некоторого замкнутого набора, все галилеево-инвариантные операторы (см. ниже), операторы вида δF и др.

В то же время в разложении полных наборов $\{F_\alpha\}$ или $\{F_\alpha^R\}$ по базису $\bar{F}_\alpha^R$ операторы вида $\bar{F}_\beta^R$ дают вклад в общем случае во все F_α , тогда как операторы $\bar{F}_\gamma^R$ входят только в разложения операторов F_γ . В частности, если оператор типа F_γ единственен, вклад ассоциированной с ним размерности $\Delta_{as}[F_\gamma]$ возникает лишь в разложении самого F_γ и отсутствует во всех остальных F_β . Примерами являются оператор вида φ^n в наборе всех операторов с $d_F \leq n$ (см. ниже), а в более общей формулировке — все исключительные операторы, обсуждаемые в разделе 3.3.

Информацию о ренормировке составных операторов можно иногда получить без вычисления диаграмм с помощью различных уравнений Швингера и тождеств Уорда для галилеевых преобразований.

Уравнениями Швингера в широком смысле слова называют любые соотношения типа

$$\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta X(\Phi)}{\delta \Phi(x)} = 0,$$

выражающие идею равенства нулю любого (функционального) интеграла от полной (вариационной) производной [12]. В частности, для модели (16) справедливы

соотношения

$$\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta \{\exp[S_R(\Phi) + A\Phi]\}}{\delta \varphi'_i(x)} = 0$$

и

$$\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta \{\varphi_i(x) \exp[S_R(\Phi) + A\Phi]\}}{\delta \varphi'_i(x)} = 0,$$

которые в обозначениях (12), (66) можно переписать в виде

$$\left\langle \frac{\delta S_R(\Phi)}{\delta \varphi'_i(x)} \right\rangle_A = -A_i^{\varphi'}(x), \quad (72)$$

$$\left\langle \frac{\varphi_i(x) \delta S_R(\Phi)}{\delta \varphi'_i(x)} \right\rangle_A = -\langle \varphi_i(x) A_i^{\varphi'}(x) \rangle_A = -A_i^{\varphi'}(x) \frac{\delta W_R(A)}{\delta A_i(x)}. \quad (73)$$

Правые части этих равенств УФ-конечны и имеют определенные критические размерности (функционал $W_R(A)$ безразмерен, критические размерности источников A выражаются через известные размерности полей требованием безразмерности слагаемых линейной формы (13)). Поэтому теми же свойствами обладают и операторы под знаком $\langle \dots \rangle$ в левых частях: это УФ-конечные операторы типа (70) с определенными и притом известными (по виду правых частей) критическими размерностями. Отсюда можно также получить информацию о матрицах ренормировки Z_F , содержащихся в данных операторах локальных мономов (см. пример в разделе 3.2).

Другой метод — использование тождеств Уорда для галилеевых преобразований $\Phi(x) \rightarrow \Phi_v(x)$ с произвольной переменной скоростью $v \equiv \{v_i(t)\}$, достаточно хорошо убывающей при $|t| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_v(x) &= \varphi(x_v) - v(t), & \varphi'_v(x) &= \varphi'(x_v), & x &\equiv (t, \mathbf{x}), \\ x_v &\equiv (t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)), & \mathbf{u}(t) &\equiv \int_{-\infty}^t dt' v(t'). \end{aligned} \quad (74)$$

Строгой галилеевой инвариантностью будем называть равенства типа $H(\Phi) = H(\Phi_v)$ для функционала и $F(x; \Phi_v) = F(x_v; \Phi)$ для составного оператора, если они выполняются для произвольного преобразования (74), а просто галилеевой инвариантностью — те же свойства, но выполняющиеся только для обычных преобразований с $v = \text{const}$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}t$. Например, функционал (27) инвариантен, но не строго, поскольку для него $S_R(\Phi_v) = S(\Phi) + \varphi' \partial_t v$. Строго инвариантны лишь операторы, построенные из инвариантных сомножителей φ' , $\partial \varphi$ и их ковариантных (∂ и ∇_t) производных, например $\partial \varphi \partial \varphi$, $\varphi' \nabla_t \partial \varphi$. Сомножитель $\nabla_t \varphi$ инвариантен, но не строго, а сомножители φ и ∂_t неинвариантны.

Тождествами Уорда в широком смысле слова можно считать любые точные соотношения, получаемые с помощью групповой замены переменных (в нашем случае (74)) в функциональном интеграле. Впервые тождества Уорда для преобразований (74) были использованы в работе [16] для доказательства отсутствия ренормировки вершины в модели (16). Близкие тождества для зависящих от времени калибровочных преобразований в критической динамике были получены ранее в работе [39]. Тождества Уорда, включающие составные

операторы, рассматривались в [40]. Ниже мы приводим наиболее общую и наглядную формулировку следствий галилеевой инвариантности, полученную в [41].

В общем случае в компактных обозначениях $F(x; \Phi) \equiv F(x)$, $F(x; \Phi_v) \equiv F_v(x)$ имеем

$$F_v(x) = F(x_v) + \sum_{k \geq 1} v^k F_k(x_v) + \dots, \quad (75)$$

где многоточием обозначены возможные вклады с производными v по t . Нарушающая галилееву инвариантность добавка — некоторый полином по скорости $v(t)$ и ее производным, коэффициенты типа F_k — локальные операторы младшей размерности, у них подразумеваются векторные индексы, сворачивающиеся с индексами v . Для любого конкретного оператора F нетрудно написать полное выражение (75), в нем всегда конечное число вкладов.

В работе [41] с помощью тождеств Уорда показано, что операция ренормировки $F(x) \rightarrow F^R(x)$ стандартной схемы MS перестановочна с преобразованием (75):

$$(F^R)_v(x) = (F_v)^R(x) = F^R(x_v) + \sum_{k \geq 1} v^k F_k^R(x_v) + \dots, \quad (76)$$

$$(\text{контрчлены } F(x))_v = \text{контрчлены } F_v(x). \quad (77)$$

Из соотношений (76), (77) вытекает ряд полезных следствий.

1. Для любого (строго) галилеево-инвариантного оператора F соответствующий оператор F^R и сумма контрчленов также (строго) инвариантны. Таким образом, ассоциированные с галилеево-инвариантными операторами критические размерности и базисные элементы полностью определяются смешиванием инвариантных операторов только между собой.

2. Оператор типа φ^n (индексы свободные или с любыми свертками) не может примешиваться при ренормировке ни к самому себе, ни к какому другому оператору той же размерности $d_F = n$. Действительно, если в контрчленах F есть φ^n , то в левой части равенства (77) обязательно будет вклад вида v^n . Но в правой части его не может быть: при $d_F = n$ оператор F содержит не более чем n полей φ , и если их меньше n , то в F_v нет v^n , а если $F = \varphi^n$, то вклад v^n в F_v присутствует, но исчезает при отборе контрчленов ввиду отсутствия в нем УФ-расходимостей. Полученное противоречие доказывает утверждение. Из него следует, что ассоциированная с оператором типа φ^n критическая размерность (71) не имеет поправок от γ_F^* , т.е. сводится к сумме критических размерностей сомножителей:

$$\Delta_{\text{as}}[\varphi^n] = n\Delta_\varphi = n\left(1 - \frac{2\epsilon}{3}\right). \quad (78)$$

Некоторые обобщения этого равенства обсуждаются в разделе 3.3.

В общем случае подстановкой (67) в (76) можно получать связи между матрицами Z_F исходной системы F и аналогичными матрицами для операторов F_k в (75)–(77) с меньшими размерностями d_F .

3.2. Составные операторы в законах сохранения энергии и импульса

Равенство $\langle F_1 \rangle_A = \langle F_2 \rangle_A$ функционалов (66) эквивалентно равенству $F_1 = F_2$ соответствующих операторов (случайных величин). Поэтому соотношения (72), (73) для

модели типа (16) можно переписать в форме равенств для составных операторов [40]:

$$\partial_t \varphi_i + \partial_s \Pi_{is} = D_{is}^F \varphi'_s + A_i^{\varphi'}, \quad (79)$$

$$\partial_t E + \partial_s S_i = \dot{E}_{\text{dis}} + \varphi_i D_{is}^F \varphi'_s + \varphi_i A_i^{\varphi'}. \quad (80)$$

Они выражают законы сохранения импульса и энергии (все величины в расчете на единицу массы): φ_i — плотность импульса, $E \equiv \varphi^2/2$ — плотность энергии, Π_{is} — тензор напряжений, S_i — вектор плотности потока энергии, $\dot{E}_{\text{dis}}$ — скорость диссипации энергии, правые части содержат вклад неслучайной внешней силы $A_i^{\varphi'}$ (см. раздел 2.2) и вклад случайной силы с ее коррелятором (2). Явные выражения для этих величин следующие:

$$\Pi_{is} = p\delta_{is} + \varphi_i \varphi_s - v_0(\partial_i \varphi_s + \partial_s \varphi_i), \quad (81)$$

$$S_i = p\varphi_i - v_0\varphi_s(\partial_i \varphi_s + \partial_s \varphi_i) + \frac{\varphi^2 \varphi_i}{2}, \quad (82)$$

$$\dot{E}_{\text{dis}} = -\frac{v_0(\partial_i \varphi_s + \partial_s \varphi_i)^2}{2}, \quad (83)$$

где $v_0 = vZ_v$, а p — нелокальный составной оператор:

$$p = -\frac{\partial_i \partial_s}{\Delta}(\varphi_i \varphi_s), \quad (84)$$

имеющий смысл давления. Вклады с p в (79), (80) возникают потому, что ввиду поперечности φ' результат формального дифференцирования $S_R(\Phi)$ по $\varphi'(x)$ в (72), (73) нужно свернуть с поперечным проектором $P_{ij}^\perp = \delta_{ij} - \partial_i \partial_j / \Delta$.

Подчеркнем, что уравнения (79), (80) не содержат символа усреднения $\langle \dots \rangle$, это равенства самих операторов (случайных величин), а не только их средних значений. Выражение (3) для мощности накачки W получается при усреднении соответствующего вклада в (80):

$$W = \langle \varphi D^F \varphi' \rangle \equiv \int dx' D_{is}^F(x, x') \langle \varphi_i(x) \varphi'_s(x') \rangle. \quad (85)$$

Учитывая δ -образность по времени коррелятора (2) и его симметричность по t, t' , функцию отклика $\langle \varphi \varphi' \rangle$ в (85) необходимо доопределить при $t = t'$ полусуммой пределов

$$\langle \varphi_i(x) \varphi'_s(x') \rangle = \begin{cases} P_{is}^\perp \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & \text{при } t = t' + 0, \\ 0 & \text{при } t = t' - 0, \end{cases} \quad (86)$$

что и приведет при подстановке в (85) к выражению (3).

Корреляционные функции составных операторов, в принципе, измеримы экспериментально, причем реальными наблюдаемыми являются конструкции типа (81)–(83), построенные из неренормированных мономов и затравочных параметров. В частности, есть данные о статическом парном корреляторе оператора диссипации (83) в инерционном интервале, свидетельствующие о наличии скейлинга с критической размерностью $\Delta[\dot{E}_{\text{dis}}] = 0,2$ [35–38]. Она весьма сильно отличается от его канонической размерности $d[\dot{E}_{\text{dis}}] = 4$, что должно быть результатом порождаемой ренормировкой аномалии типа вкладов порядка ϵ в (41) от аномальной размерности γ_v^* .

Первый вопрос, который встает при теоретическом исследовании оператора типа (81)–(83), состоит в том,

имеет ли вообще данный оператор F определенную критическую размерность $\Delta[F]$. Вопрос нетривиален, поскольку определенными размерностями обладают базисные операторы (70), а F в общем случае — линейная комбинация таких операторов с разными критическими размерностями, и (если это так) это должно, естественно, учитываться при обработке экспериментальных данных. Поэтому данный оператор F , за редким исключением, нельзя рассматривать отдельно: для разложения его по базису (70) последний необходимо сначала построить, а для этого нужно проанализировать ренормировку всей той замкнутой системы операторов, в которую входит исходный F .

Такой анализ для всех содержащихся в (79), (80) операторов был выполнен в работе [40] в схеме MS для безмассовой модели (25). Отметим, что отсутствие массы m устраняет примеси младших операторов к старшим, но не искажает критические размерности последних, поскольку ввиду блочной треугольности матрицы (68) (см. раздел 3.1) они однозначно определяются блоком "старшие — старшие".

Основной результат работы [40] состоит в том, что все операторы в (79), (80) УФ-конечны и имеют определенные критические размерности, равные

$$3 - \frac{4\epsilon}{3} = \Delta_\varphi + \Delta_\omega = \Delta[\partial_t \varphi_i] = \Delta[\partial_s \Pi_{is}] = \Delta[A_i^{\varphi'}] \quad (87)$$

для всех слагаемых (79) и

$$4 - 2\epsilon = 2\Delta_\varphi + \Delta_\omega = \Delta[\partial_t E] = \Delta[\partial_i S_i] = \Delta[\dot{E}_{\text{dis}}] \quad (88)$$

для всех слагаемых (80). При этом сами операторы $E = \varphi^2/2$ и Π_{is} УФ-конечны и имеют размерности

$$2 - \frac{4\epsilon}{3} = 2\Delta_\varphi = \Delta[E] = \Delta[\Pi_{is}], \quad (89)$$

а определенный соотношением (82) вектор плотности потока энергии S_i есть сумма УФ-конечного вклада с размерностью $3 - 2\epsilon$ и добавки $s\Delta\varphi_i$ с другой размерностью $2 + \Delta_\varphi = 3 - 2\epsilon/3$ и УФ-расходящимся коэффициентом s . Ввиду поперечности этой добавки она не дает вклада в уравнение (80) и может быть просто отброшена, что сводится к физически допустимому переопределению вектора S_i .

Поясним на этом примере технику работы с составными операторами. Начнем со скаляра $F(x) = \varphi^2(x) = 2E(x)$ с $d_F = 2$. В безмассовой модели нет других скаляров с $d_F = 2$, к себе он примешиваться не может (следствие 2 соотношений (76), (77)), поэтому оператор не ренормируется ($F^R = F$) и имеет определенную размерность $\Delta[F] = 2\Delta_\varphi$ согласно (78).

Рассмотрим уравнение (79). В нем заведомо УФ-конечны и поэтому не ренормируются все вклады, кроме $\partial_s \Pi_{is}$, следовательно, он также УФ-конечен в силу равенства (79) (напомним, что оно эквивалентно уравнению Швингера (72)). Ренормировка любого оператора типа ∂F осуществляется ренормировкой самого F (т.е. $(\partial F)^R = \partial(F^R)$), поэтому достаточно рассмотреть 3×3 -матрицу ренормировки (67) для трех содержащихся в (79) симметричных тензорных операторов с $d_F = 2$:

$$F_1 = \partial_i \varphi_k + \partial_k \varphi_i, \quad F_2 = \varphi_i \varphi_k, \quad F_3 = \delta_{ik} p. \quad (90)$$

Последний нелокален, но нужен, поскольку входит в (79). Общее правило локальности контрчленов (раздел 2.4) справедливо и для составных операторов: нелокальные операторы не могут быть контрчленами, поэтому не могут примешиваться при ренормировке ни к каким другим операторам, в том числе и к самим себе. (Но к нелокальным операторам при ренормировке могут примешиваться локальные.) По размерности и структуре в (90) допустим и оператор $\varphi^2 \delta_{ik}$, но он не ренормируется (см. выше) и к другим не примешивается (следствие 2 соотношений (76), (77)), поэтому полностью отщепляется.

В системе (90) кратный простому полю φ оператор F_1 не ренормируется (т.е. $F_1 = F_1^R$, или $Z_{11} = 1$, $Z_{12} = Z_{13} = 0$), для второго и третьего имеем: $F_2 = Z_{21}F_1^R + Z_{22}F_2^R$, $F_3 = Z_{31}F_1^R + Z_{32}F_2^R + F_3^R$ (нелокальный F_3 не примешивается). Константы Z связаны, поскольку из (84) и (90) имеем $F_3 = -P^{\parallel}F_2$ с точностью до δ_{ik} , что влечет $F_3^R = -P^{\parallel}F_2^R$, так как внешние множители типа проектора $P_{ij}^{\parallel} \equiv \partial_i \partial_j / \Delta$ не влияют на ренормировку. Отсюда с учетом поперечности φ получаем

$$\begin{aligned} F_3 &= Z_{31}F_1^R + Z_{32}F_2^R + F_3^R = -P^{\parallel}F_2 = \\ &= -P^{\parallel}[Z_{21}F_1^R + Z_{22}F_2^R] = -Z_{22}P^{\parallel}F_2^R = Z_{22}F_3^R. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при F_i^R , находим $Z_{31} = Z_{32} = 0$, $Z_{22} = 1$. Остаточный пока неизвестным элемент Z_{21} можно найти из требования УФ-конечности (см. выше) дивергенции

$$\partial \Pi = \partial[F_3 + F_2 - v Z_v F_1] = \partial[F_3^R + Z_{21}F_1^R + F_2^R - v Z_v F_1^R].$$

Три оператора ∂F^R независимы, поэтому коэффициент при каждом должен быть УФ-конечным, следовательно, он должен совпадать со своей УФ-конечной частью. Для коэффициента при ∂F_1^R отсюда получаем $Z_{21} - v Z_v = -v$, откуда находим $Z_{21} = v(Z_v - 1)$. Мы воспользовались тем, что в схеме MS константы типа Z_v и диагональные элементы любой матрицы Z_F имеют вид (28), так что их УФ-конечная часть есть единица, а все недиагональные элементы Z_F состоят только из полюсов по ϵ и поэтому конечной части не имеют.

Таким образом, для системы (90) матрицы Z_F и γ_F в (67) можно найти без вычисления диаграмм:

$$Z_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v(Z_v - 1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v\gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (91)$$

с РГ-функцией γ_v из (32). Затем по известным (см. таблицу в разделе 2.5) каноническим размерностям $d_F = 2, 2, 2$; $d_F^{\omega} = 1, 2, 2$ операторов (90) строится матрица критических размерностей (68) и диагонализующая ее матрица U_F из (70):

$$\Delta_F = \begin{pmatrix} 2 - \gamma_v^* & 0 & 0 \\ v\gamma_v^* & 2 - 2\gamma_v^* & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2\gamma_v^* \end{pmatrix}, \quad U_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (92)$$

где $\gamma_v^* = 2\epsilon/3$ согласно (70). Ввиду треугольности матрицы Δ_F искомыми критическими размерностями являются в данном случае ее диагональные элементы $\Delta[F] = 2 - \gamma_v^*$, $2 - 2\gamma_v^*$, $2 - 2\gamma_v^*$, и этими размерностями обладают соответствующие базисные операторы (70),

т.е. $\bar{F}_1^R = F_1^R$, $\bar{F}_2^R = F_2^R - vF_1^R$, $\bar{F}_3^R = F_3^R$ в нашем случае. Представленный первоначально через неренормированные операторы (90) тензор (81) можно выразить с помощью (67) через ренормированные операторы, а затем — через базисные (70)

$$\Pi = F_3 + F_2 - vZ_v F_1 = F_3^R + v(Z_v - 1)F_1^R + F_2^R - vZ_v F_1^R = \bar{F}_2^R + \bar{F}_3^R.$$

В ответ вошли два оператора $\bar{F}^R$ с одинаковой (см. выше) размерностью $\Delta[F] = 2 - 2\gamma_v^* = 2 - 4\epsilon/3$.

Мы привели подробный анализ ренормировки простой системы (90) в качестве образца, более сложные системы рассматриваются аналогично [40].

Для анализа вектора (82) необходимо исследовать замкнутую систему из шести векторных операторов с $d_F = 3$:

$$\partial_i \phi_i, \quad \Delta \phi_i, \quad \partial_i \phi^2, \quad \partial_s(\phi_i \phi_s), \quad \phi_i \phi^2, \quad \phi_i p, \quad (93)$$

аналогичная система для скаляров в (80) состоит из семи операторов с $d_F = 4$:

$$\partial_i \phi^2, \quad \Delta \phi^2, \quad \partial_i \partial_s(\phi_i \phi_s), \quad \partial_i(\phi_i \phi^2), \quad \phi \Delta \phi, \quad \phi^4, \quad \partial_i(\phi_i p). \quad (94)$$

По размерности сюда следовало бы добавить нелокальный оператор $\phi D^F \phi'$ из (80), а в частном случае $d = 3$ — еще и оператор $(\phi')^2$, имеющий при $d = 3$ ту же размерность $d_F = 4$. Но эти два оператора не ренормируются и не примешиваются к операторам системы (94), поэтому ее можно рассматривать отдельно [19]. В работе [40] показано, что с помощью уравнений Швингера и тождеств Уорда 6×6 -матрицу ренормировки системы (93) можно найти с точностью до двух, а 7×7 -матрицу (94) — до трех остающихся неизвестными недиагональных элементов, все прочие выражаются через Z_v . Остающиеся неизвестными элементы не влияют на критические размерности и несущественны с точки зрения анализа вкладов в уравнение (80). Искомые критические размерности Δ_F для системы (93) оказываются равными $3 - \gamma_v^*$, $3 - 2\gamma_v^*$ (трехкратное вырождение) и $3 - 3\gamma_v^*$ (двукратное вырождение), а для семейства (94) получается $4 - 2\gamma_v^*$ (двукратно), $4 - 3\gamma_v^*$ (четырекратно) и $4 - 4\gamma_v^*$, где $\gamma_v^* = 2\epsilon/3$ [40].

Оператор диссипации (83) является некоторой линейной комбинацией неренормированных мономов F_i системы (94) (нумерация в порядке следования в (94)) и после ренормировки сводится к одному из базисных операторов (70) для этой системы:

$$\dot{E}_{\text{dis}} = v_0 \left[F_5 - F_3 - \frac{F_2}{2} \right] = v \left[F_5^R - F_3^R - \frac{F_2^R}{2} \right] = v \bar{F}_5^R \quad (95)$$

с указанной в (88) размерностью $\Delta[\dot{E}_{\text{dis}}] = 4 - 2\epsilon$. При реальном $\epsilon = 2$ получается $\Delta[\dot{E}_{\text{dis}}] = 0$, что не вполне совпадает с предполагаемым экспериментальным значением 0,2 [35–38]. Но все-таки это не очень существенно по сравнению с основным результатом — превращением канонической размерности $d_F = 4$ в критическую $\Delta_F = 0$ за счет вкладов аномальных размерностей порядка ϵ .

3.3. Критические размерности старших операторов

При обсуждении вопросов, касающихся гипотезы 1 Колмогорова, определяющую роль будет играть инфор-

мация о критических размерностях галилеево-инвариантных операторов (70) с $\langle \bar{F}_\alpha^R \rangle \neq 0$ в массивной модели (см. раздел 3.4). Это условие исключает, в частности, все операторы типа ∂F , для которых $\langle \partial F \rangle = \partial \langle F \rangle = 0$ в силу трансляционной инвариантности. Таких данных немного, и в этом разделе мы приведем все известные нам сведения. В классе скаляров с $d_F = 4$ независимый моном такого типа только один, а именно, $F = \partial_i \phi_k \partial_i \phi_k$. Соответствующим базисным оператором (70) является оператор диссипации (83) с точно известной из (88) критической размерностью [19].

В классе скаляров нужного типа с $d_F = 6$ два независимых монома, а именно,

$$F_1 = \partial_i \phi_k \partial_i \phi_l \partial_k \phi_l, \quad F_2 = \partial^2 \phi_i \partial^2 \phi_i, \quad (96)$$

где $\partial^2 \equiv \Delta$ — оператор Лапласа. К ним на первый взгляд можно добавить еще один независимый моном $\partial_i \phi_k \partial_k \phi_l \partial_i \phi_l$, но в действительности он сводится к сумме трех несущественных слагаемых типа ∂F . При $d = 3$ к системе (96) можно добавить еще два оператора $F_3 = \partial_i \phi'_k \partial_i \phi'_k$ и $F_4 = \phi'_i \phi'_i \partial_k \phi_i$, но они несущественны, поскольку оба имеют нулевые средние $\langle F \rangle = 0$ из-за наличия в соответствующих диаграммах замкнутых циклов запаздывающих линий (раздел 2.2). Это свойство сохраняется и после ренормировки, так как операторы (96) с $\langle F \rangle \neq 0$ к ним не примешиваются по той же причине (циклы).

Расчет ассоциированных с двумя существенными операторами (96) критических размерностей был выполнен в работе [42]. При этом одна из двух размерностей с помощью уравнений Швингера была найдена точно и для произвольного d (от d она не зависит), а вторая — только для $d = 3$ и в однопетлевом приближении:

$$\Delta_1 = 6 - 2\epsilon, \quad \Delta_2 = 6 - \frac{8\epsilon}{7} + O(\epsilon^2). \quad (97)$$

Для несущественных операторов $F_{3,4}$ получено $\Delta_3 = 6 - 2\epsilon/9 + O(\epsilon^2)$, $\Delta_4 = 6 + 2\epsilon/3$ (точное).

В работе [43] были вычислены в однопетлевом приближении с произвольным d критические размерности всех существенных операторов типа $\partial \phi \partial \phi$ с канонической размерностью $d_F = 4$. Сюда входят обсуждавшийся ранее скаляр $\partial_i \phi_k \partial_i \phi_k$, затем два независимых неприводимых тензора F_{ik} второго ранга, а именно,

$$\text{Н.ч. } [\partial_i \phi_l \partial_k \phi_l], \quad \text{Н.ч. } [\partial_l \phi_i \partial_l \phi_k], \quad (98)$$

и три независимых неприводимых тензора F_{iklm} четвертого ранга

$$\begin{aligned} \text{Н.ч. } [\partial_i \phi_l \partial_k \phi_m \pm \partial_l \phi_i \partial_m \phi_k], \\ \text{Н.ч. } [\partial_i \phi_k \partial_l \phi_m + \partial_i \phi_k \partial_m \phi_l + \partial_k \phi_i \partial_l \phi_m + \partial_k \phi_i \partial_m \phi_l]. \end{aligned} \quad (99)$$

Знак Н.ч. обозначает здесь операцию отбора неприводимой части — вычитание подходящих выражений с δ -символами, обеспечивающее бесследовость получаемых выражений, т.е. равенство нулю свертки по любой паре значков, например,

$$\text{Н.ч. } [\partial_i \phi_l \partial_k \phi_l] = \partial_i \phi_l \partial_k \phi_l - \frac{\delta_{ik} \partial_m \phi_l \partial_m \phi_l}{d}.$$

Ассоциированные с тензорами (98) критические размерности в однопетлевом приближении с произвольным

d таковы:

$$\Delta_F = 4 - \frac{4\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3d(d-1)(d+4)} \times \left[4 + 8d - d^3 \pm \sqrt{16 - 16d^2 - 4d^3 + 5d^4} \right] + O(\epsilon^2) \quad (100)$$

(для $d = 2, 3, 4$ корень извлекается), а для операторов (99) получается

$$\Delta_F = \begin{cases} 4 - \frac{4\epsilon}{3} - \frac{8\epsilon(12 - 4d + d^3)}{3d(d-1)(d+4)(d+6)} + O(\epsilon^2), \\ 4 - \frac{4\epsilon}{3} + \frac{8\epsilon(d+2)}{3d(d-1)(d+4)} + O(\epsilon^2), \\ 4 - \frac{4\epsilon}{3} + \frac{4\epsilon}{3d} + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (101)$$

Если $d = 3$, то $\Delta_F = \{4 - 32\epsilon/21, 4 - 10\epsilon/9\}$ для (98) и $\Delta_F = \{4 - 32\epsilon/21, 4 - 64\epsilon/63, 4 - 8\epsilon/9\}$ для (99), при $\epsilon = 2$ все эти размерности строго положительны.

Переходя к операторам высших размерностей, прежде всего отметим утверждение (78) для произвольного по индексной структуре оператора типа φ^n . Впервые оно было приведено в работе [15]. Формальное доказательство, основанное на тождествах Уорда работы [40], дано в [44]. В рамках некоторого обобщения РГ Вильсона оно было получено также в [45] (см ниже).

Приведенное в разделе 3.1 доказательство утверждения (78) обобщается и на некоторые другие классы операторов. Например, для любого монома, построенного только из символов φ и ∂_i , условно $F = \partial_i^m \varphi^n$, с конкретным набором (свободных или со свертками) векторных индексов имеем [42]:

$$\Delta_{\text{as}}[\partial_i^m \varphi^n] = n\Delta_\varphi + m\Delta_\omega = n\left(1 - \frac{2\epsilon}{3}\right) + m\left(2 - \frac{2\epsilon}{3}\right). \quad (102)$$

В качестве элементов неренормированного базиса можно с равным правом выбрать вместо мономов $\partial_i^m \varphi^n$ полиномы, получаемые из них заменой всех операций ∂_i ковариантными производными ∇_i . Правило (102) остается верным и для таких операторов.

Сформулируем теперь общее правило. Будем называть данный элемент F (моном или полином) выбранного неренормированного базиса исключительным, если в его галилеевом преобразовании (75) есть исключительный УФ-конечный вклад, который не может порождаться никаким другим неренормированным базисным элементом с тем же d_F . Тогда исходный F не может быть контрчленом, т.е. не может примешиваться при ренормировке ни к самому себе, ни к каким другим элементам, и для ассоциированной с ним критической размерности (71) справедливо правило

$$\Delta_{\text{as}}[\text{исключительный } F] = \sum \Delta[\text{сомножителей } F]. \quad (103)$$

Равенства (78) и (102) являются частными случаями общего соотношения (103). Но у него есть и другие приложения, например оператор $F = \varphi'(\nabla_i \varphi)^n$, который также является исключительным. Во избежание недоразумений следует отметить, что понятие исключительности может зависеть от выбора неренормированного базиса, но полный набор критических размерностей изучаемой системы от выбора неренормированного базиса, естественно, не зависит.

Почти все известные результаты о критических размерностях составных операторов в модели (16) получены с помощью стандартной квантово-полевой теории ренормировки. Единственное исключение — работа [45], в которой предпринималась попытка обобщить технику РГ Вильсона на случай некоторых составных операторов. Для операторов φ^n в [45] получено соотношение (78), а для входящего в оператор диссипации (83) вклада $F \equiv v_0 \partial_i \varphi_k \partial_i \varphi_k$ приведен результат

$$\Delta[F^n] = n\Delta[F] = n(4 - 2\epsilon). \quad (104)$$

Однако в уравнениях движения для составных операторов, используемых в работе [45] (на квантово-полевым языке им соответствуют некоторые старшие уравнения Швингера), отсутствуют вклады случайной силы типа слагаемых с D_F в (79), (80), что приводит к потере части диаграмм (необходимость учета вклада случайной силы отмечается в последующей работе [46]). Кроме того, в этих работах вообще не обсуждается возможность смешивания операторов при ренормировке. Поэтому доказательство [45] трудно признать достоверным.

Скалярные галилеево-инвариантные операторы с $d_F = 8$, включающие оператор $\dot{E}_{\text{dis}}^2$ с $\dot{E}_{\text{dis}}$ из (83), изучались в [47]. Оказалось, что оператор $\dot{E}_{\text{dis}}^2$, в отличие от самого $\dot{E}_{\text{dis}}$, не является УФ-конечным (что обеспечило бы выполнение равенства (104) для $n = 2$) и даже мультипликативно-ренормируемым. С помощью уравнений Швингера в [47] были найдены точные критические размерности некоторых операторов с $d_F = 8$, но все они становятся отрицательными лишь при $\epsilon > 3$. В то же время имеются аргументы [48, 49] в пользу существования бесконечного числа операторов той же симметрии, становящихся опасными при $\epsilon > 2$ вместе с $\dot{E}_{\text{dis}}$, так что вопрос о справедливости соотношений (104) остается открытым.

Отметим также, что всюду в разделах 3.1–3.3 под критическими размерностями понимаются размерности типа (41), описывающие ИК-скейлинг при фиксированных g_0, v_0 (см. раздел 2.7). Переход к скейлингу при фиксированных W, v_0 в функциях Грина составных операторов осуществляется подобно функциям Грина простых полей (см. раздел 2.8). При этом стандартная формула (68) остается справедливой при $\epsilon < 2$, а при $\epsilon > 2$ заменяется выражением [49]

$$\Delta_F = d_F^k + \frac{2d_F^\omega}{3} + \frac{2\gamma_F^*}{\epsilon} = d_F - \frac{4d_F^\omega}{3} + \frac{2\gamma_F^*}{\epsilon}. \quad (105)$$

С помощью (105) можно, в частности, убедиться, что ассоциированные с φ^n размерности (78) и размерность $\Delta_F = 4 - 2\epsilon$ оператора диссипации (83) замораживаются во всей области $\epsilon > 2$ на их колмогоровских значениях при $\epsilon = 2$. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, так как в дальнейшем при анализе ИК-асимптотики скейлинговых функций (см. разделы 3.4, 3.5) определяющую роль будут играть именно размерности, отвечающие скейлингу при фиксированных g_0, v_0 .

3.4. Исследование асимптотики $m \rightarrow 0$ с помощью операторного разложения

РГ-представления (53), (54) описывают ИК-асимптотику $k \sim m \rightarrow 0$, $\omega \sim k^{\Delta_\omega} \rightarrow 0$ корреляционных функций модели (16), (9) при произвольном фиксированном значении $u \equiv m/k$. Инерционному интервалу отвечает дополни-

тельное условие $u \ll 1$. Из (55) и (54) следует, что первая гипотеза Колмогорова для одновременного парного коррелятора (см. раздел 2.1) эквивалентна требованию сокращения зависимости от m в комбинации $D_0^{2/3} f(u)$ при $u \rightarrow 0$, что при учете соотношений (64) дает [15]

$$f(u) = \begin{cases} \text{const} = f(0) & \text{при } 0 < \epsilon \leq 2, \\ \text{const} \times u^{4(2-\epsilon)/3} & \text{при } \epsilon \geq 2. \end{cases} \quad (106)$$

Скейлинговые функции в (53), (54) не определяются самими уравнениями РГ, стандартным методом их вычисления является ϵ -разложение (58). Из анализа диаграмм теории возмущений известно, что коэффициенты ϵ -разложений f_n в (58) имеют при $u \rightarrow 0$ лишь слабые особенности типа $u \log u$ и т.п., т.е. конечны при $u = 0$. Поэтому в рамках ϵ -разложения гипотезу 1 Колмогорова можно постулировать, что, однако, не доказывает ее при конечных ϵ , так как для любого сколь угодно малого значения ϵ существуют диаграммы, расходящиеся при $m \rightarrow 0$. Формальная постановка задачи состоит в необходимости суммирования ϵ -разложений (58) в предположении малости ϵ при дополнительном условии $\epsilon \log u \sim 1$.

Как и в теории критического поведения [6, 10], такая проблема решается с помощью известного операторного разложения Вильсона (сокращенно SDE — от Short Distance Expansion): согласно SDE для произведения $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ двух ренормированных операторов поля при $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2 = \text{const}$, $t \equiv (t_1 + t_2)/2 = \text{const}$, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rightarrow 0$, $\tau \equiv t_1 - t_2 \rightarrow 0$ справедливо представление [15]

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(\mathbf{r}, \tau) \bar{F}_{\alpha}^R(\mathbf{x}, t), \quad (107)$$

в котором C_{α} — регулярные по m^2 коэффициенты, $\bar{F}_{\alpha}^R$ — всевозможные совместимые с симметрией левой части ренормированные базисные операторы типа (70) с определенными критическими размерностями Δ_{α} . Ренормированный коррелятор $D = \langle \varphi \varphi \rangle$ получается усреднением выражения (107) с весом $\exp S_R$, при этом в правой части появляются величины $\langle \bar{F}_{\alpha}^R \rangle$. Их асимптотика при $m/\mu \rightarrow 0$ находится из соответствующих РГ-уравнений (см. раздел 3.1) и имеет вид

$$\langle \bar{F}_{\alpha}^R \rangle \propto m^{\Delta_{\alpha}/\Delta_m} \quad (108)$$

(в модели (16) $\Delta_m = 1$). Таким образом, из операторного разложения (107) вытекает следующее представление для скейлинговой функции коррелятора $D = \langle \varphi \varphi \rangle$:

$$f(u, \dots) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(u, \dots) u^{\Delta_{\alpha}} \quad (109)$$

с регулярными по u^2 коэффициентами A_{α} , многоточие в (109) обозначает возможные дополнительные аргументы $f(\epsilon$ в статической функции (54) и ϵ, z в динамической (53)). Отметим, что простая регулярность по $m \propto u$ функций C_{α}, A_{α} имеет место лишь для стандартной постановки асимптотической задачи с фиксированным g_0 (см. раздел 2.8), поэтому и размерности Δ_{α} в (109) даются соотношением (41) при любом $\epsilon > 0$.

Представление (109) решает сформулированную выше задачу суммирования ϵ -разложений скейлинговой функции при $\epsilon \log u \sim 1$. Главными при $u \rightarrow 0$ в (109) являются вклады с наименьшими значениями размер-

ностей Δ_{α} , в рамках ϵ -разложений — с наименьшими d_{α} при $\epsilon = 0$, т.е. с минимальным числом полей и производных. Операторы с $\Delta_{\alpha} < 0$, если таковые существуют, будем называть опасными [15], им соответствуют расходящиеся при $u \rightarrow 0$ вклады в (109).

Проблема опасных операторов действительно существует в модели (16) вне рамок ϵ -разложения. В частности, из (78) видно, что все ассоциированные с простыми степенями поля скорости операторы становятся опасными при $\epsilon \geq 3/2$, т.е. еще до достижения области реальной ИК-накачки $\epsilon \geq 2$. С ростом ϵ могут появляться и другие опасные операторы, в частности, при $\epsilon \geq 2$ становится опасным оператор диссипации (83), размерность которого также известна точно [19]: $\Delta_F = 4 - 2\epsilon$ (см. раздел 3.2). На основании результатов [19, 40] в работе [15] было сделано предположение, что в области $0 < \epsilon < 2$ опасными могут быть лишь ассоциированные с φ^n операторы. В области $3/2 < \epsilon < 2$ их вклады в (109) при $m \rightarrow 0$ расходятся, и их необходимо суммировать, что и было сделано в [15]. Предположение работы [15] в действительности неправильно, поскольку из (102) следует, что опасными при $\epsilon < 2$ могут становиться также ассоциированные с $\partial_i^p \varphi^n$ операторы (имеется в виду оператор с произвольным размещением p символов ∂_i на n множителях φ) при $p < n/2$: размерности (102) обращаются в нуль при $\epsilon = 3(2p + n)/2(p + n)$. Но, как показано в [42], техника суммирования [15] обобщается непосредственно и на такие операторы. Она изложена в следующем разделе.

3.5. Обоснование гипотезы 1 Колмогорова в интервале $0 < \epsilon < 2$ с помощью инфракрасной теории возмущений

Необходимое суммирование вкладов всех опасных операторов типа φ^n было выполнено в [15] с помощью одного из вариантов инфракрасной теории возмущений (ИКТВ), впервые предложенной в квантовой электродинамике [11] и широко используемой в теории турбулентности при исследовании ИК-сингулярностей в уравнениях самосогласования [50–54].

Использованная в [15] формулировка ИКТВ основана на разбиении полей в функциональном интеграле (102) на мягкие (длинноволновые) и жесткие (коротковолновые) компоненты с последующим пренебрежением пространственно-временной (или только пространственной в [42, 55]) неоднородностью мягкого поля. Для коррелятора в инерционном интервале суммирование вкладов всех опасных операторов типа φ^n в (107) приводит к выражению

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \langle (\varphi \partial)^n \rangle C_0(\mathbf{r}, \tau) + \dots \quad (110)$$

(мы излагаем результаты [15] в более поздней формулировке [56]). Здесь C_0 — коэффициент при $\bar{F}_{\alpha}^R = 1$ в (107), в форме $\varphi \partial$ индексы $\varphi \equiv \varphi_i(\mathbf{x}, t)$ свернуты с индексами градиента $\partial \equiv \partial/\partial r_i$, а многоточие — вклады всех прочих операторов. Поскольку в (110) собраны все неренормированные мономы типа φ^n , там (и только там) содержатся все ассоциированные с ними опасные операторы с размерностями (78) (см. замечание в тексте после формулы (71)). Выражение (110) можно переписать компактно в виде

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle = \langle \langle C_0(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau) \rangle \rangle + \dots, \quad (111)$$

где $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ обозначает усреднение по распределению не зависящей от $x \equiv t$, x случайной величины $\mathbf{v}$, заданному соотношениями

$$\langle\langle v^n \rangle\rangle = \langle\langle \varphi^n(x) \rangle\rangle = \text{const} \times m^{n\Delta_\varphi} + \dots, \quad (112)$$

со свободными векторными индексами. Моменты (112) отличны от нуля лишь для четных n , вклад вида $m^{n\Delta_\varphi}$ происходит от опасного оператора, многочлен — несущественные (менее сингулярные) добавки от возможных примесей в φ^n . Представление (111) и его аналог для функции отклика $\langle\langle \varphi \varphi' \rangle\rangle$ получены в [15] в пренебрежении самодействием жестких полей. Это соответствует низшему порядку теории возмущений по g_0 для выражений под знаком $\langle\langle \dots \rangle\rangle$, которые совпадают тогда с соответствующими безмассовыми затравочными функциями Грина (17). Обобщенная формулировка (111) с точной функцией C_0 из (107) получена в [44]. В работе [56] показано, что соотношения типа (110)–(112) можно получить и без использования ИКТВ с помощью только операторного разложения (SDE), причем для самого произведения $\varphi\varphi$, а не только для его среднего $\langle\langle \varphi\varphi \rangle\rangle$. Это позволяет избавиться от искусственного параметра ИКТВ — разделительного импульса k_* , разграничивающего области мягких ($k \leq k_*$) и жестких ($k > k_*$) импульсов. Отметим также, что техника SDE включает конструктивный рецепт вычисления всех коэффициентов Вильсона C_α в (107), в том числе входящего в (111) коэффициента C_0 . Существенное обобщение соотношений (110), (111) получено в работе [42], где были просуммированы вклады не только всех операторов типа φ^n , как в (110), но и всех других операторов типа $\partial_i^p \varphi^n$, которые также могут быть опасными при $\epsilon < 2$ (раздел 3.3). При этом в (111) вместо $\mathbf{v}\tau \equiv \mathbf{v}(t_1 - t_2)$ появляется интеграл по интервалу $[t_1, t_2]$ от некоторой зависящей от времени скорости $\mathbf{v}(t)$ с известным распределением. Важно, что при $t_1 = t_2$ этот интеграл исчезает, как и $\mathbf{v}\tau$ в (111), т.е. данные классы опасных операторов не дают вклада в статический коррелятор с $t_1 = t_2$. Но при $t_1 - t_2 \equiv \tau \neq 0$ сингулярная зависимость от m через распределение (112) в (111) остается, т.е. гипотеза 1 Колмогорова на динамический коррелятор не обобщается [15]. Отметим, что представления типа (111) хорошо известны в рамках техники уравнений самосогласования (см., например, [50–54]) и имеют простую физическую интерпретацию: они описывают кинематический эффект переноса турбулентных вихрей как целого крупномасштабным полем $\mathbf{v}$ [1]. Новым моментом в подходе [15] и последующих работ этого направления является совмещение представлений типа (111) с РГ-представлениями посредством соотношений (108), (109) и использование техники РГ и SDE для расчета критических размерностей Δ_α и коэффициентов A_α в (109).

Как уже говорилось, все опасные при $\epsilon > 3/2$ операторы типа φ^n , $\partial_i^p \varphi^n$ не дают вклада в статический коррелятор, но гипотеза 1 Колмогорова может нарушаться из-за появления с ростом ϵ других опасных операторов. В частности, при $\epsilon > 2$ становится опасным оператор диссипации (83) с точно известной размерностью $\Delta_F = 4 - 2\epsilon$, а также и все его степени, если правилен результат (104); при дальнейшем росте ϵ могут становиться опасными и другие операторы. Исследование этих проблем несколько упрощается при учете результатов работы [57] (см. также [42]), в которой показано, что

произведение двух полей с одинаковыми временами и свернутыми векторными индексами после некоторого вычитания (см. ниже) является строго галилеево-инвариантным объектом (в смысле раздела 3.1) и в его SDE могут входить лишь операторы с той же симметрией:

$$\left[\varphi_i(x_1) \varphi_i(x_2) - \frac{(\varphi^2)^R(x_1) + (\varphi^2)^R(x_2)}{2} \right] \Big|_{t_1=t_2} = \sum_{\text{invar}} C_\alpha(\mathbf{r}) \bar{F}_\alpha^R(x), \quad (113)$$

где суммирование идет по всем строго галилеево-инвариантным операторам и $(\varphi^2)^R(x) = \varphi^2(x) + \text{const}$ в массивной модели (в безмассовой φ^2 не ренормируется). Отметим, что в (113) могут входить любые инвариантные операторы, в том числе и тензорные, тогда их индексы сворачиваются с аналогичными индексами коэффициентов C_α . Без ограничения общности можно считать, что разложение производится по неприводимым тензорам (примеры см. в разделе 3.3), тогда в коррелятор $\langle\langle \varphi\varphi \rangle\rangle$ дадут вклад лишь скаляры, поскольку средние (108) для нескаларных неприводимых тензоров равны нулю. По той же причине в корреляторе исчезают вклады всех операторов вида ∂F с внешними производными ($\langle\langle \partial F \rangle\rangle = \partial \langle\langle F \rangle\rangle = 0$ в силу трансляционной инвариантности). Вычитательные члены в левой части (113) исчезают после усреднения и перехода к импульсному представлению при $k \neq 0$.

Таким образом, в SDE-представление (109) скейлинговой функции статического коррелятора дают вклад лишь строго галилеево-инвариантные скалярные операторы без внешних производных, построенные только из поля φ (раздел 3.4). Все они имеют целую четную размерность $d_F = 2n = 0, 2, 4, \dots$. Для малых d_F таких операторов сравнительно немного: $d_F = 0$ соответствует $F = 1$, нужных операторов с $d_F = 2$ не существует, для $d_F = 4$ есть лишь один (с точностью до эквивалентности относительно добавок типа ∂F) оператор диссипации (83) с размерностью $\Delta = 4 - 2\epsilon$, для $d_F = 6$ имеются два независимых оператора (96) с размерностями (97), вблизи $\epsilon = 2$ они не опасны. Классификации по d_F соответствует общепринятая в теории критического поведения (и единственно возможная в рамках ϵ -разложения) классификация вкладов по степеням $u^{2n+O(\epsilon)}$ в SDE-представлении (109). Из сказанного выше следует, что в нашем случае его первые члены имеют следующий вид:

$$f(u) = a_1 + a_2 u^2 + a_3 u^4 + a_4 u^{4-2\epsilon} + \dots \quad (114)$$

с точностью до вкладов порядка $u^{6+O(\epsilon)}$ и выше. По известным ϵ -разложениям функции $f(u)$ как целого и показателей Δ_α можно вычислять в форме ϵ -разложений коэффициенты a_i в (114), все они начинаются с ϵ или выше.

Представление (114) можно проверить непосредственно по диаграммам модели (16), разлагая их по степеням m^2 . Из (114) следует, что коэффициенты при 1 и m^2 должны быть конечными, но уже следующий член тейлоровского разложения по m^2 не существует из-за ИК-сингулярности типа $m^4 \log m$. Вычислив коэффициент при $m^4 \log m$ в однопетлевых диаграммах (см. рис. 1) для статического коррелятора, можно найти коэффициент a_4 в (114) в низшем (первом) порядке по ϵ . Такой

расчет для модели (9) с произвольным $d > 2$ дает [58]

$$a_1 = \frac{\epsilon}{3a} + O(\epsilon^2), \quad \frac{a_4}{a_1} = \frac{\alpha_2}{3} + O(\epsilon), \quad (115)$$

где a — известная из (34) константа, α_2 — коэффициент при u^4 в разложении функции $h(u)$ из (9) по $u \equiv m/k$: $h(u) = 1 + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u^4 + \dots$. Отметим, что в отдельных диаграммах рис. 1 есть ИК-расходимости и во вкладах вида m^2 , но в сумме диаграмм они сокращаются в согласии с представлением (114).

Если судить по изученным операторам младших размерностей, можно предположить, что при $\epsilon < 2$ опасными могут быть лишь операторы типа φ^n и $\partial_i^p \varphi^n$, дающие вклад только в динамический коррелятор, что согласуется с гипотезой 1 Колмогорова (106) в области $0 < \epsilon < 2$. При переходе за границу $\epsilon = 2$ становится опасным оператор диссипации (83) и (возможно) все его степени. Можно надеяться, что их суммирование, если бы удалось его выполнить, подтвердило бы гипотезу 1 Колмогорова (106) в некотором интервале $\epsilon \geq 2$ вблизи границы $\epsilon = 2$.

В работах [31, 32] обсуждались средние значения неренормированных операторов, которые вычислялись с помощью некоторой итерационной процедуры, близкой к РГ-преобразованиям Вильсона. В частности, рассматривалась так называемая асимметрия (skewness factor), определенная соотношением [1, 2]

$$S = - \frac{\langle (\partial_1 \varphi_1)^3 \rangle}{\langle (\partial_1 \varphi_1)^2 \rangle^{3/2}}. \quad (116)$$

Для нее было получено значение $S = 0,49$ [31, 32] или, после исправления обнаруженной ошибки, $S = 0,59$ [59]. Представляется затруднительным интерпретировать эту процедуру в терминах квантово-полевой РГ. В работе [60] высказывалось сомнение по поводу возможности вычисления средних типа (116), определяемых в основной областью диссипации, с помощью неподвижной точки РГ, описывающей ИК-асимптотику. Это действительно так: среднее значение $\langle F \rangle$ неренормированного оператора в теории с обрезанием Λ в общем случае содержит Λ -расходящийся регулярный вклад — начальный отрезок его тейлоровского разложения по m^2 с положительными степенями Λ в коэффициентах. Он набирается в основном от импульсов $k \sim \Lambda$ в отличие от сингулярного вклада, набирающегося от области $k \ll \Lambda$. В ренормированной теории регулярный вклад устраняется процедурой Λ -ренормировки (для операторов сводящейся обычно к простому вычитанию из F регулярной части $\langle F \rangle$), после чего УФ-расходимости остаются лишь в форме полюсов по ϵ , устраняемых мультипликативной ϵ -ренормировкой (раздел 2.4). Отметим, что в (107) входят ренормированные операторы, а (108) есть ведущий сингулярный вклад в их средние значения.

3.6. ИК-асимптотика тройного коррелятора скорости

В работах [13, 51, 61–65, 43] изучалась ИК-асимптотика тройного коррелятора поля скорости. Она представляет интерес в связи с проблемой доказательства сокращения ИК-расходимостей в скелетных диаграммах уравнений самосогласования [51], а также для анализа уравнения спектрального баланса энергии [1, 2, 61, 62] (см. также раздел 3.7). В работах [64, 65, 43] к этой задаче была применена техника РГ и SDE.

Рассмотрим ренормированный статический тройной коррелятор поля скорости для безмассовой модели (8) с $0 < \epsilon \leq 2$ в $\mathbf{k}$ -представлении:

$$\langle \varphi_{i_1}(\mathbf{k}_1) \varphi_{i_2}(\mathbf{k}_2) \varphi_{i_3}(\mathbf{k}_3) \rangle \equiv (2\pi)^d \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathcal{D}_A(\mathbf{k}),$$

$$A \equiv \{i_1, i_2, i_3\}, \quad \mathbf{k} \equiv \{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\}. \quad (117)$$

Из соотношений размерности имеем

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{k}) = v^3 k^{3-2d} R_A(s, g, \mathbf{n}), \quad s \equiv \frac{k}{\mu},$$

$$k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \quad \mathbf{n} \equiv \left\{ \mathbf{n}_i \equiv \frac{\mathbf{k}_i}{k}, i = 1, 2, 3 \right\}. \quad (118)$$

Согласно (37) функция (118) удовлетворяет РГ-уравнению $\mathcal{D}_{\text{РГ}} \mathcal{D}_A(\mathbf{k}) = 0$ с $\mathcal{D}_{\text{РГ}}$ из (33), поэтому для нее справедливо аналогичное (46) РГ-представление

$$\mathcal{D}_A = \bar{v}^3 k^{3-2d} R_A(1, \bar{g}(s), \mathbf{n}). \quad (119)$$

В асимптотике $s \rightarrow 0$ имеем $\bar{g} \rightarrow g_*$ и $\bar{v} \rightarrow v_*$ согласно (55):

$$\mathcal{D}_A \simeq \left(\frac{D_0}{g_*} \right) k^{3-2d-2\epsilon} R_A(1, g_*, \mathbf{n}). \quad (120)$$

Представление (120) описывает ИК-асимптотику коррелятора при $k \rightarrow 0$, $\mathbf{n} = \text{const}$ (см. раздел 2.7). Использование техники SDE (раздел 3.4) позволяет изучать также необходимую для некоторых задач (см. разделы 3.7, 3.8) асимптотику $\mathcal{D}_A(\mathbf{k})$ в трех областях типа $k_1 \ll k_2 \simeq k_3$ ($\sum_i k_i = 0$), т.е. $n_i \ll 1$ в скейлинговой функции R из (120). Ввиду симметрии $\mathcal{D}_A(\mathbf{k})$ по импульсам достаточно определить асимптотику в одной из них, для определенности $n_1 \ll 1$.

В работах [64, 65, 43] это было сделано с помощью операторного разложения (107) для полей с совпадающими временами. Подстановка (107) в тройной коррелятор

$$\mathcal{D}_{jil}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \equiv \langle \varphi_i(\mathbf{x}_1) \varphi_j(\mathbf{x}_2) \varphi_l(\mathbf{x}_3) \rangle$$

дает

$$\mathcal{D}_{jil}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sum_{\alpha} C_{jil, \alpha}(\mathbf{r}_{23}) \langle \varphi_i(\mathbf{x}_1) \bar{F}_{\alpha}^R(\mathbf{x}_{23}) \rangle, \quad (121)$$

где $\mathbf{r}_{23} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_{23} \equiv (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)/2$. Асимптотике $|\mathbf{r}_{23}| \ll |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{23}|$ в координатном представлении соответствует $k_1 \ll k_2 \simeq k_3$ в (118).

Произведение $\varphi_i(\mathbf{x}_2) \varphi_l(\mathbf{x}_3)$ с совпадающими временами не является галилеево-инвариантным объектом, поэтому в его SDE войдут и неинвариантные операторы. Но они не дадут вклада в тройной коррелятор (117) с $k_i \neq 0$ ввиду его инвариантности. Поэтому в (121) можно ограничиться только строго галилеево-инвариантными операторами, ведущий член искомой асимптотики определяется оператором с наименьшим значением Δ_F . При этом можно отбросить все скаляры, поскольку для них фурье-образ коррелятора $\langle \varphi_i(\mathbf{x}_1) \bar{F}_{\alpha}^R(\mathbf{x}_{23}) \rangle$ в (121) будет кратным k_{1i} вектором и не может дать вклада в поперечный по всем внешним импульсам коррелятор (117).

Среди изученных ранее (разделы 3.1–3.3) нескалярных строго инвариантных операторов минимальную размерность при $\epsilon \sim 2$, $d > 2$ имеет $F = \partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j$ из системы (90) с размерностью $\Delta_F = \Delta_{\varphi} + 1 = 2 - 2\epsilon/3$. Выражение в левой части SDE для $\varphi_i \varphi_j$ имеет размер-

ность $2\Delta_\varphi$, поэтому размерность любого его коэффициента C_α однозначно определяется размерностью $\bar{F}_\alpha^R$: $\Delta[C_\alpha] = 2\Delta_\varphi - \Delta[\bar{F}_\alpha^R]$. Для нашего оператора F находим $\Delta[C] = 2\Delta_\varphi - \Delta[F] = \Delta_\varphi - 1 = -2\epsilon/3$, откуда в безмассовой модели следует $C(r) \propto |r|^{2\epsilon/3}$. Индексная структура соответствующего вклада в (117) определяется поперечностью полей и требованиями симметрии. Окончательный ответ для искомой асимптотики $k_1 \ll k_2 \simeq k_3$ в (117) выглядит следующим образом [64, 65, 43]:

$$\begin{aligned} D_{ijl}(\mathbf{k}) \simeq & \frac{ig_* D_0}{8} k_1^{2-d-4\epsilon/3} k_2^{-d-2\epsilon/3} P_{in}(\mathbf{k}_1) \times \\ & \times \left\{ a_1 k_{1m} [P_{lm}(\mathbf{k}_2) P_{jn}(\mathbf{k}_2) + P_{jm}(\mathbf{k}_2) P_{ln}(\mathbf{k}_2)] + \right. \\ & \left. + \frac{a_2 P_{ij}(\mathbf{k}_2) k_{2n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{k_2^2} \right\}, \end{aligned} \quad (122)$$

где P — поперечный проектор, $a_{1,2}$ — числовые коэффициенты, которые можно вычислять в форме ϵ -разложений. По однопетлевому приближению для коррелятора (117) их можно найти лишь в нулевом порядке по ϵ , что дает $a_1 = -1$, $a_2 = 2 - d$.

Близкое к (122) представление было получено ранее в [63] на основе прямого анализа скелетных диаграмм. Оно совпадает с (122) при $\epsilon = 2$ и отличается в случае произвольного ϵ в противоречии с представлением (120), т.е. с полной размерностью коррелятора (117). Поэтому мы считаем верным представление (122).

Вычисляя функцию R в (118) в виде ряда ренормированной теории возмущений по g и совмещая полученный ответ с (120) и (122), получаем соответствующее приближение улучшенной теории возмущений (раздел 2.7). В любом конечном порядке оно неоднозначно, так как зависит, например, от того, какой именно импульс или комбинация импульсов входит в масштабную переменную s в (118). Различные варианты отличаются друг от друга на величину следующего порядка малости при малом ϵ . В нижнем порядке можно выбрать искомый коррелятор в виде

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}) = & \frac{ig_* D_0 (k_1 k_2 k_3)^{2-d-4\epsilon/3}}{4(k_1^{2-2\epsilon/3} + k_2^{2-2\epsilon/3} + k_3^{2-2\epsilon/3})} P_{is}(\mathbf{k}_1) P_{jt}(\mathbf{k}_2) P_{lp}(\mathbf{k}_3) \times \\ & \times [k_1^{d-2+4\epsilon/3} (k_{1t} \delta_{sp} + k_{1p} \delta_{st}) + k_2^{d-2+4\epsilon/3} (k_{2s} \delta_{tp} + k_{2p} \delta_{st}) + \\ & + k_3^{d-2+4\epsilon/3} (k_{3s} \delta_{tp} + k_{3t} \delta_{sp})]. \end{aligned} \quad (123)$$

Выражение (123) имеет нужные свойства симметрии и поперечности, согласуется с первым порядком ϵ -разложения и имеет в каждой из областей $n_i \ll 1$ правильную асимптотику (122) с коэффициентами $a_1 = -1$, $a_2 = 2 - d - 4\epsilon/3$, отличающимися от однопетлевых значений $a_1 = -1$, $a_2 = 2 - d$ лишь вкладами порядка ϵ . Фактически оно совпадает с известным EDQNM-приближением [2, 62], отличаясь лишь тем, что в (123) фиксирован и общий амплитудный множитель. Поэтому все результаты, известные для этого приближения, автоматически переносятся на выражение (123) (см. разделы 3.7, 3.8).

3.7. РГ-подход и уравнение спектрального баланса энергии

Центральную роль в феноменологическом описании развитой турбулентности играет уравнение спектраль-

ного баланса энергии [1, 2]

$$\partial_t E(k) = -\dot{E}_{\text{dis}}(k) + T(k) + \dot{E}_{\text{pump}}(k). \quad (124)$$

Здесь $E(k) = (d-1)D(k)/2$ с функцией D из статического коррелятора (5) — спектральная плотность энергии (все величины на единицу фазового объема $d\mathbf{k}/(2\pi)^d$, т.е. $E = (2\pi)^{-d} \int d\mathbf{k} E(k)$ и т.п.), $\dot{E}_{\text{dis}} = (d-1)v_0 k^2 D(k)$ — скорость диссипации, $\dot{E}_{\text{pump}}(k)$ — внешний источник накачки энергии, и

$$T(k) = \int d\mathbf{x} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) T(\mathbf{r}), \quad T(\mathbf{r}) \equiv -\langle \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{y}) \partial_j \varphi_i(\mathbf{y}) \rangle, \quad (125)$$

с $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y}$ — функция переноса (transfer integral), связанная в импульсном представлении со статическим коррелятором (117) соотношением

$$T(k) = (2\pi)^{-d} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) i k_j D_{ijl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (126)$$

При $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ координатная функция T в (125) исчезает в силу трансляционной инвариантности (символ δ выносятся за знак $\langle \dots \rangle$), поэтому

$$\int d\mathbf{k} T(k) = 0 \Rightarrow T(k) = -(2\pi)^d \frac{\partial J_i(\mathbf{k})}{\partial k_i}, \quad (127)$$

где $J_i(\mathbf{k})$ — вектор плотности потока энергии по спектру ($(2\pi)^d$ введено для правильной нормировки). Вследствие изотропии

$$J_i(\mathbf{k}) = k_i J(k), \quad I(k) = S_d J(k) k^d, \quad (128)$$

где $I(k)$ — полный поток энергии наружу через поверхность сферы радиуса k в импульсном пространстве, S_d — площадь поверхности единичной d -мерной сферы (35). Поток I должен удовлетворять условиям $I(0) = I(\infty) = 0$. Интегрируя (124) с учетом (127), можно получить уравнение баланса энергии для любого шарового слоя. В частности, для полного интеграла

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{dis}} &= (2\pi)^{-d} (d-1) v_0 \int d\mathbf{k} k^2 D(k) = \\ &= (2\pi)^{-d} \int d\mathbf{k} \dot{E}_{\text{pump}}(k) \equiv W. \end{aligned} \quad (129)$$

Основные предположения феноменологии применительно к уравнению баланса (124) сводятся к следующему [1, 2].

1. В инерционном интервале $m \ll k \ll \Lambda$ в (124) несущественны как вязкость, так и накачка энергии, поэтому в стационарной задаче

$$T(k) = 0 \quad (130)$$

с точностью до поправок с положительными степенями m/k и k/Λ .

2. Для функции D_{ijl} в (126) в инерционном интервале выполняется соотношение обобщенной однородности

$$D_{ijl}(\lambda \mathbf{k}_1, \lambda \mathbf{k}_2, \lambda \mathbf{k}_3) \simeq \lambda^{3\Delta_\varphi - 2d} D_{ijl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad (131)$$

с точностью до несущественных при $\lambda \rightarrow 0$ поправок с высшими степенями λ .

3. Интеграл (126) ИК- и УФ-конечен, т.е. в нем можно пренебречь вкладами областей $k_i \leq m$ и $k_i \geq \Lambda$, в которых соотношение (131) не выполняется.

Из предположений 2 и 3 сразу следует, что в инерционном интервале

$$T(k) = T_0(y)k^{-y} + \dots, \quad y \equiv d-1-3\Delta_\phi. \quad (132)$$

В (132) введены традиционные обозначения y для показателя и $T_0(y)$ для амплитуды при ведущем члене. Из (132) и (127) находим $J_i(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d} k_i k^{-y} T_0(y)/(y-d)$, откуда для потока энергии в (128) получаем $I(k) = (2\pi)^{-d} k^{d-y} S_d T_0(y)/(y-d)$. Отсюда видно, что условие (130) (т.е. $T_0(y) = 0$) эквивалентно требованию постоянства потока энергии и (для ненулевого потока) выполняется только при $y = d$, т.е. только при колмогоровском значении $\Delta_\phi = -1/3$ в (132). Предполагая аналитичность $T_0(y)$ в окрестности $y = d$, имеем $T_0(y) = T'_0(d)(y-d) + \dots$. Приравнявая соответствующий поток энергии $I = (2\pi)^{-d} S_d T'_0(d)$ в инерционном интервале полной энергии диссипации (или накачки) (129), получаем соотношение

$$\dot{E}_{\text{dis}} = W = (2\pi)^{-d} S_d T'_0(d), \quad (133)$$

связывающее $\dot{E}_{\text{dis}}$ через (126) и (132) с тройным коррелятором.

Соотношению (133) можно придать более удобную форму, выполнив явно дифференцирование по y . Для этого нужно выделить из интеграла (126) множитель $y-d$. Можно показать (см. [2], с. 317; [22]), что этот интеграл не изменится при добавлении к подынтегральному выражению множителя $-(k_2/k)^{y-d}$, следовательно, и при добавлении комбинации $[1 - (k_2/k)^{y-d}]/2$, из которой $y-d$ выделяется явно. Такое преобразование интеграла (126) позволяет переписать соотношение (133) в виде

$$\dot{E}_{\text{dis}} = W = \frac{S_d k^d}{2(2\pi)^d} \iint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 F(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \log \frac{k}{k_2} \Big|_{y=d}, \quad (134)$$

где $F(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ — подынтегральное выражение из (126) с колмогоровским значением размерности $y = d$. Множитель k^d можно внести под знак интеграла (134), что эквивалентно обезразмериванию заменой $\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_i/k$ всех импульсов.

Важно, что основной вклад в (134) набирается от инерционного интервала, поскольку свойства сходимости интегралов (126) и (134) одинаковы.

Обычно предположения 1–3 обсуждаются на основе тех или иных приближений, например уже упоминавшегося (раздел 3.6) EDQNM-приближения [2, 62]. Рассмотрим, следуя [64], выполнение этих свойств на основе модели (16) с помощью РГ и SDE. Исходное соотношение (124) получается домножением равенства (79) с $A^{\varphi'} = 0$ на $\varphi_i(x')$ с $t' = t$, затем усреднением $\langle \dots \rangle$ и преобразованием Фурье по $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Множители $d-1$ возникнут от свертки по индексам в поперечных проекторах, роль $\dot{E}_{\text{pump}}(k)$ будет играть величина $(d-1)d_F(k)/2$ (см. текст после формулы (85)) с функцией d_F из (2). Для модели (9) с любым $\epsilon > 0$ при $k \ll \Lambda$ вкладом диссипации в (124) всегда можно пренебречь по

сравнению с вкладом накачки (очевидно из оценки по критическим размерностям). Поэтому в стационарной задаче из (124) для всей ИК-области $k \ll \Lambda$ имеем

$$T(k) = -\dot{E}_{\text{pump}} = -\frac{(d-1)d_F(k)}{2}. \quad (135)$$

Из (135) и (9) для инерционного интервала получаем

$$T(k) = T_0 k^{-d+4-2\epsilon}, \quad T_0 = -\frac{(d-1)D_0}{2}, \quad (136)$$

где константа D_0 выражается через $W = \dot{E}_{\text{dis}}$ соотношениями (64). При сопоставлении (136) и (132) необходимо учитывать, что Δ_ϕ в (132) — колмогоровская размерность, определенная соотношениями (41) при $\epsilon \leq 2$ и (6) при любом $\epsilon \geq 2$ (эффект замораживания, см. раздел 2.8). Это значит, что роль y в (132) играет величина

$$y \equiv d-1-3\Delta_\phi = \begin{cases} d-4+2\epsilon & \text{при } \epsilon \leq 2, \\ d & \text{при } \epsilon \geq 2. \end{cases} \quad (137)$$

Из (64) и (137) следует, что при $\epsilon < 2$ выражение (136) для $T(k)$ имеет вид (132) с амплитудой $T = \text{const} \times \Lambda^{2\epsilon-4} \neq 0$, т.е. свойство (130) при $\epsilon < 2$ не выполняется. Напротив, при любом $\epsilon > 2$ оно выполняется тождественно, поскольку ведущий вклад типа (132) в этой области должен иметь вид $\text{const} \times k^{-d}$ согласно (137), а в (136) он отсутствует, — все это выражение является поправочным членом с дополнительной малостью $(m/k)^{2\epsilon-4}$. Непосредственно на границе $\epsilon = 2$ он становится ведущим, а в амплитуде $T_0 \propto D_0$ появляется малость $1/\log(\Lambda/m)$ (раздел 2.8), поэтому с такой точностью утверждение (130) справедливо и для $\epsilon = 2$.

Для безмассовой модели (8), которую можно рассматривать только в области $\epsilon < 2$, обеспечивающая (130) малость в амплитуде $T_0 \propto D_0$ появляется только в пределе $\epsilon \rightarrow 2$, поскольку (64) принимает в этом случае следующий вид:

$$D_0 = (2\pi)^d S_d^{-1} \frac{4(2-\epsilon)\Lambda^{2\epsilon-4}}{(d-1)} W. \quad (138)$$

Из-за появления множителя $2-\epsilon$ функция (8) с D_0 из (138) в пределе $W = \text{const}$, $\epsilon \rightarrow 2$ исчезает при любом $k \neq 0$, точнее

$$d_F(k) \rightarrow \frac{2(2\pi)^d}{d-1} \delta(\mathbf{k}) \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 2 \quad (139)$$

при учете известного степенного представления δ -функции

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{k}) &= \lim_{\Lambda \rightarrow +0} (2\pi)^{-d} \int d\mathbf{k} (\Lambda x)^{-\Delta} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) = \\ &= S_d^{-1} k^{-d} \lim_{\Lambda \rightarrow +0} \left[\Delta \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^\Delta \right]. \end{aligned} \quad (140)$$

Таким образом, первое из основных предположений (130) выполняется в модели (9) при любом $\epsilon \geq 2$, а в (8) — только при $\epsilon \rightarrow 2-0$.

Обсудим теперь с точки зрения РГ предположения 2 и 3. Равенство (131) — очевидное следствие ИК-скейлинга и гипотезы 1 Колмогорова (без которой можно обой-

тись, если добавить в (131) растяжение параметра m). Тем не менее, возможность использования (131) под знаком интеграла (126) для получения (132) нетривиальна, так как в координатном тройном корреляторе (125) аргументы двух полей совпадают. Поэтому фактически мы имеем дело не с тройным, а с парным коррелятором поля φ_i и составного оператора $\varphi_i\varphi_j$ (символ ∂ можно вынести за знак $\langle \dots \rangle$). Его размерность в общем случае не равна сумме размерностей полей из-за возможного вклада аномалий γ_F^* (раздел 3.1), и (если такой вклад есть) критическая размерность интеграла типа (126) не определяется просто размерностью подынтегрального выражения.

В данном случае такой опасности нет: составной оператор $\varphi_i\varphi_j$, который был подробно исследован в разделе 3.2, представляется в виде суммы двух операторов $F^{(1)} = \varphi_i\varphi_j - v_0(\partial_i\varphi_j + \partial_j\varphi_i)$ и $F^{(2)} = v_0(\partial_i\varphi_j + \partial_j\varphi_i)$ с определенными критическими размерностями $\Delta_1 = 2\Delta_\varphi$, $\Delta_2 = \Delta_\varphi + 1$. Первый из них сокращает в (133) вклад накачки, а второй — диссипации. При колмогоровском значении $\Delta_\varphi = -1/3$ главным является первый оператор, только он и входит в (132) и (135). Его размерность не имеет аномалий γ_F^* (раздел 3.2), поэтому в данном случае равенство (131) действительно влечет (132).

В рамках феноменологии это обосновывалось предположением 3 — нужной сходимостью интеграла (124). Из полученного с помощью техники РГ и SDE представления (122) следует, что интеграл (126) действительно сходится при $0 < \epsilon < 3$, причем верхняя граница определена требованием ИК-сходимости, а нижняя — УФ-сходимости (подробнее см. [64]). Отметим, что границы сходимости такие же, как в EDQNM-приближении [62], поскольку у него правильная асимптотика (раздел 3.6). (Предположение о возможной связи между этими границами и размерностями составных операторов впервые было высказано в работе [66].)

Общий вывод состоит в том, что техника РГ и SDE позволяет обосновать постулируемые в рамках феноменологии утверждения 1–3 в моделях типа (9) с любым $\epsilon \geq 2$, а в упрощенной модели (8) при $\epsilon \rightarrow 2$.

3.8. О неколмогоровских решениях уравнения баланса энергии

Помимо решения $y = d$ с ненулевым потоком энергии интерес могут представлять и другие возможные решения $y = y(d)$ уравнения $T_0(y) = 0$ для амплитуды в (132), соответствующие требованию (130). Их можно искать численно, определив $T_0(y)$ с помощью соотношений (126) и (132) на основе той или иной масштабно-инвариантной модели для тройного коррелятора. В работе [62] (см. также [64]) с помощью коррелятора типа (123) получено решение $y = y(d)$, изображенное на рис. 3 в виде кривой $ABCDE$. Оно приведено, следуя [62, 64], в координатах $\gamma - d$, где $\gamma \equiv (2y - 2d + 5)/3 = 1 - 2\Delta_\varphi$ — индекс спектра энергии $E(k) \propto k^{d-1}D(k) \propto k^{-\gamma}$, и нетривиально лишь вблизи $d = 2$ (уточненные значения $d_c = 2,066$, $d'_c = 2,075$ приведены в [64, 67]). Обычному колмогоровскому решению $y = d$ в этих координатах соответствует прямая $\gamma = 5/3$ при любом значении d . Интересно отметить, что хотя кривая $ABCDE$ получена на основе конкретного приближения (123) для тройного коррелятора, ее предельные точки A , E при $d = 2$ имеют простую физическую интерпретацию в точной теории. Поясним это замечание подробнее.

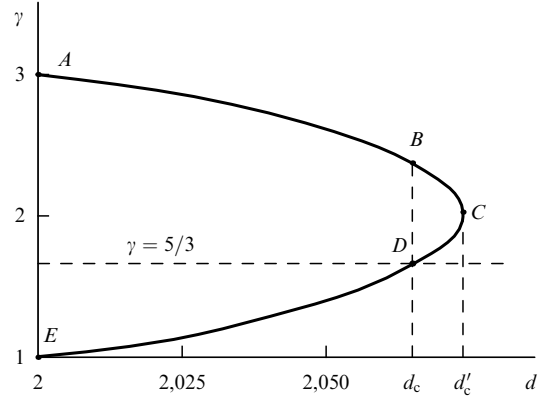


Рис. 3.

Спецификой двумерной задачи является наличие второй (в дополнение к энергии) сохраняющейся величины — энстрофии $\langle \text{rot}^2 \varphi(\mathbf{k}) \rangle \propto k^2 D(k)$ [2], что в терминах функции переноса означает наличие второго закона сохранения $\int d\mathbf{k} T(k)k^2 = 0$ в дополнение к (127). Это позволяет ввести понятие спектральной плотности потока энстрофии $k^2 T(k) = -\partial J_i^e / \partial k_i$. В инерционном интервале из (132) следует $J_i^e(\mathbf{k}) = J_0^e k_i k^{2-y}$, причем $T_0 = J_0^e(y - 4)$. Следовательно, при $d = 2$ возможен режим с нулевым потоком энергии и отличным от нуля потоком энстрофии. Ему соответствует $y = 4$, т.е. согласно (132) $\Delta_\varphi = -1$ — это точка A на рис. 3. Из интеграла (126) при $d = 2$ формально можно выделить множитель $y - 4$ таким же способом, каким в общем случае доказывалось выделение множителя $y - d$ (см. вывод формулы (134) в разделе 3.7). Но следует иметь в виду, что значение $\Delta_\varphi = -1$ соответствует в (123) граничному значению $\epsilon = 3$, при котором в (126) появляется ИК-расходимость (это связано с появлением при $\epsilon \geq 3$ опасного галилеево-инвариантного оператора $\partial\varphi$, см. раздел 3.6). Поэтому проблема строгого обоснования такого решения нетривиальна, в настоящее время она активно обсуждается в литературе [68]. Второй концевой точке E на рис. 3 соответствует значение $\Delta_\varphi = 0$, отвечающее равнораспределению по спектру энстрофии $k^2 D(k) = \text{const}$.

Особый интерес на рис. 3 представляет точка D с $d_c \simeq 2,066$, соответствующая пересечению двух решений. В этой точке $y = d_c$ исчезает не только сама величина $T_0(y)$, но и ее производная $T'_0(y)$, а с ней и поток энергии (см. раздел 3.7). Поэтому равенство (134) становится невыполнимым при конечных значениях W и D_0 . Согласно интерпретации [62] область $d < d_c$ соответствует инверсному потоку энергии, и колмогоровский скейлинг здесь не реализуется. В работе [62] сделано предположение, что при уменьшении d решение $y = d$ в этой области перескакивает на кривую BA .

В работе [67] было высказано утверждение, что уравнение (134) может выполняться только при выборе $d = d_c + O(\epsilon)$, $D_0 \propto \epsilon^{-2}$. В действительности равенство (134) получено как предельное при $\epsilon \rightarrow 2$, поэтому нельзя говорить о его внутренней согласованности при $\epsilon \rightarrow 0$. В более общем соотношении (135) нуль порядка $g_* \propto \epsilon$ при $\epsilon \rightarrow 0$ в амплитуде (123) компенсируется полюсом $1/\epsilon$, возникающим при вычислении $T(k)$ из (126) за счет УФ-расходимости интеграла при $\epsilon \rightarrow 0$, что снимает обнаруженное в [67] кажущееся противоречие.

3.9. Проблема сингулярностей при $\epsilon \rightarrow 2$ в безмассовой модели. Вычисление константы Колмогорова

Большинство работ по РГ-теории турбулентности выполнено в рамках безмассовой модели (8) с чисто степенной накачкой, в которой связь между параметрами W и D_0 дается соотношением (138). Реальной задаче соответствует предел $\epsilon \rightarrow 2 - 0$, в котором степенная накачка переходит в δ -функцию (139), что обеспечивается наличием в (138) множителя $2 - \epsilon$. Параметр $D_0 \propto 2 - \epsilon$ входит в ИК-асимптотику только через инвариантную вязкость (48), поэтому в представлениях типа (54), (120) для любых статических корреляторов он никогда не войдет в соответствующие скейлинговые функции, но войдет в общий множитель $D_0^{n/3} \propto (2 - \epsilon)^{n/3}$, где n — число полей в данном корреляторе (по частотной размерности на каждое поле ϕ приходится один множитель $\bar{\nu}$, переходящий в (55) в ИК-асимптотике). Если верить в существование предельной теории с $\epsilon \rightarrow 2 - 0$, необходимо предположить, что скейлинговые функции обязательно имеют особенности типа $(2 - \epsilon)^{-n/3}$, компенсирующие "нули" $D_0^{n/3} \propto (2 - \epsilon)^{n/3}$ в амплитудных множителях. Строгое доказательство наличия таких особенностей — сложная нерешенная проблема теории, имеющая, видимо, некоторое родство с общей проблемой замораживания и обоснования гипотезы 1 Колмогорова для всей области $\epsilon \geq 2$ в массивной модели (раздел 2.8). Но само утверждение — существование предельной безмассовой модели с δ -образной накачкой (139) — представляется весьма правдоподобным, во всяком случае, именно эта гипотетическая предельная модель с $\epsilon \rightarrow 2 - 0$ фактически является предметом исследования большинства работ по РГ-теории турбулентности. По этому поводу можно также добавить, что точное соотношение (86) с учетом сходимости интеграла при $\epsilon = 2$ (следствие SDE и общей размерности) при наличии множителя $D_0 \propto (2 - \epsilon)$ в амплитуде (123) фактически доказывает присутствие нужного полюса $1/(2 - \epsilon)$ в скейлинговой функции тройного коррелятора, — только так можно обеспечить конечность параметра $\dot{E}_{\text{dis}} = W$.

Эксперимент показывает, что в инерционном интервале для функции $E_1(k)$ (одномерного спектра энергии), связанной со статическим коррелятором (5) соотношением (60), справедливо представление

$$E_1(k) = C_K W^{2/3} k^{-5/3}. \quad (141)$$

Безразмерный числовой множитель C_K называют константой Колмогорова, ее экспериментальное значение $C_K = 1,3 \div 2,7$ [38, 69].

Расчет константы Колмогорова в модели (1), (2) с помощью ренормгруппы обсуждался в работах [31–33, 15, 67, 70–73]. Так, в работах [31–33] использовались рекурсионные соотношения Вильсона, в [15] — квантово-полевая формулировка. Приведем сначала короткий расчет [15] для модели (8) при $\epsilon < 2$.

Из (54), (55), (60) и первого равенства в (64) находим

$$E_1(k) = C_K(\epsilon) W^{2/3} k^{-5/3} \left(\frac{A}{k} \right)^{4(2-\epsilon)/3}, \quad (142)$$

где $C_K(\epsilon)$ — аналог константы C_K в (141) для произвольного $\epsilon < 2$:

$$C_K(\epsilon) = \left(\frac{2C_d}{g_*^2} \right)^{1/3} (2 - \epsilon)^{2/3} f(\epsilon) \quad (143)$$

с C_d из (35) и функцией $f(\epsilon) \equiv f(u = 0, \epsilon)$ из (54). Принимая гипотезу о конечности произведения $(2 - \epsilon)^{2/3} f(\epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 2$ (см. выше) и разлагая его в ряд по ϵ , приходим к ϵ -разложению константы Колмогорова [15] вида

$$C_K(\epsilon) = \epsilon^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \epsilon^n. \quad (144)$$

В низшем приближении $f(\epsilon) = g_*/2$, $g_* = 2\epsilon/3a$ с a из (34), соответствующем выражению (62) для $E_1(k)$, из (144) находим

$$C_K(\epsilon) = 2 \left[\frac{(d+2)\epsilon}{3} \right]^{1/3}, \quad (145)$$

что при $d = 3$ и реальном $\epsilon = 2$ дает $C_K \simeq 3$ [15].

Выражение (145) является первым членом точного ϵ -разложения (144). Его расхождение с экспериментом неудивительно, поскольку нет видимых причин для численной малости поправок в (144). Более близкое к эксперименту значение константы Колмогорова было получено в работах [31–33] в рамках РГ-теории Якота – Орзага, основанной на одном из вариантов рекурсионных соотношений Вильсона. Поясним кратко их способ расчета. Хотя равенство (3) и его следствие (138) для степенной накачки являются точными соотношениями для стохастической задачи (1), авторы [31–33] их не используют. Тогда связь между параметрами W и D_0 оказывается нетривиальной проблемой, которая в этих работах решается с помощью соотношений (134), (126), (123). При этом интеграл (134) находится численно для конкретного приближения (123) с точным значением $\epsilon = 2$ в показателях (что соответствует $y = d$ в обозначениях (134)), а параметр g_* подставляется в (123) в первом порядке ϵ -разложения (только в нем он и известен). Для $d = 3$ это приводит к следующей связи между W и D_0 :

$$\left. \frac{D_0}{2\pi W} \right|_{\epsilon=2} \simeq 1,5 \dots \quad (146)$$

Подстановка этого выражения в (62) с $h(0) = 1$ приводит к значению

$$C_K \simeq 1,606 \dots \quad (147)$$

для константы Колмогорова, хорошо согласующемуся с экспериментальным. Отметим, что приводимое в [31–33] значение $C_K = 1,617$ несколько отличается от (147), видимо, из-за различной точности численного интегрирования в (134). Наиболее точное значение (147) приведено в [67].)

С точки зрения точной теории приведенный выше способ вычисления константы (147) небезупречен, так как в нем фактически одновременно игнорируются два качественных эффекта: наличие нуля при $\epsilon = 2$ в отношении D_0/W (следствие точного соотношения (138)) и компенсирующей этот ноль особенности в скейлинговой функции из (54) (следствие предполагаемого существования теории с $\epsilon = 2$, см. выше). Поэтому вычисления [31–33] следует рассматривать лишь как некоторый конкретный способ раскрытия указанной неопределенности $0 \times \infty$, удачный с точки зрения совпадения с эксперимен-

том. Однако авторы [31–33] не отмечают наличия данной неопределенности, считая результат (146) качественно верным (вместо точного $D_0/W = 0$ при $\epsilon = 2$). В этом случае возникают трудности с интерпретацией стационарного уравнения баланса энергии (124): из (146) тогда следует, что вклад накачки в инерционном интервале при колмогоровском значении размерности поля ($\epsilon = 2$) остается конечным, так что при учете соотношения (130) (которое в данном подходе также считается верным) он может сокращаться только вкладом диссипации, а это невозможно при обычной оценке степеней импульса по размерностям (раздел 3.7). Авторы [31–33] пытаются найти выход из этого противоречия (в действительности кажущегося, так как кратный $D_0 \propto (2 - \epsilon)$ вклад накачки при $\epsilon = 2$ в точной теории исчезает) следующим образом. В РГ-подходе Якота–Орзага считается, что в области $k \ll \Lambda$ техника РГ приводит к аналогичному (124) уравнению с заменой кинематического коэффициента вязкости ν_0 в диссипационном вкладе $\dot{E}_{\text{dis}}(k) = (d - 1)\nu_0 k^2 D(k)$ на зависящую от k эффективную вихревую вязкость, роль которой играет инвариантная переменная $\bar{\nu}_*(k)$ из (55). После такой замены степени k во вкладах накачки и диссипации при $\epsilon = 2$ оказываются одинаковыми, и при учете явного вида амплитуд (см. (55) и (61)) эти вклады действительно взаимно сокращаются в низшем порядке по ϵ . Условием сокращения является равенство $f(1, g_*)/g_* = 1/2$ при $\epsilon = 2$ в модели (8), по смыслу в подходе Якота–Орзага оно должно считаться точным, хотя прямо это не отмечается.

Наиболее подробное изложение данного подхода можно найти в работах [32, 59], обобщение на задачи о турбулентном перемешивании пассивной примеси, затухающей турбулентности и др. содержится в работах [32, 33, 45, 46, 74–77], критический анализ — в [60, 70, 78].

С точки зрения стандартной квантово-полевой РГ-техники изложенный выше кратко подход [31–33] явно непоследователен. Более того, сама проблема — необходимость сокращения чем-то вклада накачки в инерционном интервале при выполнении условия (130) — является мнимой, так как в действительности при $\epsilon \rightarrow 2$ кратный $D_0 \propto (2 - \epsilon)$ вклад накачки исчезает. По поводу замены $\nu_0 \rightarrow \bar{\nu}_*(k)$ в уравнении (124) необходимо сказать, что корректная РГ-техника позволяет обосновать подобную замену $\nu_0 \rightarrow \bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}_*(k)$ в ренорминвариантных объектах типа корреляторов, выраженных через ренормированные параметры (см. раздел 2.6), но отдельные неренормированные константы типа ν_0 преобразовать таким образом в зависящие от импульса величины невозможно: их можно выразить через инвариантные переменные и импульс k , но лишь в такой комбинации, в которой зависимость от k сокращается (см. (50)). Следует также отметить, что физическая идея взаимного сокращения вкладов накачки и диссипации в инерционном интервале противоречит обычной феноменологии развитой турбулентности, фактически отрицая само понятие инерционного интервала. Подобное детальное равновесие реализуется лишь в моделях типа критической динамики [23], описывающих системы в состоянии теплового равновесия, которые отличаются качественно устройством накачки ($d_F = \text{const}$ или $\text{const} \times k^2$) от моделей развитой турбулентности.

Последнее замечание по поводу вычисления константы Колмогорова (143) (см. [70]). Используемое

при этом соотношение (138) получено подстановкой функции (8) в интеграл (3) с обрезанием $k \ll \Lambda$, где $\Lambda \equiv W/\nu_0^3$ — точно определенный параметр. В нефизических условиях УФ-накачки, в принципе, можно было бы с равным правом обрезать интеграл (3) не на Λ , а на некоторой величине порядка Λ , что привело бы в (138) к замене $\Lambda \rightarrow c\Lambda$ с неизвестным коэффициентом $c \sim 1$. Добавочный множитель $c^{2-\epsilon}$ вошел бы тогда в соотношение (143), и если разлагать его по ϵ , то это изменило бы (фактически произвольно) коэффициенты ϵ -разложения (144) константы Колмогорова. Отметим, что подобный произвол имеется и при вычислениях с помощью соотношения (134), поскольку туда входит лишь значение интеграла при $y = d$, что соответствует $\epsilon = 2$, так что корреляторы можно определить лишь с точностью до произвольных множителей типа $c^{2-\epsilon}$. Поэтому не следует придавать слишком большого значения численным результатам, полученным в рамках простейших приближений. Совпадение значений полученной разными способами константы Колмогорова друг с другом и с экспериментальными данными по порядку величины уже является достаточно хорошим результатом.

3.10. Об отклонениях от колмогоровского скейлинга.

ИК-ренормгруппа

Известны экспериментальные данные, свидетельствующие о наличии малых отклонений от предсказаний теории Колмогорова (раздел 2.1) в статических корреляторах некоторых галилеево-инвариантных величин [35–38]. Более точно, речь идет об отклонениях измеряемых экспериментально показателей степеней расстояния $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ от предсказываемых теорией Колмогорова значений. На уровне феноменологии они описываются обычно с помощью добавочных степеней $(mr)^{\dots}$ в корреляторах (в противоречии с гипотезой 1 Колмогорова), а в теоретических моделях объясняются сильно развитыми флуктуациями оператора диссипации энергии (83) (см., например, [79]). Конкретно в литературе обсуждаются следующие два выражения для статических ($t = 0$) корреляторов в инерционном интервале:

$$\langle F_r^n \rangle = \text{const} \times (Wr)^{n/3} (mr)^{q_n}, \quad (148)$$

$$\langle E(\mathbf{x})E(\mathbf{y}) \rangle = \text{const} \times W^2 (mr)^{-\mu}, \quad (149)$$

где $F_r \equiv \varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi_1(\mathbf{y})$, φ_1 — некоторая конкретная компонента скорости, $E(\mathbf{x}) \equiv \dot{E}_{\text{dis}}(\mathbf{x})$ — оператор (83), W — средняя мощность накачки энергии (3), $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

По теории Колмогорова в (148), (149) должно быть $q_n = \mu = 0$, из эксперимента (по показателям степеней r) получается $0,2 \leq \mu \leq 0,5$ [35–38], в частности в [36] получено $\mu = 0,20 \pm 0,05$. Экспериментальный график зависимости q_n от n для четных $2 \leq n \leq 18$ приведен в [36]. Обычно считается $q_2 \geq 0$, хотя экспериментально значение q_2 неотлично от нуля [36–38]; с помощью координатной версии уравнения (124) можно строго обосновать равенство $q_3 = 0$. Для $n \geq 4$ показатели q_n становятся уже заметно отличными от нуля [36].

С точки зрения изложенной ранее РГ-теории величина (149) имеет определенную критическую размерность $2\Delta_E \pm \Delta_E = 4 - 2\epsilon$ согласно (88), а (148) — смесь слагаемых разной размерности, в представлении (148) отражен лишь ведущий вклад с размерностью $n\Delta_\varphi = n(1 - 2\epsilon/3)$. Колмогоровские значения показателей (148), (149) получаются при $\epsilon = 2$. Общие формулы ИК-

скейлинга (разделы 2.7, 2.8) допускают наличие в правых частях (148), (149) произвольных скейлинговых функций $f(mr)$, представление (148), (149) следует понимать как утверждение относительно явного вида ведущего члена асимптотики $mr \rightarrow 0$ этих скейлинговых функций.

В работе [45] (см. также [75, 76]) предпринята попытка объяснить (148), (149) на основе стандартной РГ-теории для безмассовой модели (8) путем выбора слегка отличного от $\epsilon = 2$ реального значения ϵ . Применительно к (148), (149) это означает $n/3 + q_n = -n\Delta_\phi$, $\mu = 2\Delta_E$ с известными из (41), (88) размерностями $\Delta_\phi = 1 - 2\epsilon/3$, $\Delta_E = 4 - 2\epsilon$, откуда следует $\mu = 2(4 - 2\epsilon)$, $q_n = -n\mu/6$. Подходящим выбором $\epsilon < 2$ можно получить любое заданное $\mu > 0$, но тогда все q_n будут отрицательными в противоречии с точным равенством $q_3 = 0$ и обычными феноменологическими представлениями, согласно которым $q_2 \geq 0$. Поэтому простая идея [45] сдвига ϵ для объяснения представлений (148), (149) непригодна, не говоря уже о том, что при $\epsilon < 2$ накачка (8) является ультрафиолетовой (см. раздел 2.1) и может приводить лишь к соотношениям типа (148), (149) с подменой $m \rightarrow \Lambda$, вступая тем самым в противоречие даже с гипотезой 2 Колмогорова.

Авторы [80] пытались получить представление (148), (149) с помощью РГ-техники для массивной модели (9), учитывая лишь вклад оператора диссипации (83) в SDE-представлениях типа (109) (важно, что объекты в (148), (149) галилеево-инвариантны, а (83) — единственный известный оператор с такой симметрией, который может быть опасным вблизи $\epsilon = 2$). Это ведет к представлениям

$$\langle F_r^n \rangle = \text{const} \times (D_0)^{n/3} r^{-n\Delta_\phi} [1 + C_n(mr)^{\Delta_E} + \dots], \quad (150)$$

$$\langle E(\mathbf{x})E(\mathbf{y}) \rangle = \text{const} \times D_0^2 r^{-2\Delta_E} [1 + C_E(mr)^{\Delta_E} + \dots] \quad (151)$$

с обычными $\Delta_\phi = 1 - 2\epsilon/3$, $\Delta_E = 4 - 2\epsilon$ при любом ϵ , с D_0 из (9) и некоторыми универсальными (зависящими только от ϵ) коэффициентами C_n , C_E . Для $\epsilon < 2$ ведущими в (150), (151) при $m \rightarrow 0$ являются первые вклады, что приводит к результатам [45]. В [80] рассматривалась возможность выбора $\epsilon > 2$, когда ведущими становятся вторые слагаемые в (150), (151) и именно их следует отождествить с выражениями (148), (149), что дает $\mu = \Delta_E = 4 - 2\epsilon < 0$, $q_n = \mu(3 - n)/3$. Эти ответы опять не сходятся по знакам с экспериментальными значениями и, как отмечено в [48, 49], противоречат точным равенствам $q_{2n} \leq 2q_n$, вытекающим из положительности меры усреднения в (148). Противоречие можно снять, только если предположить, что кроме оператора диссипации существует еще бесконечное число операторов той же симметрии, становящихся опасными при $\epsilon = 2$, но практически такие операторы неизвестны (см. обсуждение соотношения (104) в разделе 3.3).

В ряде работ [81–85, 25] предпринимались попытки исследовать зависимость спектра (60) от m и найти тем самым показатель q_2 в (148) с помощью некоторой новой ИК-ренормгруппы. Общая идея состоит в том, что с ИК-расходимостями (при $m \rightarrow 0$) можно обращаться точно так же, как с УФ-расходимостями (при $\Lambda \rightarrow \infty$). В формулировке [85] это сводится к утверждению, что ИК-расходимости можно устранить обычной процедурой мультипликативной ренормировки полей и параметров; естественный произвол этой процедуры ведет к

соответствующим уравнениям РГ (см. раздел 2.4). В более ранней формулировке [81] реализующие ту же идею РГ-уравнения получались с помощью рекурсионной процедуры с последовательным исключением вкладов не больших (как обычно), а малых импульсов интегрирования. Отметим, что впервые подобное предложение было высказано (но не реализовано) в докладе [66], с. 116.

Однако результаты, полученные с помощью ИК-ренормгруппы, никак нельзя признать достоверными, поскольку необходимые для вывода уравнений РГ общие утверждения (структура расходимостей, мультипликативная ренормируемость и т.п.) строго здесь никогда не доказывались и фактически предполагаются справедливыми по аналогии с соответствующими утверждениями обычной (ультрафиолетовой) теории ренормировки. В действительности аналогии здесь нет, и поэтому не существует теории ИК-ренормировки, подобной универсальной и хорошо разработанной теории УФ-ренормировки. Последняя основана на следующих двух утверждениях: 1) УФ-расходящаяся часть любой однопетлевой 1-неприводимой диаграммы является простым полиномом по совокупности внешних импульсов и частот, его порядок определяется по размерности; 2) то же самое верно и для любой многопетлевой диаграммы, если из нее предварительно устранить расходимости всех поддиаграмм. Первое из этих утверждений очевидно, а второе весьма нетривиально, но усилиями многих авторов оно строго доказано для широкого класса квантово-полевых моделей (см., например, теорему об R-операции в [5]). В отличие от УФ-расходимостей не существует простого и универсального правила для определения общей структуры по импульсам и частотам для ИК-расходящихся частей даже простейших однопетлевых диаграмм, не говоря уже о многопетлевых. Использованная в [81, 82, 85] модель турбулентности с эффективной вязкостью проанализирована с этой точки зрения в работе [55], где показано, что кратные $\log m$ вклады однопетлевых 1-неприводимых диаграмм не совпадают по импульсно-частотной структуре со слагаемыми функционала действия, следовательно, не устранимы мультипликативной ренормировкой. Такая возможность в расчете [85] появилась только потому, что автор произвольно (и неправомочно с точки зрения теории ренормировки) ограничился нулевыми внешними частотами.

Общий вывод состоит в том, что современная РГ-техника гарантирует наличие ИК-скейлинга для асимптотики $m \sim k \rightarrow 0$ статических корреляторов, но не позволяет пока решить точно вторую ИК-проблему — определение зависимости от m при $m/k \rightarrow 0$. Ее решение потребует, по-видимому, нахождения всех опасных операторов и явного суммирования их вкладов в SDE-представлениях для одновременных корреляторов типа (148), (149), как это было сделано с операторами вида ϕ^n в представлении (110) для разновременных функций Грина. Очевидно, это сложная задача, требующая существенного развития имеющегося аппарата.

4. Заключение

В заключение кратко упомянем работы по РГ-теории турбулентности, на которых мы не смогли остановиться подробнее из-за недостатка места.

Впервые техника РГ была успешно применена к гидродинамике в [86], где рассматривалась жидкость в состоянии теплового равновесия и обсуждалось обоснование уравнений гидродинамики в связи с проблемой "длинных хвостов" в корреляционных функциях.

В ряде работ в рамках РГ-подхода изучались более реалистические модели развитой турбулентности, учитывающие слабую [87–90] и сильную [91] анизотропию, гиротропию (нарушение пространственной четности) [92, 93], сжимаемость [74, 94–96], неоднородность, затухание и реальную геометрию задачи [46, 59, 70, 97–100]. Проблема возможных ИК-существенных поправок к уравнению Навье–Стокса, затрагивавшаяся в [16, 32, 78, 101], подробно обсуждается в [102].

В [31–33, 76, 77, 103–105] рассматривались турбулентное перемешивание пассивной скалярной примеси и эффекты теплопроводности. В первой из этих работ [103] получено обоснование феноменологического "закона $4/3$ " Ричардсона для распыливания облака примесных частиц, а также найдено выражение

$$u_* = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8(d+2)}{d}} + O(\epsilon)$$

для обратного эффективного турбулентного числа Прандтля, воспроизведенное затем многими авторами. В [33, 77] вычислялась константа Бэтчелора в аналогичном (60) спектре пассивной примеси, в [76] исследовалась конвективная турбулентность.

Магнитогидродинамическая турбулентность изучалась в [106–109], с учетом анизотропии — в [89], гиротропии — в [92, 110]. В работе [110] с помощью метода РГ рассмотрено явление турбулентного динамо — спонтанная генерация крупномасштабного магнитного поля. Ленгмюровская турбулентность плазмы изучалась в [111, 112].

В [65, 93, 97, 98, 100, 113] была предложена и подробно исследована отличная от (1) модель развитой турбулентности, основанная на принципе максимальной хаотичности поля скорости [13].

В [101] (см. также ссылки в них и более ранние работы [114, 115]) была развита итерационная процедура, близкая как к РГ Вильсона, так и к более традиционной для теории турбулентности технике итерационного усреднения по модам околосеточных масштабов. Другой подобный подход предлагался в [116]. В [117–121] ИК-асимптотика корреляторов скорости изучалась в рамках гипотезы об алгебре флуктуирующих величин, которая является феноменологической формулировкой операторного разложения (см. раздел 3.4), при этом в [117, 118] для анализа двумерной турбулентности использовался аппарат конформно-инвариантных квантовых теорий поля. В [122] для точно решаемой модели турбулентной конвекции изучались высшие порядки ϵ -разложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № 95-0-5.1-30). Н.В. Антонов получал финансовую поддержку ассоциации INTAS в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве (грант INTAS № 93-2492).

Список литературы

1. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Ч. 2 (М.: Наука, 1967)
2. Orszag S A, in *Fluid Dynamics, Les Houches, 1973* (Eds R Balian, J-L Peube) (London: Gordon and Breach, 1977) p. 235
3. McComb W D *The Physics of Fluid Turbulence* (Oxford: Clarendon, 1990); McComb W D *Rep. Prog. Phys.* **58** 1117 (1995)
4. Ландау Л Д, Лишниц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
5. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1984)
6. Коллинз Дж *Перенормировка* (М.: Мир, 1988)
7. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов* (М.: Наука, 1982)
8. Brezin E, Le Guillou J C, Zinn-Justin J, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 6 (Eds C Domb, M S Green) (New York: Academic, 1976) p.125
9. Amit D J *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (New York: McGraw-Hill, 1978)
10. Zinn-Justin J *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (New York: Clarendon, 1996)
11. Попов В Н *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (М.: Атомиздат, 1976)
12. Васильев А Н *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике* (Л.: ЛГУ, 1976)
13. Kraichnan R H *J. Fluid. Mech.* **5** 407 (1959)
14. Wyld H W *Ann. Phys.* **14** 143 (1961); **9** 1728, 1884 (1966)
15. Аджемян Л Ц, Антонов Н В, Васильев А Н *ЖЭТФ* **95** 1272 (1989)
16. De Dominicis C, Martin P C *Phys. Rev. A* **19** 419 (1979)
17. Janssen H K Z. *Phys. B* **23** 377 (1976); Bausch R, Janssen H K, Wagner H Z. *Phys. B* **24** 113 (1976)
18. De Dominicis C *J. Phys. (Paris)* **37** Suppl. C1 247 (1976); De Dominicis C, Peliti L *Phys. Rev. B* **18** 353 (1978)
19. Аджемян Л Ц, Васильев А Н, Письмак Ю М *ТМФ* **57** 268 (1983)
20. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1515 (1964)
21. Martin P C, Siggia E D, Rose H A *Phys. Rev. A* **8** 423 (1973)
22. Захаров В Е, Львов В С *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **18** 1470 (1975)
23. Hohenberg P C, Halperin B I *Rev. Mod. Phys.* **49** 435 (1977)
24. Ronis D *Phys. Rev. A* **36** 3322 (1987)
25. Olla P *Phys. Rev. Lett.* **67** 2465 (1991)
26. Honkonen J, Nalimov M Yu *Z. Phys. B* **99** 297 (1996)
27. Теодорович Э В *Изв. АН СССР. Сер. МЖ* **29** (4) 29 (1987); *ДАН СССР* **299** 836 (1988)
28. Теодорович Э В *ЖЭТФ* **96** 163 (1989)
29. Fournier J-D, Frish U *Phys. Rev. A* **28** 1000 (1983)
30. Вильсон К, Когут Дж *Ренормализационная группа и ϵ -разложение* (М.: Мир, 1975)
31. Yakhot V, Orszag S A *Phys. Rev. Lett.* **57** 1722 (1986)
32. Yakhot V, Orszag S A *J. Sci. Comput.* **1** 3 (1986)
33. Dannevik W P, Yakhot V, Orszag S A *Phys. Fluids* **30** 2021 (1987)
34. Антонов Н В *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **164** 3 (1987)
35. Antonia R A, Satyaprakash B R, Hussian A K M F *J. Fluid. Mech.* **119** 55 (1982)
36. Anselmet F, Gagne Y, Hopfinger E J, Antonia R A *J. Fluid. Mech.* **140** 63 (1984)
37. Кузнецов В Р, Сабельников В А *Турбулентность и горение* (М.: Наука, 1986)
38. Кузнецов В Р, Прасковский А А, Сабельников В А *Изв. АН СССР. Сер. МЖ* **23** (6) 51 (1988)
39. Halperin B I, Hohenberg P C, Siggia E D *Phys. Rev. B* **13** 1299 (1976)
40. Аджемян Л Ц, Васильев А Н, Гнатич М *ТМФ* **74** 180 (1988)
41. Антонов Н В *Вестн. СПбУ. Сер. Физика, химия* (4) 6 (1992)
42. Аджемян Л Ц, Антонов Н В, Ким Т Л *ТМФ* **100** 382 (1994)
43. Аджемян Л Ц, Борисенко С В, Гирина В И *ТМФ* **105** 450 (1995)
44. Антонов Н В *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **169** 18 (1988)
45. Yakhot V, She Z-S, Orszag S A *Phys. Fluids A* **1** (2) 289 (1989)
46. Yakhot V, Smith L M *J. Sci. Comp.* **7** 35 (1992)
47. Антонов Н В, Борисенко С В, Гирина В И *ТМФ* **106** 92 (1996)
48. Аджемян Л Ц и др. *Зап. научн. семин. ПОМИ* **224** 43 (1995)
49. Антонов Н В, Васильев А Н Направлено в ТМФ

50. Львов В С, Препринт № 53 ИАиЭ (Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1977)
51. Белиничер В И, Львов В С *ЖЭТФ* **93** 533 (1987); L'vov V S *Phys. Rep.* **207** 1 (1991)
52. Моисеев С С и др. *ДАН СССР* **271** 856 (1983); Моисеев С С, Тур А В, Яновский В В *ДАН СССР* **279** 96 (1984)
53. Sagdeev R Z et al., in *Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics* (Ed. R Z Sagdeev) (М.: Mir, 1986) p. 138
54. Тур А В, Яновский В В, Препринт ИКИ Пр-1203 (М.: ИКИ АН СССР, 1986)
55. Антонов Н В *ЖЭТФ* **105** 614 (1994)
56. Антонов Н В *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **189** 15 (1991)
57. Антонов Н В *Вестн. СПбУ. Сер. Физика, химия* (3) 3 (1992)
58. Аджемян Л В, Аджемян Л Ц *Зап. научн. семин. ПОМИ* **224** 36 (1995)
59. Smith L M, Reynolds W C *Phys. Fluids A* **4** (2) 364 (1992)
60. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **30** 2400 (1987)
61. Kraichnan R H *J. Fluid. Mech.* **9** 1728 (1966)
62. Fournier J-D, Frish U *Phys. Rev. A* **17** 747 (1978)
63. L'vov V, Falkovich G *Phys. Rev. A* **46** 4762 (1992)
64. Аджемян Л В, Аджемян Л Ц *Вестн. СПбУ. Сер. Физика, химия* (3) 3 (1994)
65. Аджемян Л Ц, Налимов М Ю *ТМФ* **91** 294 (1992)
66. Martin P C, De Dominicis C *Prog. Theor. Phys. Suppl.* (64) 108 (1978)
67. Carati D *Phys. Rev. A* **41** 3129 (1990)
68. Liao W J. *Phys. A* **22** L737 (1989); Ohkitani K *Phys. Fluids A* **2** (9) 1529 (1990); Shivamoggi B J. *Phys. A* **23** 1689 (1990); Novikov E A *Phys. Lett. A* **162** 385 (1992)
69. Яглом А М *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана* **17** 1235 (1981)
70. Lam S H *Phys. Fluids A* **4** (5) 1007 (1992)
71. Zhou Y, Vahala G, Hossain M *Phys. Rev. A* **40** 5865 (1989)
72. Carati D *Phys. Fluids A* **2** 1854 (1990)
73. Giles M J *Phys. Fluids* **6** (2) 595 (1994)
74. Staroselsky I et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 171 (1990)
75. Yakhot V, Orszag S A, She Z-S *Phys. Fluids A* **1** (2) 184 (1989)
76. Yakhot V *Phys. Fluids A* **1** (2) 175 (1989)
77. Yakhot V, Orszag S A *Phys. Fluids* **30** (1) 3 (1987)
78. Eyink G L *Phys. Fluids* **6** (9) 3063 (1994)
79. Borgas M S *Phys. Fluids A* **4** (9) 2055 (1992)
80. Аджемян Л Ц, Антонов Н В *Вестн. СПбУ. Сер. Физика, химия* (2) 53 (1994)
81. Yakhot V *Phys. Rev. A* **23** 1486 (1981)
82. Yakhot V *Phys. Rev. A* **24** 3268 (1981)
83. Levich E *Phys. Lett. A* **79** 171 (1980)
84. Grossmann S, Schnedler E Z. *Phys. B* **26** 307 (1977)
85. Теодорович Э В *ЖЭТФ* **102** 863 (1992)
86. Forster D, Nelson D R, Stephen M J *Phys. Rev. Lett.* **36** 867 (1976); *Phys. Rev. A* **16** 732 (1977)
87. Rubinstein R, Barton J M *Phys. Fluids* **30** 2987 (1987)
88. Carati D, Brenig L *Phys. Rev. A* **40** 5193 (1989)
89. Adzhemyan L Ts et al. *Int. J. Mod. Phys B* **9** 3401 (1995)
90. Ким Т Л, Сердюков А В *ТМФ* **105** 412 (1995)
91. Buša J et al., Preprint JINR E17-95-348 (Dubna: JINR, 1995); Helsinki University Preprint HU-TFT-96-19 (Helsinki: Helsinki University, 1996)
92. Pouquet A, Fournier J-D, Sulem P-L *J. Phys. Lett. (France)* **39** 199 (1978)
93. Adzhemyan L Ts et al. *J. Phys. II France* **5** 1077 (1995)
94. Аджемян Л Ц, Налимов М Ю, Степанова М М *ТМФ* **104** 260 (1995)
95. Волченков Д Ю, Налимов М Ю *ТМФ* **106** 375 (1996)
96. Антонов Н В, Налимов М Ю, Удалов А А, Препринт SPbU PI-11-96 (Санкт-Петербург: СПбГУ, 1996) Направлено в ТМФ
97. Аджемян Л Ц, Налимов М Ю *ТМФ* **96** 150 (1993)
98. Аджемян Л Ц, Борисенко С В, Налимов М Ю *ТМФ* **106** 416 (1996)
99. Аджемян Л Ц, Гнатич М, Стеглик М, Препринт ОИЯИ P17-94-319 (Дубна: ОИЯИ, 1994)
100. Налимов М Ю, Рыжов А К *Вестн. СПбУ. Сер. Физика, химия* (1) 72 (1995)
101. McComb W D, Watt A G *Phys. Rev. A* **45** 3507 (1992); **46** 4797 (1992)
102. Антонов Н В, Борисенко С В, Гирина В И *ТМФ* **107** 47 (1996)
103. Аджемян Л Ц, Васильев А Н, Гнатич М *ТМФ* **58** 72 (1984)
104. Теодорович Э В *ПММ* **52** 218 (1988)
105. Гнатич М *ТМФ* **83** 374 (1990)
106. Fournier J-D, Sulem P-L, Pouquet A *J. Phys. A* **15** 1393 (1982)
107. Аджемян Л Ц, Васильев А Н, Гнатич М *ТМФ* **64** 196 (1985)
108. Samargo S J, Tasso H *Phys. Fluids B* **4** (5) 1199 (1992)
109. Аджемян Л Ц, Волченков Д Ю, Налимов М Ю *ТМФ* **107** 142 (1996)
110. Аджемян Л Ц, Васильев А Н, Гнатич М *ТМФ* **72** 369 (1987)
111. Pelletier G J. *Plasma Phys.* **24** 421 (1980)
112. Аджемян Л Ц и др. *ТМФ* **78** 368 (1989)
113. Adzhemyan L Ts et al. *Czechoslovak J. Phys.* **45** 491 (1995)
114. Rose H A *J. Fluid. Mech.* **81** 719 (1977)
115. Siggia E D *J. Fluid. Mech.* **107** 375 (1981)
116. Eyink G L *Phys. Rev. E* **48** 1823 (1993)
117. Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **396** 367 (1993)
118. Falkovich G, Hannany A *Phys. Rev. Lett.* **71** 3454 (1993)
119. Eyink G L *Phys. Lett. A* **172** 355 (1993)
120. Лебедев В В, Львов В С *Письма в ЖЭТФ* **59** 546 (1994)
121. Антонов Н В *Вестн. СПбУ. Сер. Физика, химия* (2) 74 (1996)
122. Avellaneda M, Majda A J *Commun. Math. Phys. (West Germ.)* **131** 381 (1990)

Quantum field renormalisation group in the theory of developed turbulence

L.Ts. Adzhemyan, N.V. Antonov, A.N. Vasil'ev

St Petersburg State University, Institute of Physics, Department of Theoretical Physics,
ul. Ul'yanovskaya 1, 198904 St Petersburg, Petrodvorez, Russia
Tel. (7-812) 428-75 90
Fax (7-812) 428-72 40
E-mail: adjemyan@phim.niif.spb.su, antonov@phim.niif.spb.su,
vasiljev@phim.niif.spb.su

Quantum field renormalisation group results of the theory of developed turbulence are reviewed. Background information about quantum field renormalisation theory, including operator expansion and the renormalisation of composite operators is given. As an example problem, the stochastic model of isotropic homogeneous turbulence is considered for which, using the renormalisation technique, the existence of infrared scaling with Kholmogorov dimensions is proved. The dimension of composite operators and the infrared asymptotic behaviour of various correlation functions are discussed, and numerical amplitude factors of scaling laws are calculated.

PACS numbers: **03.40.Ge, 47.10.+g**

Bibliography — 122 references

Received 22 June 1994, revised 26 August 1996