

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Микроскопия субволновых структур

В.П. Тычинский

Предлагается уточнение и дальнейшее развитие теории Аббе на основе ряда хорошо известных результатов из теории открытых резонаторов: представления поля в базисе собственных функций оптической системы, рассматриваемой как отрезок эквивалентного линзового волновода, и использования зависимости дифракционных потерь гауссовых пучков высшего порядка от числа Френеля зеркала резонатора для описания вносимых в изображение апертурой объектива искажений. В параксиальном приближении с использованием эрмит-гауссовых функций получены оценки числа степеней свободы изображения внутри площади перетяжки нулевой моды.

PACS numbers: 02.30.-f, 42.90.+m

Содержание

1. Введение (1219).
 2. Теоретическая модель (1221).
 3. Результаты измерений на компьютерном фазовом микроскопе "Эйрискан" (1226).
 4. Заключение (1228).
- Список литературы (1229).

1. Введение

Если сверхразрешение — это одна из возможностей увидеть невидимое в масштабе длины световой волны, то не противоречит ли сама идея его реализации нашему опыту? Действительно, дифракционное изображение точки в оптической системе имеет конечный размер, и попытка различить какие-нибудь детали внутри дифракционного пятна представляется на первый взгляд бессмысленной.

Тем не менее число публикаций по сверхразрешению растет, и в них можно выделить ряд отчетливых направлений, показывающих возможность положительного ответа:

- 1) алгоритмическое, ставящее своей целью восстановление объекта по дифракционно ограниченной или искаженной первичной информации,
- 2) эвристическое, связанное с новыми идеями и инструментальными методами преодоления дифрак-

ционного предела (микроскопия ближнего поля, конфокальная микроскопия),

3) информационное, основанное на использовании в традиционных оптических системах современных технических средств (методы усиления контраста, компьютерная фазовая микроскопия).

В этой публикации мы не ставим своей целью дать обзор проблемы сверхразрешения в целом и ограничимся анализом новых результатов, относящихся к последнему направлению. Кратко остановимся на основных предшествующих работах.

В 1951 г. появились первые публикации по усилению контраста в микроскопии с использованием телевизионной техники. В статьях Р. Аллена [1] и Д. Вайсса [2] начиная с 1981 г. сообщалось о дальнейшем развитии этой техники и наблюдении в микроскопе при большом увеличении с иммерсионным объективом методом усиленного дифференциального, интерференционного и поляризационного контрастов надежно отождествленных протяженных биоструктур и органелл с поперечными размерами до $d = 10$ нм.

Это соответствует для объектива с числовой апертурой $NA = 1,3$ нормированной величине сверхразрешения $S = d_R/d = 20$. Здесь $d_R = 0,61\lambda F/a$ — радиус Рэлея (классический предел разрешения), F — фокусное расстояние, a — радиус апертуры. Обстоятельное описание техники усиления контраста приведено в книге С. Иноуэ [3].

Эти результаты, показывающие принципиальную возможность сверхразрешения в обычных амплитудных изображениях, были подтверждены в ряде последующих работ, а также в фазовых изображениях при когерентном освещении на компьютерном микроскопе "Эйрискан" [4–6].

Отличительной чертой экспериментов Аллена и других авторов являлось получение сверхразрешения в обычных микроскопах при использовании фазоконтрастных и поляризационных методов в сочетании с аналоговыми средствами видеотехники. Это достига-

В.П. Тычинский. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
117454 Москва, просп. Вернадского 78, Россия
Тел. (095) 434-67-92. Факс (095) 434-86-65
E-mail: vladimir@tych.pvt.msu.su

Статья поступила 7 марта 1996 г.,
после доработки 17 июня 1996 г.

лось путем подавления фона, выбора условий освещения, положения компенсатора, анализатора и т.п. Условия получения усиленного контраста, по существу, сводились к расширению динамического диапазона яркости изображения при наблюдении анизотропных биологических объектов в поле с градиентом фазы.

В этих работах не акцентировалось внимание на очевидном противоречии результатов эксперимента и классической дифракционной теории оптических систем [7, 8], а также предполагалось, что увеличение разрешения связано с заменой критерия Рэля критерием Sparrow. Допускалось, что для изображений внутри диска Эйри вполне возможно искажение формы, несоответствие истинным размерам, исчезновение мелких деталей и т.п.

Вполне естественно, что появление сообщений о сверхразрешении стимулировало теоретические исследования в этой области. В 1952 г. Торальдо ди Франция [9] высказал предположение о возможности восстановления деталей объекта за дифракционным пределом. Мы не будем здесь подробно рассматривать результаты последующих работ (их краткий обзор приведен в [10]) и обратим только внимание на предложенное Паском [11] объяснение прохождения через апертуру информации о фурье-компоненте углового спектра, лежащей вне числовой апертуры объектива.

При ограниченном размере поля зрения объектива ширина дифракционного максимума может оказаться достаточно большой для того, чтобы заметная часть энергии рассеянного излучения прошла через апертуру даже в том случае, когда угол дифракции центральной компоненты превосходит апертурный. Следует заметить, что при этом неявно допускалось формирование диаграммы рассеяния и расположение апертуры в дальней зоне. Эти представления, однако, не объясняют присутствие в изображении элементов размерами, существенно меньшими длины волны, которым формально соответствуют нераспространяющиеся волны.

В работе [12] для объяснения сверхразрешения в фазовых изображениях была предложена другая модель, основанная на свойствах дислокаций волнового фронта и эрмит-гауссовых функций, являющихся собственными функциями аксиально-симметричной оптической системы.

В этой модели поле объекта представлялось суммой двух мод $TEM_{0,0}$ и $TEM_{0,2}$. Расстояние d между нуль-линиями при определенном соотношении амплитуд может быть значительно меньше радиуса перетяжки w_0 . На нуль-линиях поля происходят π -скачки фазы, которые при достаточно большом увеличении могут быть локализованы в плоскости изображения. Амплитуда поля в промежуточной точке между нуль-линиями убывает с квадратом расстояния d , что позволило получить простой энергозависимый критерий разрешения $d/w_0 = (S/N)^{-1/2}$, где S/N — отношение сигнал/шум. В этой работе было показано, что действие конечной апертуры проявляется в нарушении амплитудно-фазовых соотношений между модами в плоскости изображения и может приводить к систематическим ошибкам в положении нуль-линий. Если принять, что нуль-линиям поля соответствуют границы абстрактного структурного элемента на поверхности объекта, то минимальная информация о границах субволновой структуры может быть получена при весьма ограничен-

ном числе мод в поле объекта [12]. В этой работе, однако, не исследовалось сверхразрешение в амплитудных изображениях, не использовалось представление изображения внутри диска Эйри по степеням свободы поля и не были даны численные оценки предельного разрешения.

Общая проблема микроскопии — оценка качественного и количественного соответствия объекта его изображению. При сверхразрешении значение этой проблемы существенно возрастает, что подтверждается, например, работами по микроскопии ближнего поля [13–15].

Традиционно основное применение фазовой микроскопии и профилометрии [16–18] связано с определением функции эквивалентной высоты $h(r)$, которая зависит от физических параметров поверхности и "полевого портрета". В простейшем случае она пропорциональна фазе отраженной волны. Однако в случае неоднородных, анизотропных и прозрачных слоистых структур локальное значение фазы не дает информации о реальной поверхности объекта, определяемой физическими параметрами [7, 8], и отображает фазу "полевого портрета". Еще более сложная зависимость этих функций от параметров объекта возникает при размерах структурных элементов, соизмеримых с длиной волны, а также при учете поляризации источника света. Действительно, в теории оптических систем объект задается комплексной функцией поля от координат в плоскости его представления, и полное соответствие такого "полевого портрета" реальному физическому объекту далеко не очевидно. Немногочисленные аналитические решения из теории дифракции показывают зависимость "портрета" от локальных значений импеданса, поляризации падающей волны и других факторов. Поэтому для корректной интерпретации изображений, тем более субволновых, предпочтительна и иногда даже необходима априорная информация.

Численные расчеты [8, 19, 20] поля для простейших моделей дают заметную погрешность уже при нормированных размерах структурных элементов на поверхности объекта $d/\lambda \geq 20$. Прямые зондовые измерения с применением микроскопии "ближнего поля" [13–15] в оптическом диапазоне неоднозначны, не обеспечивают получение комплексных амплитуд поля и поэтому пока не дают реальной возможности получить "полевого портрет" объекта, а моделирование оптических изображений в микроволновом диапазоне [21, 22] основано на ряде допущений и связано с известными экспериментальными проблемами.

Измерения на когерентно-зондовом микроскопе [23, 24] также показали, что при малых d/λ вследствие дифракции на апертуре нарушается линейная зависимость между субволновым объектом и его фазовым изображением. Следовательно, пока приходится примириться с отсутствием простого алгоритма определения соответствия реальной субволновой структуры ее полемому портрету.

Проведенные М. Тотцеком зондовые измерения амплитуды и фазы ближнего поля на диэлектрических моделях в микроволновом диапазоне волн [21, 22] представляют особый интерес, поскольку они показали возможность обнаружения в "полевого портрета" структур с линейным размером вплоть до $0,03 \lambda$, оценить в конкретных случаях степень соответствия объекта "портрету".

В работе [22] приведены также результаты компьютерного моделирования процесса передачи оптической системой портрета фазового объекта. Действие входной апертуры, как это общепринято, отождествлялось с низкочастотным фильтром. Расчеты привели автора [22] к заключению, что значительная доля исходной информации теряется на апертуре и близкие к оригиналу изображения могут быть получены только при выполнении следующих условий:

1) высоком фазовом контрасте на границах структурного элемента (близкая к π разность фаз дифрагированной волны по обе стороны от границы);

2) для структурных элементов в виде протяженной щели ее ширина должна быть не менее $0,25 \lambda$;

3) изображения поляризационно зависимы. Различия между фазовым изображением и оригиналом возрастают при уменьшении отношения d/λ . Согласно расчету уже при $d/\lambda = 0,4$ ширина щели в изображении значительно превышает реальную.

В итоге из [21, 22] следовало, что несмотря на наличие в амплитуде и фазе ближнего поля правдоподобной объектной информации для размеров вплоть до $d/\lambda = 0,03$, в плоскости изображения она доступна только при $d/\lambda \geq 0,25$. Это эквивалентно утверждению, что в фазовых изображениях коэффициент сверхразрешения S (превышения над критерием Рэлея) не более двух.

Этот вывод вполне естествен, поскольку во всех известных нам работах по теории оптических систем не принимались во внимание энергетические соотношения, а дифракция на апертуре отождествлялась с фильтрацией пространственных частот, что с необходимостью приводит к классическому критерию разрешения и противоречию с экспериментом.

Из приведенного выше далеко не полного обзора работ по проблеме сверхразрешения следует необходимость выделения задач разного уровня, заслуживающих отдельного рассмотрения, таких, как

1) физическое и теоретическое объяснение сущности явления, оценка роли энергетических соотношений, соглашения о концепции, терминологии, модели и критерии разрешения;

2) разработка последовательной теории сверхразрешения;

3) определение "полевого портрета" в базисе собственных функций оптической системы и критериев соответствия "полевого портрета" реальному физическому объекту с учетом специфики функциональных изображений (фазовых, поляризационных, градиентных и т.д.);

4) анализ адекватных технических средств для реализации сверхразрешения в различных функциональных изображениях;

5) сравнение экспериментальных результатов с основными выводами теории.

Пока нет удовлетворительного объяснения всех экспериментальных результатов. Ниже мы обсудим возможные модели и пути решения проблемы сверхразрешения, уделим основное внимание физической сущности явления, наметим пути для создания строгой теории, приведем новые результаты по измерению субволновых структур на компьютерном фазовом микроскопе и проведем качественное сравнение известных нам экспериментальных данных с предлагаемой физической концепцией.

2. Теоретическая модель

В теории оптических систем [8] объект представляется разложением либо по плоским волнам, либо по собственным функциям оптической системы. Эти функции являются решением интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром и могут быть представлены произведением двух функций от поперечных координат x, y . Для произвольной функции $o(x_0, y_0)$, например для поля объекта в базисе $\Phi_{n,m}$, можно определить амплитуды $O_{n,m}$:

$$o(x_0, y_0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} O_{n,m} \Phi_n(x_0) \Phi_m(y_0). \quad (1)$$

В работах Торальдо ди Франчия, Ландау и Поллака, обзор которых приведен в [8], показано, что для малого поля предмета с размером L решения для собственных функций $\Phi_n(x_0)$, $\Phi_m(y_0)$ имеют вид аналога угловых сфероидальных функций с ограниченным спектром собственных значений $\gamma_{n,m}$ и поле изображения может быть представлено конечной суммой

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \gamma_n \gamma_m O_{n,m} \Phi_n(x) \Phi_m(y) \cong \\ &\cong \sum_{n,m=0}^q \gamma_n \gamma_m O_{n,m} \Phi_n(x) \Phi_m(y). \end{aligned} \quad (2a)$$

Конечное число членов в (2a) связано с тем, что модули собственных значений $\gamma_{n,m}$ при

$$n, m \leq q = \frac{La}{\lambda F} \quad (2b)$$

резко убывают и содержащаяся в остальных членах суммы информация теряется.

Ряд (2a) можно интерпретировать [8] как разложение функции $E(x, y)$ по ее составляющим в бесконечномерном гильбертовом пространстве, в котором функции $\Phi_{n,m}$ образуют базис. Каждый из членов ряда представляет собой одну степень свободы поля изображения. Фильтрующее действие апертуры проявляется в ограничении спектра собственных значений $\gamma_{n,m}$.

Этот результат позволяет подойти к проблеме сверхразрешения с другой точки зрения, связанной с вычислением дополнительных или "внутренних" степеней свободы внутри диска Эйри.

В этой работе мы продолжим намеченный в [12] подход к физическому объяснению наблюдаемого сверхразрешения и будем также использовать упомянутые выше плодотворные понятия собственных функций оптической системы и степеней свободы изображения для доказательства принципиальной возможности увеличения степеней свободы свыше предела (2b).

Для определения собственных функций системы обратимся к упрощенной оптической схеме микроскопа на рис. 1a, где плоское зеркало, расположенное в фокальной плоскости $z = 0$, освещается через линзу l_1 гауссовым пучком основной моды $TEM_{0,0}$ с радиусами перетяжки w_0 в плоскости объекта и W_0 в плоскости линзы. Зеркально отраженный пучок проходит через линзу в обратном направлении и в плоскости изображения z_i имеет радиус перетяжки W_i . Оптическим эквивалентом схемы на рис. 1a является открытый резонатор или фрагмент

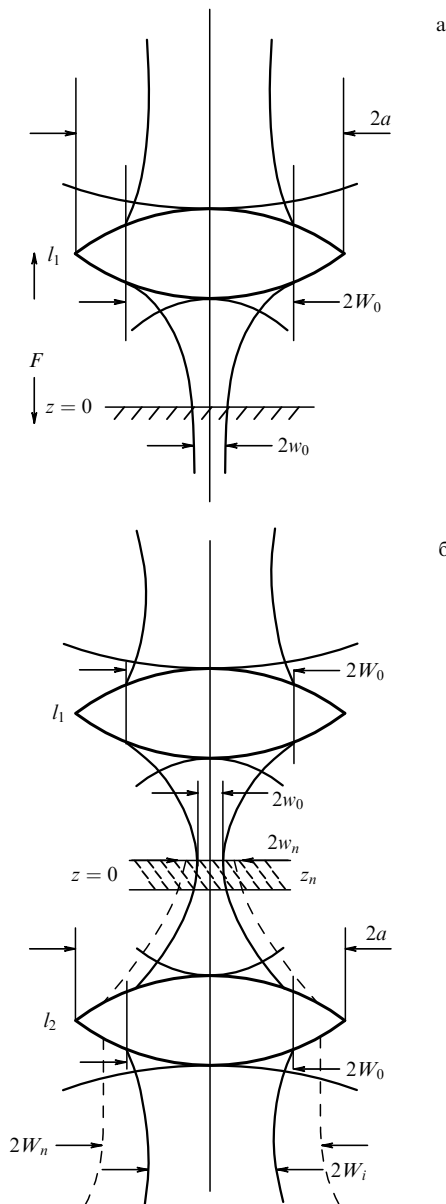


Рис. 1. (а) Упрощенная оптическая схема микроскопа: l_1 — объектив, w_0 и W_0 — радиусы перетяжек нулевой моды в плоскости объекта и линзы, a — радиус апертуры. (б) Фрагмент линзового волновода, являющегося оптическим эквивалентом схемы на рис. 1а: w_n и W_n — радиусы n -й моды, W_i — радиус перетяжки нулевой моды в плоскости изображения, z_n — граница ближней зоны, внутри которой амплитуда n -й моды экспоненциально убывает.

линзового волновода на рис. 1б. Собственные функции оптических резонаторов подробно описаны в литературе [8, 25–28], и для устойчивых конфигураций в параксиальном приближении они представляют собой полный ортонормированный набор эрмит-гауссовых или лаггер-гауссовых мод с двумя целочисленными индексами n , m и p , l соответственно для декартовой и полярной систем координат:

$$U_{n,m} \cong H_n\left(\sqrt{\frac{2}{w}}x\right) H_m\left(\sqrt{\frac{2}{w}}y\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right),$$

$$U_{p,l} \cong L_p^l\left(2\frac{\rho^2}{w^2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \sin l\phi \\ \cos l\phi \end{array} \right\} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right), \quad (3)$$

где $H_{n,m}$ — полиномы Эрмита, L_p^l — полиномы Лагерра.

Условие параксиальности эквивалентно выполнению неравенства $\lambda^2/2\pi^2 w_0^2 \ll 1$ или предположению, что характерный масштаб изменения поля $d_{x,y}$ удовлетворяет условию

$$\frac{k d_{x,y}^2}{2z} \gg \pi. \quad (4)$$

В [26] было показано, что пренебрежение членами третьего порядка в фазовом множителе дифракционного интеграла при вычислении поля в конфокальном резонаторе эквивалентно ограничению чисел Френеля

$$N_F \ll (NA)^2. \quad (5)$$

Из приведенных ниже оценок будет видно, что неравенства (4) и (5) не выполняются в реальных условиях и, следовательно, функции (3) не являются точными решениями для оптической системы с большими числами Френеля. Мы, тем не менее, будем рассматривать (3) в качестве базиса, полагая, что использование более точных решений, например в виде сфероидальных или эллипсоидальных функций [8], несущественно отразится на основных выводах.

Обратимся снова к рис. 1б и предположим, что в фокальной плоскости $z = 0$ располагается прозрачный фазовый транспарант с передаточной функцией $T(x_0, y_0)$, не влияющий на базис (3) и выполняющий только функцию пространственного модулятора. Созданное наведенными на структуре поверхности транспаранта токами поле $E_0(x, y, 0) = T(x_0, y_0) e(x, y)$ и поле $e(x, y)$ падающей волны в ограниченной области удовлетворяют граничным условиям в эквивалентной плоскости представления $z = 0$. Поле $E_0(x, y, 0)$ может иметь в общем случае локальные компоненты с пространственным масштабом изменения $d \ll \lambda$ и являться источником рассеянных волн в виде гауссовых пучков более высокого порядка.

Обозначим $w_{n,m}$, $W_{n,m}$ радиусы соответствующих мод в плоскости $z = 0$ и линзы l_2 . С учетом сделанных ранее замечаний будем полагать, что собственными функциями отрезка линзового волновода и эквивалентного открытого резонатора с транспарантом $T(x, y)$ является набор эрмит-гауссовых функций

$$U_{n,m}(x, y, z) = \frac{C_{n,m}}{(1 + z^2/b^2)^{1/2}} \Phi_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \Phi_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{jk}{2R}(x^2 + y^2)\right] \exp[j(m + n + 1)\phi], \quad (6)$$

где

$$C_{n,m} = \left(\frac{2}{w_0^2 \pi 2^{m+n} m! n!}\right)^{1/2}, \quad \phi = \arctan \frac{z}{b}, \quad w_0 = \sqrt{\frac{2b}{k}}, \quad (7)$$

b — конфокальный параметр.

Подобно (1) представим векторное поле $\mathbf{E}_0(x_0, y_0, 0)$ рядом эрмит-гауссовых функций [8, 26–28]; в дальнейшем для упрощения анализа ограничимся одной компонен-

той поляризации и опустим обозначения индекса:

$$E_x(x_0, y_0, 0) = \sum_{n,m} \frac{A_{n,m} \sqrt{2}}{\sqrt{w_0^2 \pi 2^{m+n} m! n!}} \Phi_n\left(\frac{\sqrt{2}x_0}{w_0}\right) \Phi_m\left(\frac{\sqrt{2}y_0}{w_0}\right). \quad (8)$$

Коэффициенты $A_{n,m}$ определяются формулой

$$A_{n,m} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{w_0^2 \pi 2^{m+n} m! n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x_0, y_0) \times \\ \times \Phi\left(\frac{\sqrt{2}x_0}{w_0}\right) \Phi_m\left(\frac{\sqrt{2}y_0}{w_0}\right) dx_0 dy_0, \quad (9)$$

а поле в произвольной плоскости z можно представить в виде

$$E(x, y, z) = \sum_{n,m} A_{n,m} U_{n,m}(x, y, z). \quad (10)$$

Следовательно, объект в данном случае преобразует основную моду $U_{0,0}(x, y)$ в "спектр" $U_{n,m}(x, y)$ по индексам m, n .

Представление поля в виде распространяющихся неоднородных волн (6) справедливо для ограниченных значений индексов. При больших m, n поперечная компонента волнового вектора будет превышать $2\pi/\lambda$, и на конечном расстоянии z_n амплитуда будет экспоненциально убывать.

Из теории резонатора [8, 25–27] известно, что величина дифракционных потерь зависит в основном от числа Френеля $N_F = a^2/b\lambda$. Для оценки сверхразрешения и дифракционных потерь для мод высшего порядка нам понадобятся значения эффективных радиусов мод $w_{n,m}$. В симметричном почти сферическом резонаторе с расстоянием между зеркалами $2F$ размер пятна основной моды в плоскости $z = 0$ при достаточно большом увеличении $M = W_0/w_0$ равен [25]:

$$w_0 \cong \frac{F\lambda}{\pi W_0},$$

где W_0 — радиус $TEM_{0,0}$ моды на зеркале. Радиус перетяжки w_0 для $W_0 \cong a$ приблизительно в 2 раза меньше радиуса диска Эйри d_R , который общепринят в качестве критерия разрешения.

Начнем с простой двухмодовой модели [12] и покажем, что ограниченная информация о координатах границ субволновой структуры $x_{1,2} = \pm d/2$ может быть передана при некоторых условиях в фазовом изображении в виде π -скачков фазы. В одномерном случае для полевого портрета в виде

$$E_0(x) = U_0(x) + a_2 U_2(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{w_0} \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \left[\frac{4x^2}{w_0^2} - 1 \right] \exp(2j\phi) \right\} \quad (11)$$

расстояние d между нулевыми линиями зависит от амплитуды a_2 :

$$\frac{d}{w_0} = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{a_2} \right]^{1/2}.$$

Предположим, что оптическая система не вносит амплитудно-фазовые искажения в полевого портрет $E_0(x)$. Тогда в сопряженной с $z = 0$ плоскости изображения z_i , где $\phi = \arctan z_i/b = 0$, нормированное расстояние $D_i/W_i = d/w_0$ останется прежним и может быть измерено при достаточно большом увеличении, когда $D_i \gg \lambda$. При дефокусировке или при наличии фазовых искажений, когда $\phi \neq 0$, в окрестности $x_{1,2} = \pm d/2$ поле имеет конечное минимальное значение и координаты минимумов становятся комплексными величинами. Поле $E_0(x)$ в точках нулей $x_{1,2}$ испытывает π -скачки фазы, что может быть интерпретировано как пересечение линии дислокации волнового фронта, в окрестности которой велик градиент фазы.

Из этого частного примера следует, что ограниченная информация о субволновой структуре может быть получена даже при незначительном увеличении числа внутренних степеней свободы поля. На этом простом примере можно также показать принципиальное отличие фазовой и амплитудной информации, получаемой из полевого портрета (11), и влияние энергетических соотношений между компонентами поля. При уменьшении расстояния d контраст амплитуды в окрестности $x = 0$ убывает с квадратом d/w_0 , в то время как π -скачки в $\arg E_0(x)$ сохраняются при любых значениях d/w_0 . Предположим далее, что вследствие роста дифракционных потерь с номером моды нормированная амплитуда a_2 в плоскости изображения оказалась меньше критического значения $\sqrt{2}$. В этом случае информация о нуль-линиях в полевого портрете будет полностью потеряна.

Рассмотрим более общий случай неограниченного числа мод и для этого определим зависимость эффективных радиусов перетяжек w_n мод высшего порядка от одного индекса моды n . Эффективный радиус w_n четной n -й моды определим условием

$$\frac{\Phi_n(w_n)}{\Phi_n(0)} = \frac{H_n(w_n)}{H_n(0)} \exp\left[-\left(\frac{w_n}{w_0}\right)^2\right] = e^{-1}. \quad (12)$$

Для численной оценки w_n при малых n можно использовать приведенные в работах [25, 27] графики функций Φ_n , а для больших n — представление [8] полиномов Эрмита рядом по степеням аргумента $t = \sqrt{2}w_n/w_0 = \sqrt{2}G_n$:

$$H_n(t) = 2^n t^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} t^{n-2} + \dots, \quad (13)$$

$$H_n(0) \cong 2^{n/2} (n!)^{1/2}.$$

При достаточно больших индексах n и нормированных радиусах мод $G_n \gg 1$ в ряде (13) можно ограничиться первым членом и в этом приближении $G_n(n)$ в неявном виде определяется уравнением

$$1, 2n - \frac{n}{2} \ln n + n \ln G_n - G_n^2 + 0, 54 = 0. \quad (14)$$

График зависимости G_n приведен на рис. 2. Там же пунктиром показана ее аппроксимация функцией $G_n \cong n^{1/2}$.

Далее рассмотрим закономерности в пространственном изменении мод с большими индексами n и обратим внимание на важное для последующих выводов обстоятельство. В фиксированном сечении $z = 0$ при увеличении

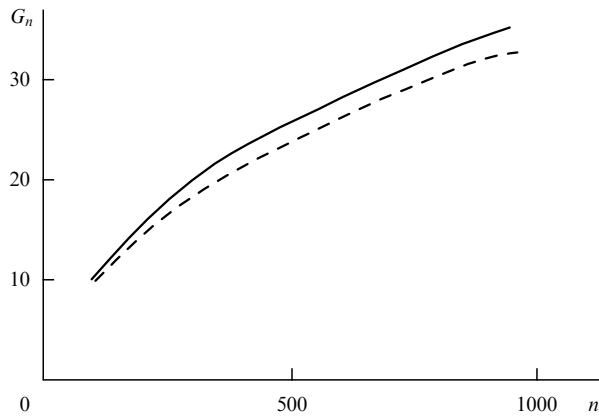


Рис. 2. Зависимость нормированного радиуса n -й моды $G_n = w_n/w_0$ от индекса n . Пунктиром показана аппроксимация функцией $G_n = \sqrt{n}$.

n одновременно с ростом w_n медленно уменьшается среднее расстояние между смежными нулями функции $\Phi_n(\sqrt{2x}/w_0)$ вдоль координаты x . Для примера на рис. 3 показаны графики функций $n = 0, 2, 12$ из книги Ю.А. Ананьева [27], из которых следует приблизительно двукратное убывание периода D_{12} функции Φ_{12} по сравнению с D_2 . Естественно, что функции $\Phi_n(\sqrt{2x}/w_0)$ не являются строго периодическими на отрезке $\pm w_n$, но при больших n аperiodичность становится несущественной.

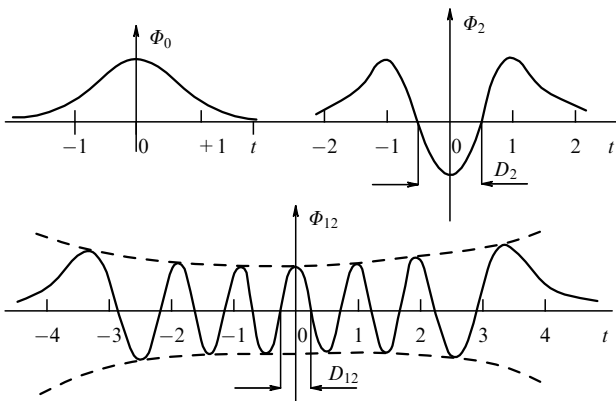


Рис. 3. Графики эрмит-гауссовых функций с $n = 0, 2, 12$. Виден квазипериодический характер функций на отрезке $-1 \leq t \leq 1$ при увеличении n и уменьшении периода D_n .

Число нулей функции $\Phi_n(\sqrt{2x}/w_0)$ на отрезке $2w_n$ равно n , и средняя величина полупериода D_n при больших n равна $D_n = 2w_n/n$. Обозначим $S(n)$ число нулей на отрезке $-w_0 \leq x \leq +w_0$, полагая их распределение равномерным. Тогда для числа нулей или полупериодов $S(n)$ функции $\Phi_n(\sqrt{2x}/w_0)$ в пределах диаметра $2w_0$ в том же приближении получим

$$S(n) \cong \frac{n}{G_n} \cong n^{1/2} \cong G_n. \quad (15)$$

Функции

$$\Phi_s\left(\frac{\sqrt{2x}}{w_0}\right) \cong \begin{cases} \sin\left(\frac{s\pi x}{w_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s\pi x}{w_0}\right) \end{cases} \quad (16a)$$

при $S(n) = 0, 1, 2, \dots, S(n_{\max})$ и соответствующей перенормировке можно рассматривать в качестве нового базиса конечной размерности. В этом базисе поле

$$E_s(x) = \sum_{s=0}^S A_s \Phi_s(x) \quad (16б)$$

может быть представлено на интервале $-w_0 < x < +w_0$ рядом по функциям (16а), в котором s имеет смысл индекса собственных функций $\Phi_s(x)$ внутри диаметра перетяжки нулевой моды $2w_0$. Из (15) следует, что индексы $s = n^{1/2}$ и только ограниченное число мод ряда (10) дает вклад в $E_s(x)$. Приведенные соображения о возможности существования ограниченного базиса (16а) внутри полного набора функций (10) необходимы нам для представления поля внутри перетяжки нулевой моды.

Число $S(n_{\max}) \cong G_n(n_{\max})$ можно также интерпретировать как параметр сверхразрешения или число "внутренних" степеней свободы поля, поскольку оно определяет минимальный полупериод D_n :

$$D_n = 2G_n \frac{w_0}{n} \cong \frac{2w_0}{G_n(n_{\max})}. \quad (17)$$

Эти же рассуждения относятся к распределению поля по координате y , и полное максимальное число "внутренних" степеней свободы равно

$$G^2(n_{\max}) \cong n_{\max}.$$

Из (17) можно получить оценку границы z_n , на которой выполняется равенство $D_n(z_n) = 2z_n \lambda n^{-1/2} \times (\pi w_0)^{-1} = \lambda/2$. Интервал z_n , на котором амплитуда убывает экспоненциально, растет с индексом моды:

$$z_n \cong \frac{\pi w_0 n^{1/2}}{4} \cong \frac{\lambda n^{1/2}}{4NA}.$$

Изменение амплитуды на этом интервале определяется экспонентой с показателем $\pi z/D_n(z) \cong \pi w_0 n^{1/2}/2\lambda \cong n^{1/2}/2NA$.

Из рисунка 2 видно, что для получения 10-кратного сверхразрешения необходимо иметь в изображении около 100 мод по одной координате, а радиус моды w_{100} при этом только в 10 раз больше радиуса w_0 .

К количественным оценкам в приведенных формулах следует относиться с осторожностью вследствие отмеченного противоречия с параксиальным приближением и принятыми без оценок допущениями. Но мы полагаем, что основные качественные соотношения и выводы сохраняют свою силу и при более точном анализе.

К физической интерпретации функции $S(n_{\max})$ как числа внутренних степеней свободы изображения мы вернемся позже, а основное внимание сейчас обратим на дифракционные потери, которые определяют число эффективных мод $0 < n < n_{\max}$ и наибольший радиус значимой моды $W_n \leq W_{n_{\max}}$ на выходе оптической системы. Существенное различие рядов (2а) и (16б) состоит в критериях ограничения числа членов разложения.

Для грубой оценки $S(n_{\max})$ можно исходить из равенства радиуса n -й моды в плоскости линзы ее радиусу $W_{n_{\max}} = a$. Принимая во внимание, что $w_0 = \lambda F / \pi W_0$, получим

$$S(n_{\max}) \cong \frac{a}{W_0} = N_F^{1/2} \left(\frac{\pi w_0}{\sqrt{\lambda F}} \right) \cong N_F^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{M}}. \quad (18)$$

Из (18) следует естественное увеличение n_{\max} с ростом числа Френеля N_F .

Получить более точную зависимость n_{\max} от параметров системы можно, приняв во внимание приведенную в [8, 27, 28] связь комплексных амплитуд $A_{n,m}$ внутри и $B_{n,m}$ на выходе открытого резонатора:

$$\bar{B}_{n,m} = \bar{A}_{n,m} \exp(-j\alpha - \beta). \quad (19)$$

Функции $\alpha(N_F, n, m)$ и $\beta(N_F, n, m)$ возрастают с n, m и описывают амплитудно-фазовые искажения, вносимые линзой в поле изображения $\mathbf{E}(x, y)$. Соответствующие допустимые уровни $\alpha \leq \hat{\alpha}$ и $\beta \leq \hat{\beta}$ могут быть установлены на основании расчета или эксперимента. Если $\hat{\beta} < \hat{\alpha}$, то ограничение индексов по фазе наступает раньше, чем по амплитуде, и в изображении фазовые искажения преобладают над амплитудными.

Отсутствие в изображении мод с $n \geq n_{\max}$ приводит к ограничению сверхразрешения $S(n_{\max})$. Для количественной оценки влияния параметров оптической системы на $S(n_{\max})$ необходимо иметь зависимость потерь для больших значений индексов.

Приведенная на рис. 1б схема для $W_0 \gg w_0$ близка по конфигурации к полусферическому резонатору. К сожалению, аналитические зависимости потерь от индексов мод для неконфокальных резонаторов нам неизвестны, и мы получим их косвенным путем. В [8, 27, 28] приведены формулы Л.А. Вайнштейна для плоскопараллельного резонатора с круглыми зеркалами:

$$\alpha_{l,p} = \frac{8k_{l,p}^2 \delta (m + \delta)}{[(m + \delta)^2 + \delta^2]^2}, \quad \beta_{l,p} = \frac{m}{4\delta} \alpha_{l,p}, \quad (20)$$

где $m = (8\pi N_F)^{1/2}$, $\delta = 0,84$, $k_{l,p}$ — p -й корень функции Бесселя 1-го порядка.

Для конфокальной конфигурации можно также использовать приведенные в [8] формулы Слепяна:

$$\alpha_{l,p} = \frac{2\pi(8\pi N_F)^{2p+l+1} \exp(-4\pi N_F)}{p!(p+l)!},$$

$$\beta_{l,p} = (2p+l+1) \alpha_{l,p} \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

В дальнейшем мы не будем обращать внимания на различие в индексах n, m и p, l несмотря на то, что радиальный и азимутальный индексы в цилиндрической системе не эквивалентны.

Отметим, что формулы (21) дают в данном случае завышенные значения индексов $p(N_F)$ по сравнению с формулой (20). Из формул видно, что фазовые искажения преобладают над амплитудными, и поэтому оценку максимальных значений индексов для заданного уровня искажений следует производить по фазе. Численные оценки показывают, что при $l = 0$ и $p \gg 1$ зависимости $p_{\max}(N_F)$ для (20) и (21) достаточно хорошо аппроксимируются выражениями

$$p_{\max} = 0,4 N_F, \quad (22a)$$

$$p_{\max} = 5 N_F. \quad (22б)$$

Различие в коэффициентах связано с тем, что потери в конфокальном резонаторе на порядок меньше, чем в резонаторе с плоскими зеркалами.

Используя приближение (15) $S = n^{1/2}$ и полагая $n = p$, получаем простую зависимость предельного сверхразрешения от числа Френеля:

$$S_p(N_F) = (C N_F)^{1/2}, \quad (23)$$

где $C \approx 0,4 \div 5$. На рисунке 4 приведены соответствующие графики.

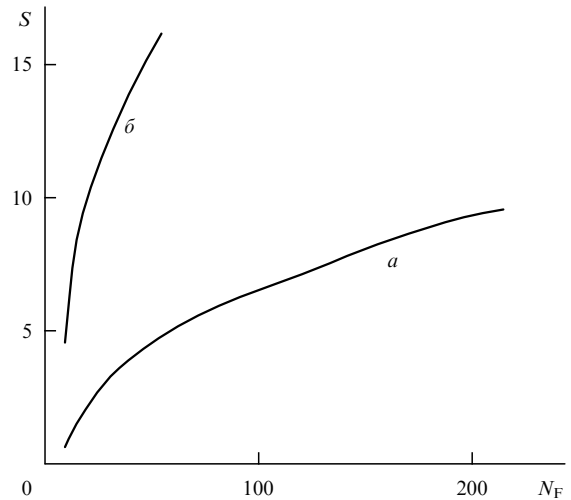


Рис. 4. Зависимость предельного сверхразрешения от числа Френеля: a — по формуле Вайнштейна [28], $б$ — по формуле Слепяна [8].

Для реализации $S = 10$ достаточно $N_F = 250$, что при $NA = 1$ и $\lambda = 633$ нм дает вполне реалистичные значения диаметра входной апертуры $2a = 0,32$ мм.

Рассмотрим, далее, влияние на сверхразрешение дефокусировки, поскольку она может быть еще одной причиной нарушения фазовых соотношений между модами.

Действительно, из (7) следует возрастающая с n, m зависимость фазы n, m -моды от аксиальной координаты z :

$$\varphi(z) = (m + n + 1) \arctan \frac{z}{b}.$$

Сдвиг фазы n, m -моды относительно нулевой

$$d\varphi_{n,m} = \varphi_{n,m} - \varphi_{0,0} = (m + n) \arctan \frac{z}{b} \quad (24)$$

исчезает только в сопряженных плоскостях перетяжек $z = 0$ и $z = z_i$. При изменении знака смещения dz плоскости объекта относительно фокальной плоскости разность фаз $d\varphi_{m,n}$ также меняет знак, что может визуально восприниматься как инверсия фазового изображения.

Эквивалентный конфокальный параметр b для концентрического резонатора близок к нулю, и поэтому $d\varphi_{m,n}$ при дефокусировке $z \gg b$ асимптотически приближается к $(n + m)\pi/2$. Для получения точного изображения необходимо сохранение исходных амплитудно-фазовых соотношений. Поэтому с возрастанием n, m соответственно увеличиваются требования к качеству объекти-

вов и точности фокусировки. Нетрудно убедиться, что при дефокусировке в пределах стандартной глубины резкости $dz \cong \lambda/2(NA)^2$ фазовые сдвиги будут намного превышать π .

Остановимся теперь на важном для более полного понимания проблемы понятии степеней свободы поля в изображении. В дифракционной теории оптических изображений Аббе [7, 8] число независимых элементов q согласно (2а) в строке (или столбце) равно отношению линейного размера поля к радиусу кружка рассеяния в изображении точки. В нашей модели на рис. 1б ось z эквивалентного резонатора определяет положение центра гауссовых пучков и нулевой моды. На первый взгляд в этой модели есть выделенная ось, что противоречит известному [7] требованию изопланарности оптической системы. Но при большом увеличении ($W_0 \gg w_0$) конфигурация эквивалентного резонатора близка к концентрической, в которой положение оптической оси менее детерминировано. Вполне естественно, что при смещенном положении точки x от оптической оси в плоскости линзы появляется дополнительное ограничение на максимальный радиус $W_n \cong a - x$ и соответственно на пространственное разрешение. Это обстоятельство позволяет частично устранить отмеченное противоречие и допускает возможность следующей интерпретации полученных результатов.

Предположим, что в концентрическом резонаторе на рис. 1б сосуществуют $q^2 = q_x q_y$ независимых нулевых мод $\Phi_{0,v}(x)$, $\Phi_{0,u}(y)$, где $v, u \leq q$, которые являются аналогом вытянутых угловых сфероидалных функций [8] с различными ориентациями волновых векторов $\mathbf{k}_{v,u}$ в пределах телесного угла, приблизительно равного $(a/F)^2$. С этой точки зрения ряд

$$\mathbf{E}(x, y) = \sum_{v,u}^q \mathbf{B}_{0,0,v,u} \Phi_{0,v}(x) \Phi_{0,u}(y) \quad (25)$$

можно интерпретировать [8] как разложение функции $E(x, y)$ по нулевым модам в гильбертовом пространстве, в котором функции $\Phi_{0,v,u}(x, y, z)$ "внешних" степеней свободы образуют базис. Размерность пространства равна q^2 — числу внешних степеней свободы изображения.

В каждом из q состояний поля (25) существует конечное подмножество $S(n)^2 \cong n_{\max}$ эффективных внутренних степеней свободы, связанных, например, с модами $\Phi_s(x, y)$ высших порядков (15). Они образуют конечномерное гильбертово подпространство в базисе $\Phi_{n,m}$, и согласно графикам на рис. 4 число степеней свободы по каждой из координат определяется числом Френеля N_F оптической апертуры.

В заключение этого раздела заметим, что, по нашему мнению, наиболее важным результатом приведенного выше анализа является вывод о конечных амплитудах распространяющихся мод высокого порядка, обеспечивающих принципиальную возможность увеличения числа степеней свободы изображения, а также заключение о значительно более широкой полосе пропускаемых пространственных частот при корректной интерпретации действия входной апертуры. Представление поля в базисе оптической системы позволяет в приближении двухмодовой модели объяснить передачу минимальной информации о субволновом поле портрете и показать влияние амплитудно-фазовых искажений.

Однако в предложенной физической концепции, не подтвержденной последовательным расчетом, есть важные положения, заслуживающие в будущем отдельного рассмотрения. Прежде всего необходимо убедиться в том, что точные решения для собственных функций не внесут существенных поправок в полученные результаты. Естественно, что энергетический вклад высших компонент в (25) уменьшается с увеличением индекса, и поэтому одним из условий реализации сверхразрешения является выделение в поле изображения слабых компонент на фоне относительно интенсивных мод низшего порядка. В методе усиления контраста [1–3] этого добиваются путем компенсации фона и расширения динамического диапазона изменения яркости изображения, а в компьютерной фазовой микроскопии — путем измерения локальных значений фазы в точках малой интенсивности интерференционного поля. Отметим также, что использование мод высших порядков позволяет объяснить, каким образом в изображении передается информация о высших спектральных компонентах полевого портрета, формально соответствующих экспоненциально затухающим плоским волнам при $D_n \ll \lambda$.

3. Результаты измерений на компьютерном фазовом микроскопе "Эйрискан"

В оптической схеме компьютерного фазового микроскопа "Эйрискан" [29] использована модифицированная схема интерферометра Линника с модуляцией фазы в опорном плече. В качестве источника света применялся гелий-неоновый лазер ($\lambda = 633$ нм), а для измерения локальных значений фазы интерференционного сигнала использовались координатно-чувствительный приемник — диссектор и аналого-цифровой преобразователь. Программное обеспечение позволяло получать псевдоцветные топограммы, сечения, трехмерные изображения, производить статистическую обработку с помощью стандартных пакетов, регистрировать в произвольно выбранных точках динамические процессы, производить их фурье-анализ и т.д. Оптическая схема прибора показана на рис. 5.

Калибровка размеров поля осуществлялась по аттестованным дифракционным решеткам с шагом 0,85 мкм. В микроскопе использовались сменные объективы с (10–100)-кратным увеличением, но основные измерения производились с объективом 100/0,9 фирмы "Цейс". Общее оптическое увеличение достигало 3500 и зуммированием можно было выделять фрагменты изображения размером до 300×300 нм при минимальном размере пиксела 3 нм.

Ниже приведены новые результаты, полученные Г.Э. Куфалем, которые были ориентированы на выявление основных факторов, влияющих на сверхразрешение. Более обстоятельный анализ измерений объектов различной природы, подтверждающих, в частности, в ряде случаев хорошее соответствие между изображением и объектом для размеров структур 100–2000 нм, приведен в работах [29–33].

Отождествление фазового изображения с реальной структурой значительно облегчалось при больших размерах и наличии априорной информации. Так, например, измерения профиля оптически неоднородных фазосдвигающих масок левинсоновского типа [34] дали вполне правдоподобные результаты, несмотря на сложность

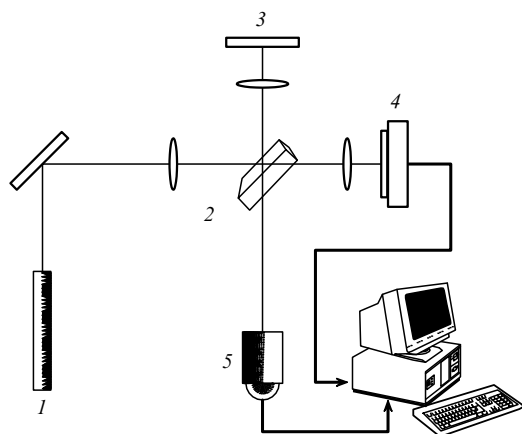


Рис. 5. Оптическая схема компьютерного фазового микроскопа "Эйрискан" [29]: 1 — одномодовый гелий-неоновый лазер, 2 — светоделитель, 3 — объект, 4 — референтное зеркало с пьезокорректором, 5 — диссектор.

структуры. Эти измерения подтвердили перспективность применения компьютерных фазовых микроскопов для мониторинга полупроводниковых интегральных схем [30], а также для измерения субмикронных ширин линий.

С помощью микроскопа "Эйрискан" практически на любой полированной, хорошо отражающей поверхности можно было обнаружить следы ее обработки, микровключения и другие дефекты с линейными размерами порядка единиц микрон. При последующем зуммировании фрагментов в изображениях становились заметны все более мелкие структуры, и при линейных размерах фрагментов 200–300 нм во многих случаях обнаруживались протяженные структуры шириной в несколько десятков нанометров.

Существенно труднее оказалась интерпретация изображений биообъектов, для которой еще более отчетливо проявилась необходимость профессионального опыта, а также априорной информации. В растительных клетках хорошо различалось контрастное ядро, стенки, а также митохондрии. В изображении клетки гриба *Coriolus hirsutus* удалось расшифровать структуру бислойной пептидно-липидной стенки с толщиной слоев 50 и 80 нм [31] и обнаружить распределение хроматина в бактерии *E. coli*.

На рисунке 6а показана топограмма вакцины вируса оспы *Smallpox* с поперечным размером около 400 нм. Следует обратить внимание на характерные для вирусов субъединицы с видимым размером около 30 нм.

На рисунке 6б приведен профиль сечения *Ricctesia provazecii*, подтверждающий возможность регистрации контрастных элементов структуры с перепадом эквивалентной высоты 220 нм и линейными размерами менее 50 нм. Но при определенных условиях в изображении можно было также наблюдать артефакты в виде характерных концентрических колец, связанных с бликами и интерференцией. Следует, однако, заметить, что они по форме, размерам и эквивалентной высоте заметно отличались от структур, приведенных на рис. 6. Изображения были чрезвычайно чувствительны к точной фокусировке, составлявшей малую долю от номинальной глубины резкости [7] $dz = \lambda/2[NA]^2$.

Особый интерес представляли измерения латексных сфер, которые во многих случаях используются в

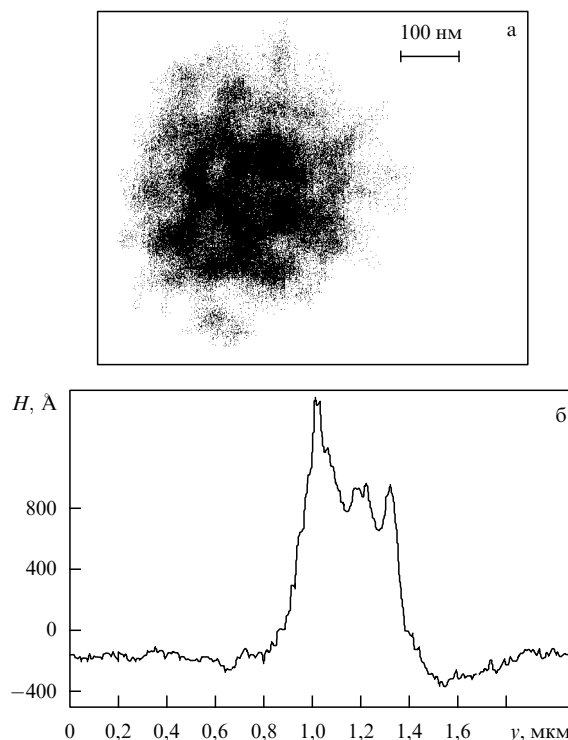


Рис. 6. (а) Топограмма фазового изображения вакцины вируса оспы. (б) Профиль сечения *Ricctesia provazecii*.

качестве тест-структур. Суспензии латекса с диаметром сфер 50, 110, 260, 630 и 920 нм наносились на подложку полированного кремния или алюминия. Отметим, кстати, что параметры поверхности оказывали существенное влияние на измеренный профиль. Для сравнительно больших диаметров сфер 920 и 630 нм на подложке алюминия измеренные размеры были близки к номиналу. С уменьшением диаметра отклонения возрастали и приближались к асимптотическому пределу около 300 нм. На кремниевой подложке при малых диаметрах сфер отклонения от номинала были меньше, но требования к точности фокусировки существенно возрастали. Сферы диаметром 50–110 нм вполне отчетливо различались, но их размеры обычно превосходили истинные. На топограммах проявлялась кажущаяся псевдоэллиптичность сфер с отношением осей 0,7–0,9 и уширением в направлении плоскости поляризации.

Результаты этих измерений подтверждают важность исследования "полевого портрета" для определенных классов моделей, в том числе для диэлектрических сфер с малым показателем преломления.

В изображениях дифракционных решеток наблюдались следующие закономерности: максимальный контраст получался при *H*-поляризации падающей волны; с уменьшением шага решетки контраст в изображении профиля снижался и измерения решеток с числом штрихов более 1800 лин/мм были недостоверными; минимальный различимый шаг периодической структуры (около 400 нм) заметно превышал минимальную ширину (50–100 нм), разрешаемую на одиночных щелях.

Наиболее показательными были измерения профиля на аттестованных сэндвич-структурах с шириной щели 50–400 нм [5]. Несмотря на то, что глубина щели превышала 2 мкм, измеренный перепад высоты обычно

не превышал 200 нм. С уменьшением ширины усиливалось влияние артефактов и измерения становились менее достоверными. На структурах с детерминированным профилем отчетливо наблюдалась его инверсия при перемещении поверхности объекта относительно фокальной плоскости. Этот результат находится в качественном согласии с (24).

В изображении ступенчатых структур при перепадах высоты $dh \cong \lambda/4$ ширина склона могла быть порядка единиц нанометров, но эта величина не определяет реальную разрешающую способность микроскопа.

Естественно, что приведенные результаты не дают оснований для исчерпывающего описания свойств фазовых изображений субволновых структур, тем не менее, принимая во внимание результаты предыдущих работ [1–6, 21–24, 30–33], уже сейчас можно сделать ряд общих выводов.

1. Сверхразрешение может наблюдаться как в обычных амплитудных изображениях, так и в фазовых при когерентном освещении. Их особенностью является возможность выделения в изображении информации, связанной с локальным распределением показателя преломления и его анизотропией, а также более надежное воспроизведение границ контрастных структурных элементов, которым соответствуют минимальные значения интенсивности поля.

2. Заметное сверхразрешение достигается только при больших числовых апертурах объективов и при точной фокусировке.

3. На аттестованных структурах с резкими границами достигается удовлетворительное соответствие объекта его фазовому изображению при параметре сверхразрешения $S = 2$ –6.

4. В изображениях неотжествленных структур получались значения сверхразрешения вплоть до $S = 20$, но форма профиля зависела от фокусировки.

5. Поляризационная зависимость фазовых изображений определяется в основном свойствами "полевых портретов" реальных объектов.

6. Разрешение в изображениях изолированных структур оказалась выше, чем периодических.

7. В фазовых изображениях характерные артефакты проявлялись в виде кажущихся разрывов поверхности, которые могут быть связаны [12] с дислокациями волнового фронта и неоднозначностью фазы. При смещении объекта относительно фокальной плоскости может наблюдаться инверсия профиля; когерентный шум и спекл-структуры, обусловленные рефlekсами в оптической системе, могут приводить к локальным искажениям профиля. Для корректной интерпретации изображений желательна априорная информация.

8. В качестве критерия разрешения в фазовых изображениях предлагается использовать расстояние между линиями границ, на которых происходит резкое изменение оптических параметров или высоты профиля. Нормированное сверхразрешение S можно определить как отношение радиуса диска Эйри к минимальному измеренному расстоянию между линиями контрастных границ протяженных структурных элементов.

4. Заключение

Опубликованные ранее в литературе и приведенные здесь результаты показывают возможность сверхразрешения,

в частности, в фазовых изображениях. Эти результаты не согласуются с дифракционной теорией Аббе [7, 8], в которой действие апертуры сводится к ограничению углового спектра, и целью настоящей работы является одно из возможных объяснений указанного противоречия. Наиболее существенными положениями являются использование в качестве базиса собственных функций оптической системы, заимствованный из теории открытых резонаторов метод учета дифракционных потерь, распространение понятия степеней свободы изображения на диск Эйри и выделение "полевого портрета" субволновой структуры в самостоятельную проблему.

Напомним, что в теории Кирхгофа [7, 8, 26] предполагается малость числовой апертуры и в дифракционных интегралах фаза представляется степенным рядом от поперечных координат, в котором второй член описывает дифракцию Фраунгофера, третий — дифракцию Френеля, а члены более высокого порядка игнорируются. Поле объекта представляется рядом по плоским волнам и обычно предполагается [8], что компоненты с мнимыми значениями волнового числа, которым формально соответствуют локальные затухающие волны, не дают вклада в изображение.

Приближение Френеля используется в интегральном уравнении Фредгольма при вычислении собственных функций открытого резонатора, что приводит в параксиальном приближении к эрмит-гауссовым функциям. Отсутствие точных решений для больших чисел Френеля в данном случае, однако, не является препятствием для формального представления поля в базисе собственных функций, и использование решений в параксиальном приближении позволило установить ряд закономерностей в модах высокого порядка. Мы полагаем, что точные решения для собственных функций оптической системы подтверждают дифракционное ограничение максимального индекса мод и зависимость их комплексных амплитуд в плоскости изображения от чисел Френеля зеркал. Уменьшение квазипериода D_n с увеличением индекса поперечных мод и конечность амплитуд волн для $D_n \ll \lambda$ позволяют устранить противоречие с классической теорией изображений, в которой они отождествляются с нераспространяющимися волнами.

Формальными следствиями предложенной концепции являются представление (10) поля объекта рядом по эрмит-гауссовым модам с неограниченным поперечным индексом, что эквивалентно снятию ограничений на спектр пространственных частот полевого портрета; описание дифракции на апертуре функцией амплитудно-фазовых искажений (19) и определение числа эффективных мод в изображении; введение понятия внутренних степеней свободы изображения и объяснение ряда закономерностей в экспериментально наблюдаемом сверхразрешении. Среди них наиболее существенными являются зависимость сверхразрешения от числа Френеля входной апертуры, возрастающая с уменьшением линейных размеров критичность к точности фокусировки и инверсия фазы в окрестности $z = 0$.

Ухудшение соответствия изображения и "полевого портрета" — неизбежная плата за сверхразрешение.

Когда настоящая работа была подготовлена к публикации, нам удалось ознакомиться с обзором Х.Г. Шмидта-Вайнмара [35], посвященным более широкой проблеме восстановления поля источников с пространственным разрешением меньше длины волны по оптиче-

ским измерениям в дальней зоне. В этом обзоре, не затрагивающем непосредственно микроскопию и влияние входной апертуры, анализируются, в частности, результаты исследований А. Зоммерфельда, С. Баукампа и Х. Казимира, Г. Герцля и Н. Тралли по общей теории распространения электромагнитных волн, которые тем не менее могут быть использованы для обоснования предлагаемого подхода к объяснению сверхразрешения в микроскопии.

Наиболее важные для нас выводы состоят в следующем.

Поле источника может быть представлено неоднородными мультипольными волнами, которым соответствует комплексный двумерный спектр пространственных частот. Доступная в дальней зоне информация содержится в спектре однородных плоских волн, и сверхразрешение связано с конечными амплитудами неоднородных волн высших порядков. В базисе представления поля источника можно условно выделить две группы функций. С функциями низшего порядка связаны распространяющиеся волны и классический предел разрешения. Функциям высшего порядка соответствуют существенно неоднородные волны, затухающие в направлении распространения. С ними связана передача ограниченной информации о более тонкой структуре источника. Для мультипольных полей характерны степенная зависимость скорости убывания амплитуды в ближней зоне, в которой пространственный период в поперечной плоскости меньше длины волны. За "барьером", ширина которого пропорциональна порядку мультиполя, амплитуды убывают как $1/r$. В рамках этой модели можно оценить число эффективных мод, дающих вклад в изображение.

В книге А. Сигмана [36] приведено выражение для среднего периода эрмит-гауссовой функции при больших индексах мод, совпадающее с формулой (15) в нашей работе.

Благодарности. Выполнение этой работы было бы невозможным без поддержки Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-02-05178-а).

Автор благодарит Г.Э. Куфалю за плодотворное сотрудничество в усовершенствовании микроскопа "Эйрискан" и проведение экспериментальных исследований. Обсуждение теоретических аспектов с Ю.А. Кравцовым и В.П. Быковым и их критические замечания прояснили ряд важных вопросов. Личный контакт с доктором М. Тотцеком и информация о результатах его

работ были весьма полезны.

Автор благодарит В.И. Шмальгаузена за плодотворное обсуждение и критические замечания по рукописи.

Список литературы

1. Allen R D, Allen N S, Travis J L *Cell Motility* **1** 291 (1981)
2. Weiss D G, Maile W, in *Electronic Light Microscopy* (New York: Wiley-Liss, 1993) p. 105
3. Inoue S *Video Microscopy* (New York: Plenum, 1986)
4. Tychinsky V P *Opt. Commun.* **74** (1–2) 41 (1989)
5. Тичинский В П и др. *Письма в ЖТФ* **17** (22) 80 (1991)
6. Tychinsky V P *Proc. SPIE Conf.* **1464** 80 (1992)
7. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
8. Солимено С, Крозиньяни Б, Порто П Ди *Дифракция и волновое распространение оптического излучения* (М.: Мир, 1989)
9. Toraldo di Francia G *Nuovo Cimento, Suppl.* **9** 426 (1952)
10. Tychinsky V P, Velzel C H F, in *Current Trends in Optics* (Ed J C Dainty) (London: Academic Press, 1994) p. 255
11. Pask C J. *Opt. Soc. Am.* **66** 68 (1976)
12. Tychinsky V P *Opt. Commun.* **81** 131 (1991)
13. Ash E A, Nicholls G *Nature* (London) **237** 510 (1972)
14. Lewis Aaron, in *Current Trends in Optics* (Ed J C Dainty) (London: Academic Press, 1994) p. 233
15. Vigoureux J M, Depasse F, Girard C *Appl. Opt.* **31** (16) 3036 (1992)
16. Wyant J C, Creath K *Laser Focus/Electro-Opt.* **21** (11) 118 (1985)
17. Creath K *Proc. SPIE Conf.* **1464** (1991) p. 474
18. Creath K *Proc. SPIE Conf.* **1319** (1990)
19. Pomet D A, Moharam M G, Grann E B *J. Opt. Soc. Am.* **11** (6) 1827 (1994)
20. Pasman J, in *Principles of Optical Disc System, International Trends in Optics* (Ed. A Hilber) (Bristol: LTD, 1991)
21. Totzeck M *J. Eur. Opt. Soc., P.A.: Pure Appl. Opt.* **3** 867 (1994)
22. Totzeck M, Krumbiegel M A *Opt. Commun.* **112** 189 (1994)
23. Nyssonen D, Seligson J, Masor I *Proc. SPIE Conf.* **1926** 299 (1992)
24. Davidson M P, Monahan K M, Monteverde R J *Proc. SPIE Conf.* **1464** 155 (1991)
25. Хаус Х А *Волны и поля в оптоэлектронике* (М.: Мир, 1988)
26. Майтланд М, Данн М *Введение в физику лазеров* (М.: Наука, 1978)
27. Ананьев Ю А *Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения* (М.: Наука, 1979)
28. Вайнштейн Л А *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (М.: Сов. радио, 1966)
29. Tychinsky V P et al. *Opt. Commun.* **74** (1–2) 37 (1989)
30. Tychinsky V, Tavrov A *Proc. SPIE Conf.* **1673** 483 (1992)
31. Решетникова И А и др. *Микробиология* **61** (5) 880 (1992)
32. Tychinsky V P, Tavrov A, Shepelsky D *Proc. SPIE Conf.* **1647** 96 (1992)
33. Tychinsky V P et al. *Proc. SPIE Conf.* **2329** (1994)
34. Levenson M D *Physics Today* **July** 28 (1993)
35. Schmidt-Weinmar H G, in *Inverse Scattering Problems in Optics* (Topics in Current Physics, Vol. 20, Ed H P Baltes) (Berlin: Springer, 1980)
36. Siegman A E *Lasers* (Mill Valley, California: Univ. Science Books, 1986)

Microscopy of subwavelength structures

V.P. Tychinskii

Moscow Institute for Radioengineering, Electronics and Automation,
Vernadskii prosp. 78, 117454 Moscow, Russia
Tel. (7-095) 434-67 92. Fax (7-095) 434-86 65
E-mail: vladimir@tych.pvt.msu.su

A more accurate formulation of the Abbe theory is presented using well-known open resonator results, namely, field representation in terms of the eigenfunctions of the optical system viewed as a segment of an equivalent lens waveguide; and the use of the mirror Fresnel number dependence of the diffraction losses of high-order Gaussian beams for describing the image distortions due to the objective aperture. The number of the degrees of freedom of the image within the zero mode waist area is estimated by using the Hermite-Gaussian functions within the paraxial approximation framework.

PACS numbers: **02.30.-f, 42.90.+m**

Bibliography — 36 references

Received 7 March 1996, revised 17 June 1996