Октябрь 1996 г. Том 166, № 10
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Тахионы и неустойчивость физических систем

А.Ю. Андреев, Д.А. Киржниц

Обсуждаются не очень простые и не слишком известные соотношения между понятиями "неустойчивость" и "тахионы".

PACS numbers: **11.90.+t**

Содержание

1. Введение

Гипотетические частицы с мнимой массой были официально введены в оборот науки в 1967 г. Дж. Фейнбергом [1], который и дал им название "тахионы" (впрочем, в безымянном виде они были известны теоретикам разных стран задолго до этого [2]). Первоначально тахионы рассматривались как отдельные, изолированные частицы, подобные электронам, протонам и т.п. Тахионов в таком понимании в природе, по-видимому, не существует. Однако позднее было осознано [2], что в действительности они широко распространены в физическом мире, проявляясь как элементарные возбуждения (квазичастицы) в сложных системах, теряющих устойчивость и претерпевающих фазовый переход в более стабильное состояние. Соответствующие примеры из разных областей физики приведены ниже. Пожалуй, один из наиболее значимых примеров относится к современным единым теориям элементарных частиц (см., например, [3]). При построении таких теорий намеренно вводятся тахионы с целью сделать вакуумное состояние неустойчивым и побудить его перестроиться, обеспечив тем самым появление масс у безмассовых частиц [4]. Обсуждение не очень простых и не слишком известных соотношений между понятиями "неустойчивость" и "тахионы" и содержится в настоящей статье.

Начнем с формулировки нескольких вопросов, которые сразу же введут читателя в круг обсуждаемых далее проблем и обсуждение которых, по существу, составит содержание излагаемого ниже материала.

а) С понятием "тахион" у большинства читателей связывается представление о частице, движущейся быстрее света. Если это так, то как понять слова о реальном участии тахионов в процессах, связанных с неустойчивостью физической системы? Ведь в нас глубоко укоренилось убеждение в невозможности сверхсветовых движений.

б) Существует расхожее объяснение причин возникновения сверхпроводимости при сколь угодно слабом притяжении между фермионами: вблизи поверхности Ферми, где и происходит спаривание частиц, ситуация становится двумерной, а в двумерном случае уравнение Шрёдингера дает связанные состояния при любом притяжении. Более того, экспоненциальная зависимость двумерной энергии связи от потенциала ведет к аналогичной зависимости энергетической щели и критической температуры. Но, с другой стороны, известно, что куперовская пара — это не связанное, а коррелированное состояние, совсем не похожее на состояние двухатомной молекулы (см., впрочем, [5]); достаточно сказать, что спаренные частицы имеют противоположные по направлению (и равные по величине) импульсы. Не подрывает ли это обстоятельство доверие к обсуждаемому объяснению?

в) В космогонии важную роль играет неустойчивость Джинса, ведущая к конденсации массивного вещества около одного или нескольких центров [6]. Она проявляется лишь при условии, что все размеры исходного тела больше характерной длины (длины Джинса). Поэтому тело, у которого это условие нарушено (тонкая пленка, нить и т.п.), будет более устойчивым, чем то, у которого оно выполнено. Окажется ли такое тело совершенно устойчивым, а если нет, то насколько уменьшится инкремент нарастания его плотности?

г) Неустойчивость Джинса относится к продольным (говоря языком электродинамики) степеням свободы гравитационного поля, которые порождены статиче-

А.Ю. Андреев, Д.А. Киржниц. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
117924 Москва, Ленинский просп. 53, Россия
Тел. (095) 135-75-11. Факс (095) 135-85-33
E-mail: kirzhnit@lpi.ac.ru

Статья поступила 3 июня 1996 г.

скими зарядами тяготения — массами. Она обусловлена в конечном счете присущим этому полю свойством притяжения одноименных зарядов. Не порождает ли это же свойство неустойчивость и поперечных (созданных движением зарядов — токами) степеней свободы поля, которые описываются "косыми" компонентами метрического тензора $g_{0\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$)?

д) Такие компоненты появляются, в частности, при вращении тяжелого тела. Не может ли возникнуть в случае положительного ответа на предыдущий вопрос "самораскрутка" такого тела (что, конечно, вступило бы в явное противоречие с фактами)? Не может ли нарастание соответствующего поля быть остановлено действием закона сохранения момента?

2. Определение и основные свойства тахиона

Тахионом по определению называется объект, у которого в обычной формуле $E^2 = p^2c^2 + M^2c^4$, связывающей энергию E и импульс $\mathbf{p}$, член с квадратом массы M заменен отрицательной величиной $-\Gamma^2$. Переходя на волновой язык и полагая ниже постоянную Планка равной единице, будем иметь

$$\omega^2 - C^2k^2 + \Gamma^2 = 0\,, \tag{1}$$

где ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, C — характерная скорость, совпадающая в частном случае со скоростью света c. Уравнение (1) относится к однородной изотропной системе, где волна является плоской. В общем случае, обозначая волновую функцию через ψ, можно написать волновое уравнение

$$(\omega^2 + C^2\Delta + \Gamma^2)\,\psi = 0\,. \tag{1a}$$

Приведем несколько примеров, связанных с разного рода нестабильностями (ссылки см. в [2]). Неустойчивости Джинса соответствует волна, у которой C — скорость звука и $\Gamma^2 = 4\pi G\varepsilon c^{-2} = c^2/a^2$, где a — длина Джинса, G — постоянная тяготения, ε — плотность энергии вещества (см. раздел 4). Неустойчивости нормального (без бозе-конденсата куперовских пар) состояния сверхпроводника при температуре ниже критической отвечает C — скорость электронов на границе Ферми, $\Gamma^2 = \Delta^2$, где Δ — энергетическая щель. Неустойчивости системы маятников, упруго связанных друг с другом и помещенных в поле тяжести "вниз головой", соответствует C — скорость звука в системе, $\Gamma^2 = g/L$, где g — ускорение силы тяжести, L — длина маятника. Неустойчивости электромагнитной волны в среде с инверсной заселенностью уровней соответствует $C = c$ и $\Gamma^2 = 8\pi\xi|d_{12}|^2$, где $\xi = (E_1 - E_2)/(N_1 - N_2)$, E и N — энергия и заселенность уровня, d_{12} — матричный элемент дипольного момента для перехода между уровнями. Наконец, последним примером послужит волна скалярного поля Хиггса ϕ, играющего важную роль в единых теориях фундаментальных взаимодействий. Для этого поля $C = c$ и $\Gamma^2 = M^2 - \lambda\phi^2$, где M — "масса" частицы Хиггса, λ — константа связи для самодействия поля Хиггса.

Возвращаясь к (1), легко убедиться в том, что групповая скорость волны $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\mathbf{k}$ действительно больше скорости света при $C = c$. Если это относится к скорости передачи информации, то мы сталкиваемся с нарушением причинности: существуют системы отчета, в которых событие-причина происходит позже события-следствия. С другой стороны, при $kC \leqslant \Gamma$ (для достаточно больших размеров системы: $\geqslant C\Gamma^{-1}$) частота становится мнимой $\omega = \pm\mathrm{i}\Gamma$, что ввиду $\psi \sim \exp[\mathrm{i}\omega t]$ означает экспоненциальное нарастание волны со временем t, т.е. неустойчивость системы.

Чтобы понять, как совмещаются такие два разных свойства, как акаузальность и нестабильность, нужно рассмотреть функцию Грина тахиона $G\,(t, \mathbf{x})$, описывающую его распространение в пространстве с течением времени. В знаменателе такой функции в частотно-импульсном представлении стоит как раз левая часть (1). Соответственно,

$$G\,(t, \mathbf{k}) = (2\pi)^{-1}\int_K (\omega^2 - C^2k^2 + \Gamma^2)^{-1}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{2}$$

где контур K в комплексной плоскости ω отражает способ обхода особенностей подынтегрального выражения (2) (нулей левой части (1)). В этот контур удобно включить далекую полуокружность в верхней (нижней) полуплоскости частоты при значениях t, меньших (больших) нуля (рис. 1); вклад этой полуокружности в (2) очевидным образом равен нулю. Пока $k > \Gamma/C$, особенности лежат на действительной оси частоты, и их обход совершается обычным образом. В противоположном случае особенности перемещаются в комплексную плоскость и находятся в точках $\omega = \pm\mathrm{i}\Omega$, где $\Omega = \sqrt{\Gamma^2 - C^2k^2}$. Будет ли функция Грина описывать нестабильную или непричинную ситуацию, зависит от того, как обходятся эти особенности, т.е. от того, как выбран контур K в (2).

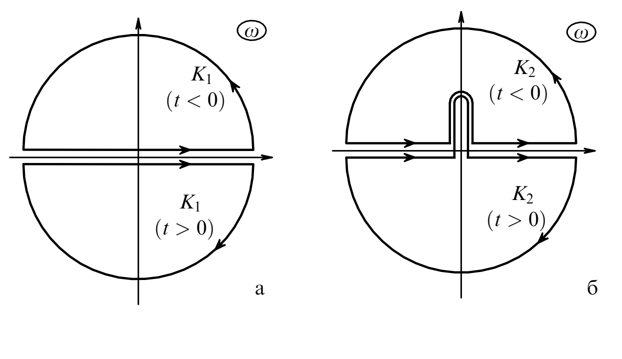

Рис. 1.

При обходе по контуру K_1 легко видеть, что вклад вычетов в точках особенностей пропорционален величине $\exp(-\Omega|t|)$, которая убывает со временем (стабильность), но отлична от нуля при $t \leqslant 0$ (непричинность). Выбор же контура K в виде K_2 ведет к выражению, которое при $t \geqslant 0$ пропорционально $\sinh\Omega t$ и нарастает при $t \to \infty$ (нестабильность), а при $t \leqslant 0$ равно нулю (причинность). Эти же результаты можно получить на другом языке, исходя из уравнения, которому подчиняется величина (2):

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \Omega^2\right) G(t, \mathbf{k}) = -\delta(t)\,.$$

Одно из решений этого уравнения $\exp(-\Omega|t|)/2\Omega$ стабильно, но непричинно. Другое $\theta(t)\sinh(\Omega t)/\Omega$ причинно

($\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$), но нестабильно. Разница этих двух решений $\exp(\Omega t)/2\Omega$ представляет собой решение свободного уравнения для функции Грина. Сказанное иллюстрирует общее положение: выбор правил обхода особенностей — это фиксация решения свободного уравнения.

Таким образом, можно выбрать такие правила обхода особенностей, которые отвечают выполнению условия причинности, но соответствуют нарастанию поля и описывают нестабильную систему. При этом рассмотрение функции Грина общего вида $G(t, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, аналогичное проведенному выше, привело бы при выборе контура K_2 к исчезновению этой функции всюду, кроме верхней полости светового конуса, т.е. к выполнению условия причинности общего вида. Остается вопрос о сверхсветовой скорости тахиона (см. выше). Отсылая за подробностями к обзору [2], где детально обсуждаются электродинамические примеры (волна в среде с инверсной заселенностью, волна в диспергирующей поглощающей среде), ограничимся здесь указанием на то, что групповая скорость сигнала перестает характеризовать скорость передачи энергии и информации при деформации волнового пакета в процессе его распространения. Такая деформация возникает в случае поглощающей или, напротив, нестабильной среды. Однако в случае тахиона можно построить волновой пакет только из гармоник с $k > \Gamma/C$, для которых инкремент нарастания равен нулю, хотя групповая скорость и больше C. И в этом случае нет сверхсветовой передачи информации, а возникает нечто аналогичное бегущей световой рекламе. Уже в начальный момент времени волновой пакет не локализован в пространстве (в нем представлены не все гармоники) и приход максимума пакета в данную точку связан не с распространением энергии (и информации), а с усилением за счет нестабильности системы уже имевшегося в этой точке сигнала (см. [2]). Нелишне заметить, что и в световой рекламе есть нестабильность — маленькая причина ведет к большому следствию (срабатывание реле влечет за собой загорание лампочки).

Мы получили, тем самым, ответ на сформулированный в разделе 1 вопрос а): тахион в нестабильной системе не переносит информацию со сверхсветовой скоростью, а только такой перенос и служит основанием для запрещения движений со скоростью, большей скорости света. Поэтому участие тахиона в реальном физическом процессе перестройки системы не противоречит никаким общим принципам.

3. Тахион и уравнение Шрёдингера

Для подготовки к ответу на вопросы б) и в) полезно установить простую связь уравнения для тахионного поля с обычным уравнением Шрёдингера, опираясь на которую можно использовать при решении тахионных проблем хорошо известные квантовомеханические факты. Будем исходить из (1а), считая величину Γ зависящей в общем случае от пространственной координаты $\mathbf{x}$. Сравнивая это уравнение с уравнением Шрёдингера для стационарного состояния частицы с массой, равной $1/2$,

$$\left[\Delta + E - V(\mathbf{x})\right]\psi = 0$$

легко видеть, что имеет место соответствие

$$\frac{\omega^2}{C^2} \Leftrightarrow E, \qquad \frac{\Gamma^2}{C^2} \Leftrightarrow -V(\mathbf{x})\,. \tag{3}$$

Таким образом, тахионная неустойчивость ($\omega^2 < 0$) отвечает связанному состоянию в поле притяжения $-\Gamma^2/C^2$. Соответственно, конечному по объему телу, веществом которого служит тахионная среда, отвечает потенциальная яма с размерами, определяемыми геометрией тела. Энергия E_b связанного состояния в такой яме определяет непосредственно инкремент нарастания тахионного поля

$$\psi \sim \exp(\Omega t), \qquad \Omega = C\sqrt{-E_\mathrm{b}}\,. \tag{4}$$

Начнем с рассмотрения трехмерного тела, все размеры которого соизмеримы друг с другом и составляют величину порядка L. Поскольку в трехмерной потенциальной яме глубиной V связанные состояния появляются лишь при $V > L^{-2}$, тахионная неустойчивость наступит лишь при $L > C/\Gamma$. Это в точности то условие на размеры тела, которое уже упоминалось в разделе 1 в связи с неустойчивостью Джинса. Таким образом, тахионная неустойчивость трехмерного тела требует для своей реализации достаточно больших его размеров (в противном случае второй член в левой части (1) станет больше по абсолютной величине третьего и частота останется действительной величиной).

Рассмотрим теперь квазидвумерное тело (тонкую пленку), для одного из измерений которого (толщины d) нарушено только что сформулированное условие, т.е. $d \ll C/\Gamma$. При этом мы будем иметь дело, по существу, с двумерным свободным движением параллельно поверхности пленки и с одномерным движением в узкой потенциальной яме в направлении, перпендикулярном поверхности. Квантовая механика учит, что связанные состояния в одномерной потенциальной яме появляются при любой сколь угодно малой ее глубине, причем зависимость энергии связанного состояния E_b от этой глубины имеет квадратичный характер. Наконец, в квазиодномерном случае (тонкая нить) движение будет стеснено вдоль двух поперечных по отношению к длине нити направлений и, соответственно, потенциальная яма будет двумерна. В соответствующей квантовомеханической задаче связанные состояния появляются также при произвольной малой глубине ямы, а энергия E_b зависит от нее экспоненциально.

Сказанное позволяет перейти к ответам на вопросы б) и в) (раздел 1). Особенно прост ответ на первый из них. Сверхпроводимость возникает тогда, когда основное состояние системы становится неустойчивым относительно образования бозе-конденсата куперовских пар. Эта неустойчивость имеет тахионный характер (см. раздел 2) и потому возникает одновременно с появлением связанного состояния в соответствующей квантовомеханической задаче. Сверхпроводящее спаривание происходит в узкой области импульсного пространства, примыкающей к поверхности Ферми. Поэтому в координатном пространстве, благодаря принципу неопределенности, движение будет напоминать движение в квазиодномерном цилиндре, ось которого соответствует в импульсном пространстве направлению нормали к поверхности Ферми. Относительно свободному же движению вдоль поверхности Ферми в импульсном пространстве будет отвечать двумерная потенциальная яма в координатном представлении. Отсюда сразу же следует вывод о спаривании при произвольно слабом притяжении, об экспоненциальном характере зависимости энергетической щели от глубины ямы и т.п. Что же касается природы куперовской пары, — представляет ли она собой связанное состояние или нечто совсем иное, — то это не имеет ко всему сказанному ни малейшего отношения. Поэтому сформулированное в вопросе б) объяснение, по существу, правильно, хотя и страдает серьезной неточностью.

Несложен и ответ на вопрос в). Для трехмерного тела с достаточно большими размерами величина инкремента порядка Γ. Тела, у которых один (пленка) или два (нить) размера малы, не перестают быть неустойчивыми (в одно- и двумерном случаях всегда есть связанное состояние), но инкремент нарастания их поля оказывается существенно меньшим, чем для трехмерного тела. Используя известные из квантовой механики выражения для энергии связанного состояния: $d^{-2}\exp(-V^{-1}d^{-2})$ (нить толщиной d), V^2d^2 (пленка толщиной d) и формулу (4), нетрудно получить следующие оценки для отношения инкремента Ω, соответственно, для нити и пленки к инкременту Γ для трехмерного тела

$$\frac{\exp(-\xi^{-2})}{\xi}\,,\ \xi\,. \tag{5}$$

Здесь $\xi = \mathrm{d}\Gamma/C \ll 1$ — малый параметр, отвечающий тонкости пленки и нити. Таким образом, "утоньшенное" нестабильное вещество действительно живет существенно дольше "массивного".

4. Поперечная неустойчивость в теории тяготения

Имея в виду вопрос г), начнем с общих соображений о возможности появления поперечной неустойчивости в физике тяготения. Оно отличается от электромагнетизма притяжением одноименных зарядов-масс (и отсутствием разноименных зарядов и их экранировки). Это ведет к разным знакам соответствующих констант связи $-Gm^2$ и e^2, входящих в законы Ньютона и Кулона, что проявляется, в частности, в явлении нестабильности Джинса. Эта неустойчивость ведет к нарастанию колебаний плотности и прямо следует из уравнения для продольных (плазменных) колебаний в электродинамике

$$\omega^2 = v^2k^2 + \omega_{\mathrm{p}}^2\,, \qquad \omega_{\mathrm{p}}^2 = 4\pi e^2nm^{-1}\,,$$

где n — концентрация частиц, m — их масса, v — характерная скорость. В самом деле, заменяя в последнем уравнении электромагнитную константу связи гравитационной, можно прийти к уравнению Джинса, имеющему явно тахионный характер

$$\omega^2 = c_{\mathrm{s}}^2k^2 - 4\pi G\varepsilon c^{-2} \tag{6}$$

(см. ниже прямой вывод этого уравнения).

По той же причине можно ожидать нестабильность и поперечных волн в тяжелой жидкости, о чем говорит уже спектр поперечных электромагнитных волн в среде $\omega^2 = c^2k^2 + \omega_{\mathrm{p}}^2$, когда помимо полей колеблется плотность не заряда (как для плазменных волн), а тока. Поэтому справедливы и аргументы, связанные с известным правилом Ленца в электродинамике: реактивный ток, вызванный изменением внешнего тока, направлен противоположно этому изменению и стремится ослабить его последствия. Реактивный ток пропорционален константе связи (величине ω_{p}^2) и меняет знак при переходе к гравитации, где реактивный ток не приближает, а удаляет систему от исходного состояния (см. приложение).

До сих пор мы связывали понятия "продольный" и "поперечный" с зарядовыми и, соответственно, токовыми степенями свободы, апеллируя к физике электромагнетизма. Конечно, существует и независимое толкование этих понятий, которое основано на разделении вектора плотности тока $\mathbf{j}$ (или, что практически то же, вектора скорости $\mathbf{v}$) на потенциальную (продольную) и соленоидальную (поперечную) составляющие. Первая характеризуется тем, что ее ротор равен нулю (безвихревое течение), вторая — тем, что ротор отличен от нуля, но равна нулю ее дивергенция. Учитывая известное уравнение непрерывности $\dot{n} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$, легко видеть, что в поперечной моде действительно колеблется не плотность (концентрация), а ротор тока или скорости. Соответственно, в продольной моде колеблется именно плотность или дивергенция тока (скорости).

Применительно к гравитации легко убедиться, что в ньютоновском приближении возбуждены лишь продольные моды. Это соответствует известному выводу о потенциальности малых колебаний жидкости и прямо видно из линеаризованного уравнения Эйлера

$$\dot{\mathbf{v}} = -\nabla(\delta p)(mn)^{-1} - \nabla\delta\phi\,,$$

которое вместе с уравнением непрерывности, уравнением состояния $\delta p = c_{\mathrm{s}}^2\delta(mn)$ и уравнением Ньютона для гравитационного потенциала

$$\Delta\delta\phi = 4\pi G\delta(mn)$$

ведет к тахионному уравнению Джинса (6). Что же касается поперечных мод, то их возбуждение описывается лишь в постньютоновском приближении, когда в игру вступают "косые" компоненты метрического тензора $g_{0\alpha} \equiv g_\alpha$, порождаемые, например, вращением тяжелого тела (см. раздел 5). При этом следует обязательно различать ко- и контравариантные компоненты 4-скорости u_i и u^i и их трехмерные составляющие (для относительно медленных движений) v_α и v^α (см. [7]). Связь этих величин дается соотношениями

$$v_\alpha = g_{\alpha i}\,u^i = g_{0\alpha} + \tilde{v}_\alpha\,, \quad u^0 \approx 1\,, \quad \tilde{v}_\alpha = g_{\alpha\beta}\,v^\beta\,. \tag{7}$$

Особого внимания заслуживает случай сверхтекучей жидкости, ковариантная компонента скорости которой равна градиенту фазы параметра порядка [7]. Поэтому с точки зрения этой компоненты течение потенциально, а соответствующие колебания продольны. Однако величина v^α имеет отличный от нуля ротор и поперечный характер имеют колебания именно этой величины. Особенно просто обстоит дело для вращающейся сверхтекучей жидкости (это небезынтересно для физики пульсаров [7]). В сферических координатах $x^{1,2,3} = r, \theta, \phi$ с осью, совпадающей с осью вращения, величина v_3 (но не

v^3!) вообще равна нулю из-за аксиальной симметрии системы. Поэтому первое соотношение (7) ведет к жесткой связи контравариантной скорости с "косой" компонентой метрического тензора (формула Девитта)

$$v^3 = -\tilde{g}^3\,, \quad \tilde{g}^\alpha = g^{\alpha\beta} g_\beta\,. \tag{8}$$

Перейдем теперь от общих замечаний к конкретной задаче, в которой явно проявляется поперечная неустойчивость (рис. 2). Будет рассматриваться тонкая (толщиной d) пленка массивной сверхтекучей жидкости, простирающаяся до бесконечности в направлении декартовых осей x^2, x^3. Вдоль пленки бежит волна

$$\tilde{g}^3 = f(x^1)\,\exp\left[\mathrm{i}(kx^2 - \omega t)\right],$$

поперечность которой следует из (8) и явно выполненного условия равенства нулю дивергенции скорости. Ограничиваясь для простоты низшим постньютоновским приближением ($\varkappa^2 x^2 \ll 1$, $\varkappa d \ll 1$, $\varkappa^2 = 8\pi G\varepsilon/c^2$), нетрудно прийти к тахионному уравнению (1) с $C = c$ и $\Gamma = \varkappa$, что свидетельствует о нестабильности рассматриваемой системы (см., впрочем, раздел 5) и дает утвердительный ответ на вопрос г) раздела 1.

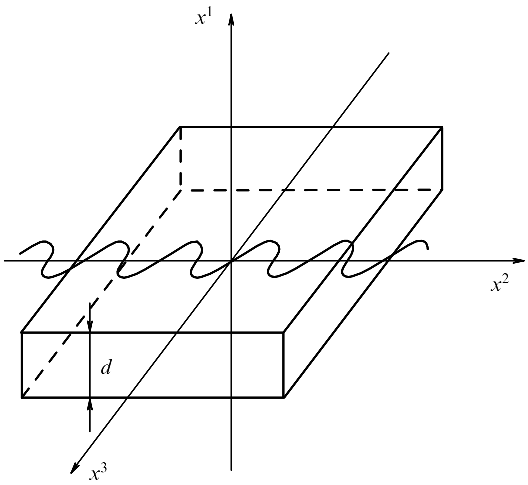

Рис. 2.

5. Крутильные колебания тяжелого тела

Завершая статью, обратимся к последнему вопросу д) и покажем возможность стабилизации тахионной неустойчивости действием законов сохранения. Конкретно речь будет идти о сохранении момента в задаче о крутильных (явно поперечных) колебаниях тяжелого сферически симметричного тела (сверхтекучая жидкость в твердой оболочке) с частотой ω (рис. 3). Соответствующая компонента уравнений Эйнштейна для величины $\tilde{g}^3$, представляющая собой обобщение статического уравнения [7], имеет вид

$$\left[(1 - x^2)\left(\partial_x^2 + \frac{4}{x}\,\partial_x\right) - \frac{3}{2}\,x\partial_x + \zeta^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right]\tilde{g}^3 = 0\,, \tag{9}$$

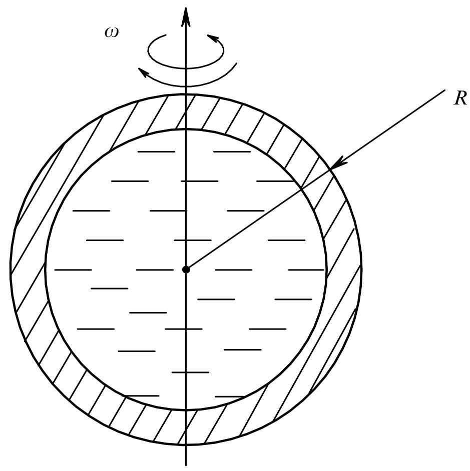

Рис. 3.

где $x = \varkappa r$, $\zeta = \sqrt{6}\omega/\varkappa$, $\varkappa^2 = 15\pi G\varepsilon$. Уравнение (9) может быть записано в виде

$$\left[\Delta + \frac{15 - 3x^2/4}{4(1 - x^2)^2} + \zeta^2\,\frac{1 - x^2/2}{1 - x^2}\right]\mathbf{\Phi} = 0\,,$$

где

$$\mathbf{\Phi} = (1 - x^2)^{3/8}\tilde{g}^3[\mathbf{n},\,\mathbf{x}]\,,$$

$\mathbf{n}$ — единичный вектор оси колебаний, и имеет явно тахионную форму (хотя квадраты частоты и массы и зависят от x). Поэтому, казалось бы, оно должно описывать неустойчивую относительно нарастания величины $\tilde{g}^3$ (т.е. в конечном счете угловой скорости) систему.

Оказывается, однако, что закон сохранения момента препятствует "самораскрутке" рассматриваемого тела. Это далеко не тривиальное утверждение, поскольку сохраняется не момент тела, а сумма его и момента гравитационного поля. В принципе, могло бы оказаться, что оба слагаемых имеют разные знаки и, нарастая, почти полностью компенсируют друг друга. Ведь именно так обстоит дело при неустойчивости Джинса, реализации которой не препятствует закон сохранения энергии: нарастание кинетической энергии компенсируется нарастанием (отрицательной) гравитационной энергии. То же относится к поперечной неустойчивости в тонкой пленке (раздел 4), где отрицательный знак имеет гравитационная энергия $-R^2/32\pi G$ ($R = \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{g}}^\alpha$). Поэтому вопрос о стабилизирующей роли закона сохранения момента заслуживает особого рассмотрения.

Мы будем использовать следующее определение полного (включающего гравитационное слагаемое) момента системы M: асимптотика на больших расстояниях r от тела имеет в статистическом ($\omega = 0$) случае вид

$$\tilde{g}^3 \to -2GMr^{-3}\,. \tag{10}$$

Этот случай отвечает границе устойчивости, разделяющей устойчивую ($\omega^2 > 0$) и неустойчивую ($\omega^2 < 0$) области. Этой же границе соответствует значение α_c безразмерной гравитационной константы связи $\alpha = r_g/R = \varkappa^2 R^2/6$, разделяющей устойчивую ($\alpha < \alpha_c$) и неустойчивую ($\alpha > \alpha_c$) области; здесь $r_g = 2Gm/c^2$ — гравитационный, R — геометрический радиус, m — масса тела. В устойчивом относительно гравитационного коллапса состоянии $\alpha < 1$, и потому условие неустойчивости рассматриваемых поперечных колебаний имеет вид $\alpha_c < 1$.

Для определения величины α_c обратимся к (9), взятому при $\omega = 0$. Граничные условия к нему устанавливаются из следующих соображений. В исходном состоянии невращающегося тела его момент и, согласно (10), значения величины $\tilde{g}^3$ вне тела равны нулю. То же из-за сохранения момента справедливо и в процессе колебаний при $\omega \to 0$. Поэтому в точке $r = R$ (или $x = x_0 = \sqrt{6\alpha_c}$)

$$\tilde{g}^3 = 0, \qquad \partial_x \tilde{g}^3 = 0\,.$$

Но однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с нулевыми граничными условиями имеет лишь тривиальное нулевое решение. Только при $x_0 \to \infty$ имеется решение, пропорциональное $x^{-9/2}$ и удовлетворяющее граничным условиям. Ему соответствует $\alpha_c \to \infty$, что и означает отсутствие нестабильности. Таким образом, и ответ на вопрос д) (точнее, на второй из объединенных этой литерой вопросов) имеет утвердительный характер.

6. Заключение

Завершая статью, мы хотели бы еще раз подчеркнуть основное утверждение, которое служит ее стержнем. Независимо от того, будут ли тахионы когда-нибудь обнаружены в природе как самостоятельные частицы, они уже сегодня составляют важнейший элемент систем, обнаруживающих неустойчивость по отношению к фазовому переходу в стабильное состояние. Именно тахионная мода при своем нарастании со временем осуществляет фазовый переход, разрушая старую фазу и создавая новую. При подходе к точке фазового перехода определяющую роль начинает играть "мягкая мода" [8], частота которой стремится к нулю, а квадрат ее переходит от положительных значений через нуль к отрицательным. Это и есть тахионная степень свободы, о которой много раз говорилось выше. Параметрами тахиона — скоростью C и (мнимой) массой Γ — определяются характеристики самого фазового перехода и конечного состояния системы. И подчеркнем еще раз: несмотря на свои необычные свойства, тахион — не досужая выдумка теоретиков, а реальная составная часть физической картины мира.

7. Приложение. Правило Ленца в электродинамике и теории тяготения

Приведем аргументы в пользу сказанного в разделе 4 о правиле Ленца. Связь между реактивным $\mathbf{j}_r$ и внешним $\mathbf{j}_e$ токами

$$\mathbf{j}_r(\omega, \mathbf{k}) = C\,\frac{\mathbf{j}_e(\omega, \mathbf{k})}{\omega^2 - c^2k^2 + i\omega\delta} \tag{П.1}$$

может быть представлена в виде

$$\mathbf{j}_r(t, \mathbf{x}) = -C \int \frac{\mathbf{j}_e(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,c^{-1},\ \mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\ d\mathbf{y}\,.$$

Видно, что знак величины C указывает на ленцевское $(+)$ или антиленцевское $(-)$ поведение системы. Из уравнений Максвелла и постньютоновских уравнений Эйнштейна следует соотношение (П.1) с параметром C, равным, соответственно, ω_p^2 и $-\varkappa^2$. Знаки последних двух выражений соответствуют утверждениям раздела 4.

Список литературы

1. Feinberg G *Phys. Rev.* **159** 1089 (1967)
2. Киржниц Д А, Сазонов В Н *Эйнштейновский сборник 1973* (М.: Наука, 1974) с. 84
3. Окунь Л Б *Физика элементарных частиц* (М.: Наука, 1988)
4. Киржниц Д А *УФН* **125** 169 (1978)
5. Schafroth M R, Butler S T, Blatt J M *Helv. Phys. Acta* **30** 93 (1957)
6. Вейнберг С *Гравитация и космология* (М.: Мир, 1978)
7. Андреев А Ю, Киржниц Д А, Юдин С Н *Письма в ЖЭТФ* **61** 825 (1995); Киржниц Д А, Юдин С Н *УФН* **165** 1335 (1995)
8. Гинзбург В Л *УФН* **38** 490 (1949)

Tachyons and the instability of physical systems

A.Yu. Andreev, D.A. Kirzhnits
P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences
Leninskiĭ prosp. 53, 117924 Moscow, Russia
Tel. (*7-095*) *135-85 70*
Fax (*7-095*) *135-85 33*
E-mail: kirzhnit@lpi.ac.ru

Not quite simple and rather obscure relations between the concepts of ‘instability’ and ‘tachyons’ are discussed.

PACS numbers: **11.90.+t**

Bibliography — 8 references

Received 3 June 1996