

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Переходное излучение в механике

А.И. Весницкий, А.В. Метрикин

Рассмотрено переходное излучение упругих волн, возникающее при равномерном и прямолинейном движении механического объекта вдоль неоднородной упругой системы (струны, балки, мембраны, пластины). Эффект переходного излучения исследовался в условиях, когда закон движения нагрузки не допускает возникновения ни черенковского, ни тормозного излучения упругих волн, а в качестве неоднородности выступает закрепление упругой системы. Уделено внимание как спектру реакции излучения, так и разрыву контакта объект–упругая система. Исследованы важные для практических приложений случаи периодического и случайного изменения параметров упругой системы. Определены условия возникновения резонанса и неустойчивости колебаний излучающего объекта. Изучена зависимость основных характеристик излучения от угла пресечения объектом области неоднородности. Кратко обсуждено дифракционное излучение упругих волн.

PACS numbers: 83.50.By, 83.50.Pk, 83.50.Tq

Содержание

1. Введение (1043).
2. Эффект переходного излучения в одномерных системах (1045).
2.1. Переходное излучение в полуграниченной струне. Процесс излучения, его реакция и энергия. 2.2. Законы изменения энергии и импульса при переходном излучении упругих волн. 2.3. Переходное излучение в полуграниченной балке. Разрыв контакта балка – движущаяся масса.
3. Переходное излучение в периодически-неоднородных одномерных упругих системах (1051).
3.1. Движение постоянной нагрузки по струне, лежащей на эквидистантных дискретных опорах. Спектр излучения и условия резонанса. 3.2. Движение постоянной нагрузки вдоль замкнутой, периодически-неоднородной упругой системы (колеса со спицами). Условия резонанса. 3.3. Движение массы вдоль струны, лежащей на периодически-неоднородном упругом основании. Параметрическая неустойчивость колебаний системы.
4. Переходное излучение в случайно-неоднородных одномерных упругих системах (1059).
4.1. Движение постоянной нагрузки по струне, лежащей на случайно-неоднородном упругом основании. Ограничение амплитуды резонансных колебаний, средняя реакция излучения. 4.2. Движение массы по струне, лежащей на случайно-неоднородном упругом основании. Стохастический параметрический резонанс.
5. Переходное излучение в двухмерных упругих системах (1063).
5.1. Переходное излучение в полуграниченной пластине. Спектрально-угловая плотность энергии излучения, реакция излуче-

ния, разрыв контакта пластина–движущаяся масса. 5.2. Движение постоянной нагрузки по мембране, закрепленной по лучу (дифракционное излучение). Диаграмма направленности излучения.

6. Заключение (1067).

Список литературы (1068).

1. Введение

Переходное излучение возникает при равномерном и прямолинейном движении источника возмущений, не обладающего собственной частотой, в неоднородной среде или вблизи такой среды [1]. Впервые этот эффект был описан В.Л. Гинзбургом и И.М. Франком [2], которые проанализировали излучение электромагнитных волн, возникающее при пересечении заряженной частицей границы раздела вакуум–идеальный проводник. Уже из первых работ, посвященных переходному излучению, стало очевидно, что данный эффект является "общефизическим", т.е. имеет место для волн различной физической природы. Вследствие этого наряду с интенсивными исследованиями переходного излучения электромагнитных волн с 1962 г. начали появляться работы по переходному излучению звука [3]. К настоящему времени переходному излучению электромагнитных и звуковых волн посвящено огромное количество работ [4, 5]. В 1984 г. издана монография [1], достаточно полно осветившая переходное излучение в классической электродинамике.

В настоящей работе исследуется переходное излучение упругих волн¹, возбуждаемых движущимися по

А.И. Весницкий, А.В. Метрикин. Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Нижегородский филиал, 603024 Нижний Новгород, ул. Белинского 85, Россия
Тел. (831-2) 36-94-69. E-mail: a.metrikine@mav.nnov.ru

Статья поступила 6 апреля 1996 г.

¹ Термин "упругие волны" применяется в данном обзоре как в классическом смысле (волны в деформируемом твердом теле), так и для обобщенного названия поперечных волн в струне и мембране, а также изгибных волн в балке и пластине, лежащих на упругом основании.

неоднородным упругим системам² механическими объектами. Наглядным примером такой системы является железнодорожный путь. Колеса поезда, прижатые силой тяжести к рельсам, возбуждают в них упругие волны. Причиной же излучения служит неоднородность рельсового пути, обусловленная, в первую очередь, шпалами и стыками (на российских железных дорогах). Возбуждает упругие волны и движущийся пантограф (токосъемник) поезда, взаимодействующий с проводами системы токосъема. В этом случае излучение обусловлено наличием в подвеске зажимов, фиксаторов, воздушных стрелок и т.п.

Можно смело утверждать, что переходное излучение упругих волн наблюдал в своей повседневной жизни каждый человек. Для этого достаточно один раз увидеть трамвай, троллейбус или автомобиль, въезжающий на мост. Возникает, однако, вопрос, насколько важно учитывать переходное излучение при анализе динамики упругих систем? Известно, что мощность излучения, генерируемого движущимся источником, тем выше, чем ближе скорость источника к скорости распространения волн в среде. Скорость поездов на железных дорогах Франции и Японии в настоящее время колеблется от 200 до 275 км ч⁻¹. Рекордная скорость поезда, достигнутая во Франции, — 452 км ч⁻¹. В Японии принята так называемая программа "500", в соответствии с которой в ближайшие 10 лет японские скоростные поезда должны достичь скоростей порядка 500 км ч⁻¹. Это о скоростях источников, возбуждающих упругие волны. Теперь о скоростях волн. Поверхностные волны (волны Рэлея) в грунте, окружающем железнодорожный путь, распространяются со скоростями 400–600 км ч⁻¹ в жестком грунте и со скоростями 150–400 км ч⁻¹ в мягком (торфяном) и водонасыщенном грунтах. Скорость изгибных волн в контактом проводе составляет 200–400 км ч⁻¹. Сравнивая приведенные выше цифры, легко убедиться, что скорость источника упругих волн уже в настоящее время может приблизиться и даже превысить скорость волн. В некоторых частях Европы, где железнодорожные пути проложены по мягким (торфяным) грунтам, излучаемые поездом поверхностные волны видны невооруженным глазом. Измерения, проведенные железнодорожными компаниями в Германии, Швейцарии, Англии и Франции, подтверждают нарастание вибраций железнодорожного пути при скоростях движения поезда, близких к скорости поверхностных волн. Как следствие, на "мягких" участках пути были введены ограничения скорости движения, или грунт был искусственно сделан жестче.

Таким образом, инженеры-железнодорожники тем или иным способом пытаются снизить скорость поезда по сравнению со скоростью поверхностных волн. Однако желание двигаться быстрее остается. Поэтому скорость поездов выбирается так, чтобы избежать проблем, связанных с "упругим барьером"³, но двигаться по возможности быстро. В этой ситуации переходное излучение может заметно влиять на динамику рельсового пути.

² "Упругая система" — деформируемое твердое тело, струна, балка, мембрана, пластина, лежащие на упругом основании.

³ "Упругий барьер" — аналог звукового барьера, связанный со скоростью распространения упругих волн.

Рассмотрим процесс возникновения переходного излучения в упругих системах. Пусть вдоль подпружиненной⁴ балки, жесткость упругого основания которой изменяется в окрестности точки $x = 0$ (рис. 1а), равномерно ($x = Vt$) движется постоянная нагрузка⁵ P (такая модель описывает, например, въезд автомобиля на мост или поезда в тоннель, проложенный в скальной породе). При движении нагрузки вдаль от области неоднородности (рис. 1б) вместе с ней движется ее собственное поле деформаций, симметричное относительно нагрузки и являющееся стационарным в движущейся системе координат $\xi = x - Vt$. По мере приближения нагрузки к области неоднородности (рис. 1в) это собственное поле начинает искажаться, становится асимметричным относительно нагрузки и для поддержания ее равномерного движения оказывается необходимым приложить внешнюю продольную силу $R(t)$. Спустя некоторое время после перехода нагрузки через область неоднородности (рис. 1г) собственное поле вновь симметризуется. Энер-

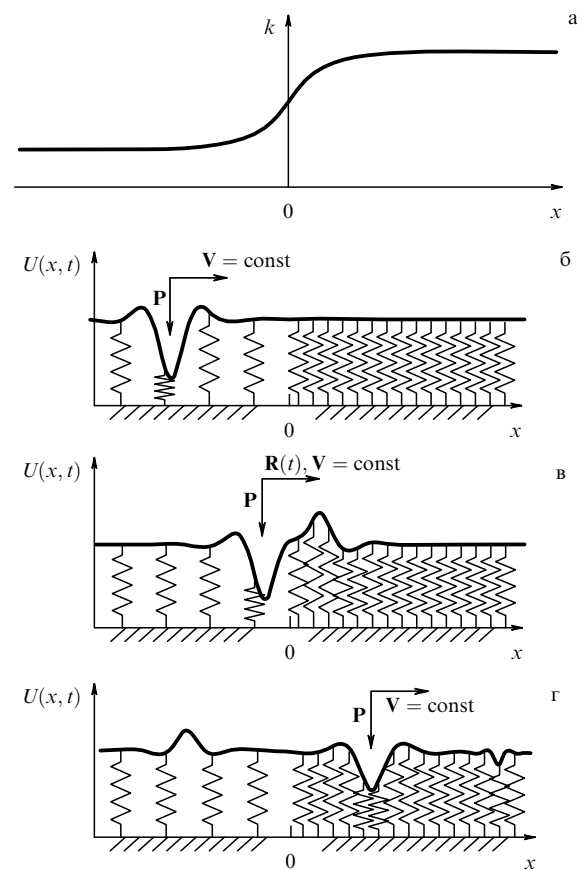


Рис. 1. Жесткость упругого основания балки (а) и процесс трансформации собственного поля нагрузки, приводящий к возникновению переходного излучения упругих волн (б–г).

⁴ Термин "подпружиненная балка (струна, мембрана, пластина)" означает, что балка (струна, мембрана, пластина) лежит на упругом основании. Жесткость упругого основания определяется как суммарная жесткость пружин, приходящихся на единицу длины (для балки или струны) или площади (в случае мембраны или пластины) упругой системы.

⁵ Термин "движущаяся нагрузка" применяется в случае, когда упруго-инерционные свойства движущегося механического объекта не учитываются и полагается, что в точке контакта на упругую систему действует заданная вертикальная сила.

гия собственного поля, однако, изменилась при переходе нагрузки с "мягкого" на "жесткий" участок упругого основания балки. В процессе этого изменения, происшедшего за счет работы сил P и $R(t)$, и возникает переходное излучение, представляющее собой часть энергии собственного поля, "оторвавшуюся" в виде свободных волн.

Переходное излучение упругих волн, будучи схожим с переходным излучением электромагнитных и звуковых волн вследствие "общефизичности" эффекта, имеет свои особенности. Например, в процессе излучения может произойти разрыв контакта движущийся объект – упругая система. Кроме того, "механические" приложения теории требуют ответа на многие вопросы, не столь актуальные в электродинамике и акустике. Поэтому в данном обзоре внимание уделено как классическим вопросам о спектре и реакции излучения, так и важным для практических приложений проблемам резонанса, неустойчивости колебаний и разрыва контакта, имеющим место в процессе переходного излучения упругих волн.

Используются, в основном, одномерные модели упругих систем. Эти модели позволяют наглядно и просто продемонстрировать физику происходящих процессов и наряду с этим описывают реальные механические конструкции. Обзор разбит на четыре части. В разделе 1 анализируется эффект переходного излучения в "чистом виде", т.е. в случае, когда закон движения нагрузки не допускает возникновения ни черенковского, ни тормозного излучения упругих волн, а в качестве неоднородности выступает закрепление упругой системы (наиболее типичная для механики уединения неоднородность). Затем рассматриваются практически важные случаи периодического (раздел 2) и случайного (раздел 3) изменения параметров упругой системы. На заключительном этапе (раздел 4) исследуются качественные особенности переходного излучения, связанные с неоднородностью упругих систем.

2. Эффект переходного излучения в одномерных системах

Анализ эффекта переходного излучения упругих волн начнем с рассмотрения простейшего случая равномерного движения массы, находящейся в поле постоянной вертикальной силы, вдоль полуограниченной подпружиненной струны (раздел 2.1). Источником возмущений здесь является масса, прижатая к струне силой P (аналог заряда в электродинамике), а в качестве неоднородности выступает закрепление струны (аналог границы с идеальным проводником). Исследование задачи разобьем на два этапа. Предположим сначала, что сила инерции, действующая на движущуюся массу в вертикальном направлении, пренебрежимо мала по сравнению с силой P , т.е. в вертикальном направлении на струну действует постоянная сила P . В рамках этого предположения выясним "механические" причины излучения, определим горизонтальную составляющую реакции упругой системы на движущуюся нагрузку, обусловленную, в частности, излучением, а также найдем спектральную плотность энергии излучения. На втором этапе исследуем задачу с учетом взаимообусловленности колебаний массы и струны, что важно при движении со скоростями, близкими к скорости распространения волн в струне.

Как было отмечено во введении, переходное излучение возникает в процессе трансформации собственного поля объекта, движущегося по неоднородной упругой системе. Детальное представление об этом процессе дают законы изменения энергии и импульса при переходном излучении упругих волн, которые мы проанализируем в разделе 2.2.

Модель струны, рассматриваемая в разделе 2.1, неплохо описывает, например, колебания контактной подвески на железнодорожном транспорте. Никто, однако, не решится применить эту модель для описания колебаний рельсового пути или моста. Необходимо поэтому ответить на вопрос: приведет ли учет изгибной жесткости упругой системы (а именно отсутствие изгибной жесткости отличает струну от балки — общепринятой модели рельс и моста) к появлению качественно новых особенностей процесса переходного излучения упругих волн? Анализ этого вопроса посвятим раздел 3.3, где рассмотрим равномерное движение массы вдоль полуограниченной, шарнирно закрепленной балки, лежащей на упругом основании.

2.1. Переходное излучение в полуограниченной струне. Процесс излучения, его реакция и энергия

Рассмотрим равномерное $x = Vt$ движение массы m , находящейся в поле постоянной силы P , вдоль струны с погонной плотностью ρ и натяжением N , лежащей на упругом основании жесткости k и закрепленной при $x = 0$ (рис. 2). Для того чтобы проанализировать переходное излучение в "чистом виде", будем полагать, что $V < c$ ($c = \sqrt{N/\rho}$ — скорость упругих волн в струне), т.е. излучение Вавилова – Черенкова отсутствует.

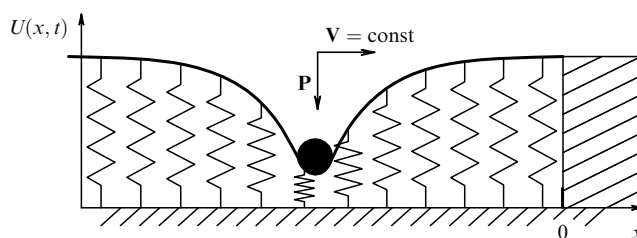


Рис. 2. Равномерное движение массы по полуограниченной струне.

Безотрывные вертикальные колебания струны и массы определяются из следующей системы уравнений [6, 7]:

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = -\frac{1}{\rho} (P + m\ddot{U}_0) \delta(x - Vt),$$

$$x \leq 0, \quad t \leq 0, \quad (2.1a)$$

где $c^2 = N/\rho$, $h^2 = k/\rho$;

$$U_0(t) = U(Vt, t), \quad (2.1b)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x - Vt \rightarrow -\infty, \quad (2.2)$$

где $U(x, t)$, $U_0(t)$ — вертикальные смещения струны и массы соответственно, δ — дельта-функция Дирака. Уравнение (2.1a) представляет собой баланс вертикальных сил, действующих на элемент струны; (2.1b) — условие безотрывности колебаний массы и струны. Граничные условия (2.2) описывают жесткое закрепле-

ние струны при $x = 0$ и стремление прогиба струны к нулю при удалении на бесконечное расстояние (влево) от движущейся массы.

Предположим, что при $t \leq 0$ справедливо условие

$$|m\ddot{U}_0| \ll P, \quad (2.3)$$

т.е. сила инерции, действующая на массу в вертикальном направлении много меньше силы P . В этом случае можно считать, что вдоль струны движется постоянная нагрузка P и колебания струны приближенно описываются уравнением

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = -\frac{P}{\rho} \delta(x - Vt), \quad x \leq 0, \quad t \leq 0 \quad (2.4)$$

совместно с граничными условиями (2.2).

Задача (2.4), (2.2) может быть решена методом изображений. Используя выражение для собственного поля нагрузки в безграничной подпружиненной струне [8]

$$U^P = -\frac{P}{2\rho h\beta} \exp\left(-\frac{h}{\beta}|x - Vt|\right), \quad \beta = \sqrt{c^2 - V^2}, \quad (2.5)$$

удовлетворяющее уравнению (2.4) при $x \in]-\infty; \infty[$, запишем решение как сумму собственного поля нагрузки и собственного поля фиктивного источника силы $-P$, движущегося по закону $x = -Vt$. Действуя таким образом, получим следующее выражение, описывающее колебания струны при $t \leq 0$:

$$U^- = -\frac{P}{2\rho h\beta} \left\{ \exp\left(-\frac{h}{\beta}|x - Vt|\right) - \exp\left[\frac{h}{\beta}(x + Vt)\right] \right\}. \quad (2.6)$$

После переезда нагрузки через закрепление ($t \geq 0$) струна будет совершать свободные колебания с начальными условиями, определяемыми (2.6) при $t \rightarrow 0$:

$$U^+(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} U^-(x, t) = 0, \\ U_t^+(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} U_t^-(x, t) = \frac{PV}{\rho\beta^2} \exp \frac{hx}{\beta}. \quad (2.7)$$

Начальные условия (2.7) показывают, что в момент перехода нагрузки через закрепление $t = 0$ энергия струны отлична от нуля. Это и является причиной колебаний струны при $t > 0$.

Смещение струны при $t > 0$ согласно [8] определяется выражением

$$U^+(x, t) = \frac{P}{\rho h\beta} \left\{ \sinh \frac{hVt}{\beta} \exp \frac{hx}{\beta} - \right. \\ \left. - \sinh \left[\frac{h}{\beta}(x + Vt) \right] \Theta(x + ct) \right\} + \\ + \frac{PV}{\pi\rho} \Theta(x + ct) \int_{-h}^h \frac{\sinh(x\sqrt{h^2 - z^2}/c) \cos tz}{z^2(c^2 - V^2) + h^2 V^2} dz.$$

На рисунке 3 изображены профили струны в различные моменты времени. Видно, что вначале вместе с нагрузкой движется собственное поле. С приближением

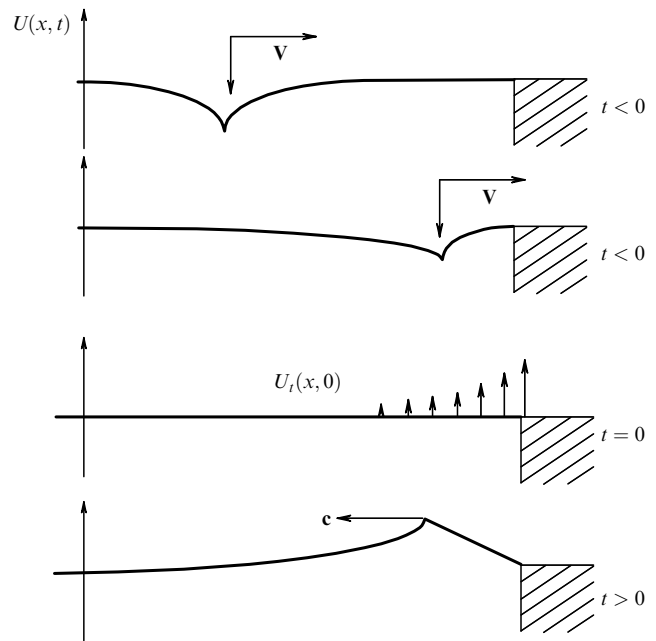


Рис. 3. Профили струны при движении по ней нагрузки, в момент перехода нагрузки через закрепление и после этого момента, когда струна совершает свободные колебания.

нагрузки к закреплению собственное поле начинает искажаться (за счет отражения), становится асимметричным относительно нагрузки. В момент перехода нагрузки через закрепление струна обладает нулевой потенциальной и отличной от нуля кинетической энергией. При $t > 0$ влево от закрепления бежит импульс (вершина которого имеет излом), распространяющийся со скоростью c . Этот импульс, меняющий во времени форму из-за дисперсии волн в подпружиненной струне и взаимодействия струны с закреплением, и представляет собой переходное излучение упругих волн.

Найдем энергию излучения W^r . Поскольку мы пренебрегаем вязкими потерями, энергия, запасенная в струне при $t = 0$, равна энергии излучения, т.е. $W^r = H(0)$, где

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (\rho U_t^2 + N U_x^2 + k U^2) dx$$

— энергия полубесконечной струны ($x \leq 0$) на упругом основании. Подставляя (2.7), получим

$$W^r = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \rho U_t^2(x, 0) dx = \frac{P^2 V^2}{4\rho h\beta^3}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что энергия переходного излучения растет с приближением скорости нагрузки к скорости волн в струне. Очевидно, что при этом должна возрастать и реакция излучения, что может приводить к быстрому изнашиванию упругой конструкции. Поскольку излучение распространяется вдоль струны, реакция излучения также действует по горизонтали. Согласно [6] выражение для горизонтальной составляющей реакции струны имеет вид

$$F^r = -\frac{P}{2} (U_x(Vt + 0, t) + U_x(Vt - 0, t)).$$

Подставляя в это выражение (2.6), получим

$$F^r = -\frac{P^2}{2\rho\beta^2} \exp \frac{2hVt}{\beta}. \quad (2.9)$$

Видно, что горизонтальная реакция струны действительно возрастает с увеличением скорости нагрузки. Кроме того, она увеличивается с приближением нагрузки к закреплению. При эксплуатации электрической подвески на железнодорожном транспорте самым "слабым местом" являются зажимы, поддерживающие токонесущий провод. Как видно из (2.9), это совершенно естественно, так как при движении токоприемника вблизи зажимов механические напряжения в проводе нарастают. Ответственность за нарастание напряжений несут как реакция переходного излучения, так и реакция поля деформаций, образующегося вблизи закрепления в процессе излучения.

Работа горизонтальной составляющей реакции струны определяется выражением

$$W^r = V \int_{-\infty}^0 F^r dt = -\frac{P^2}{4\rho h\beta}. \quad (2.10)$$

Отметим, что с увеличением скорости движения энергия излучения нарастает пропорционально V^2/β^3 , а работа горизонтальной реакции струны, — как $1/\beta$. Разница в законах роста еще раз подчеркивает, что работу по торможению нагрузки совершает не только поле формирующегося излучения, но и поле деформаций, локализованное вблизи закрепления.

Найдем спектральную плотность энергии излучения. Эта характеристика излучения адекватна используемой ныне измерительной аппаратуре и может быть использована для диагностики состояния упругих систем, взаимодействующих с движущимися объектами.

Применим к (2.4), (2.2) интегральное преобразование Фурье по времени:

$$V_\omega(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) \exp i\omega t dt. \quad (2.11)$$

В изображениях получим

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_\omega + (\omega^2 - h^2) V_\omega = \frac{P}{\rho\omega} \exp \frac{i\omega x}{V}, \quad (2.12)$$

$$V_\omega(0, \omega) = 0. \quad (2.13)$$

Решение задачи (2.12), (2.13) с учетом условий на бесконечности (стремление смещения струны к нулю для $|\omega| < h$ и отвод энергии от закрепления для $|\omega| > h$) имеет вид

$$V_\omega = V_\omega^P + V_\omega^r = -a(\omega) \left[\exp \frac{i\omega x}{V} - \exp \left(-\frac{ix\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} \right) \right], \quad (2.14)$$

где V_ω^P описывает собственное поле нагрузки, а V_ω^r — свободные волны, которые при $|\omega| > h$ представляют собой переходное излучение.

Энергия излучения равна потоку энергии через сечение $x \rightarrow -\infty$, взятому с обратным знаком и проинтегрированному по времени [8]:

$$W^r = N \int_{-\infty}^{\infty} U_x U_t \Big|_{x \rightarrow -\infty} dt = -\frac{N}{4\pi^2 c} \iiint_{-\infty}^{\infty} \omega \sqrt{\omega_1^2 - h^2} \times \\ \times a(\omega) a(\omega_1) \exp[-it(\omega + \omega_1)] \times \\ \times \exp \left[-ix \left(\sqrt{\omega^2 - h^2} + \sqrt{\omega_1^2 - h^2} \right) \right] \Big|_{x \rightarrow -\infty} d\omega d\omega_1 dt.$$

Интегрируя по времени, получим δ -функцию, позволяющую взять интеграл по ω_1 . В итоге получим

$$W^r = \frac{N}{\pi c} \int_h^\infty \omega \sqrt{\omega^2 - h^2} a^2(\omega) d\omega. \quad (2.15)$$

Спектральная плотность излучения

$$S(\omega) = \frac{N}{\pi c} \omega \sqrt{\omega^2 - h^2} a^2(\omega)$$

представлена на рис. 4. Видно, что $S(\omega)$ имеет максимум, который смещается в область высоких частот с увеличением V . При $\omega \rightarrow \infty$ спектральная плотность энергии излучения убывает, как $1/\omega^2$. Заметим, что интеграл в (2.15) может быть взят, после чего получится выражение (2.8).

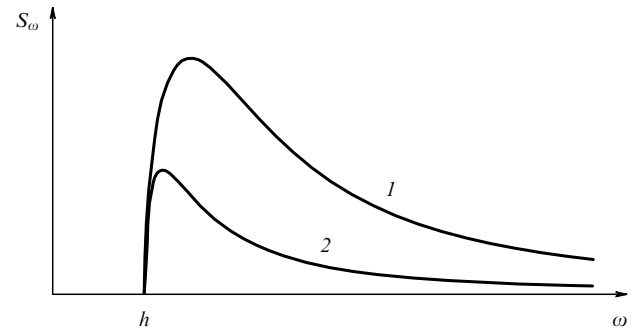


Рис. 4. Спектральная плотность энергии переходного излучения при различных скоростях движения нагрузки: 1 — $V = 0,8c$; 2 — $V = 0,4c$.

До сих пор мы пренебрегали инерционностью массы (см. условие (2.3)). Проверим, удовлетворяет ли решение (2.6) условию (2.3). Сопоставляя их, получим, что инерционностью массы можно пренебрегать при выполнении неравенства

$$\frac{V^2}{(c^2 - V^2)^{3/2}} \ll \frac{2\rho}{hm}. \quad (2.16)$$

Очевидно, что при $V \rightarrow c$ и $m/\rho \rightarrow \infty$ условие (2.16) не выполняется. Следовательно, для тяжелых объектов, движущихся с высокой скоростью, учет инерционности необходим.

Проанализируем поэтому исходную задачу (2.1), (2.2). При использовании метода изображений она может быть переписана в виде

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = -\frac{1}{\rho} (P + m\ddot{U}_0) \times \\ \times [\delta(x - Vt) - \delta(x + Vt)], \quad x \leq 0, \quad t \leq 0, \\ U_0(t) = U(Vt, t). \quad (2.17)$$

Решение (2.17) в силу линейности задачи будем искать в виде

$$U = U^- + U^m,$$

где U^- является решением (2.4) и описывается выражением (2.6), а U^m — решение уравнения

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2 U = -\frac{m}{\rho} \ddot{U}_0 [\delta(x - Vt) - \delta(x + Vt)]. \quad (2.18)$$

Используя (2.6) и фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h^2,$$

имеющее вид

$$\frac{J_0[(h/c)\sqrt{c^2 t^2 - x^2}] \Theta(ct - |x|)}{2c}$$

(J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, Θ — единичная функция), запишем выражение для $U(x, t)$ в виде

$$U = -\frac{P}{2\rho h\beta} \left[\exp\left(-\frac{h|x - Vt|}{\beta}\right) - \exp\frac{h(x + Vt)}{\beta} \right] + \frac{m}{2\rho c} \times \\ \times \begin{cases} \int_{-\infty}^{\mu^+/\Delta^-} \ddot{U}_0(\tau) J_0(v^+) d\tau - \int_{-\infty}^{\mu^+/\Delta^+} \ddot{U}_0(\tau) J_0(v^-) d\tau, & x \leq Vt, \\ \int_{-\infty}^{\mu^+/\Delta^-} \ddot{U}_0(\tau) J_0(v^+) d\tau - \int_{-\infty}^{\mu^-/\Delta^-} \ddot{U}_0(\tau) J_0(v^-) d\tau, & x \geq Vt, \end{cases} \quad (2.19)$$

где $\mu^\pm = x \pm ct$, $\Delta^\pm = c \pm V$,

$$v^\pm(x, t, \tau) = \frac{h}{c} \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - (x \pm Vt)^2}.$$

Для определения неизвестной $U_0(t)$ используем условие безотрывности колебаний струны и массы: $U_0(t) = U(Vt, t)$. Полагая в (2.19) $x = Vt$, получим

$$U_0(t) = -\frac{P}{2\rho h\beta} \left(1 - \exp\frac{2hVt}{\beta} \right) + \\ + \frac{m}{2\rho c} \left[\int_{-\infty}^{t\Delta^+/\Delta^-} \ddot{U}_0(\tau) J_0(v^+(Vt, t, \tau)) d\tau - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^t \ddot{U}_0(\tau) J_0(v^-(Vt, t, \tau)) d\tau \right]. \quad (2.20)$$

Интегрально-дифференцированное уравнение (2.20) почленным дифференцированием сводится к интегральному уравнению Вольтера 2-го рода относительно $\ddot{U}_0(t)$, которое удобно для численного анализа. На рисунке 5 качественно изображены зависимости $\ddot{U}_0(t)$ для различных V . Видно, что с приближением массы к закреплению вертикальная нагрузка на струну $[P + m\ddot{U}_0(t)]$ возрастает. Естественно, возрастают и энергия, и реакция излучения (вычисления подтверждают этот очевидный факт). Таким образом, учет инерционности массы в рамках "струнной" модели приводит к возрастанию мощности переходного излучения.

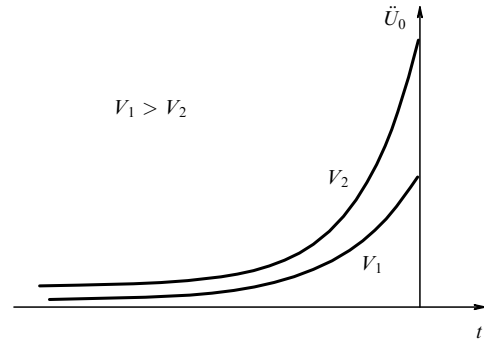


Рис. 5. Зависимость вертикального ускорения массы от времени для различных скоростей движения нагрузки.

2.2. Законы изменения энергии и импульса при переходном излучении упругих волн

Переходное излучение возникает в процессе изменения собственного поля источника возмущений в неоднородной среде. Какие силы совершают работу в процессе этого изменения? Какой при этом сообщается упругой системе импульс? Ответить на эти вопросы, позволяющие лучше понять физику переходного излучения, помогут анализируемые в данном пункте законы изменения энергии и импульса. Для простоты изложения анализ проведем на основе результатов простейшей задачи о движении нагрузки по струне, описанной в разделе 2.1.

2.2.1. Закон изменения энергии. Найдем энергию собственного поля деформаций W^P . Используя (2.5) и общее выражение для энергии подпружиненной струны (см. [6]), получим

$$W^P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\rho V^2 (U_\xi^P)^2 + N (U_\xi^P)^2 + k (U^P)^2 \right] d\xi = \frac{P^2 c^2}{4\rho h\beta^3}. \quad (2.21)$$

В момент переезда нагрузки через закрепление энергия собственного поля равна нулю, т.е. изменение энергии собственного поля $\Delta W^P = -W^P$.

В разделе 2.1 было отмечено, что вблизи закрепления на нагрузку действует горизонтальная сила сопротивления движению F^r . Следовательно, для поддержания равномерного движения нагрузки вдоль струны необходимо приложить внешнюю силу R , равную по величине и противоположную по направлению F^r . Работа силы R определяется выражением (2.10), взятым с обратным знаком.

Очевидно, что точка контакта нагрузки и струны вблизи закрепления движется не горизонтально. Следовательно, работу совершает и вертикальная сила P . Работа этой силы A^P определяется выражением

$$A^P = -P \left[U^-(0, 0) - \lim_{t \rightarrow \infty} U^-(Vt, t) \right] = -\frac{P^2}{2\rho h\beta}. \quad (2.22)$$

Сопоставляя (2.21), (2.22) и (2.10) с выражением для энергии излучения (2.8), запишем закон изменения энергии при переходном излучении

$$W^r = -\Delta W^P + W^R + A^P. \quad (2.23)$$

Итак, как видно из (2.23), в процессе движения нагрузки происходит преобразование энергии собственного поля в энергию излучения. При этом работу совершает как внешний источник силы R , поддерживающий равномерное движение нагрузки, так и вертикальная сила P (собственно нагрузка). Отметим, что все величины, входящие в (2.23), ограничены в отличие от величин, входящих в закон изменения энергии в электродинамике [1]. Это обусловлено отсутствием скачка размерности между нуль-мерным (точечным) источником возмущений и одномерным волноводом (в электродинамике нуль-мерный заряд возмущает трехмерную среду).

Изменится ли (2.23) в случае, если инерционностью массы пренебречь нельзя (условие (2.3) невыполнено)? Изменится, поскольку в момент перехода массы через закрепление ее скорость имеет вертикальную составляющую V_U и в правой части (2.23) появится слагаемое $-mV_U^2/2$. В общем случае, если движущийся объект имеет внутренние степени свободы (двухмассовый осциллятор, например), закон изменения энергии при переходном излучении примет вид

$$W^T = -\Delta W^P + W^R + A^P - \left(E - \frac{MV^2}{2}\right),$$

где E — механическая энергия объекта в момент перехода через закрепление, M — его полная масса. При учете инерционности объекта (в общем случае — внутренних степеней свободы) выражения для ΔW^P и A^P остаются прежними, а W^R и W^T изменяются.

2.2.2. Закон изменения импульса. Собственное поле деформаций, движущееся вместе с нагрузкой, переносит не только энергию, но и импульс (интересно заметить, что вопрос о волновом импульсе в упругих системах до сих пор остается дискуссионным [9]). Используя общее выражение для волнового импульса в струне и (2.5), получим для импульса собственного поля p^P

$$p^P = -\rho \int_{-\infty}^{\infty} U_x^P U_t^P dx = \frac{P^2 V}{4\rho h\beta^3}. \quad (2.24)$$

Отметим простую связь между энергией и импульсом собственного поля: $W^P = (c^2/V)p^P$, переходящую в $W^P = cp^P$ при $V \rightarrow c$.

В процессе трансформации собственного поля в упругую систему вносится дополнительный импульс за счет действия силы R , поддерживающей равномерное движение нагрузки. Импульс этой силы p^R определяется выражением (см. (2.9))

$$p^R = \int_{-\infty}^0 R dt = - \int_{-\infty}^0 F^T dt = \frac{P^2}{4\rho h\beta V}. \quad (2.25)$$

Наряду с получением импульса от силы R струна передает некоторый импульс p^T закреплению. Используя общее выражение для продольной силы T , действующей на препятствие со стороны подпружиненной струны [6], получим, что при $t \leq 0$ (в процессе движения нагрузки по струне) закреплению был передан следующий импульс:

$$p_{t=0}^T = \int_{-\infty}^0 T(0, t) dt = \frac{P^2 c^2}{4\rho h\beta^3}, \quad (2.26)$$

где

$$T(x, t) = \frac{1}{2} [\rho(U_t^-)^2 + N(U_x^-)^2 - k(U^-)^2].$$

Поскольку в момент перехода нагрузки через закрепление ($t = 0$) смещение струны отсутствовало, ее горизонтальный (волновой) импульс был равен нулю и весь импульс системы был запасен в закреплении. Действительно, сравнивая (2.24), (2.25) и (2.26), получим, что при $t \leq 0$ закон изменения импульса имеет вид

$$p^P + p^R = p_{t=0}^T. \quad (2.27)$$

При $t \geq 0$ струна и закрепление продолжают "обмениваться" импульсами, и часть импульса уносится на бесконечность излучением. Таким образом, закон изменения импульса при $t \geq 0$ имеет вид

$$p^T = p_{t=0}^T - p^T, \quad (2.28)$$

где p^T — импульс переходного излучения, p^T — полный импульс, переданный закреплению за время $t \in]-\infty; \infty[$. Импульс излучения определяется выражением

$$p^T = -\frac{P^2}{2\pi\rho hV\beta^3} \left[\beta V + (2V^2 - c^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\beta}{V} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Отметим, что p^T — величина отрицательная, что естественно, так как излучение распространяется влево. Выражение (2.29) получено с использованием решения задачи в спектральной форме (2.14) по методике, изложенной в [1]. Импульс p^T определяется разностью выражений (2.26) и (2.29).

Исключая из (2.27) и (2.28) $p_{t=0}^T$, запишем интегральный закон изменения импульса при переходном излучении (форма закона сохранится и при учете инерционности движущегося объекта):

$$p^T = p^P + p^R - p^T. \quad (2.30)$$

Итак, при переходном излучении упругих волн импульс собственного поля нагрузки передается как излучению, так и закреплению (в случае произвольной неоднородности упругой системы — области неоднородности). При этом в упругую систему вносится дополнительный импульс за счет действия силы R , поддерживающей равномерное движение нагрузки.

Процесс передачи импульса, описываемый (2.30), аналогичен процессу, происходящему при ударе упругого шарика о стенку. Действительно, интегральный закон изменения импульса при ударе может быть записан в виде (2.30), если считать, что при контакте шарика со стенкой некоторое время действовала сила R , прижимающая шарик к стенке. В этом случае слагаемые, входящие в (2.30), будут описывать следующие величины: $p^P = mV$ — импульс шарика до взаимодействия со стенкой; p^R — импульс, вносимый в систему шарик-стенка силой R ; $p^T = 2mV + x$ — импульс, переданный стенке в процессе взаимодействия; $p^T = -mV + y$ — импульс отскочившего шарика ($x + y = p^R$). Такая аналогия естественна с точки зрения корпускулярно-волновой идеологии и позволяет представить процесс излучения как падение на закрепление квазичастицы

(собственного поля деформаций), а затем ее отскок (отражение). Отразившаяся порция энергии – импульса и представляет собой переходное излучение.

2.3. Переходное излучение в полуограниченной балке. Разрыв контакта балка – движущаяся масса

Модель упругой системы (подпружиненная струна), использованная в разделе 2.1, позволила достаточно полно исследовать качественные особенности переходного излучения в одномерных упругих системах. В этой модели, однако, не учтена изгибная жесткость, присущая в большей или меньшей степени всем упругим направляющим. Поэтому естественно задаться вопросом о влиянии изгибной жесткости на процесс излучения.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим движение массы по полубесконечной подпружиненной балке (рис. 6). С корпускулярно-волновой точки зрения ситуация при учете изгибной жесткости не меняется. Как и в случае движения массы по струне, вместе с массой перемещается собственное поле деформаций, которое должно отразиться от закрепления, превратившись тем самым в переходное излучение. Излучение действительно возникает, но процесс его формирования может качественно отличаться от процесса, происходящего при взаимодействии массы со струной. Различие обусловлено тем, что собственное поле деформаций в балке спадает с увеличением расстояния от движущейся массы немонотонно, что очевидно из следующего выражения, описывающего это поле [10] (см. также рис. 7):

$$U^P = -A \exp(-s_1|\xi|) \left(\cos s_2 \xi + \frac{s_1}{s_2} \sin s_2 |\xi| \right), \quad (2.31)$$

где $A = P/(8EI s_1 \mu^2)$, $s_1 = \sqrt{\mu^2 - V^2 v^2}$, $s_2 = \sqrt{\mu^2 + V^2 v^2}$, $\xi = x - Vt$, $4\mu^4 = k/EI$, $4v^2 = \rho/EI$, EI и ρ — изгибная жесткость и погонная плотность балки, k — жесткость упругого основания, V — скорость движения массы. Вследствие этой немонотонности при движении вблизи закрепления масса начинает колебаться в вертикальном направлении и в процессе этих колебаний может произойти разрыв контакта масса – балка. Заметим, что разрыв контакта происходит и при движении массы по струне, но лишь в момент перехода массы через закрепление.

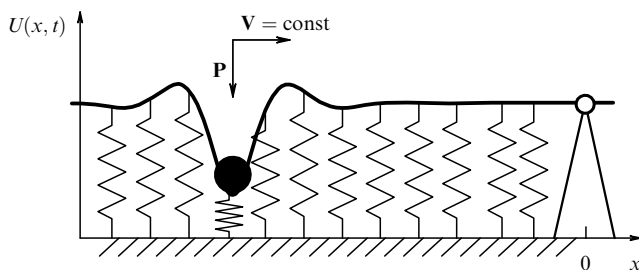


Рис. 6. Равномерное движение массы по полуограниченной, шарнирно закрепленной балке.

Безотрывные колебания равномерно $x = Vt$ движущейся массы m , прижатой вертикальной силой P к балке модели Бернулли – Эйлера [11], шарнирно закрепленной при $x = 0$, описываются следующей системой уравнений [7]:

$$\begin{aligned} U_{xxxx} + 4v^2 U_{tt} + 4\mu^4 U &= -\frac{1}{EI} (P + m\ddot{U}_0) \delta(x - Vt), \\ x \leq 0, \quad t \leq 0, \\ U(Vt, t) &= U_0(t), \quad U(0, t) = U_{xx}(0, t) = 0, \\ U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x - Vt &\rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $U(x, t)$, $U_0(t)$ — вертикальные смещения балки и массы.

Решение задачи (2.32) при $V < V_{cr} = \mu/v$ (V_{cr} — минимальная фазовая скорость изгибных волн в балке) может быть получено методом изображений. Поскольку задача о движении нагрузки ($m\ddot{U}_0 \ll P$) не имеет качественно новых особенностей, запишем сразу решение задачи с учетом инерционности массы:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= -A \exp(-s_1|\xi|) \left(\cos s_2 \xi + \frac{s_1}{s_2} \sin s_2 |\xi| \right) + \\ &+ A \exp s_1 \eta \left(\cos s_2 \eta - \frac{s_1}{s_2} \sin s_2 \eta \right) + \\ &+ \frac{m}{2\rho} \int_{-\infty}^t \ddot{U}_0(\tau) R(x, t, \tau) d\tau, \quad x \leq 0, \quad t \leq 0, \end{aligned}$$

где $\xi = x - Vt$, $\eta = x + Vt$, $\lambda = \sqrt{k^4 + 4\mu^4}/2v$, A определено в (2.31),

$$\begin{aligned} R(x, t, \tau) &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \sin[\lambda(t - \tau)] \times \\ &\times \left\{ \cos[k(x + V\tau)] - \cos[k(x - V\tau)] \right\} dk. \end{aligned}$$

Используя условие безотрывности колебаний $U(Vt, t) = U_0(t)$, получим интегрально-дифференциальное уравнение относительно вертикального смещения массы:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= \frac{m}{2\rho} \int_{-\infty}^t \ddot{U}_0(\tau) R(Vt, t, \tau) d\tau - \\ &- A + A \exp(2s_1 Vt) \left(\cos 2s_2 Vt - \frac{s_1}{s_2} \sin 2s_2 Vt \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Результат численного анализа (2.33) качественно изображен на рис. 7 в виде зависимости $\ddot{U}_0(t)$. Видно, что вблизи закрепления возникают вертикальные колебания массы. Очевидно также, что в момент времени $t^* < 0$ может быть выполнено условие $\ddot{U}_0(t^*) = -P/m$, означающее,

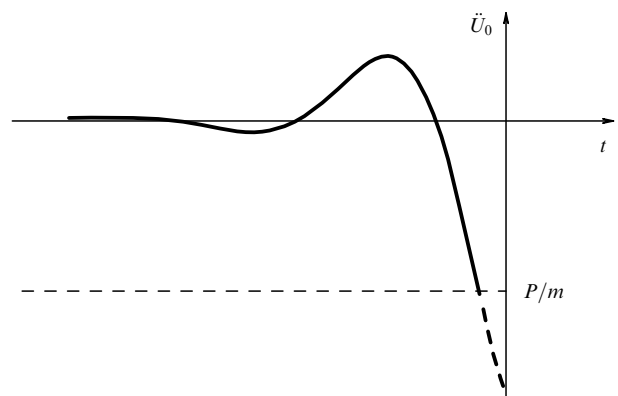


Рис. 7. Зависимость вертикального ускорения массы от времени. При $\ddot{U}_0 = -P/m$ происходит разрыв контакта масса – балка.

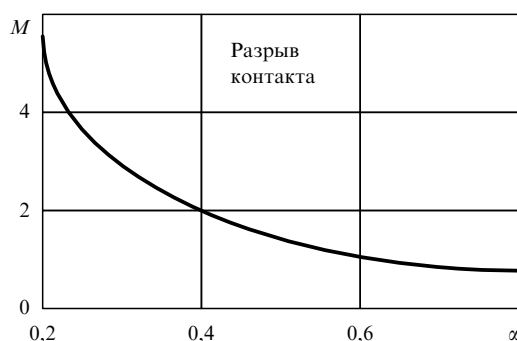


Рис. 8. Кривая, разделяющая плоскость параметров (α, M) на области безотрывного движения массы и балки и движения с разрывом контакта.

что реакция балки на движущуюся массу равна нулю, т.е. произошел разрыв контакта масса – балка (система уравнений (2.32) и уравнение (2.33) справедливы только при $t < t^*$). Кривая, разделяющая на плоскости параметров $M = m\mu/\rho$ (безразмерная масса), $\alpha = V/V_{cr}$ (безразмерная скорость) качественно различные случаи поведения системы, изображена на рис. 8. Область выше кривой соответствует движению с разрывом контакта при $t < 0$.

Итак, при движении объекта по неоднородной упругой направляющей в процессе переходного излучения может происходить разрыв контакта объект – направляющая. Эта особенность процесса переходного излучения, присущая упругим системам, очень важна с практической точки зрения, так как именно разрыв контакта объект – направляющая приводит, например, к искрению при токоосъеме и резкому повышению уровня вибраций железнодорожного состава.

3. Переходное излучение в периодически-неоднородных одномерных упругих системах

Контактная подвеска на железнодорожном транспорте, рельсовый путь и эстакада для поезда на магнитном подвесе [12] являются периодически-неоднородными упругими системами. В первом случае — за счет поддерживающей конструкции, во втором — вследствие шпал, в третьем — из-за опор, поддерживающих эстакаду. Очевидно, что исследование динамики периодически-неоднородных упругих систем представляет большой практический интерес [13]. Практика диктует и основные направления исследований: определение условий возникновения резонанса и неустойчивости колебаний системы движущийся объект – направляющая. Переходное излучение является первопричиной этих нежелательных явлений: резонанс является следствием дискретности спектра излучения в периодически-неоднородных системах и имеет место при совпадении групповой скорости одной из излучаемых гармоник со скоростью движения нагрузки, а причиной неустойчивости служит реакция излучения аномальных по Доплеру волн [14–17].

В настоящем разделе мы обсудим три задачи. Во-первых, рассмотрим движение нагрузки вдоль периодически-неоднородной безграничной упругой системы. На основе решения данной задачи проанализируем спектр и среднюю по периоду неоднородности реакцию излучения, а также условия возникновения резонанса в упругой системе [12, 18–20]. Во-вторых, коротко остановимся на

задаче о движении нагрузки вдоль замкнутой периодически-неоднородной упругой системы [21] (колеса со спицами). Интерес к этой задаче возник в связи с тем, что для снижения шума, генерируемого поездами, в странах Европейского сообщества ведется разработка новых колес для вагонов, представляющих собой стальной обод со спицами (в отличие от используемых ныне цельнометаллических). Возникающие под действием движущейся нагрузки колебания колеса являются следствием процесса переходного излучения и поэтому подлежат анализу в данном разделе. Основной вопрос к данной задаче — отыскание условий резонанса. В-третьих, рассмотрим задачу о самосогласованных колебаниях движущегося объекта и периодически-неоднородной направляющей [22]. Покажем, что учет самосогласованности приводит к появлению зон неустойчивости колебаний системы объект – направляющая.

3.1. Движение постоянной нагрузки по струне, лежащей на эквидистантных дискретных опорах.

Спектр излучения и условие резонанса

Рассмотрим равномерное $x = Vt$ движение постоянной вертикальной нагрузки P вдоль безграничной струны, лежащей на эквидистантных упруго-инерционных дискретных опорах (рис. 9). Эта модель достаточно хорошо описывает колебания контактной подвески, возбуждаемые токоосъемником движущегося поезда, и наряду с этим является достаточно простой для анализа. Установившиеся колебания струны в линейном приближении описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= -\frac{P}{\rho} \delta(x - Vt), \quad c^2 = \frac{N}{\rho}, \\ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < t < \infty, \\ U(nd, t) &= U_n^0(t), \\ N[U_x(nd + 0, t) - U_x(nd - 0, t)] &= m\ddot{U}_n^0 + \delta\dot{U}_n^0 + kU_n^0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $U(x, t)$ — поперечное смещение струны, U_n^0 — вертикальное смещение массы n -й опоры, N и ρ — натяжение и погонная плотность струны (в дальнейшем будем полагать $V < c = \sqrt{N/\rho}$), d — расстояние между соседними опорами, m , k и δ — масса, жесткость и вязкость опоры, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

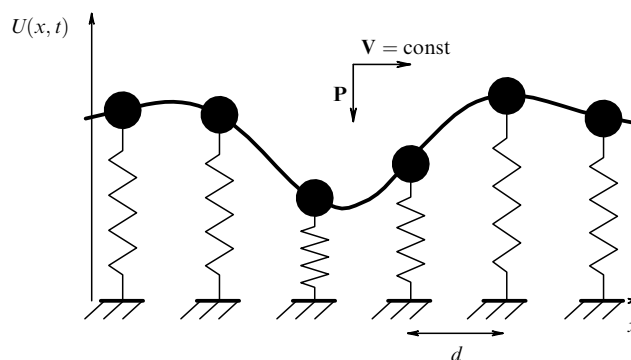


Рис. 9. Движение постоянной нагрузки по струне, лежащей на эквидистантных дискретных опорах.

Применим к (3.1) интегральное преобразование Фурье по времени (2.11). В изображениях получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} V_\omega = \frac{F}{V} \exp \frac{i\omega x}{V},$$

$$V_\omega(nd, \omega) = V_{\omega n}^0(\omega),$$

$$N \frac{\partial}{\partial x} [V_\omega(nd+0, \omega) - V_\omega(nd-0, \omega)] = (k - i\delta\omega - m\omega^2) V_{\omega n}^0(\omega), \quad (3.2)$$

где $V_{\omega n}^0(\omega)$ — фурье-изображения смещения n -й массы, $F = P/\rho c^2$.

Для решения системы (3.2) воспользуемся условием периодичности [20], связанным с периодичностью системы и равномерностью движения нагрузки. Для исходной системы (3.1) оно имеет вид

$$U(x, t) = U\left(x + nd, t + \frac{nd}{V}\right) \quad (3.3)$$

и означает, что в установившемся режиме струна периодически ($T = d/V$) повторяет свою форму, но со сдвигом в пространстве на период структуры d . В пространстве изображений условие (3.3) выглядит следующим образом:

$$V_\omega(x + nd, \omega) = V_\omega(x, \omega) \exp \frac{i\omega nd}{V}. \quad (3.4)$$

Записывая общее решение (3.2) на интервале $x \in [0, d]$:

$$V_\omega = A \exp \frac{i\omega x}{c} + B \exp \left(-\frac{i\omega x}{c}\right) - S \exp \frac{i\omega x}{V},$$

$$S = \frac{FVc^2(c^2 - V^2)}{\omega^2} \quad (3.5)$$

и используя условие периодичности (3.4), получим выражение для V_ω и $V_{\omega n}^0$ при произвольных x и n :

$$V_\omega = \exp \frac{i\omega nd}{V} \left[A \exp \frac{i\omega(x - nd)}{c} + B \exp \left(-\frac{i\omega(x - nd)}{c}\right) \right] - S \exp \frac{i\omega x}{V},$$

$$V_{\omega n}^0 = C \exp \frac{i\omega nd}{V}.$$

Сшивка решений при $x = 0$ и $x = d$ приводит к системе линейных уравнений относительно A , B и C , из которой находим

$$A = \frac{A_A}{A}, \quad B = \frac{A_B}{A}, \quad C = \frac{A_C}{A},$$

$$A = -2\beta[p^2 + 1 - p(\gamma^- + \gamma^+) - Gp(\gamma^- + \gamma^+)] =$$

$$= -4\beta p \left(\cos \frac{\omega d}{V} - \cos \frac{\omega d}{c} - \frac{Gc}{2\omega} \sin \frac{\omega d}{c} \right),$$

$$A_1 = SGp(p - \gamma^-), \quad A_2 = SGp(\gamma^+ - p),$$

$$A_3 = 2\beta S[p^2 + 1 - p(\gamma^- + \gamma^+)],$$

$$\beta = \frac{i\omega}{c}, \quad \gamma^\pm = \exp\left(\pm \frac{i\omega d}{c}\right), \quad p = \exp \frac{i\omega d}{V},$$

$$G = \frac{k - m\omega^2 - i\delta\omega}{N}.$$

Применяя теперь к (3.5) обратное преобразование Фурье, получим точное решение задачи при $x \in [0, d]$:

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S}{A} \left\{ Gp \left[(p - \gamma^-) \exp \frac{i\omega x}{c} + (\gamma^+ - p) \exp \left(-\frac{i\omega x}{c}\right) \right] - A \exp \frac{i\omega x}{V} \right\} \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.6)$$

Смещение струны при $x \notin [0, d]$ определяется с помощью условия периодичности (3.3).

Полуса подынтегральной функции в (3.6), определяющие частоты излучаемых нагрузкой гармоник, являются корнями уравнения

$$\cos[\tilde{k}(\omega)d] = \cos \frac{\omega d}{V}, \quad (3.7)$$

где

$$\cos[\tilde{k}(\omega)d] = \cos \frac{\omega d}{c} + \frac{Gc}{2\omega} \sin \frac{\omega d}{c}$$

— дисперсионное уравнение струны, лежащей на эквидистантных инерционных упруго-вязких опорах. На рисунке 10 изображено графическое решение уравнения (3.7) при $\delta \rightarrow 0$, которое позволяет определить действительные корни этого уравнения. Видно, что спектр излучения дискретен. Частоты излучаемых гармоник определяются точками пересечения разрывной кривой (дисперсионной зависимостью периодически-неоднородной системы) и семейства наклонных кривых (кинематических инвариантов, "следящих" за равенством фаз излучаемых гармоник и нагрузки в точке контакта). Излучение с дискретным спектром формируется следующим образом. При переходе нагрузки через опору в струне возникает переходное излучение, имеющее сплошной спектр. За счет периодичности упругой системы поля излучения, возбуждаемые нагрузкой при переходе через каждую опору, на определенных частотах оказываются сфазированными. Поэтому в установившемся режиме спектр излучения дискретен, а частоты излучаемых гармоник определяются уравнением (3.7),

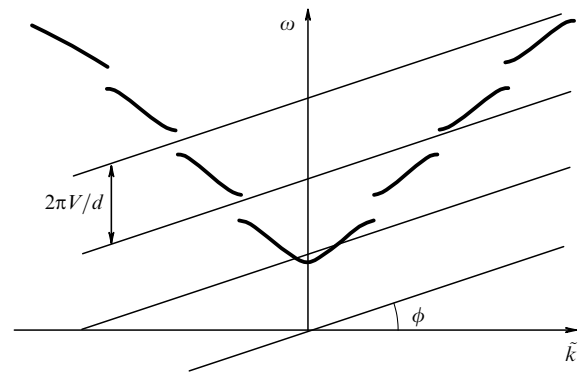


Рис. 10. Графическое решение уравнения, определяющего частоты излучаемых гармоник; $\tan \phi = V$.

являющимся, по существу, условием "резонанса" полей излучения (по этой причине переходное излучение в периодически-неоднородной среде принято называть резонансным переходным излучением [1]).

Дискретность спектра излучения обуславливает возможность резонанса в упругой системе. Резонанс имеет место при совпадении групповой скорости одной из излучаемых гармоник со скоростью движения нагрузки. Действительно, из рис. 10 видно, что при касании одной из прямых с дисперсионной кривой (случай совпадения групповой скорости $d\omega/dk$ со скоростью V движения нагрузки) в уравнении (3.7) появляется действительный кратный корень, что ведет к расходимости интеграла (3.6). Впервые на возможность резонанса в упругой периодически-неоднородной системе, взаимодействующей с движущейся нагрузкой, было указано в [18].

В связи с тем, что имеется счетное множество резонансных скоростей нагрузки, возникает вопрос о влиянии вязкости опор на колебания системы при резонансе и определении "существенных" для практического учета резонансов. На рисунке 11 для параметров системы $\tilde{m} = m/\rho d = 0,15$, $\tilde{k} = kd/\rho c^2 = 10$, $\tilde{\delta} = \delta/\rho c = 0,1$ приведена зависимость смещения струны в точке контакта от скорости движения нагрузки ($\alpha = V/c$, смещение изображено в момент времени $t = 0$). Вблизи основных резонансных пиков указаны частоты соответствующих резонансных гармоник, групповая скорость которых при $\delta \rightarrow 0$ совпадает со скоростью движения нагрузки. Анализ изображенной на рисунке зависимости позволяет сделать следующие выводы: 1) чем ниже частота резонансной гармоники, тем меньше влияние вязкости опор на амплитуду соответствующих резонансных колебаний, резонанс мощнее; 2) если частоты резонансных гармоник приблизительно равны (например, при $\alpha = 0,19$ и при $\alpha = 0,34$ $\omega_{\text{res}} \approx 2,25$), то резонанс тем мощнее, чем выше скорость токосъемника. Первое "правило отбора" мощных резонансов обусловлено ростом влияния вязкости опор при увеличении частоты колебаний, а второе — возрастанием мощности переходного излучения с увеличением скорости движения нагрузки (напомним, что мы рассматриваем случай $V < c$).

Излучаемые волны оказывают давление на движущуюся нагрузку (горизонтальная составляющая реакции

струны в точке контакта отлична от нуля). Согласно [20] средняя по пространственному периоду горизонтальная реакция струны на движущуюся нагрузку (в рассматриваемом случае — реакция излучения) определяется выражением

$$\bar{F}_r = -\frac{P}{d} \int_0^d [U_x(Vt + 0, t) + U_x(Vt - 0, t)] dx. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.6) в (3.8), вычисляя интеграл по x и вводя новую переменную интегрирования $\tilde{\omega} = \omega c/d$, получим

$$\frac{\bar{F}_r}{PF} = -\frac{\tilde{\delta}\alpha^2}{\pi(1-\alpha^2)} \int_0^\infty \left(\cos \frac{\tilde{\omega}}{\alpha} - \cos \tilde{\omega} \right) \tilde{\omega}^{-2} d\tilde{\omega} \times \\ \times \left[\left(\cos \frac{\tilde{\omega}}{\alpha} - \cos \tilde{\omega} - \frac{\tilde{k} - \tilde{m}\tilde{\omega}^2}{2\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\delta}}{2\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

где $\alpha = V/c$, $\tilde{m} = m/\rho d$, $\tilde{k} = kd/\rho c^2$, $\tilde{\delta} = \delta/\rho c$. Из (3.9) видно, что в среднем реакция излучения препятствует движению нагрузки. На рисунке 12 изображена зависимость средней реакции излучения от безразмерной вязкости опор $\tilde{\delta}$ при различных скоростях движения нагрузки ($\tilde{m} = 0,15$, $\tilde{k} = 10$). Видно, что если мощность излучения велика ($\alpha = 0,34$ — резонансный случай, $\alpha = 0,95$ — скорость нагрузки близка к скорости распространения волн в струне), малая вязкость опор приводит к уменьшению сопротивления движению (реакции излучения). В противном случае ($\alpha = 0,4$) сопротивление движению медленно растет с увеличением вязкости.

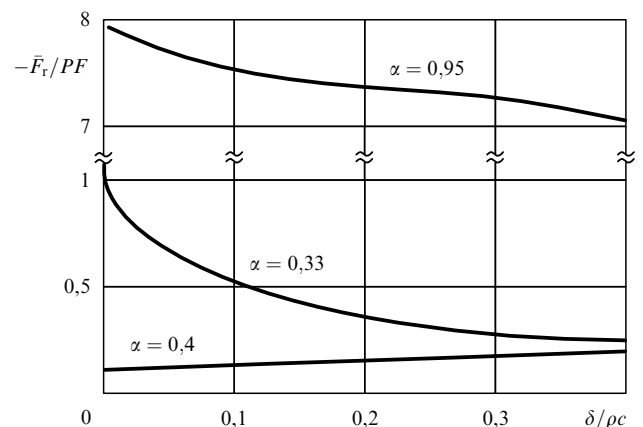


Рис. 12. Зависимость силы сопротивления движению нагрузки от вязкости опор.

Итак, спектр переходного излучения в периодически-неоднородной упругой системе дискретен. При совпадении скорости движения нагрузки с групповой скоростью одной из излучаемых гармоник амплитуда колебаний системы резко возрастает — наблюдается резонанс. Реакция излучения в среднем отлична от нуля, вследствие чего на движущуюся нагрузку действует сила сопротивления движению.

3.2. Движение постоянной нагрузки вдоль замкнутой, периодически-неоднородной упругой системы (колеса со спицами). Условия резонанса

Важным примером механической системы, в которой движущаяся нагрузка может возбуждать упругие волны,

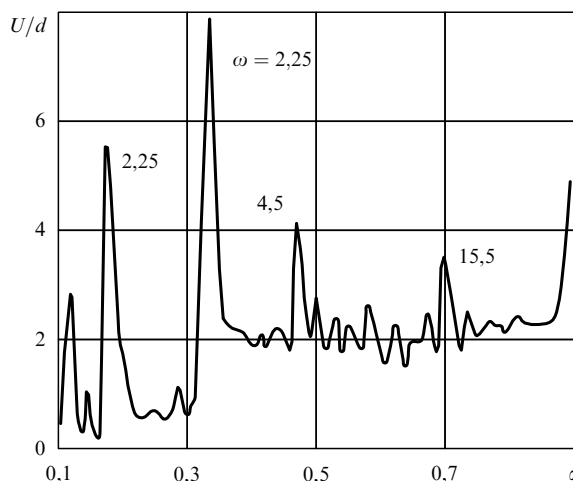


Рис. 11. Зависимость смещения струны под нагрузкой от скорости движения (в момент перехода нагрузки через опору $n = 0$).

является упругое колесо — типовой элемент большинства машин. Если колесо неоднородно по угловой координате (имеются спицы, крепления, дисковые тормоза и т.п.), то одним из механизмов генерации волн будет переходное излучение. Исследование этого механизма представляет как теоретический, так и практический интерес. С точки зрения теории любопытно проанализировать особенности процесса излучения, связанные с замкнутостью упругой системы, а практическая важность проблемы обусловлена как появлением нового типа колес для поездов (см. выше), так и необходимостью создания адекватной современным посадочным скоростям теории неустойчивости ("шимми") колес самолетов при посадке.

В качестве модели колеса рассмотрим нить, распределенную пружинами, жесткость которых равномерно распределена по углу (рис. 13). Эквидистантно по длине колеса расположим сосредоточенные упруго-инерционные "спицы" — неоднородности упругой системы. Будем полагать, что в результате взаимодействия с поверхностью Земли (рельса) на колесо действует постоянная по величине и направленная по радиусу сила P , точка приложения которой перемещается с постоянной угловой скоростью $\Omega = \text{const}$. Согласно [20] система уравнений, описывающая малые радиальные колебания нити, имеет вид

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{ss} + h^2 U &= -\frac{P}{\rho} \delta\left(s - R\Omega t + l\left\{\frac{\Omega t}{2\pi}\right\}\right), \\ 0 \leq s \leq l, \quad 0 \leq t \leq \infty, \\ [U]_{s=nl/N} &= 0, \quad U\left(\frac{nl}{N}, t\right) = U_n^0, \\ T[U_s]_{s=nl/N} &= m\ddot{U}_n^0 + \delta\dot{U}_n^0 + kU_n^0, \quad U(s+l, t) = U(s, t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $s = R\varphi$ — дуговая координата (φ — угол, R — радиус нити), l — длина колеса, N — количество спиц, $1 \leq n \leq N$, $U(s, t)$, $\ddot{U}_n^0(t)$ — радиальные смещения струны и инерционного элемента n -й спицы, ρ — погонная плотность нити, $c^2 = T/\rho$ — скорость радиальных волн, T — натяжение нити, обусловленное расpirающими ее пружинами (более подробно см. в [23]), $h^2 = k_0/\rho$, k_0 — погонная жесткость расpirающих пружин, m , δ , k —

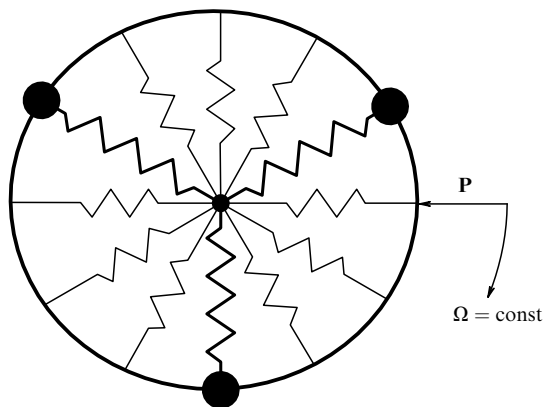


Рис. 13. Равномерное движение постоянной радиальной нагрузки вдоль "колеса со спицами".

масса, вязкость и жесткость спицы (длина невозмущенного упругого элемента спицы совпадает с R), $\{b\}$ — целая часть числа b , $[f]_{s=b} = f(b+0) - f(b-0)$.

Решение задачи (3.10) найдем методом изображений, т.е., считая упругую систему безграничной, пусть по ней дополнительные фиктивные нагрузки так, чтобы условие замкнутости $U(s+l, t) = U(s, t)$ оказалось выполненным наряду с граничными условиями в точке контакта. Очевидно, что поле, создаваемое нагрузками P , движущимися со скоростью ΩR на одинаковом расстоянии друг от друга, равно длине колеса, удовлетворяет этим требованиям. Следовательно, вспомогательная задача, решение которой совпадает с решением (3.10) при $s \in [0, l]$, запишется в виде

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{ss} + h^2 U &= -\frac{P}{\rho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(s - Vt + jnd), \\ -\infty \leq s \leq \infty, \quad -\infty \leq t \leq \infty, \\ [U]_{s=nd} &= 0, \quad U(nd, t) = U_n^0, \\ T[U_s]_{s=nd} &= m\ddot{U}_n^0 + \delta\dot{U}_n^0 + kU_n^0, \quad U(s+l, t) = U(s, t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $V = \Omega R$ — линейная скорость движения нагрузок, $d = l/N$ — расстояние между соседними спицами.

Для отыскания установившихся колебаний нити применим к (3.11) интегральное преобразование Фурье (2.11). В изображениях получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} V_\omega + \frac{1}{c^2}(\omega^2 - h^2)V_\omega &= \frac{F}{V} \exp \frac{i\omega s}{V} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{i\omega d N}{V} j \right), \\ [V_\omega]_{s=nd} &= 0, \quad V_\omega(nd, \omega) = V_{\omega n}^0(\omega), \\ T \left[\frac{\partial}{\partial s} V_\omega \right]_{s=nd} &= (k - i\delta\omega - m\omega^2)V_{\omega n}^0(\omega), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $V_\omega(s, \omega)$, $V_{\omega n}^0(\omega)$ — фурье-образы $U(s, t)$ и $U_n^0(t)$; $F = P/\rho c^2$.

Для решения задачи, как и в разделе 3.1, воспользуемся условием периодичности (3.4). Исходя из общего решения (3.12) при $s \in [0, d]$

$$\begin{aligned} V_\omega &= A \exp \frac{is\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} + \\ &+ B \exp \left(-\frac{is\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} \right) - S \exp \frac{i\omega s}{V}, \\ S &= \frac{FVc^2}{\omega^2(c^2 - V^2) + h^2V^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \frac{i\omega d N j}{V} \end{aligned} \quad (3.13)$$

и используя условие периодичности, получим выражение для V_ω при произвольном s :

$$\begin{aligned} V_\omega &= \exp \frac{i\omega s}{V} \left\{ A \exp \frac{i(s-d)\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} + \right. \\ &+ B \exp \left[-\frac{i(s-d)\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} \right] \left. \right\} - S \exp \frac{i\omega s}{V}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Определяя A и B подстановкой (3.14) в граничные условия при $s = 0$ и $s = d$ (см. (3.12)) и применяя обратное преобразование Фурье к (3.13), получим точное решение задачи (3.10), описывающее установившиеся

колебания нити при $s \in [0, d]$:

$$U(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S}{A} \left\{ Gp \left[(p - \gamma^-) \exp \frac{is\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\gamma^+ - p) \exp \left(-\frac{is\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} \right) \right] - A \exp \frac{i\omega x}{V} \right\} \times \\ \times \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (3.15)$$

где

$$A = -\frac{4ip}{c} \sqrt{\omega^2 - h^2} \left[\cos \frac{\omega d}{V} - \cos \left(\frac{d}{c} \sqrt{\omega^2 - h^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{Gc}{2\sqrt{\omega^2 - h^2}} \sin \left(\frac{d}{c} \sqrt{\omega^2 - h^2} \right) \right], \\ p = \exp \frac{i\omega d}{V}, \quad \gamma^{\pm} = \exp \left(\pm \frac{id\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} \right), \\ G = \frac{k - i\delta\omega - m\omega^2}{T}.$$

На интервале $s \in [d, Nd]$ смещение нити определяется с помощью условия периодичности (3.3).

Как и в случае движения по безграничной упругой системе (раздел 3.1), нагрузка порождает в колесе излучение с дискретным спектром, частоты составляющих которого определяются (3.7), в котором

$$\cos[\tilde{k}(\omega)d] = \cos \frac{d\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} + \frac{Gc}{2\sqrt{\omega^2 - h^2}} \sin \frac{d\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) представляет собой дисперсионное уравнение подпружиненной струны, лежащей на эквидистантных опорах.

Остановимся на одном из важнейших для практики вопросов о резонансных параметрах системы, при которых амплитуда колебаний колеса резко возрастает. Не ограничивая общности, найдем условия резонанса, исследовав амплитуду установившихся колебаний одной из спиц. Из соображений краткости рассмотрим спицу с номером $n = 0$ и вычислим ее смещение при $t = 0$ (при исследовании установившихся колебаний на предмет резонанса выбор момента времени несуществен, если смещение не равно нулю). Согласно (3.15) смещение инерционного элемента выбранной спицы при $t = 0$ определяется выражением

$$U_0^0(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S \frac{\cos(\omega d/V) - \cos(d\sqrt{\omega^2 - h^2}/c)}{\cos(\omega d/V) - \cos[\tilde{k}(\omega)d]} d\omega, \quad (3.17)$$

где $\cos[\tilde{k}(\omega)]$ определяется (3.16).

Вычисляя интеграл (3.17) с помощью теории вычетов, получим (вычисления подробно описаны в [22])

$$U_0^0(0) = -\frac{I_1 + I_2 + I_3}{4\pi}, \\ I_1 = \pi i \sum_m \operatorname{res}_{\operatorname{Im}(\omega_m) > 0} \left[D^{-1}(\omega_m) \times \right. \\ \left. \times \left(\exp \frac{i\omega_m d}{V} - \exp \frac{id\sqrt{\omega_m^2 - h^2}}{c} \right) \right] -$$

$$- \pi i \sum_l \operatorname{res}_{\operatorname{Im}(\omega_l) < 0} \left[D^{-1}(\omega_l) \times \right. \\ \left. \times \left(\exp \frac{i\omega_l d}{V} - \exp \frac{id\sqrt{\omega_l^2 - h^2}}{c} \right) \right] - \\ - \int_{-1}^1 D^{-1} \sinh \frac{d\sqrt{\omega^2 - h^2}}{c} d\omega, \\ I_2 = 2\pi i \sum_m \frac{\exp(i\omega_m dN/V)}{1 - \exp(i\omega_m dN/V)} \times \\ \times \operatorname{res}_{\operatorname{Im}(\omega_m) > 0} \left[D^{-1}(\omega_m) \left(\exp \frac{i\omega_m d}{V} - \exp \frac{id\sqrt{\omega_m^2 - h^2}}{c} \right) \right], \\ I_3 = -2\pi i \sum_l \frac{\exp(-i\omega_l dN/V)}{1 - \exp(-i\omega_l dN/V)} \times \\ \times \operatorname{res}_{\operatorname{Im}(\omega_l) < 0} \left[D^{-1}(\omega_l) \left(\exp \frac{i\omega_l d}{V} - \exp \frac{id\sqrt{\omega_l^2 - h^2}}{c} \right) \right], \\ D(\omega) = \left\{ \cos \frac{\omega d}{V} - \cos[\tilde{k}(\omega)d] \right\} \frac{\omega^2(c^2 - V^2) + h^2 V^2}{FVc^2}, \quad (3.18)$$

ω_m и ω_l — нули функции $D(\omega)$ соответственно в верхней и нижней полуплоскости комплексной переменной ω , $\operatorname{res}\{f(\omega_k)\}$ — вычет функции $f(\omega)$ в точке $\omega = \omega_k$. Как видно из (3.18), подозрительными на резонанс (на стремление смещения спицы к бесконечности при стремлении ее вязкости δ к нулю) являются следующие два случая: (а) уравнение $D(\omega) = 0$ при $\delta \rightarrow 0$ имеет кратный действительный корень, при этом вычет в этой точке стремится к бесконечности; (б) корень уравнения $D(\omega) = 0$ при $\delta \rightarrow 0$ совпадает с одним из корней уравнения $1 - \exp(\pm i\omega dN/V) = 0$, при этом либо I_2 , либо I_3 стремится к нулю.

Случай (а) физически означает, что групповая скорость одной из излучаемых гармоник совпадает со скоростью движения нагрузки. В безграничных системах (см. раздел 3.1) это условие действительно представляет собой условие резонанса, причем единственное. В замкнутых же системах это не так. Здесь не может быть резонанса, если длина излучаемой волны не кратна длине колеса. Как показано в [22], при выполнении условия (а) все слагаемые в (3.18) расходятся, но при суммировании дают конечный результат.

Что касается случая (б), то он действительно определяет параметры системы, при которых в ней наблюдается резонанс. Математически это очевидно, так как $U_0^0(0)$ стремится здесь к бесконечности благодаря росту одного из слагаемых. С точки зрения физики условие (б) также достаточно прозрачно. Действительно, реальные корни уравнения $D(\omega) = 0$, которое (для действительных корней) может быть переписано в виде

$$\tilde{k}(\omega) + \frac{2\pi m}{d} = \frac{\omega}{V}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.19)$$

определяют частоты возбуждаемых нагрузкой гармоник. Корни уравнения $1 - \exp(\pm i\omega dN/V) = 0$, совпадающие с корнями уравнения

$$\sin \frac{\omega dN}{2V} = \sin \frac{\pi\omega}{\Omega} = 0,$$

соответствуют колебаниям колеса с частотами ω , в целое число раз большими частоты вращения нагрузки Ω :

$$\omega_l = l\Omega, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.20)$$

Таким образом, резонанс в колесе со спицами имеет место при кратности частоты вращения нагрузки частоте одной из излучаемых гармоник. Условие резонанса может быть переписано также в другой форме. Подставляя (3.20) в (3.19), получим

$$m\lambda_m = Nd,$$

где $\lambda_m = 2\pi/(\tilde{k} + 2\pi m/d)$ — длина волны m -й излучаемой гармоники. Следовательно, можно говорить также, что резонанс имеет место при кратности длины колеса длине волны одной из излучаемых гармоник.

Графическое решение системы (3.19), (3.20) изображено на рис. 14. Разрывная кривая представляет собой дисперсионную зависимость $\tilde{k}(\omega)$ периодически-неоднородной системы (развернутого колеса). Точки пересечения семейства наклонных кривых $\omega_m = \tilde{k}(\omega)V + 2\pi Vm/d$ с кривой $\tilde{k}(\omega)$ определяют частоты излучаемых нагрузкой гармоник. Резонанс в системе наступает в случае, когда ω_m совпадает или в целое число раз больше частоты вращения нагрузки Ω ($\omega_l = l\Omega$ — семейство горизонтальных прямых). Графически резонансу соответствует случай пересечения дисперсионной кривой с двумя прямыми (одной горизонтальной, а другой наклонной) в одной точке.

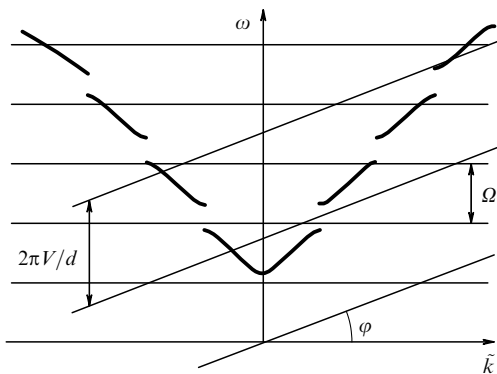


Рис. 14. Графическое решение системы, определяющей резонансные параметры колеса; $\tan \varphi = V$.

На рисунке 15 на плоскости безразмерных параметров (hd/c ; V/c) приведено семейство кривых, при попадании на которые параметров системы, в ней наблюдается резонанс (при расчетах полагалось $kc/hT = 0,7$, $\delta c/T = 0$, $mhc/T = 0,3$, $N = 2$). На рисунке изображены, естественно, не все решения системы (3.19), (3.20) (их счетное множество), а лишь кривые, соответствующие частотам, превосходящим частоту вращения нагрузки не более чем в три раза. Более высокие частоты не имеет смысла учитывать, так как резонансы на них будут с большой вероятностью подавлены диссипацией, имеющейся во всех реальных колесах. В точках пересечения каждой кривой с прямой $V/c = 1$ проставлены двойные индексы (m, l) , первая цифра которых указывает, во сколько раз резонансная частота больше частоты вращения

нагрузки, а вторая соответствует номеру излучаемой гармоники. Из рисунка 15 видно, что с увеличением скорости нагрузки "резонансное" расстояние между спицами увеличивается. Интересно также отметить, что существуют области сгущения резонансных параметров системы (например, при $V/c \approx 0,8$ и $hd/c \approx 1$).

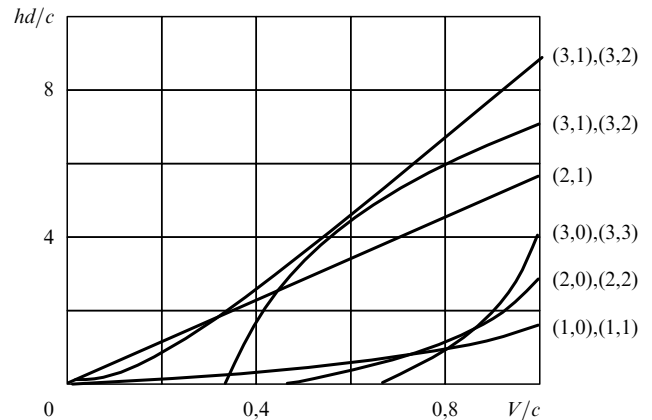


Рис. 15. Семейство кривых, при попадании на которые параметров системы, в колесе имеет место резонанс.

Для отбора "мощных" резонансов, как и в случае движения по безграничной системе (раздел 3.1), следует руководствоваться правилом: резонанс тем мощнее, чем ниже резонансная частота и чем выше скорость движения нагрузки.

3.3. Движение массы вдоль струны, лежащей на периодически-неоднородном упругом основании.

Параметрическая неустойчивость колебаний системы

Если источник возмущений обладает собственными степенями свободы, то порожденное им излучение может увеличивать его внутреннюю энергию [14]. Это происходит в случае, когда объект излучает аномальные волны по Доплеру волны. В упругих системах аномальные волны могут приводить к неустойчивости колебаний движущихся объектов [15–17]. Как известно, периодически-неоднородные системы являются замедляющими, поэтому естественно ожидать, что уже при "докритических" скоростях (меньших максимальной скорости переноса энергии) движущегося по таким системам объекта его колебания окажутся неустойчивыми. Заслуживает внимание и другое, более "механическое" рассуждение. Представим себе, что объект равномерно движется вдоль упругой направляющей, лежащей на упругом основании, причем жесткость этого основания периодически изменяется в пространстве. За счет равномерности движения объекта и периодичности параметров направляющей жесткость пружин основания непосредственно под движущимся объектом изменяется также периодически, но уже во времени. Следовательно, колебания движущегося по направляющей объекта эквивалентны его колебаниям на пружине с периодически изменяющейся во времени жесткостью (рис. 16). Такая ситуация, очевидно, может привести к параметрической неустойчивости колебаний объекта.

При эксплуатации поездов неустойчивость приводит к "галопированию" колес состава и искрению в процессе токосъема.

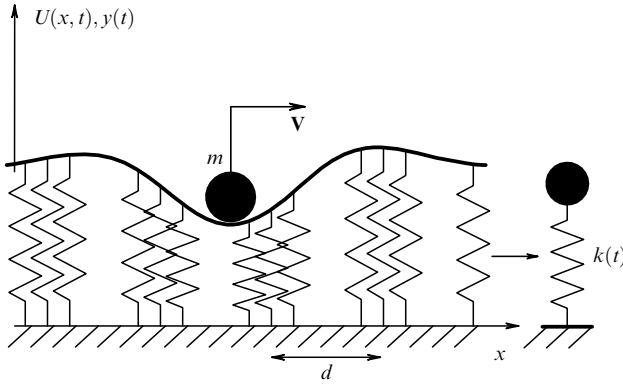


Рис. 16. Движение массы по струне на периодически-неоднородном основании. Эквивалентная модель — масса на пружине с периодической во времени жесткостью.

Для анализа условий возникновения параметрического резонанса рассмотрим равномерное $x = Vt$ движение массы m по безграничной струне, лежащей на упругом основании (см. рис. 16), погонная жесткость которого описывается выражением

$$k(x) = k_0 \left(1 + \mu \cos \frac{2\pi x}{d} \right),$$

где k_0 — средняя жесткость, d — период неоднородности, $\mu \ll 1$ — безразмерный малый параметр. Для простоты будем полагать, что на систему не действуют внешние вертикальные силы, так как в силу линейности задачи они не влияют на ее устойчивость. Согласно [22] задача, описывающая безотрывные колебания массы и струны, имеет вид

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2(x)U &= -\frac{m}{\rho} \ddot{U}_0 \delta(x - Vt), \\ U_0(t) &= U(Vt, t), \quad -\infty < x, t < \infty, \quad c^2 = \frac{N}{\rho}, \\ h^2(x) &= \frac{h_0^2}{\rho} \left(1 + \mu \cos \frac{2\pi x}{d} \right), \quad h_0^2 = \frac{k_0}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $U(x, t)$, $U_0(t)$ — вертикальные смещения струны и массы, ρ и N — погонная плотность и натяжение струны; движение массы полагается докритическим, т.е. $V < c$.

Решение (3.21) будем искать методом теории возмущений в виде

$$U = U^{(0)} + \mu U^{(1)} + \dots, \quad U_0 = U_0^{(0)} + \mu U_0^{(1)} + \dots \quad (3.22)$$

В нулевом приближении ($\mu = 0$) из (3.21), (3.22) получим задачу о движении массы по струне, лежащей на однородном упругом основании жесткости k_0 :

$$\begin{aligned} U_{tt}^{(0)} - c^2 U_{xx}^{(0)} + h_0^2 U^{(0)} &= -\frac{m}{\rho} \frac{d^2}{dt^2} [U_0^{(0)}(t)] \delta(x - Vt), \\ U_0^{(0)}(t) &= U^{(0)}(Vt, t). \end{aligned}$$

Используя фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h_0^2,$$

имеющее вид

$$J_0 \left(\frac{h_0}{c} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right) \frac{\Theta(ct - |x|)}{2c}$$

(J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, Θ — единичная функция), запишем выражение для $U^{(0)}(x, t)$

$$\begin{aligned} U^{(0)}(x, t) &= -\frac{m}{2\rho c} \int_0^t \frac{d^2}{d\tau^2} [U_0^{(0)}(\tau)] \times \\ &\times J_0 \left[\frac{h_0}{c} \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (x-V\tau)^2} \right] \Theta(t-\tau - |x-V\tau|) d\tau. \end{aligned}$$

Используя теперь условие безотрывности колебаний массы и струны, получим уравнение, описывающее вертикальные колебания массы (напомним, что $V < c$) на струне:

$$U_0^{(0)}(t) + \frac{m}{2\rho c} \int_0^t \frac{d^2}{d\tau^2} [U_0^{(0)}(\tau)] J_0 \left[\frac{h_0}{c} \sqrt{c^2 - V^2}(t-\tau) \right] d\tau = 0. \quad (3.23)$$

Отыскивая решение (3.23) в виде $U_0^{(0)}(t) = A \exp i\tilde{\Omega}t$ и устремляя $t \rightarrow \infty$, приходим к уравнению, определяющему частоты колебаний движущейся по струне массы при $t \rightarrow \infty$:

$$1 - \frac{M\Omega^2}{2\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}} = 0, \quad M = \frac{mh_0}{\rho c}, \quad \Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{h_0}, \quad \alpha = \frac{V}{c},$$

откуда

$$\Omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{M} \sqrt{[1 + M^2(1-\alpha^2)]^{1/2} - 1}. \quad (3.24)$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ колебания массы, равномерно движущейся по струне, лежащей на однородном упругом основании, являются гармоническими (Ω — действительная) и описываются выражением

$$\begin{aligned} U_0^{(0)}(\tau) &= A \exp i\Omega\tau + B \exp(-i\Omega\tau), \\ \tau &= h_0 t, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Выражение для колебаний струны, соответствующих устанавливающимся при $t \rightarrow \infty$ колебаниям массы, может быть легко найдено в виде суперпозиции "плоских" волн и имеет вид (τ, z — безразмерные время и координата):

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= C_1 \exp(i\omega_j \tau - ik_j z) + C_2 \exp(i\omega_{j+2} \tau - ik_{j+2} z), \\ z &= \frac{xh}{c}, \quad j = \begin{cases} 1, & z < \alpha\tau, \\ 2, & z > \alpha\tau, \end{cases} \\ k_{1,2} &= \frac{\alpha\Omega \pm i\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \omega_{1,2} = \alpha k_{1,2} + \Omega, \\ k_{3,4} &= -\frac{\alpha\Omega \pm i\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \omega_{3,4} = \alpha k_{3,4} - \Omega, \\ C_1 &= \frac{A\Omega^2}{2\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}}, \quad C_2 = \frac{B\Omega^2}{2\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Итак, масса на однородной струне совершает гармонические колебания. Естественно ожидать поэтому, что при

учете периодической неоднородности упругого основания, приводящего к периодическому *во времени* (с периодом $T = d/V$) изменению жесткости пружин под движущейся массой, может возникнуть параметрический резонанс, первая зона неустойчивости которого имеет место при условии

$$2\Omega = \alpha\chi + \mu\delta, \quad (3.27)$$

где $\alpha\chi$ ($\alpha = V/c$, $\chi = 2\pi c/hd$) — безразмерная частота изменения жесткости упругого основания под движущейся массой, δ — безразмерная расстройка по частоте.

Как показано в [22], параметрический резонанс действительно возникает в рассматриваемой системе. Там же подробно описана процедура нахождения границ первой зоны неустойчивости, являющаяся аналогом стандартного метода, применяемого при анализе параметрического резонанса в сосредоточенных системах (см. [24, 25]). В соответствии с этим методом решение (3.21) ищется в виде ряда (3.22), но в решении для нулевого приближения (3.25), (3.26) амплитуды полагаются медленно меняющимися (вследствие распределенности системы амплитуды должны меняться как во времени, так и в пространстве), а в фазе вводится малая расстройка:

$$\begin{aligned} U_0(\tau) &= A(\mu\tau) \exp[i\tau(\Omega + \mu\delta)] + \\ &+ B(\mu\tau) \exp[-i\tau(\Omega + \mu\delta)] + \mu U_0^{(1)}(\tau) + \dots, \\ U(z, \tau) &= C_1^j(\mu z, \mu\tau) \exp[i\tau(\omega_j + \mu\delta) - ik_j z] + \\ &+ C_2^j(\mu z, \mu\tau) \exp[i\tau(\omega_{j+2} + \mu\delta) - ik_{j+2} z] + \\ &+ U^{(1)}(z, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Уравнение границ зоны неустойчивости получается из требования ненаращения во времени $U_0^{(1)}(\tau)$ и $U^{(1)}(z, \tau)$ (ряды (3.28) должны быть асимптотически сходящимися) и имеет вид

$$\alpha\chi - 2\Omega \pm \mu \frac{\alpha^2\Omega(1 - \alpha^2)^2}{16(\alpha^2 + \Omega^2)(1 + 2/M^2\Omega^2)} = 0. \quad (3.29)$$

Напомним, что безразмерные величины в (3.29) означают следующее: α — скорость движения массы, χ — волновое число неоднородности, M — масса, Ω — частота колебаний массы, движущейся по струне на однородном основании (определяется (3.24)).

На рисунке 17 изображены зоны неустойчивости для различных χ , найденные согласно (3.29). Анализируя рисунок, можно сделать следующие выводы: а) чем меньше период неоднородности (больше χ), тем при меньших скоростях движения наблюдается неустойчивость; б) с ростом скорости движения масса, достаточная для возникновения неустойчивости, уменьшается; в) с увеличением массы и (или) периода неоднородности зона неустойчивости расширяется по α . Отметим, что найденные границы зоны неустойчивости (3.29) являются границами основной зоны неустойчивости, полученными в первом приближении по малому параметру μ .

Важным является вопрос о влиянии малой вязкости упругого основания на результат рассматриваемой задачи. При учете вязкости, первое уравнение (3.21)

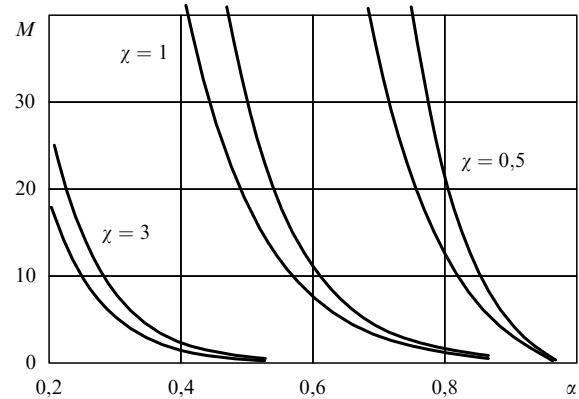


Рис. 17. Основная зона неустойчивости колебаний массы для различных периодов неоднородности упругого основания.

примет вид ($\mu\nu$ — малая вязкость основания)

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + 2\mu\nu U_t + h^2(x)U = -\frac{m}{\rho} \ddot{U}_0\delta(x - Vt),$$

а условием неустойчивости будет являться следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\frac{M^2\Omega^4(1 - \alpha^2)^2}{16(\alpha^2 + \Omega^2)^2(\nu^2 + 16\Omega^2/\alpha^4)} - \delta^2 \left(M + \frac{2}{M\Omega^2} \right)^2 - \\ &- \frac{4\nu^2}{M^2\Omega^4} > 0, \quad \delta = \frac{\alpha\chi - 2\Omega}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

На рисунке 18 изображены зоны неустойчивости, полученные согласно (3.30) при $\nu = 0.7$. Видно, что в пространстве параметров системы появляется область (ниже пунктирной кривой на рисунке), где ее колебания устойчивы при любых периодах неоднородности. Интересно также, что влияние вязкости упругого основания растет с увеличением скорости движения массы.

Итак, при равномерном движении массы (а также и произвольного объекта) по периодически-неоднородной упругой системе наблюдается явление параметрического резонанса, которое проявляется в нарастании амплитуды колебаний массы по экспоненциальному закону при $t \rightarrow \infty$. Как уже отмечалось выше, работа, необхо-

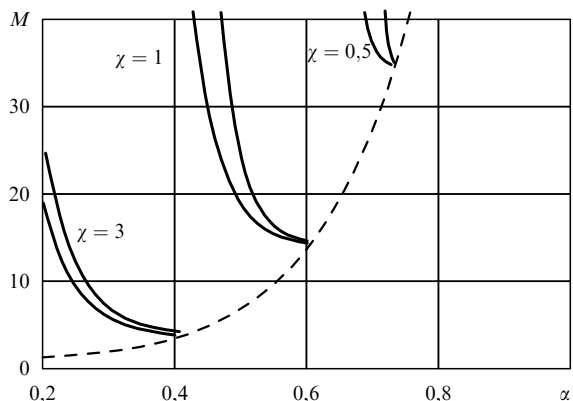


Рис. 18. Основная зона неустойчивости при учете вязкости основания струны.

димая для увеличения энергии колебаний массы, совершается внешним источником, поддерживающим равномерное движение.

Мы рассмотрели безотрывные колебания массы и упругой системы. В реальных же ситуациях, например при движении железнодорожного состава по рельсовому пути, возможен отрыв колес состава от рельсов, а затем возобновление контакта путем ударного взаимодействия ("галомирование"). То, что параметры рассмотренной выше задачи принадлежат области устойчивости отнюдь не означает, что движение объекта безотрывно. Однако попадание параметров в область неустойчивости гарантирует разрыв контакта при $t \rightarrow \infty$, т.е. является достаточным условием "галомирования".

4. Переходное излучение в случайно-неоднородных одномерных упругих системах

Предположение о регулярности свойств реальных упругих направляющих является спорным. Действительно, шпалы, поддерживающие рельсовый путь, лежат не строго периодически, расстояние между точками крепления контактного провода флуктуирует в пределах нескольких процентов, а балласт железнодорожного пути является совершенно случайной структурой. Поэтому необходимо ответить на вопрос, не приведет ли учет пространственных флуктуаций параметров упругих систем к каким-либо качественным изменениям в их динамическом поведении, в частности — в процессе переходного излучения? Причин дать положительный ответ много. Например, в отличие от излучения в периодических системах переходное излучение в случайно-неоднородных направляющих некогерентно. Рассуждая далее, можно поставить и более принципиальный вопрос: нужно ли делать реальные конструкции строго периодическими или небольшие флуктуации помогут уменьшить возникающие динамические напряжения? Обсуждению данных вопросов и посвящен этот раздел.

Мы обсудим здесь две задачи. Сначала предположим, что вдоль случайно-неоднородной системы движется нагрузка и остановимся на принципиальном для практики вопросе о резонансных колебаниях системы в процессе излучения. Затем учтем инерционность движущегося объекта и покажем, что в системе движущийся объект — случайно-неоднородная упругая система возможен стохастический параметрический резонанс. Данные задачи не являются классическими для работ по переходному излучению, но мы как раз и стараемся подчеркнуть специфику излучения в механических системах и по возможности уйти от повторения того, что сделано в электродинамике и акустике [1, 5].

4.1. Движение постоянной нагрузки по струне, лежащей на случайно-неоднородном упругом основании. Ограничение амплитуды резонансных колебаний, средняя реакция излучения

При движении нагрузки по случайно-неоднородной направляющей излучаемые на каждой неоднородности волны не могут сложиться резонансным образом — не позволяет нерегулярность неоднородности. Как следствие, излучение оказывается локализованным вблизи движущейся нагрузки, и в этом смысле излучение в случайно-неоднородной среде сходно процессу волнообразования в среде диссипативной, обуславливающей

затухание излучаемых волн. Интересно, что такие классические эффекты, вносимые диссипацией в систему "движущаяся нагрузка — упругая направляющая", как ограничение амплитуды колебаний при резонансе и сопротивление движению нагрузки [26], проявляются и при движении нагрузки вдоль случайно-неоднородной направляющей. Это естественно, так как излучаемые волны эквивалентны "с точки зрения нагрузки" диссипации, поскольку отводят от нее энергию, а реакция излучения вследствие "эффекта отдачи" препятствует ее движению.

Для того чтобы продемонстрировать вышесказанное, рассмотрим равномерное движение вертикальной нагрузки $P \exp i\Omega t$ по струне, лежащей на упругом основании погонной жесткости

$$k(x) = k_0 + \frac{1}{2} \mu k_1(x), \quad (4.1)$$

где $k_0 = \text{const}$, $\mu \ll 1$ — безразмерный малый параметр, $k_1(x)$ — случайная функция координаты, $\langle k_1(x) \rangle = 0$. Скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение. Нагрузка полагается осциллирующей для возможности демонстрации эффекта ограничения резонансных колебаний при докритических скоростях. В случае движения постоянной нагрузки первой "резонансной скоростью" является скорость распространения волн в струне, а движение с этой скоростью представляет отдельный, весьма сложный вопрос, которого мы не хотели бы касаться в данном обзоре.

Вертикальное смещение струны под действием нагрузки описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} + h^2(x)U &= -\frac{P}{\rho} \exp i\Omega t \delta(x - Vt), \\ -\infty < x, t < \infty, \quad c^2 &= \frac{N}{\rho}, \\ h^2(x) &= h_0^2 + \mu h_1(x), \quad h_0^2 = \frac{k_0}{\rho}, \quad h_1(x) = \frac{k_1(x)}{\rho}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $U(x, t)$ — вертикальное смещение струны, N и ρ — ее натяжение и погонная плотность, движение нагрузки полагается докритическим, т.е. $V < c$.

Для анализа задачи (4.2) воспользуемся методом среднего поля [27, 28]. Недостатком этого метода является потеря информации о фазе колебаний, но для наших целей (анализ амплитуды колебаний при резонансе и определение средней реакции излучения) это несущественно.

Применяя к (4.2) интегральное преобразование Фурье по времени (2.11), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_\omega + \frac{1}{c^2} [\omega^2 - h^2(x)] V_\omega &= \frac{F}{V} \exp \left(i \frac{\omega + \Omega}{V} x \right), \\ F &= \frac{P}{\rho c^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Согласно методу среднего поля решение (4.3) будем искать в виде суммы среднего поля $\langle V_\omega \rangle$ и флуктуационного поля V_ω^1 , для которого $\langle V_\omega^1 \rangle = 0$:

$$V_\omega = \langle V_\omega \rangle + \mu V_\omega^1. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\langle V_\omega \rangle + \mu V_\omega^1) + \frac{1}{c^2} [\omega^2 - h_0^2 - \mu h_1(x)] (\langle V_\omega \rangle + \mu V_\omega^1) = \frac{F}{V} \exp\left(i \frac{\omega + \Omega}{V}\right), \quad (4.5)$$

которое после статистического усреднения перейдет в уравнение для среднего поля колебаний струны:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle V_\omega \rangle + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - h_0^2) \langle V_\omega \rangle - \mu^2 \frac{1}{c^2} \langle h_1(x) V_\omega^1 \rangle = \frac{F}{V} \exp\left(i \frac{\omega + \Omega}{V}\right). \quad (4.6)$$

Уравнение для флуктуационного поля получим, вычитая (4.6) из (4.5) и ограничиваясь слагаемыми порядка μ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V_\omega^1 + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - h_0^2) V_\omega^1 = \frac{1}{c^2} \langle V_\omega \rangle h_1(x). \quad (4.7)$$

Функция Грина уравнения (4.7) имеет вид [26, 29]

$$\varphi(|x|, \omega) = \frac{1}{2ia(\omega)} \exp[ia(\omega)|x|],$$

$$a(\omega) = \frac{1}{c} \begin{cases} +\sqrt{\omega^2 - h_0^2}, & \omega > h_0, \\ i\sqrt{h_0^2 - \omega^2}, & |\omega| < h_0, \\ -\sqrt{\omega^2 - h_0^2}, & \omega < -h_0, \end{cases}$$

следовательно, исходя из (4.7), флуктуационное поле связано со средним следующим образом:

$$V_\omega^1(x, \omega) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_\omega(\xi, \omega) \rangle h_1(\xi) \varphi(|x - \xi|, \omega) d\xi. \quad (4.8)$$

Подставляя теперь связь (4.8) в (4.6), получим замкнутое уравнение для среднего поля смещений струны (в фурье-изображениях):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle V_\omega \rangle + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - h_0^2) \langle V_\omega \rangle - \mu^2 \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_\omega(\xi, \omega) \rangle K(x, \xi) \varphi(|x - \xi|, \omega) d\xi = \frac{F}{V} \exp\left(i \frac{\omega + \Omega}{V}\right), \quad (4.9)$$

где $K(x, \xi) = \langle h_1(x) h_1(\xi) \rangle$ — функция корреляции неоднородности.

В дальнейшем будем полагать флуктуации однородными, т.е. считать $K(x, \xi) = K(|x - \xi|)$. Данное предположение позволяет ввести эффективную жесткость упругого основания (аналог эффективной диэлектрической проницаемости [27]). Действительно, применяя к (4.9) интегральное преобразование Фурье по координате

$$\langle W_{\omega, k}(k, \omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_\omega(x, \omega) \rangle \exp(-i\chi x) dx,$$

получим

$$\langle W_{\omega, k} \rangle = \frac{2\pi F}{V} \delta\left(\frac{\omega + \Omega}{V} - \chi\right) \times \frac{1}{-\chi^2 + (\omega^2 - h_0^2)/c^2 - \mu^2 H(\omega, \chi)}, \quad (4.10)$$

где

$$H(\omega, \chi) = 2 \int_0^\infty K(\xi) \varphi(\xi) \cos \chi \xi d\xi$$

— эффективная жесткость упругого основания струны.

Как и частотно-зависимая диссипация, эффективная жесткость упругого основания неинвариантна относительно замены $\omega \rightarrow -\omega$ (вследствие неинвариантности $\varphi(\xi, \omega)$) и обуславливает отсутствие одновременно действительных ω и χ , обращающих дисперсионное уравнение

$$-\chi^2 + \frac{\omega^2 - h_0^2}{c^2} - \mu^2 H(\omega, \chi) = 0$$

в тождество. Эти свойства эффективной жесткости являются причиной ограничения смещения струны при резонансе и возникновения сопротивления движению. Действительно, применяя к (4.10) обратные преобразования Фурье по координате и времени, получим

$$\langle U(x, t) \rangle = \frac{F}{2\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix(\omega + \Omega)/V - i\omega t] \times \times \left[-\frac{(\omega + \Omega)^2}{V^2} + \frac{\omega^2 - h_0^2}{c^2} - \mu^2 H\left(\omega, \frac{\omega + \Omega}{V}\right) \right]^{-1} d\omega. \quad (4.11)$$

Вследствие отсутствия действительных частоты и волнового числа, являющихся корнями дисперсионного уравнения, знаменатель в (4.11) не обращается в нуль на множестве действительных ω и интеграл оказывается сходящимся при всех параметрах системы. Если бы упругое основание было однородным ($\mu = 0$), знаменатель в (4.11) имел бы действительный кратный корень при выполнении условия резонанса $V = c(1 - \Omega^2/h_0^2)^{1/2}$, $\Omega < h_0$.

Что касается среднестатистической силы сопротивления движению F^r , то она отлична от нуля уже при $\Omega = 0$. Это видно из нижеследующего выражения для $\langle F^r \rangle$, для получения которого использованы (4.11) и общее выражение для продольной составляющей реакции струны на рассматриваемую нагрузку ($\Omega = 0$)

$$F^r = -P \exp i\Omega t [U_x(Vt - 0, t) + U_x(Vt + 0, t)]:$$

$$\langle F^r \rangle = -\frac{F}{2\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega \{ \exp[i\omega \times (-0)] + \exp[i\omega \times (+0)] \}}{-\omega^2 + V^2(\omega^2 - h_0^2)/c^2 - \mu^2 V^2 H(\omega, \omega/V)} d\omega.$$

Для вычисления $\langle F^r \rangle$ может быть использовано контурное интегрирование. При этом первое слагаемое подынтегрального выражения (аргумент экспоненты умножен на (-0)) должно интегрироваться по нижней полуплоскости комплексной переменной ω , а второе — по верхней. Результаты интегрирования данных слагаемых будут различны, поскольку знаменатель подынтегрального выражения неинвариантен относительно замены

$\omega \rightarrow -\omega$. Следовательно, $\langle F^\Gamma \rangle \neq 0$. В частности, если неоднородность дельта-коррелирована [$K(x) = \delta(x)$], то $\langle F^\Gamma \rangle$ описывается выражением

$$\langle F^\Gamma \rangle = -\mu^2 \frac{V^2 P^2}{4\rho c^3 \sqrt{c^2 - V^2}}.$$

Итак, случайная неоднородность направляющей ограничивает амплитуду ее резонансных колебаний, вызванных движущейся нагрузкой. Напрашивается следующий вывод: нерегулярная структура направляющей всегда лучше (для снижения уровня вибраций), чем периодическая неоднородность, так как она вносит в систему дополнительную эффективную диссипацию. Данный вывод, однако, неверен, что становится очевидным при учете взаимообусловленности колебаний движущегося объекта и упругой системы. В следующем разделе будет показано, что области неустойчивости колебаний объекта, движущегося по случайно-неоднородной направляющей, могут быть намного шире, чем при движении того же объекта по периодической упругой системе. Поэтому параметры случайной неоднородности должны быть тщательно подобраны, дабы излучение не "раскачивало" объект в вертикальном направлении.

4.2. Движение массы по струне, лежащей на случайно-неоднородном упругом основании. Стохастический параметрический резонанс

В разделе 3.3 было отмечено, что колебания массы, равномерно движущейся по периодически-неоднородной упругой системе, эквивалентны колебаниям данной массы на пружине с периодически изменяющейся во времени жесткостью. Очевидно, что эквивалентной моделью, описывающей колебания массы при ее движении по случайно-неоднородной направляющей, является масса на пружине, жесткость которой изменяется во времени случайным образом. Как известно [30, 31], колебания массы на такой пружине могут быть неустойчивы вследствие стохастического параметрического резонанса. Следовательно, зоны неустойчивости должны существовать и в пространстве параметров системы движущаяся масса – случайно-неоднородная направляющая.

Для проверки вышеприведенных соображений рассмотрим (рис. 19) равномерное $x = Vt$ движение массы m по струне с погонной плотностью ρ и натяжением N , лежащей на случайно-неоднородном упругом основании с погонной жесткостью $k(x) = k_0 + \mu k_1(x)/2$ (см. (4.1)).

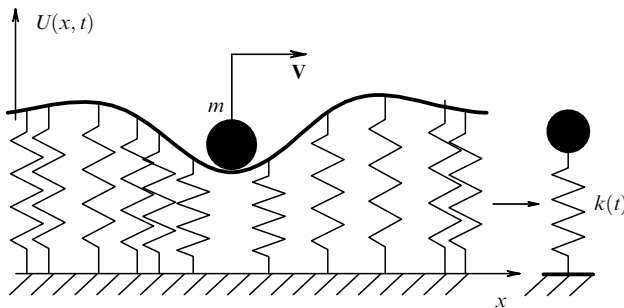


Рис. 19. Движение массы по струне на случайно-неоднородном основании. Эквивалентная модель — масса на пружине со случайно изменяющейся во времени жесткостью.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры: $z = xh_0/c$, $\tau = h_0 t$ ($c^2 = N/\rho$, $h_0^2 = k_0/\rho$) — координата и время, $\alpha = V/c$ ($\alpha < 1$) — скорость движения массы, $M = mh_0/\rho c$ — масса и представим $h_1(z) = k_1(z)/k_0\rho$ в виде

$$h_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\chi) \exp i\chi z \, d\chi = \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(\chi_1) \exp(-i\chi_1 z) \, d\chi_1, \\ \langle Q(\chi) \rangle = \langle Q^*(\chi_1) \rangle = 0. \quad (4.12)$$

Вновь будем полагать, что флуктуации однородны, т.е.

$$\langle h_1(z)h_1(z_1) \rangle = K(|z - z_1|) \Leftrightarrow \langle Q(\chi)Q^*(\chi_1) \rangle = S(\chi)\delta(\chi - \chi_1),$$

где $K(z)$, $S(\chi)$ — функция корреляции и ее спектр, связанные соотношениями Винера – Хинчина.

Уравнения, описывающие безотрывные колебания массы и струны, запишем в движущейся системе координат $\xi = z - \alpha\tau$ с учетом представления (4.12) (более подробно см. в [32]):

$$U_{\tau\tau} - 2\alpha U_{\tau\xi} - (1 - \alpha^2)U_{\xi\xi} + 2\mu\nu(U_\tau - \alpha U_\xi) + \\ + U \left\{ 1 + \mu \int_{-\infty}^{\infty} Q(\chi) \exp[i\chi(\xi + \alpha\tau)] \, d\chi \right\} = -M\delta(\xi)U_{\tau\tau}. \quad (4.13)$$

Здесь $U(z, \tau)$ — вертикальное смещение струны, $2\mu\nu$ — безразмерная малая вязкость упругого основания струны, $[-M\delta(\xi)U_{\tau\tau}]$ — вертикальная сила инерции, действующая на массу в движущейся системе координат.

Решение (4.13) будем искать методом среднего поля, согласно которому представим смещение струны в виде суммы среднего и малого флуктуационного полей: $U = \langle U \rangle + \mu U^1$. Подставляя это представление в (4.13) и выполняя описанные в предыдущем пункте операции, получим уравнения для среднего и флуктуационного полей:

$$\langle U \rangle_{\tau\tau} - 2\alpha \langle U \rangle_{\tau\xi} - (1 - \alpha^2)\langle U \rangle_{\xi\xi} + 2\mu\nu(\langle U \rangle_\tau - \alpha \langle U \rangle_\xi) + \\ + \langle U \rangle + \mu^2 \left\langle U^1 \int_{-\infty}^{\infty} Q(\chi) \exp[i\chi(\xi + \alpha\tau)] \, d\chi \right\rangle = \\ = -M\delta(\xi)\langle U \rangle_{\tau\tau}, \quad (4.14)$$

$$U_{\tau\tau}^1 - 2\alpha U_{\tau\xi}^1 - (1 - \alpha^2)U_{\xi\xi}^1 + U^1 = \\ = -\langle U \rangle \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(\chi_1) \exp[-i\chi_1(\xi + \alpha\tau)] \, d\chi_1 - \\ - M\delta(\xi)U_{\tau\tau}^1. \quad (4.15)$$

Применяя к (4.14), (4.15) интегральные преобразования Фурье по времени и координате

$$\{ \langle V_\omega(\omega, \xi) \rangle, V_\omega^1(\omega, \xi) \} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \langle U(\xi, \tau) \rangle, U^1(\xi, \tau) \} \exp i\omega\tau \, d\tau, \\ \{ \langle W_{\omega,k}(\omega, k) \rangle, W_{\omega,k}^1(\omega, k) \} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \langle V_\omega(\omega, \xi) \rangle, V_\omega^1(\omega, \xi) \} \exp(-ik\xi) \, d\xi,$$

получим уравнения для среднего и флуктуационного поля в изображениях:

$$\begin{aligned} & \left[A(\omega, k) - 2i\mu\nu(\omega + \alpha k) + \right. \\ & \left. + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle Q(\chi) W_{\omega, k}^1(\omega + \alpha k, k - \chi) \rangle d\chi \right] \langle W_{\omega, k}^0(\omega, k) \rangle = \\ & = M\omega^2 \langle V_{\omega}(\omega, 0) \rangle, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} A(\omega, k) W_{\omega, k}^1(\omega, k) &= M\omega^2 V_{\omega}^1(\omega, 0) - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(\chi_1) \langle W_{\omega, k}(\omega - \alpha\chi_1, k + \chi_1) \rangle d\chi_1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$A(\omega, k) = -\omega^2 - 2\alpha\omega k + (1 - \alpha^2)k^2 + 1.$$

Нашей целью является получение следующего уравнения, описывающего колебания массы в среднем: $\langle V_{\omega}(\omega, 0) \rangle Z(\omega) = 0$, исходя из которого мы определим собственные частоты колебаний массы (приравняв $Z(\omega)$ к нулю). Процедура получения данного уравнения подробно описана в [32], поэтому приведем сразу выражение для $Z(\omega)$:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= 1 - M\omega^2 \Phi \left\{ \frac{1}{A(\omega, k)} \right\} - 2i\mu\nu \Phi \left\{ \frac{\omega + \alpha k}{A(\omega, k)} \right\} - \\ &- \mu^2 M \int_{-\infty}^{\infty} S(\chi) \left[\Phi \left\{ \frac{1}{A^2(\omega, k) A(\omega + \alpha\chi, k - \chi)} \right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega^2(\omega + \alpha\chi)^2 \Phi^2 \{ 1/[A(\omega, k + \chi) A(\omega + \alpha\chi, k)] \}}{1 - M(\omega + \alpha\chi)^2 \Phi \{ 1/A(\omega + \alpha\chi, k) \}} \right] d\chi, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где использовано обозначение

$$\Phi[f(\omega, k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega, k) dk.$$

Корни уравнения $Z(\omega) = 0$ определяют устойчивость колебаний массы в среднем. Если хотя бы один корень имеет положительную мнимую часть, колебания массы в среднем будут неустойчивы.

В нулевом приближении ($\mu = 0$) корни уравнения $Z(\omega) = 0$ определяются выражением (для их нахождения необходимо вычислить интеграл $\Phi[1/A(\omega, k)]$ и решить полученное уравнение):

$$\Omega = \pm \frac{\sqrt{2}}{M} \sqrt{[1 + M^2(1 - \alpha^2)]^{1/2} - 1}, \quad (4.19)$$

которое, естественно, совпадает с (3.24). Выражение (4.19) показывает, что при движении массы по струне на однородном упругом основании при $\tau \rightarrow \infty$ масса гармонически колеблется в вертикальном направлении.

Определим поправку к частоте колебаний массы, вносимую малыми вязкостью и случайной неоднородностью основания. Для этого корни уравнения $Z(\omega) = 0$ при $\mu \neq 0$ будем искать в виде

$$\omega = \Omega + \mu\delta. \quad (4.20)$$

Нас будет интересовать мнимая часть δ , так как именно она определяет устойчивость колебаний массы. Подставляя (4.20) в (4.18) (в слагаемых, стоящих при μ и μ^2 полагаем $\omega = \Omega$) и вычисляя интегралы, входящие в (4.18) (подробно см. в [32]), получим

$$\begin{aligned} \text{Im}(\delta) &= -\frac{\nu M^2 \Omega^2}{(1 - \alpha^2)(2 + M^2 \Omega^2)} - \frac{\mu M^4 (1 - \alpha^2) \Omega^2}{(2 + M \Omega^2)(2 + M^2 \Omega^2)} \times \\ &\times \left[S(0) \frac{1}{\alpha M^4 \Omega^4} - S\left(\frac{2\Omega}{\alpha}\right) \frac{\alpha^3}{(4 + \alpha^2 M^2 \Omega^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, колебания массы, равномерно движущейся по струне, лежащей на случайно-неоднородном упруго-вязком основании, неустойчивы в среднем, если выполнено условие (равносильное $\text{Im}(\delta) > 0$):

$$S\left(\frac{2\Omega}{\alpha}\right) \frac{\alpha^3}{(4 + \alpha^2 M^2 \Omega^2)^2} - S(0) \frac{1}{\alpha M^4 \Omega^4} > \frac{2\nu(2 + M \Omega^2)}{\mu M^2 (1 - \alpha^2)^3}. \quad (4.21)$$

Очевидно, что если случайная функция $h_1(z)$ обладает скрытой периодичностью, т.е. $S(\chi)$ имеет вид, изображенный на рис. 20, и характерное волновое число χ_0 близко к $2\Omega/\alpha$, в системе возможна неустойчивость.

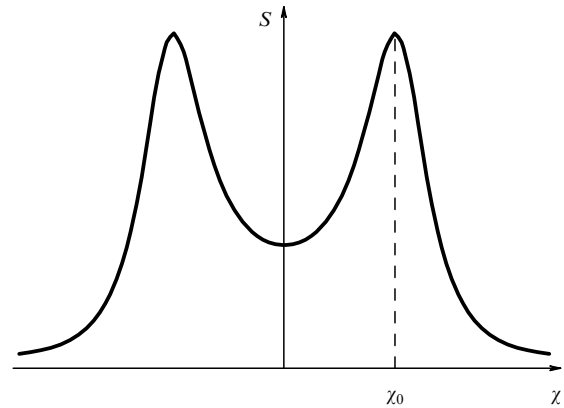


Рис. 20. Спектр корреляционной функции для процесса со скрытой периодичностью.

Зоны неустойчивости для $S(\chi)$, описываемой выражением

$$S(\chi) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{R\chi_0^2}{(\chi^2 - \chi_0^2)^2 + 4R^2\chi^2},$$

где σ^2 — дисперсия процесса, R — радиус корреляции, изображены на рис. 21 для различных характерных периодов неоднородности χ_0 ($\nu = 0$). Для каждого χ_0 зоны изображены при $R = 0,2$ и $R = 0,25$ (с увеличением R зоны неустойчивости уменьшаются). Видно, что зоны неустойчивости колебаний массы при случайно-неоднородном основании струны значительно шире, чем при периодическом (см. рис. 20 и рис. 17). Однако на размер зоны неустойчивости при случайном изменении параметров упругого основания сильно влияет радиус корреляции неоднородности. Более того, для каждого χ_0 существует критический радиус корреляции $R^* = \chi_0/\sqrt{2}$, начиная с которого неустойчивость вообще невозможна.

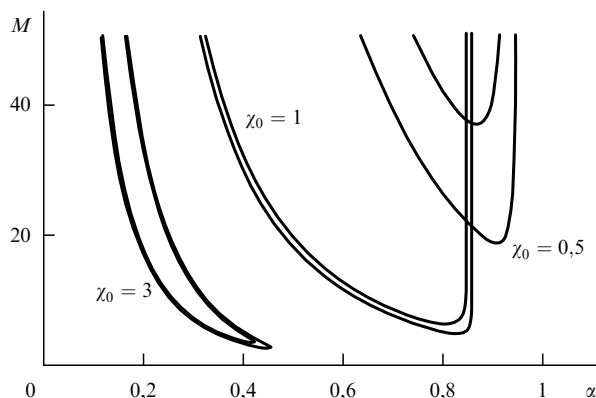


Рис. 21. Основная зона неустойчивости колебаний массы для различных характерных периодов неоднородности и радиусов корреляции.

Итак, при равномерном движении массы по струне, лежащей на случайно-неоднородном основании, жесткость которого обладает скрытой периодичностью, возможна неустойчивость в среднем вертикальных колебаний массы. Неустойчивость имеет место, если характерная частота изменения жесткости упругого основания под движущейся массой $\alpha\chi_0$ близка к удвоенной частоте "собственных" колебаний массы при ее движении по струне, лежащей на однородном (невозмущенном) упругом основании. Зоны неустойчивости сравнительно (по сравнению с периодическим основанием струны) велики, но существенно уменьшаются, а затем и совсем пропадают при увеличении радиуса корреляции неоднородности.

Заметим, что условие неустойчивости колебаний массы (4.21) аналогично условию неустойчивости в системе, описываемой стохастическим аналогом уравнения Матье:

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega_0^2 x[1 + \mu\Psi(t)] = 0,$$

$\Psi(t)$ — стационарный процесс, для которой условие неустойчивости в среднем имеет вид [30, 31]:

$$\mu^2 [S_\Psi(2\omega_0) - S_\Psi(0)] > \frac{2\nu}{\pi\omega_0^2},$$

$S_\Psi(\omega)$ — спектр корреляционной функции. Данная аналогия позволяет предположить, что колебания массы на струне могут быть неустойчивы не только в среднем, но и по моментам более высокого порядка [33].

5. Переходное излучение в двумерных упругих системах

Анализ переходного излучения упругих волн в предыдущих разделах проводился применительно к одномерным направляющим. Это позволило наиболее простым, на наш взгляд, способом вскрыть основные особенности излучения в механических системах и сформулировать важные для практики вопросы, связанные с переходным излучением упругих волн, описав в то же время динамическое поведение реальных конструкций (электрической подвески, рельсов и т.д.). Нужно признать, однако, что на некоторые принципиальные вопросы невозможно отве-

тить, не рассмотрев двумерные (трехмерные) упругие системы. Например, при въезде в тоннель, проложенный в скале, поезд может пересекать границу между мягким грунтом и скалой не по нормали. Под каким углом при этом будет распространяться излучение, какую силу необходимо приложить для поддержания равномерного движения поезда, зависят ли условия разрыва контакта колес и рельсов от угла въезда поезда в тоннель? Все эти вопросы практически важны и "неоднородны". Кроме того, в неоднородных системах излучение может возникать не только при пересечении движущимся объектом области неоднородности, но и при движении вблизи нее. Такое излучение, являющееся "подвидом" переходного, принято называть дифракционным [34]. Дифракционное излучение упругих волн возникает, например, при движении поездов вблизи населенных пунктов, станций и т.п., когда фундаменты окружающих железнодорожный путь строений могут быть "задеты" полем деформаций поезда. Особенно же мощным это излучение оказывается при движении встречных поездов, когда поля деформаций, движущиеся вместе с поездами, дифрагируют друг на друга.

В данном разделе мы остановимся на двух задачах. Для анализа влияния неоднородности упругой системы на переходное излучение рассмотрим движение массы вдоль полуограниченной, закрепленной по краю пластины, лежащей на упругом основании. Затем на примере движения нагрузки по подпружиненной мембране, закрепленной по лучу, продемонстрируем условия возникновения дифракционного излучения упругих волн и проанализируем его диаграмму направленности.

5.1. Переходное излучение в полуограниченной пластине. Спектрально-угловая плотность энергии излучения, реакция излучения, разрыв контакта пластина — движущаяся масса

При анализе переходного излучения в электродинамике и акустике основной интерес представляет поле излучения в дальней зоне и проблема расходимости в точке нахождения излучателя, связанная с разрывом размерности (излучатель — точечный, среда — трехмерная), играет вторичную роль. В механике это не так. Первостепенную важность представляет информация о динамических процессах, происходящих вблизи излучателя. Вследствие этого модель упругой системы и движущегося объекта, представляющая практический интерес, должна давать конечное поле деформаций вблизи движущегося объекта. Чтобы удовлетворить данному требованию при анализе двумерных систем, можно пойти двумя путями: 1) считать движущийся объект не точечным (обычный для физики путь); 2) учесть изгибную жесткость упругой системы и описывать колебания упругой системы уравнениями четвертого порядка по пространственным переменным. Мы воспользуемся вторым путем, являющимся естественным для механики, так как изгибная жесткость присуща в той или иной мере всем упругим направляющим.

Рассмотрим равномерное и прямолинейное $\mathbf{r} = \mathbf{V}t$ ($\mathbf{V} = \{V_x, V_y\}$, $\mathbf{r} = \{x, y\}$) движение точечной массы m , подверженной действию постоянной вертикальной силы P по полуограниченной подпружиненной пластине модели Кирхгофа [35], шарнирно закрепленной при $x = 0$ (рис. 22). В линейном приближении безотрывные колебания массы и пластины описываются следующей

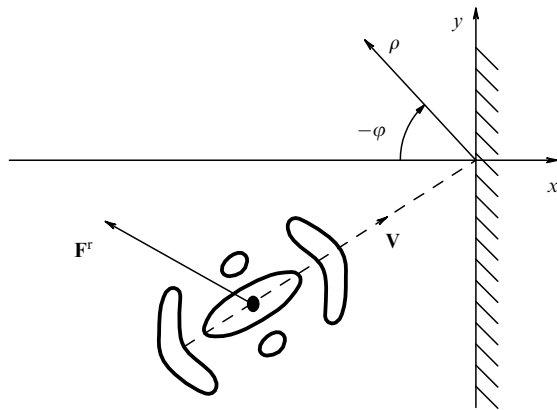


Рис. 22. Равномерное и прямолинейное движение массы по шарнирно закрепленной пластине. Вид сверху.

системой уравнений [7]:

$$\begin{aligned} \rho h U_{tt} + D \Delta_{xy}^2 U + k U &= -(P + m \ddot{U}_0) \delta(x - V_x t) \delta(y - V_y t), \\ x &\leq 0, \quad t \leq 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ U(0, y, t) = U_{xx}(0, y, t) &= 0, \quad U_0(t) = U(V_1 t, V_2 t, t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $U(x, y, t)$, $U_0(t)$ — вертикальные смещения пластины и массы, ρ , h и D — плотность, толщина и цилиндрическая жесткость пластины, k — жесткость упругого основания, приходящаяся на единицу площади, $\Delta_{xy}^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$ — двумерный лапласиан, взятый дважды.

Поскольку нас интересует эффект переходного излучения в чистом виде, будем полагать, что скорость массы не превышает наименьшей фазовой скорости изгибных волн в пластине, т.е. $|\mathbf{V}| < \sqrt{2\mu\nu}$, где $\mu^2 = k/\rho h$, $\nu^2 = D/\rho h$. В этом интервале скоростей, вдали от закрепления, вместе с массой движется собственное поле деформаций, качественно изображенное на рис. 23 и определяемое следующим выражением [36]:

$$U^P(\xi, \eta) = \frac{m(I_1 + I_2)}{8\pi},$$

$$\begin{aligned} I_1 &= -2 \int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{p \cos \varphi}{V}\right) \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{\exp(is_1|p|/V)}{s_1} - \frac{\exp(is_2|q|/V)}{s_2} \right] d\varphi, \end{aligned}$$

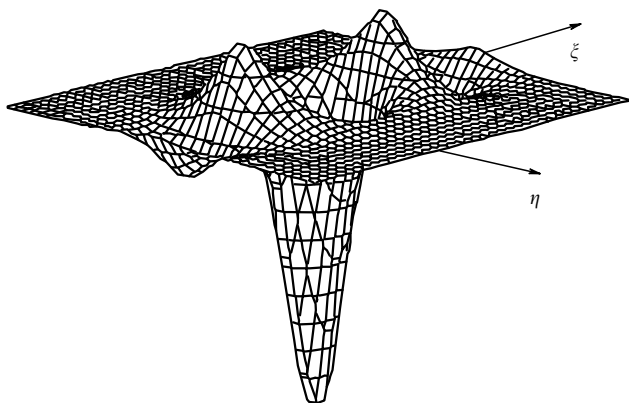


Рис. 23. Собственное поле постоянной нагрузки в пластине, лежащей на упругом основании.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{\cos(p\sqrt{z^2+1})}{\sqrt{z^2+1}} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{\exp(-is_3|p|/V)}{s_3} - \frac{\exp(-is_4|q|/V)}{s_4} \right] dz, \\ \xi &= (x - V_x t) \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}, \quad \eta = (y - V_y t) \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}, \\ p &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta, \quad q = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \\ \tan \theta &= \frac{V_y}{V_x}, \quad V = |\mathbf{V}|, \quad s_{1,2} = \sqrt{-\cos^2 \varphi \mp 2iV^2 \sin \varphi}, \\ \operatorname{Im}(s_{1,2}) &> 0, \quad s_{3,4} = \sqrt{z^2 \mp 2V^2 z + 1}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

угол θ (в дальнейшем — угол падения) отсчитывается против часовой стрелки.

Как и при анализе переходного излучения в струне, (раздел 2.1) предположим, что $|m\ddot{U}_0| \ll P$, т.е. влияние инерционности массы мало. Найдем в рамках этого предположения продольную реакцию пластины на движущуюся нагрузку и спектрально-угловую плотность энергии излучения.

Для определения реакции пластины необходимо определить ее смещение $U^-(x, y, t)$ при $t < 0$. Это легко сделать с помощью метода изображений, согласно которому U^- будет описываться выражением

$$U^-(x, y, t) = U^P(x, y, t) - U^P(-x, y, t). \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в общее выражение для продольной реакции пластины, имеющее вид

$$\mathbf{F}^r = -\nabla_{xy} U(x, y, t)_{x=V_x t, y=V_y t},$$

получим ($U^P(x, y, t)$ симметрична относительно движущейся нагрузки и вклада в продольную реакцию пластины не дает):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^r &= \{F_x, F_y\} = -\nabla_{xy} U^-(x, y, t)_{x=V_x t, y=V_y t} = \\ &= \nabla_{xy} U^P(-x, y, t)_{x=V_x t, y=V_y t}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Сила $\mathbf{F}^r$, вычисленная согласно (5.4), качественно изображена на рис. 24 для случая "наклонного падения" нагрузки на закрепление. Выбрано параметрическое задание функции $\mathbf{F}^r(t)$ (t — параметр). Видно, что продольная реакция пластины меняется в процессе движения нагрузки не только по величине, но и по направлению, что нетипично для электродинамики и акустики.

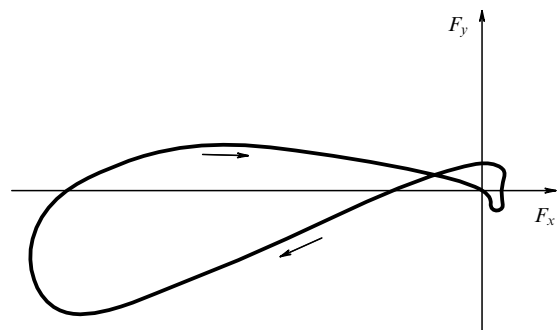


Рис. 24. Продольная реакция пластины на движущуюся нагрузку.

Таким образом, для поддержания равномерного и прямолинейного движения объекта вблизи закрепления необходимо приложить переменную по величине и направлению внешнюю силу R . Как показывает анализ, ее величина должна возрастать с приближением объекта к закреплению, а скорость изменения (как по величине, так и по направлению) — увеличиваться с уменьшением угла падения θ .

Спектрально-угловая плотность энергии излучения $S_{\omega, \varphi}$ может быть найдена методом, изложенным в [1]. Процесс ее вычисления подробно изложен в [36]. Здесь мы приведем лишь окончательное выражение для $S_{\omega, \varphi}$ (φ — угол между волновым вектором излучения и нормалью к закреплению, отсчитываемый против часовой стрелки):

$$S_{\omega, \varphi}(\omega, \varphi) = \frac{F^2 \alpha^2}{4\pi^2 \cos^2 \theta} \omega \cos^2 \varphi \times \left\{ \frac{[\omega + \alpha \sin \theta \sin \varphi (2\omega^2 - 1)^{1/4}]^2}{\cos^2 \theta} - \alpha^2 \cos^2 \varphi \sqrt{2\omega^2 - 1} \right\}^{-2}.$$

Здесь введены параметры $F = P^2 / (\sqrt{2} \rho h \mu^2 v)$, $\omega = \tilde{\omega} / \mu \sqrt{2}$ ($\tilde{\omega}$ — размерная частота), $\alpha = V / \sqrt{2\mu v}$ — безразмерная скорость нагрузки. Для отыскания полной энергии излучения W^T ее спектрально-угловая плотность $S_{\omega, \varphi}$ должна быть проинтегрирована следующим образом:

$$W^T = \int_{1/\sqrt{2}}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{\omega, \varphi}(\omega, \varphi) d\omega d\varphi.$$

Зависимость спектрально-угловой плотности энергии излучения от угла φ ($\omega = \text{const}$) изображена на рис. 25 для "угла падения" нагрузки на закрепление $\theta = \pi/4$. Приведены три кривые, соответствующие различным скоростям движения нагрузки. Видно, что максимум излучаемой энергии приходится на угол, близкий к $\varphi = -\theta$, причем, чем ближе скорость движения нагрузки к критической, тем точнее выполняется правило "угол падения равен углу отражения". Таким образом, при субкритических скоростях движения, при которых мощность излучения велика, основная часть энергии излучается в направлении, зеркальном (относительно нормали к закреплению) направлению движения нагрузки.

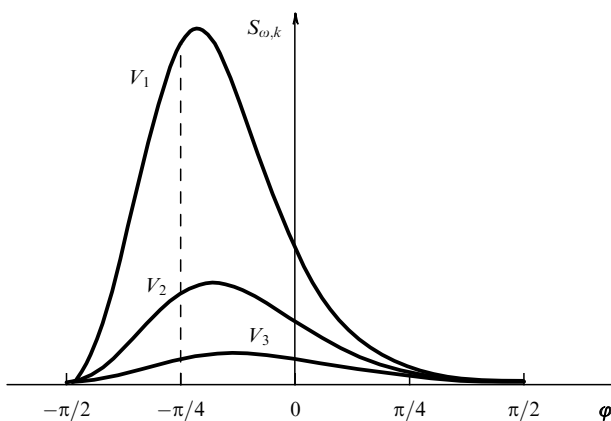


Рис. 25. Спектрально-угловая плотность энергии излучения при постоянной частоте для различных скоростей движения: $V_1 > V_2 > V_3$, $\theta = \pi/4$.

При малых скоростях движения угловое распределение энергии излучения близко к равномерному.

Если исследовать задачу (5.1) в исходной постановке, не пренебрегая инерционностью массы, то вертикальные колебания массы будут описываться следующим интегро-дифференциальным уравнением (путь его получения изложен в [36] и аналогичен описанному в разделе 2.3):

$$U_0(T) = U^-(\alpha_x T, \alpha_y T, T) + 2M \int_{-\infty}^T \ddot{U}_0(\tau) \{ G[\alpha_x(T+\tau), \alpha_y(T-\tau), T-\tau] - G[\alpha_x(T-\tau), \alpha_y(T-\tau), T-\tau] \} d\tau, \\ G(\mathbf{r}, T) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{z J_0(z|\mathbf{r}|)}{\sqrt{z^4 + 1}} \sin\left(\frac{T\sqrt{z^4 + 1}}{\sqrt{2}}\right) dz, \quad (5.5)$$

где $T = t\mu/\sqrt{2}$ — безразмерное время, $\alpha_{x,y} = V_{x,y}/\sqrt{2\mu v}$ — безразмерные проекции скорости нагрузки, $M = m\mu/v\rho h$ — безразмерная масса, τ — безразмерная переменная интегрирования, U^- определяется выражением (5.3), G приведена в [36].

Уравнение (5.5) позволяет найти зависимость $\ddot{U}_0(t)$ и из условия $P + m\ddot{U}_0 = 0$ (см. (5.1)) определить параметры задачи, при которых происходит отрыв массы от пластины при $t < 0$. Кривые $M = M^*(\alpha)$, разделяющие при различных "углах падения" нагрузки θ плоскость параметров (M, α) на область безотрывного движения (ниже кривой) и область движения с разрывом контакта (выше кривой), приведены на рис. 26. Очевидно, что с увеличением угла падения θ область движения без разрыва контакта расширяется. Следовательно, наклонное пересечение объектом закрепления (в общем случае — области неоднородности) менее опасно в смысле разрыва контакта, чем пересечение по нормали.

Итак, анализ переходного излучения в двухмерной упругой системе показал следующее: а) продольная реакция упругой системы, действующая на движущуюся нагрузку, переменна по величине и направлению; б) при субкритических скоростях движения нагрузки максимум энергии излучения приходится на угол, зеркальный "углу падения"; в) скорость движения объекта, при которой наступает разрыв контакта движущийся объект — упругая система, уменьшается (при прочих равных условиях) с увеличением "угла падения".

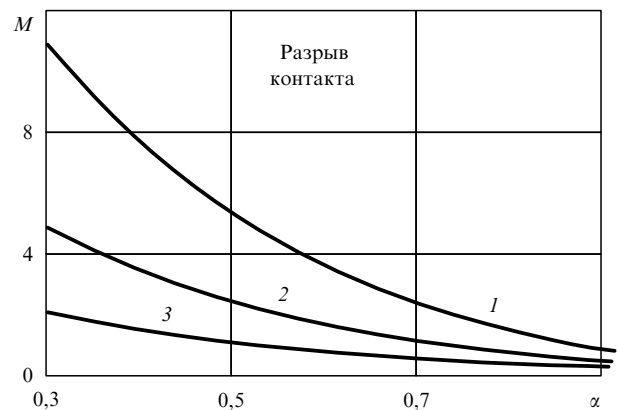


Рис. 26. Кривые, разделяющие плоскость параметров на области движения с разрывом и без разрыва контакта при различных "углах падения": 1 — $\theta = \pi/3$; 2 — $\theta = \pi/6$; 3 — $\theta = \pi/18$.

5.2. Движение постоянной нагрузки по мембране, закрепленной по лучу (дифракционное излучение).

Диаграмма направленности излучения

Анализ процесса переходного излучения показывает, что излучение возникает в процессе трансформации собственного поля движущегося источника возмущений. Именно собственное поле, а не сам источник возмущений имеет определяющее значение для формирования излучения. Поэтому даже в том случае, когда непосредственно на траектории источника свойства среды неизменны, но вблизи траектории имеются какие-либо неоднородности (в механике — закрепления, ребра жесткости и т.п.), "задающие" собственное поле, это поле перестраивается, что приводит к возникновению излучения. Данное излучение принято называть дифракционным. Изучение дифракционного излучения упругих волн начато совсем недавно [37], поэтому ограничимся в данном обзоре анализом простейшей модели, позволяющей лишь продемонстрировать эффект излучения и проанализировать его диаграмму направленности.

Рассмотрим мембрану, лежащую на упругом основании жесткости k и закрепленную по полупрямой $\xi_+ = \{x > 0, y = 0\}$. Пусть вдоль мембраны со скоростью $\mathbf{V} = \{V_x, V_y\}$ равномерно и прямолинейно движется постоянная вертикальная нагрузка P (рис. 27). Вынужденные колебания мембраны в этом случае описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta_{x,y} U - \frac{1}{c^2} U_{tt} - \mu^2 U &= F \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{V}t), \\ -\infty < x, y, t < \infty, \\ U(x, y, t)|_{\xi_+} &= 0, \quad c^2 = \frac{N}{\rho}, \quad \mu^2 = \frac{k}{N}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $U(x, y, t)$ — смещение мембраны, $\Delta_{x,y}$ — двумерный лапласиан, ρ и N — поверхностная плотность и натяжение мембраны, $F = P/N$, $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$ — расстояние от начала координат до траектории движения нагрузки, $\mathbf{r} = \{x, y\}$ — радиус-вектор; движение полагается докритическим, т.е. $V = |\mathbf{V}| < c$.

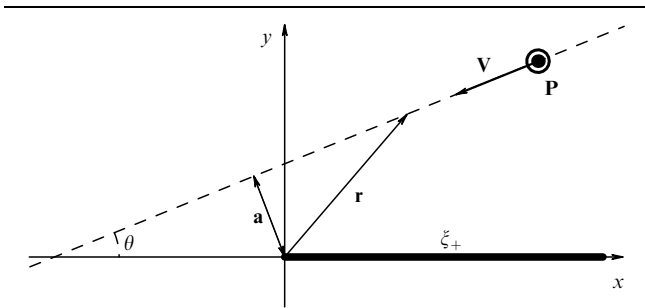


Рис. 27. Движение нагрузки по подпружиненной мембране, закрепленной по лучу. Вид сверху.

Решение (5.6) будем искать в виде суммы собственного поля нагрузки U^P и поля U^r , возникающего при взаимодействии собственного поля с закреплением:

$$U = U^P + U^r. \quad (5.7)$$

Собственное поле U^P есть установившееся поле смещений, движущееся вместе с нагрузкой по безграничной незакрепленной мембране, лежащей на упругом основа-

нии. Согласно [37] оно описывается выражением

$$\begin{aligned} U^P(\mathbf{r}, t) &= -\frac{F}{4\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\omega)} \times \\ &\times \exp \left[i\omega \left(\frac{(\mathbf{V}, \mathbf{r})}{V^2} - \lambda(\omega) \left| \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{a} - a \right| \right) \right] \exp(-i\omega t) d\omega, \\ \lambda(\omega) &= \sqrt{\mu^2 + \frac{\omega^2(1 - \alpha^2)}{V^2}}, \quad a = |\mathbf{a}|, \quad \alpha = \frac{V}{c}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Подставляя (5.7) в (5.6) и применяя преобразование Фурье по времени и координате x , получим систему уравнений для фурье-образа поля U^r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} W_{\omega,k}^r - \left(k^2 + \mu^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) W_{\omega,k}^r &= 0, \\ W_{\omega,k}^r(\omega, k, y)|_{\xi_+} &= -W_{\omega,k}^P(\omega, k, y)|_{\xi_+}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$W_{\omega,k}^{P,r}(\omega, k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U^{P,r}(x, y, t) \exp(i\omega t - ikx) dx dt.$$

Исходя из требований ограниченности смещения мембраны на бесконечности (для пограничных с закреплением колебаний) и отвода энергии от закрепления (для волн), запишем (5.9) в виде

$$\begin{aligned} W_{\omega,k}^r &= A(\omega, k) \exp(-\gamma|y|), \quad \gamma = (k - b)^{1/2}(k + b)^{1/2}, \\ b &= \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2 \right), \quad \text{Re}(\gamma) > 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

Неизвестную функцию $A(\omega, k)$ найдем методом Винера – Хопфа [38], следуя которому запишем систему интегральных уравнений относительно $A(\omega, k)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega, k) \exp ikx dk &= \\ &= \frac{F}{2V\lambda(\omega)} \exp \left[-i \frac{\omega x}{V} \cos \theta - \lambda(\omega)(x \sin \theta + a) \right], \\ x > 0, \quad y &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega, k) \gamma(\omega, k) \exp ikx dk = 0, \quad x < 0, \quad y = 0, \quad (5.11)$$

где θ — угол между траекторией движения нагрузки и осью x (см. рис. 27). Уравнение (5.10) получено обратным преобразованием Фурье по координате x граничного условия (5.10), а уравнение (5.11) отражает непрерывность нормальной производной от смещения пластины при $\{x < 0, y = 0\}$ (на этой полупрямой мембрана не закреплена).

Из (5.11) следует, что функция $A(\omega, k)\gamma(\omega, k)$ не имеет полюсов в нижней полуплоскости комплексного переменного k , поэтому $A(\omega, k)$ должна иметь вид

$$A(\omega, k) = \frac{C(\omega)L(\omega, k)}{\gamma(\omega, k)}, \quad (5.12)$$

где $L(\omega, k)$ не имеет полюсов в нижней полуплоскости k . Подбирая вид функции $L(\omega, k)$ таким образом, чтобы

удовлетворить уравнению (5.10), получим

$$L(\omega, k) = \frac{(k-b)^{1/2}}{k-k_0}, \quad k_0 = i\lambda(\omega) \sin \theta - \frac{\omega}{V} \cos \theta. \quad (5.13)$$

Отыскивая теперь $C(\omega)$ путем подстановки (5.12), (5.13) в (5.10), получим следующее окончательное выражение для $A(\omega, k)$:

$$A(\omega, k) = -\frac{iF\sqrt{k_0c + (\omega^2 - h^2)^{1/2}} \exp[-a\lambda(\omega)]}{2V\lambda(\omega)(k - k_0)\sqrt{kc + (\omega^2 - h^2)^{1/2}}},$$

$$h^2 = \mu^2 c^2.$$

Таким образом, фурье-образ поля смещений мембраны, обусловленных взаимодействием собственного поля нагрузки с закреплением, имеет вид

$$W_{\omega, k}^r = -\frac{iF\sqrt{k_0c + (\omega^2 - h^2)^{1/2}} \exp[-a\lambda(\omega)]}{2V\lambda(\omega)(k - k_0)\sqrt{kc + (\omega^2 - h^2)^{1/2}}} \exp(-\gamma|y|).$$

В волновой зоне это поле описывает дифракционное излучение упругих волн.

Энергию излучения проще всего найти методом, изложенным в [1, 14, 37], согласно которому ищется энергия излученного пуга волн при больших временах, когда он отошел далеко от закрепления и не интерферирует с собственным полем. Согласно [37] найденная этим способом спектрально-угловая плотность энергии излучения описывается выражением

$$S_{\omega, \varphi}(\omega, \varphi) = B\omega\sqrt{\omega^2 - h^2}(\omega - \alpha\sqrt{\omega^2 - h^2} \cos \theta) \times$$

$$\times \sin^2 \frac{\varphi}{2} \exp[-2a\lambda(\omega)] \left[\left(h^2 + \frac{\omega^2(1 - \alpha^2)}{\alpha^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left\{ (\omega \cos \theta + \alpha\sqrt{\omega^2 - h^2} \cos \varphi)^2 + \right.$$

$$\left. + [\omega^2 - \alpha^2(\omega^2 - h^2)] \sin^2 \theta \right\}^{-1}, \quad (5.14)$$

где $B = \rho F^2 c^2 / \alpha$, φ — угол между волновым вектором излучения и положительным направлением оси x .

Анализ (5.14) показывает, что при скоростях движения нагрузки, удовлетворяющих неравенству

$$\alpha = \frac{V}{c} < \alpha_{cr} = \frac{\omega(2 + \cos \theta)}{\sqrt{\omega^2 - h^2}(3 + \sin^2 \theta)},$$

излучение носит дипольный характер (рис. 28а), а при $\alpha > \alpha_{cr}$ диаграмма направленности имеет два максимума

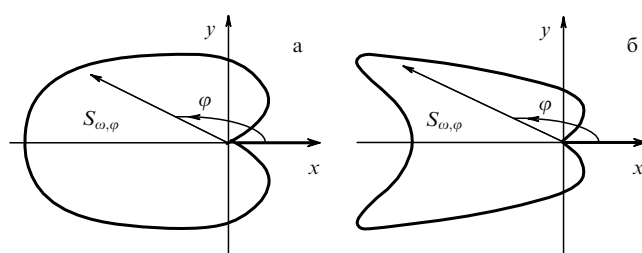


Рис. 28. Диаграммы направленности излучения при различных скоростях движения нагрузки: (а) $\alpha < \alpha_{cr}$, (б) $\alpha > \alpha_{cr}$.

(рис. 28б) под углами

$$\varphi = \pm \arccos \left(1 - \frac{\omega + \alpha\sqrt{\omega^2 - h^2}}{\alpha\sqrt{\omega^2 - h^2}} \cos \theta \right).$$

При $\alpha \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow \infty$ максимумы смещаются к углам $\varphi = \pm(\pi - \theta)$, т.е. основная часть энергии излучается по направлению движения нагрузки и в зеркальном относительно закрепления направлении. Интенсивность излучения, как видно из (5.14), экспоненциально спадает с увеличением расстояния между траекторией нагрузки и закреплением.

6. Заключение

Докладывая вышеизложенный материал на различных семинарах, мы сталкивались, в основном, с двумя типами реакции слушателей. Физики констатировали важную область приложений известного эффекта, не проявляя сильного интереса к особенностям его проявления в механических системах и специфике вопросов, подлежащих изучению. Механики же, соглашаясь с красотой аналогии и "общефизичностью" эффекта, советовали объяснить полученные результаты не только в терминах теории волн, но и на языке классической механики. Иногда просто предлагалось не "тащить" в механику чуждую ей терминологию. Предвидя подобную реакцию читателей на представленный обзор, при его написании мы пытались подчеркнуть следующие тезисы: 1) скоростной транспорт как область приложения теории переходного излучения упругих волн определяет как наиболее актуальные неклассические для электродинамики и акустики вопросы о резонансе и неустойчивости колебаний источника возмущений в процессе излучения, а также о разрыве контакта движущийся источник — среда (упругая направляющая); 2) богатство дисперсионных свойств реальных упругих систем приводит к "неклассическому поведению" классических характеристик излучения, чему яркий пример — реакция излучения, действующая на нагрузку при ее движении по пластине; 3) язык теории волн адекватен процессам, характерная скорость которых сравнима со скоростью волн и позволяет достаточно просто пояснить физику таких "естественных" для механики явлений, как резонанс и неустойчивость колебаний объекта, движущегося по упругой системе.

Рассмотренные в обзоре задачи отнюдь не замыкают круг практически важных проблем, связанных с переходным излучением упругих волн. Становится злободневным вопрос о переходе скоростных поездов через критическую скорость (скорость поверхностных волн). Как показывают предварительные исследования, этот переход значительно проще осуществить, изменяя параметры железнодорожного пути, а не подвергая пассажиров перегрузкам, связанным с ускорением. В связи с этим становится интересной задача о переходном излучении (и его интерференции с излучением типа Вавилова — Черенкова), возникающем при пересечении нагрузкой области неоднородности, после которой она движется закритически (со скоростью, превышающей скорость волн). Закритическое движение связано с опасностью появления неустойчивости вследствие излучения аномальных по Допплеру волн [15–17], а также резонансным влиянием отраженных от областей неоднородности волн (см.

[39] и ссылки в ней). Большой интерес представляет изучение переходного излучения в нелинейно-упругих системах. Это связано с тем, что балласт железнодорожного пути обычно находится в упруго-пластическом режиме и по характеристикам излучения можно определить, насколько "опасно" его состояние. На настоящий момент в области качественных исследований этой задачи удалось проанализировать лишь собственное поле движущейся нагрузки [40]. Наконец, необходим анализ переходного излучения в трехмерных системах типа "балка на упругом полупространстве" [41–43]. Такие модели наиболее полно на сегодняшний день описывают динамику железнодорожного пути.

Благодарности. Мы хотели бы выразить благодарность сотрудникам отдела "Волновой динамики машин" Нижегородского филиала института машиноведения РАН и группы "Mechanics and Structures" Дельфтского технологического университета (Нидерланды) за полезные обсуждения изложенных в обзоре результатов.

Список литературы

1. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984)
2. Гинзбург В Л, Франк И М *ЖЭТФ* **16** 15 (1946)
3. Докучаев В П *ЖЭТФ* **43** 595 (1962)
4. Гинзбург В Л, Цытович В Н *УФН* **126** 553 (1978)
5. Павлов В И, Сухоруков А П *УФН* **147** 83 (1985)
6. Весницкий А И, Каплан Л Э, Уткин Г А *ПММ* **47** (5) 863 (1983)
7. Кохманюк С С, Янютин Е Г, Романенко Л Г *Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках* (Киев: Наукова думка, 1980)
8. Весницкий А И, Метрикин А В *ПМТФ* (2) 62 (1992)
9. Денисов Г Г *МТТ* **29** (1) 42 (1994)
10. Бидерман В Л *Теория механических колебаний* (М.: Высшая школа, 1980)
11. *Вибрации в технике. Справочник* Т. 1 (М.: Машиностроение, 1978)
12. Bogacz R, Krzyzynski T, Popp K, in *Proc. of the 2nd German–Polish Workshop at Paderborn* (March, 1991) p. 105
13. Knothe K I, Grassie S *Vehicle System Dynamics* **22** 209 (1993)
14. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика* (М.: Наука, 1981)
15. Денисов Г Г, Новиков В В, Кугушева Е К *ПММ* **49** (4) 691 (1985)
16. Bogacz R, Nowakowsky S, Popp K *Acta Mech.* **61** 117 (1986)
17. Метрикин А В *Акуст. ж.* **40** (1) 99 (1994)
18. Jezequel L J. *Appl. Mech.* **48** 613 (1981)
19. Cau C, Cheung Y, Chan H J. *of Sound and Vibration* **123** 461 (1988)
20. Весницкий А И, Метрикин А В *МТТ* (6) 164 (1993)
21. Метрикин А В *ПМТФ* (4) 176 (1995)
22. Весницкий А И, Метрикин А В *ПМТФ* (2) 127 (1993)
23. Метрикин А В *Сб. ст.* (Н. Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1994) с. 19
24. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1988)
25. Рабинович М И, Трубецков Д И *Введение в теорию колебаний и волн* (М.: Наука, 1988)
26. Весницкий А И, Метрикин А В *Прикл. мех.* **28** (2) 46 (1992)
27. Басс Ф Г *Изв. вузов. Радиофизика* **2** (6) 88 (1959)
28. Тамойкин В В *Изв. вузов. Радиофизика* **6** (2) 257 (1963)
29. Владимиров В С *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1988)
30. Алексеев В М, Валеев К Г *Изв. вузов. Радиофизика* **14** 1810 (1971)
31. Болотин В В *Случайные колебания упругих систем* (М.: Наука, 1979)
32. Весницкий А И, Метрикин А В *МТТ* (4) (1996)
33. Клячкин В И *Стохастическое уравнение и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1980)
34. Болотовский Б М, Воскресенский Г В *УФН* **88** 209 (1966)
35. Работнов Ю Н *Механика деформируемого твердого тела* (М.: Наука, 1988)
36. Весницкий А И, Кононов А В, Метрикин А В *ПМТФ* (3) 170 (1995)
37. Кононов А В, Метрикин А В *Изв. РАН Механика твердого тела* (1) (1996)
38. Нобл Б *Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных* (М.: ИЛ, 1962)
39. Метрикин А В *Акуст. ж.* **40** (6) 974 (1994)
40. Метрикин А В *Акуст. ж.* **40** (4) 647 (1994)
41. Филиппов А П *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение* (6) 97 (1961)
42. Labra J J *Acta Mech.* **22** 113 (1975)
43. Dieterman H, Metrikine A *European J. Mechanics A* **15** 67 (1996)

Transition radiation in mechanics

A.I. Vesnitskii, A.V. Mertrikin

Mechanical Engineering Institute, Russian Academy of Sciences
ul. Belinskogo 85, 603024 Nizhniy Novgorod, Russia
Tel. (7-831-2) 36-9469
E-mail: a.metriline@mav.nnov.ru

Transition radiation of elastic waves is discussed which is generated by a mechanical object performing a uniform rectilinear motion along an inhomogeneous elastic system (a string, beam, membrane, or plate). The effect is analysed by assuming that the law of motion of the load admits of neither Vavilov–Cherenkov nor bremsstrahlung radiation, and by taking the clamp of the elastic system as the inhomogeneity. Both the radiation reaction spectrum and the break of the object-elastic system contact are considered. The practically important cases of periodically and randomly varying elastic parameters are examined, and resonance and instability conditions for the vibrations of the radiating object are found. Variation of the major radiation characteristics with the angle at which the object crosses the inhomogeneity region, is examined. The diffraction radiation of elastic waves is briefly discussed.

PACS numbers: 83.50.By, 83.50.Pk, 83.50.Tq

Bibliography — 43 references

Received 6 April 1996