

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Наглядное моделирование фрактальных структур

О.М. Османов

Представлен наглядный метод образования и поведения фрактальных структур в результате взаимодействия металлического порошка с магнитным полем, создаваемым катушкой. Метод полезен для изучения фрактальных структур студентами.

PACS numbers: 64.60.Ak, 85.80.Jm

Содержание

1. Введение (1095).
 2. Образование кластеров (1095).
 3. Демонстрация образования фракталов (1096).
 4. Влияние детерминированных внешних полей на форму фрактальных структур (1096).
 5. Имитация возникновения сложных молекул с кодированием информации (1097).
- Список литературы (1097).

1. Введение

В последнее время при изучении неупорядоченных систем и неравновесных явлений, для облегчения анализа процессов проводится нетрадиционное преобразование симметрии — масштабная инвариантность, присущая фрактальным структурам [1–3]. Фрактальными являются многие случайные структуры, например такие, как диффузионно-ограниченные агрегаты, гели, коллоидные частицы, кластеры и т.п. Фракталам посвящен ряд обзорных статей, опубликованных в журнале УФН в последние годы [4–6]. Нами разработан простой способ для демонстрации хаотического движения частиц и многих других особенностей динамики фрактальных структур. Хаотическое движение частиц в предлагаемом приборе возникает вследствие взаимодействия переменного магнитного поля, создаваемого катушкой прямоугольной формы, с частицами железного порошка, помещенными в окно катушки.

Основной деталью прибора является прямоугольная катушка с двумя обмотками. Одна из обмоток, содержащая 900 витков провода ПЭЛ-04, питается через регулятор напряжения переменным током от сети, а вторая обмотка, состоящая из 600 витков того же провода,

питается от источника регулируемого постоянного тока и служит для намагничивания железных опилок. Переменное во времени и неоднородное в пространстве магнитное поле в окне катушки вызывает хаотическое движение железных опилок, помещенных в окно катушки, сходное с броуновским. Намагниченные железные опилки (в дальнейшем частицы) взаимодействуют и между собой. В зависимости от соотношения между энергией взаимодействия частиц с внешним полем $B_i H_0 \cos[\omega t + \varphi_n(t)]$ и энергией взаимодействия частиц между собой $B_i \langle H_i \rangle$ меняется пространственная функция распределения частиц. В этих выражениях B_i — магнитная индукция поля в частице, H_0 — амплитудное значение магнитного поля, создаваемого катушкой, $\langle H_i \rangle$ — среднее значение магнитного поля, создаваемого соседними частицами, ω — частота внешнего магнитного поля, функция $\varphi_n(t)$ характеризует случайный угол между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}_0$.

Опишем методику демонстраций нескольких опытов.

2. Образование кластеров

На столик графопроектора горизонтально ставят катушку, в ее окне помещают чашку Петри, на наружной стороне дна которой приклеена прозрачная миллиметровая сетка. В чашку насыпают порошок из железа или из оксида железа и добиваются, чтобы в проекции на экране плотность слоя порошка была примерно одинаковой по всей площади дна чашки. Затем на первую обмотку катушки подают переменный ток такой величины, при которой частицы приходят в движение, после этого подают во вторую обмотку подмагничивающий постоянный ток. Регулируя токи в обмотках, добиваются появления на экране скопления частиц-кластеров.

Более наглядно кластеризацию можно показать, используя порошок, получаемый размалыванием кусочка керамического магнита. Наливая в чашку воду и размешивая с порошком, получаем однородную суспензию. Регулируя токи в обмотках, можно добиться того, что суспензия постепенно просветляется и в отдельных местах в проекции наблюдается рост кластеров.

О.М. Османов. Дагестанский государственный университет, кафедра общей физики, 376025 Махачкала, ул. Советская 8, Россия
Тел. (872) 7-29-50

Статья поступила 22 мая 1995 г.

3. Демонстрация образования фракталов

Для этого опыта в центре чашки помещают железную шайбу с припаянным гибким медным проводом, а плоскость вокруг шайбы ограничивают цилиндрическим медным кольцом, к которому также припаян гибкий медный провод. Между шайбой и кольцом насыпают железный порошок. Регулируя подаваемый на катушку переменный ток, достигают такого режима, при котором частицы дрейфуют к намагниченной шайбе, и происходит постепенное нарастание ветвей (дерево Кейли).

Для количественной характеристики растущих фрактальных структур используем формулы, приведенные в [1, 9]. Допустим $\sum n_s$ — число клеток, занимающих дно чашки, $\sum n_s s$ — полное число клеток, занятых частицами, $w_s = sn_s / \sum n_s$ — вероятность того, что занятая клетка, выбранная случайно, принадлежит кластеру размером $S(R)$. Тогда средний размер кластера $S(R) = \sum sw_s = \sum s^2 n_s / \sum n_s s$. Число частиц, образующих фрактал, определяем формулой:

$$N(R) = \int_0^R \rho(r) r^{d-1} dr = R^D, \quad (1)$$

где r — радиус круга, вписанного в клетку масштабной сетки (в данном случае 0,5 мм), $\rho(R)$ — число частиц в одной клетке ($s = 1 \text{ мм}^2$), R — геометрический размер структуры, d — геометрическая размерность (для плоских фигур $d = 2$), D — фрактальная размерность. Из (1) следует закон подобия для плотности:

$$\rho(R) \sim \frac{M}{R^d} \sim R^{D-d}. \quad (2)$$

Поскольку $D < d$, то с ростом R плотность структуры уменьшается. Для числа ветвей, пересекающих кольцо, используем выражение

$$n(R) = \frac{dN(R)}{dR} \approx R^{D-1}. \quad (3)$$

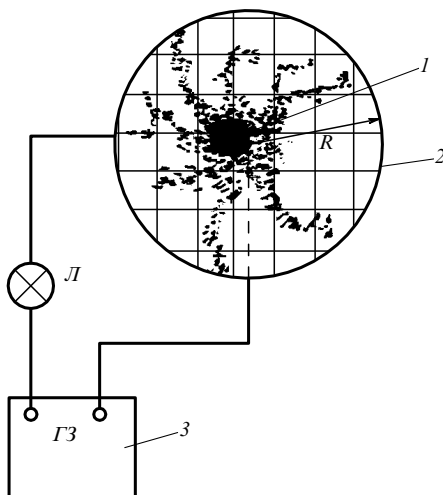


Рис. 1. Электрическая схема для наблюдения протекания заряда по растущим ветвям кластера: 1 — железная шайба, 2 — медное кольцо, 3 — звуковой генератор

Площадь каждой ветви можно выразить в виде

$$\langle \sigma(R) \rangle = \frac{R^{d-1}}{n(R)} \approx R^{d-D}. \quad (4)$$

На модели такого кластера можно демонстрировать явление протекания электрического заряда. Для этого собирают электрическую схему, изображенную на рис. 1. Когда растущие ветви достигнут медного кольца, электрическая цепь замыкается и загорание лампочки подтверждает возникновение процесса протекания заряда. Электрическое сопротивление кластера при этом определяется соотношением

$$R_\Omega = \frac{\rho_\Omega R}{\langle \sigma \rangle} \sim \rho_c R^{-(d-D)} \frac{R}{R_c} R^{d-D} = \rho_c R^{D-d+1}. \quad (5)$$

Здесь R_c и ρ_c — критический радиус и плотность кластера.

4. Влияние детерминированных внешних полей на форму фрактальных структур

В этом опыте на катушку ставят пластину из оргстекла, по центру которой перпендикулярно к ее поверхности проходит медный провод диаметром около 1 мм. Концы его подключают к регулируемому источнику постоянного тока. На поверхность стекла равномерно насыпают железный порошок. Подавая на катушку переменный ток, сначала демонстрируют хаотическое движение частиц порошка, а затем, пропуская через прямой провод постоянный ток, добиваются возникновения чередующихся колец железного порошка вокруг проводника. Кинетику частиц опишем уравнением Фоккера–Планка [2, 7, 8]

$$\frac{\partial f(r)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[v(t) f(r) + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right], \quad (6)$$

где $f(r)$ — функция распределения частиц на плоскости, D — коэффициент диффузии, который мы представим в виде $D = 2B_i H_0 \cos(\omega t + \varphi_n) / (m\gamma)$, v — дрейфовая скорость частиц, $\mathbf{r}$ — вектор, соединяющий точку пересечения прямого провода с поверхностью стекла с точкой нахождения частицы в рассматриваемый момент, γ — коэффициент трения, m — масса частицы. Стационарное решение уравнения Фоккера–Планка для блуждающих частиц ферромагнетика в неоднородном магнитном поле можно представить в виде:

$$f(r) = N \exp \left[- \frac{E_k + B_i \langle H_i \rangle - B_i i / (2\pi r)}{B_i H_0 \cos(\omega t + \varphi_n)} \right], \quad (7)$$

где $E_k = (1/2)m(v^2 + \Omega^2 d^2)$ — кинетическая энергия частицы, $\Omega = [\mu_0 \mu H_0 \cos \omega t / (m d^2)]^{1/2}$ — частота колебаний частиц, d — размер частицы¹, B_i — индукция магнитного поля в точке нахождения частицы.

Выражение $E_k + B_i \langle H_i \rangle - B_i i / (2\pi r)$ можно рассматривать как функционал, минимальное значение которого соответствует стационарному распределению по линиям

¹ При использовании ферромагнитным порошком для изготовления лент или стержней размер и масса частиц указаны в паспорте.

индукции с радиусом

$$r_i = \frac{1}{2\pi} \frac{B_i i}{E_k + B_i \langle H_i \rangle}. \quad (8)$$

Здесь i — постоянный ток в прямом проводнике, $\langle H_i \rangle$ — среднее значение магнитного поля в точке нахождения частицы.

Для демонстрации термодинамических условий устойчивости фрактальных структур мы использовали порошок ферромагнетика с точкой Кюри $T = 70^\circ\text{C}$. Такой порошок можно получить размалыванием керамического магнита из датчика пожарной сигнализации ИП-10. Наливая горячую воду в чашку с порошком, структуру поддерживают вблизи T_c . Повторя описанные выше опыты, можно показать, что при температуре выше T_c структуры не возникают, а ниже T_c частицы, притягиваясь друг к другу, образуют структуры.

5. Имитация возникновения сложных молекул с кодированием информации

Для этих опытов изготавливают 16–20 шариков из рыхлого пенопласта, диаметром 6–8 мм. Внутри шариков помещают небольшие кусочки керамического магнита. Такие шарики в переменном магнитном поле совершают хаотическое движение, подобное броуновскому. Если теперь эти шарики поместить в окно описанной выше катушки, регулируя поочередно переменный и постоянный токи, можно получать пространственные структуры, сходные с молекулами органических соединений. Термодинамические режимы возникновения упорядоченных структур в этих опытах имитируют магнитные поля.

Возникновение кодированной информации иллюстрируют следующим образом. Из тонкого прозрачного целлулоида или из другого прозрачного материала вырезают несколько фигур с нарисованными буквами (рис. 2). В местах состыковывания букв приклеивают кусочки керамического магнита с таким направлением полюсов, чтобы, притягиваясь друг к другу, буквы располагались в последовательности, образующие слова с определенным смыслом (носитель внутренней информации). Например, случайное расположение букв М, И, Р может дать такое их сочетание, как МИР,

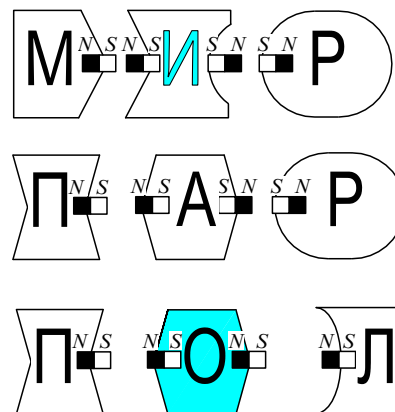


Рис. 2. Комбинаторная оптимизация из девяти букв первоначально беспорядочно разбросанных в окне катушки

имеющее несколько значений. Для расшифровки нужного кода одну из нескольких букв И, разбросанных беспорядочно, нужно написать чернилами другого цвета (скажем, красного). Можно договориться, что при возникновении структуры из трех букв МИР с красным И, данная структура означает "покой".

Представленный наглядный метод полезен для знакомства студентов с фрактальными структурами и может быть рекомендован для лабораторного практикума по физике.

Список литературы

1. Фракталы в физике. Тр. VI Международного симпозиума по фракталам в физике (М.: Мир, 1988)
2. Федер Е Фракталы (М.: Мир, 1991)
3. Смирнов Б М Физика фрактальных кластеров (М.: Наука, 1991)
4. Смирнов Б М УФН **163** (7) 1 (1993)
5. Олемский А М, Флат А Я УФН **163** (12) 1 (1993)
6. Алхимов В И УФН **164** (6) 561 (1994)
7. Климонтович Ю Л УФН **164** (8) 811 (1994)
8. Ван Кампен Н Г Стохастические процессы в физике и химии (М.: Высшая школа, 1990)
9. Гулд Х, Тобочник Я Компьютерное моделирование в физике Ч. 2 (М.: Мир, 1990)

A VISUAL MODELLING OF FRACTAL STRUCTURES

O.M. Osmanov

Daghestan State University, Department of Physics
ul. Sovetskaya 8, 376025 Makhachkala, Russia
Tel. (7-872) 7-29 50

A visual description of the formation and behaviour of fractal structures is presented by making use of the interaction of metallic powder with the magnetic field of a coil. The method is useful for training students in fractal structures.

PACS numbers: 64.60.Ak, 85.80.Jm

Bibliography — 9 references

Received 22 May 1995