

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Эффект Хокинга в модели  
мгновенного гравитационного коллапса

Л.И. Меньшиков, А.Н. Пинзул

*На примере мгновенного гравитационного коллапса исследуется механизм излучения Хокинга. Показано, что виртуальные пары частица–античастица "разрываются" приливными силами черной дыры в соответствии с общепринятой в настоящее время точкой зрения.*

PACS numbers: 04.50. + h

## Содержание

1. Введение (1077).
  2. Температура черной дыры в ММК (1078).
  3. Начальная энергия поля (1080).
  4. Приложение (1082).
- Список литературы (1082).

## 1. Введение

При изучении эффекта Хокинга [1] квантового излучения черных дыр и тем более при объяснении его студентам возникает желание отыскать наиболее простую модель гравитационного коллапса, описывающую все существенные стороны явления. Следуя [2], выберем в качестве таковой двумерную модель пространства-времени, в которой есть только время  $t$  и радиальная координата  $r$ . Тем не менее и в этом приближении математический расчет остается громоздким и неочевидным. Поэтому естественно попытаться найти еще более простые модели. Одна из них — модель мгновенного гравитационного коллапса (ММК) рассмотрена в данной работе. Однако, как выясняется, такое упрощение оказывается слишком грубым — в ММК возникает интересный парадокс. Разрешение этого парадокса, являющееся целью данной статьи, позволяет прояснить физическую природу эффекта Хокинга.

Известно [1], что сколлапсировавшая звезда массы  $M$  испускает стационарный поток теплового излучения с температурой  $T_0 = 1/(4\pi r_g)$ , где  $r_g = 2M$  — гравитационный радиус (здесь и ниже  $\hbar = c = G = 1$ ). В литературе высказывались две точки зрения на природу этого фундаментального эффекта (далее эти точки зрения

называем механизмами 1 и 2). Согласно механизму 1 [3, 4] ключевую роль играет начальная стадия коллапса, когда гравитационное поле является нестатическим. Другие авторы [5–11], включая Хокинга, считают (это механизм 2), что имеется аналогия между рождением частиц в черной дыре и в однородном электрическом поле. В статическом, но неоднородном поле черной дыры рождается виртуальная пара, частицы которой падают на нее с различными ускорениями вследствие эффекта приливных сил, который существен, так как характерный размер пары порядка  $r_g$ . В результате возникает реальная частица, удаляющаяся на бесконечность, а другая частица падает на сингулярность. Очевидно, что по механизму 2 спектр и интенсивность установившегося излучения не зависят от деталей коллапса. Механизм 2 более привлекателен, поскольку в первом случае в конечной области пространства-времени с неизбежностью была бы сосредоточена бесконечная энергия [8, 10]. В пользу механизма 2 свидетельствуют расчеты перенормированного среднего значения тензора энергии-импульса (см., например, [2, раздел 8.2]), которые показывают, что в установившемся режиме поток энергии на бесконечности совпадает с результатом Хокинга. Эти расчеты показывают также, что на горизонт черной дыры падает отрицательная энергия чисто квантовомеханического происхождения, в точности уравновешивая уходящую на бесконечность положительную энергию, что согласуется с ковариантным сохранением  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ген}}$ .

В разделе 2 данной работы сформулирована модель мгновенного коллапса (далее — ММК) и по методу преобразований Боголюбова [2, 11, 13] рассчитаны интенсивность и спектр излучения Хокинга для случая двумерного пространства-времени. Температура излучения оказывается равной  $2T_0$ , и на первый взгляд отсюда следует вывод, что надо отдать предпочтение механизму 1, а не 2. Для выяснения ситуации в разделе 3 исследуется тензор энергии-импульса. Оказывается, что "лишняя" энергия возникает в момент скачка метрики и далее она излучается с постоянной интенсивностью, накладываясь на обычное хокинговское излучение. Таким образом, механизм 2 подтверждается и в ММК.

Л.И. Меньшиков, А.Н. Пинзул. Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, пл. Курчатова 1  
Тел. (095) 196-74-39  
Факс (095) 194-19-94  
E-mail: limensh@lmprr.kiae.su

Статья поступила 31 января 1995 г.

## 2. Температура черной дыры в ММК

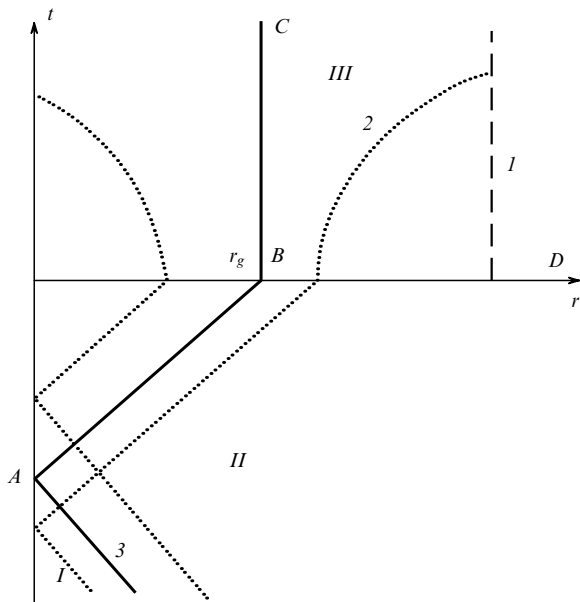
Рассчитаем число частиц безмассового скалярного эрми-това поля, рожденных в двумерном пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = h(t, r) dt^2 - \frac{1}{h(t, r)} dr^2, \tag{1}$$

где

$$r > 0, \quad h(t, r) = \begin{cases} 1, & t < 0, \\ 1 - \frac{r_g}{r}, & t > 0. \end{cases}$$

Эта модель описывает первоначально покоящуюся нерелятивистскую (с радиусом  $R$ :  $r_g \ll R \rightarrow \infty$ ) звезду, коллапсирующую с бесконечной скоростью в момент  $t = 0$ . Несмотря на физическую неосуществимость такой геометрии, рассмотреть ММК побуждает следующее обстоятельство. По механизму 2 кванты, которые при  $t \rightarrow +\infty$  приходят к наблюдателю, находящемуся в точке  $r = \text{const} > r_g$  (его мировая линия — прямая  $I$  на рисунке), рождаются вблизи горизонта событий (линия  $ABC$ ). Траектория такого кванта — верхняя часть линии 2. Поскольку при  $t > 0$  гравитационное поле в ММК не отличается от поля черной дыры, образовавшейся при реальном коллапсе, то в соответствии с механизмом 2 следует ожидать полного совпадения с результатом Хокинга в пределе  $t \rightarrow +\infty$ . Однако в этом разделе показано, что эти ожидания не оправдываются.



В области  $I$  (см. рисунок) введем световую координату

$$u = t - r_*(r), \tag{2}$$

где

$$r_*(r) = \int \frac{dr}{h(t, r)} = r + r_g \ln \left( \frac{r}{r_g} - 1 \right).$$

Тогда в областях  $I$  и  $II$   $u = F(t - r)$ , где функция  $F$  определяется из условия сшивки с (2) на линии  $BD$  (т.е.  $t = 0$ ):

$$u = t - r - r_g \ln \frac{-t + r - r_g}{r_g}. \tag{3}$$

Другую световую координату ( $v$ ) выберем таким образом, чтобы в областях  $I$  и  $II$

$$v = t + r. \tag{4}$$

Существует критический падающий луч  $v = v_0 = -r_g$  (линия 3), который достигает центра звезды и после отражения от него движется по горизонту событий  $ABC$ . Указанное отражение лучей в рассматриваемой двумерной модели становится понятным, если учесть, что такие лучи изображают движение сферически-симметричных волновых пакетов в реальном четырехмерном пространстве.

Луч  $v < v_0$  (кривая 2) после отражения удаляется на бесконечность по траектории  $u = f(v)$ . Функцию  $f(v)$  легко находим из сшивки лучей (3) и (4) на линии  $r = 0$ :

$$f(v) = v - r_g \ln \frac{v_0 - v}{r_g}, \tag{5}$$

где  $v_0 = -r_g$ .

Теперь рассчитаем боголюбовские коэффициенты (см., например, [2]) для скалярного безмассового поля. Метрика (1) в световых координатах имеет вид

$$ds^2 = C(u, v) du dv, \tag{6}$$

а волновое уравнение:  $\partial^2 \Psi / \partial u \partial v = 0$ . Его общее решение есть  $\Psi = F_1(v) + F_2(u)$ . Волновая функция in-базиса, граничное условие к которой ставится при  $t \rightarrow -\infty$ , определяется выражением

$$\Psi_k = \frac{1}{2i\sqrt{k}} \left\{ \exp[-ikp(u)] - \exp[-ikv] \right\}, \tag{7}$$

где  $p(u) = f^{-1}(u)$ ,  $k > 0$ . Физический смысл  $\Psi_k$  становится понятным, если рассмотреть волновой пакет

$$\Phi = \int_0^\infty dk C_k \Psi_k. \tag{8}$$

При  $t \rightarrow -\infty$  он сосредоточен вблизи точки  $r + t = 0$  и состоит из неискаженных падающих волн  $\exp[-ikv] = \exp[-ik(r + t)]$ . Вклад от первого члена в (7), описывающего отраженные искаженные волны, при  $t \rightarrow -\infty$  стремится к нулю.

На линии  $r = 0$  (которая в световых координатах изображается кривой  $u = f(v)$ ) выполняется граничное условие  $\Psi_k = 0$ , которое естественным образом возникает при переходе от четырехмерного мира к двумерной модели. Аналогично, рассматривая распространение  $s$ -волн, описываемых уравнением  $(\partial^2 / \partial t^2 - \Delta)\psi = 0$ , после подстановки  $\psi = \chi / r$  получаем "двумерное" уравнение  $(\partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial r^2)\chi = 0$  и граничное условие  $\chi(t, r = 0) = 0$ .

В отличие от in-базиса  $\Psi$  полным набором квантовых чисел волновых функций out-базиса  $\bar{\Psi}$  является совокупность  $q = (k, \lambda)$ , где  $k$  — импульс,  $\lambda = \pm 1$  — новое квантовое число — "наблюдаемость" [2]. Причину разделения out-решений волнового уравнения на два ортогональных класса легко понять из рисунка. Граничные

условия к волновым функциям out-базиса  $\bar{\Psi}$  ставятся при  $t \rightarrow +\infty$ . Если из  $\bar{\Psi}$  составить волновой пакет типа (8) (по существу — это рассматривавшиеся выше лучи), то при  $t \rightarrow +\infty$  этот пакет будет либо удаляться от звезды, либо падать на сингулярность за конечный интервал аффинного параметра, либо будет когерентной смесью этих двух состояний. В первом случае пакет фиксируется инерциальными детекторами, расположенными на бесконечности (таким детекторам придадим номер  $\lambda = +1$ ). Во втором случае ( $\lambda = -1$ ) детекторы находятся под горизонтом событий и падают на сингулярность. Поскольку детекторы с  $\lambda = +1$  и  $\lambda = -1$  причинно не связаны, то третий случай не имеет физического смысла. Из рисунка нетрудно установить, где пролегал путь этих пакетов. Пакеты с  $\lambda = +1$  падают на звезду по траекториям  $v < v_0$ , а с  $\lambda = -1$  — по траекториям  $v > v_0$ . Отсюда следует, что при  $\lambda = +1$  падающая волна отлична от нуля лишь при  $v < v_0$ . Из рисунка ясно, что отраженная волна  $F_2(u)$  отлична от нуля вне горизонта событий, т.е. справа от линии  $ABC$  (для случая  $\lambda = -1$  все в точности наоборот). Волновая функция out-базиса с  $\lambda = +1$ , удовлетворяющая нулевому граничному условию при  $r = 0$ , т.е. на линии  $u = f(v)$ , имеет вид

$$\bar{\Psi}_{k1} = \frac{1}{2i\sqrt{k}} \left\{ \exp[-iku] - \exp[-ikf(v)]\theta(v_0 - v) \right\}. \quad (9)$$

Волновой пакет вида (8), составленный из  $\bar{\Psi}_{k1}$ , при  $t \rightarrow +\infty$  удаляется от черной дыры и состоит из неискаженных уходящих волн  $\exp[-iku] = \exp[-ikt + ikr_*(r)]$ ; второй же член в (9) дает в этом пределе пренебрежимо малый вклад в  $\Phi$ . Логарифмически зависящая от  $r$  фаза в  $\exp[-iku]$  объясняется дальнедействующим характером гравитационного поля звезды и вполне аналогична кулоновской фазе в квантовой механике.

Число рожденных частиц с импульсом  $k$ , наблюдаемых при  $r \rightarrow +\infty$  (т.е. с квантовыми числами  $\lambda = +1$ ), определяется выражением (подробности расчета суммированы в [2])

$$N_k = \sum_{k'} |\beta|^2, \quad \beta = (\bar{\Psi}_{k1}, \Psi_{k'}^*). \quad (10)$$

Скалярное произведение  $\beta$  (коэффициент преобразования Боголюбова) представляет собой интеграл по пространственноподобной поверхности  $\Sigma$  и не зависит от выбора  $\Sigma$ . Воспользовавшись этим обстоятельством, рассчитаем  $\beta$  на гиперповерхности  $t = \text{const} \rightarrow -\infty$ , где пространство евклидово, а выражение для  $\beta$  имеет простой вид:

$$\beta = i \int_0^\infty dr \left( \bar{\Psi}_{k1}^* \frac{\partial \Psi_{k'}^*}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{k1}^*}{\partial t} \Psi_{k'}^* \right). \quad (11)$$

В этом случае  $t - r \rightarrow -\infty$  и поэтому слагаемое с логарифмом в (3) можно опустить. Тогда волновые функции запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \frac{1}{2i\sqrt{k}} \left\{ \exp[-ik(t-r)] - \exp[-ik(t+r)] \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kr) \exp[-ikt], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{\Psi}_{k1} = \Psi_k + G(v), \quad (13)$$

где

$$G(v) = \frac{1}{2i\sqrt{k}} \left\{ \exp[-ikv] - \exp[-ikf(u)]\theta(v_0 - v) \right\}. \quad (14)$$

Вследствие ортогональности с  $\Psi_{k'}^*$ , первый член в (13) дает нулевой вклад в (11), поэтому  $\bar{\Psi}_{k1}$  можно заменить на  $G(v)$ . При движении от линии  $v = v_0$  влево функция  $G(v)$  стремится к нулю, поэтому нижний предел в (11) можно заменить на  $-\infty$ . Учитывая также, что  $\partial G(v)/\partial t = \partial G(v)/\partial r$ , после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \beta &= i \int_{-\infty}^\infty dr G^* \left( \frac{\partial \Psi_{k'}^*}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{k'}^*}{\partial r} \right) = \\ &= \sqrt{k'} \int_{-\infty}^\infty dv G^*(v) \exp(ik'v). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь и далее опускаются несущественные постоянные фазовые множители. Первый член в (14) дает в  $\beta$  вклад, пропорциональный  $\delta(k+k')$  и равный нулю, так как  $k > 0, k' > 0$ . Окончательно получаем выражение для  $\beta$  в двух эквивалентных видах:

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k'}{k}} \int_{-\infty}^{v_0} dv \exp[ik'v + ikf(v)]; \quad (16)$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{k'}} \int_{-\infty}^\infty du \exp[iku + ik'p(u)]. \quad (17)$$

При преобразовании (16) в (17) использована замена переменной интегрирования  $u = f(v)$  и произведено интегрирование по частям. Выражения (16), (17) аналогичны полученным в [12], где исследовалось излучение ускоренного зеркала. Отметим, что выражение (16), полученное в [2] после ряда пренебрежений, в действительности является точным.

Из (5) и (16) после замены  $x = (v_0 - v)/r_g$  получаем

$$\beta = \frac{1}{2} r_g \sqrt{\frac{k'}{k}} \int_0^\infty dx \exp[i(k' + k)r_g x] x^{-ikr_g}.$$

Для сходимости этого интеграла при  $x \rightarrow +\infty$  следует произвести замену  $k + k' \rightarrow k + k' - i\delta$  и понимать его как предел при  $\delta \rightarrow +0$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} r_g \sqrt{\frac{k'}{k}} [\delta + i(k + k')r_g]^{ikr_g - 1} \Gamma(1 - ikr_g), \\ |\beta|^2 &= \frac{\pi k' r_g}{2(k + k')^2} n_{\text{Б}}(k), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$n_{\text{Б}}(k) = \left[ \exp\left(\frac{k}{T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (19)$$

$$T = \frac{1}{2\pi r_g} = 2T_0. \quad (20)$$

Из (9) и (18) имеем

$$N_k = \sum_{k'} |\beta|^2 = \frac{1}{2} r_g n_B(k) J, \quad (21)$$

где

$$J = \int_0^\infty \frac{k' dk'}{(k+k')^2}$$

и учтено правило замены суммы на интеграл:  $\sum_{k'} \rightarrow \int dk'/\pi$ . Расходимость интеграла  $J$  на верхнем пределе связана с тем, что при коллапсе устанавливается излучение постоянной интенсивности, поэтому за бесконечное время будет испущено бесконечное число частиц.

Чтобы понять смысл интеграла  $J$ , следуя [2], применим простой, но нестрогий метод (в [2] дан также другой расчет — строгий, но физически менее содержательный). Боголюбовский коэффициент  $\beta$  (10) можно понимать как амплитуду перехода частицы с импульсом  $k'$  в частицу с импульсом  $k$ , которая и приходит на детектор, движущийся по прямой  $I$  (см. рисунок) (для незермитова поля  $\beta$  — амплитуда перехода античастицы с импульсом  $k'$  в частицу с импульсом  $k$ ). Отправим от детектора, висящего в точке  $r = r_0$ , к черной дыре два фотона в моменты  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t_0$ , движущиеся по траекториям  $v = \text{const}$ ,  $v + \Delta v = \text{const}$ , где  $v = t_0 + r_0 < v_0$  и  $v + \Delta v = t_0 + \Delta t_0 + r_0 < v_0$ . Эти импульсы, отразившись от центра звезды, будут от нее удаляться по траекториям  $u = u_1 = f(v) = \text{const}$ ,  $u = u_1 + \Delta u = f(v + \Delta v) = \text{const}$ . В точку  $r = r_0$  они приходят в моменты  $t_1$  и  $t_1 + \Delta t_1$ , где  $\Delta t_1 = \Delta u \approx f'(v) \Delta v = f'(v) \Delta t_0$ . Следовательно,

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{\Delta u}{\Delta v} = f'(v) = \frac{r_g}{v_0 - v} \propto \exp\left(\frac{u}{r_g}\right) \propto \exp\left(\frac{t_1}{r_g}\right).$$

Таким образом, при  $t_1 \rightarrow \infty$  имеется сильное запаздывание отраженных волн, поэтому частота испытывает сильное красное смещение:

$$\frac{k'}{k} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \text{const} \exp\left(\frac{t_1}{r_g}\right).$$

Отсюда следует, что  $dk'/k' = dt'/r_g$ , поэтому  $J = t_1/r_g$ , где  $t_1$  — полное время детектирования частиц. Тогда из (21) получаем

$$\frac{dN_k}{dt_1} = \frac{1}{2} n_B(k).$$

Полное число частиц, приходящих на детектор в единицу времени,

$$\frac{dN}{dt_1} = \sum_k \frac{dN_k}{dt_1} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} n_B(k).$$

Из последнего выражения видно, что излучение является тепловым с температурой  $T$  из (20).

### 3. Начальная энергия поля

Проведенный в предыдущем разделе расчет числа рожденных частиц основывался на гейзенберговском представлении состояний поля, когда состояние считается

фиксированным, а зависимость от времени "перекладывается" на операторы поля, через которые, в свою очередь, выражаются наблюдаемые величины.

В частности, если поле до коллапса находилось в вакуумном состоянии  $|\psi\rangle = |0, in\rangle \equiv |\hat{0}\rangle$ , то тензор энергии-импульса рожденных частиц есть среднее по этому состоянию от оператора тензора энергии-импульса. Различные способы регуляризации этого среднего дают одинаковый результат. В двумерной модели ситуация существенно облегчается тем, что всякая двумерная метрика  $g_{\mu\nu}$  конформно плоская:  $g_{\mu\nu} = C \eta_{\mu\nu}$ . Этот факт позволяет сравнительно легко получить выражение для перенормированного среднего тензора энергии-импульса (см. [6, 2]). В световых координатах  $(u, v)$  метрика (1) имеет вид (6). Для такой метрики имеем

$$\langle T_\mu^\nu(g_{\lambda\rho}) \rangle_{\text{рен}} = (-g)^{-1/2} \langle T_\mu^\nu(\eta_{\lambda\rho}) \rangle_{\text{рен}} + \theta_\mu^\nu - \frac{1}{48\pi} R \delta_\mu^\nu, \quad (22)$$

$$\theta_{uu} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_u^2 C^{-1/2},$$

$$\theta_{vv} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_v^2 C^{-1/2},$$

$$\theta_{uv} = \theta_{vu} = 0. \quad (23)$$

Первый член в (22) обращается в нуль при специальном выборе координат  $(\hat{u}, \hat{v})$ , которые в областях  $I$  и  $II$  совпадают с координатами плоского пространства-времени  $\hat{u} = t - r$ ,  $\hat{v} = t + r$ , а в области  $III$  определяются выражениями

$$\hat{u} = p(u) = -r_*^{-1}[-t + r_*(r)],$$

$$\hat{v} = v = r_*^{-1}[t + r_*(r)]. \quad (24)$$

Этим координатам соответствует метрика (6) с

$$C(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{1 - r_g/r}{(1 - r_g/\hat{v})(1 + r_g/\hat{u})}, \quad (25)$$

и положительно-частотная волновая функция (7) принимает в них наиболее простой вид.

Проведя несложные математические выкладки с использованием формул (22) и (23), получаем

$$\langle T_{uu} \rangle_{\text{рен}} = \frac{1}{24\pi} \left[ \partial_u^2 \ln C - \frac{1}{2} (\partial_u \ln C)^2 \right],$$

$$\langle T_{vv} \rangle_{\text{рен}} = \frac{1}{24\pi} \left[ \partial_v^2 \ln C - \frac{1}{2} (\partial_v \ln C)^2 \right],$$

$$\langle T_{uv} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{vu} \rangle_{\text{рен}} = -\frac{RC}{96\pi}, \quad (26)$$

где  $R = -2r_g/r^3$  — кривизна пространства (1).

Может показаться, что из-за особенности метрики при  $t = 0$  нет возможности исследовать тензор энергии-импульса вблизи этой поверхности. Но  $T_{\mu\nu}$  — объект чисто локальный, и процедура перенормировки не нарушает эту локальность, поэтому выражения (26) справедливы везде, за исключением точек поверхности  $t = 0$ .

Вычисления в метрике (24), (25) дают следующий результат:

$$\begin{aligned}
 T_{\hat{u}\hat{u}} &\equiv \langle \hat{0} | T_{\hat{u}\hat{u}} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{24\pi} \left[ \frac{3}{8} \frac{r_g^2}{r^4 (1 + r_g/\hat{u})^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r_g}{2r^3 (1 + r_g/\hat{u})^2} - \frac{3}{2} \frac{r_g^2}{\hat{u}^4 (1 + r_g/\hat{u})^2} - \frac{2r_g^2}{\hat{u}^3 (1 + r_g/\hat{u})^2} \right], \\
 T_{\hat{v}\hat{v}} &\equiv \langle \hat{0} | T_{\hat{v}\hat{v}} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{24\pi} \left[ \frac{3}{8} \frac{r_g^2}{r^4 (1 + r_g/\hat{v})^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r_g}{2r^3 (1 + r_g/\hat{v})^2} - \frac{3}{2} \frac{r_g^2}{\hat{v}^4 (1 + r_g/\hat{v})^2} + \frac{2r_g^2}{\hat{v}^3 (1 + r_g/\hat{v})^2} \right], \\
 T_{\hat{u}\hat{v}} &\equiv \langle \hat{0} | T_{\hat{u}\hat{v}} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} = T_{\hat{v}\hat{u}} \equiv \langle \hat{0} | T_{\hat{v}\hat{u}} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} = \\
 &= -\frac{r_g}{48\pi r^3} \frac{(1 - r_g/r)}{(1 - r_g/\hat{v})(1 + r_g/\hat{u})}. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Вычислим теперь интенсивность излучения черной дыры и сопоставим ее с результатами расчетов, проведенных во второй части.

В предельном случае  $r = \text{const} \gg r_g$ ,  $t \rightarrow +\infty$  справедливы выражения

$$\begin{aligned}
 \hat{u} &\approx -r_g - r \exp\left(-\frac{t}{r_g}\right), \\
 t &\approx r_g \ln\left(\frac{r}{-\hat{u} - r_g}\right), \\
 T_{\hat{u}\hat{u}} &\approx \frac{1}{48\pi r_g^2 (1 + r_g/\hat{u})^2}. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Перейдем к световой координате метрики Шварцшильда

$$u = t - r_*(r) \approx r_g \ln\left(\frac{1}{-\hat{u} - r_g}\right) + \text{const},$$

для которой поток энергии записывается в виде

$$T_{uu} = \left(\frac{d\hat{u}}{du}\right)^2 T_{\hat{u}\hat{u}} = \left(1 + \frac{r_g}{\hat{u}}\right)^2 T_{\hat{u}\hat{u}} = \frac{1}{48\pi r_g^2} \equiv I_t. \tag{29}$$

Здесь  $I_t$  — полная интенсивность излучения. Этот поток энергии соответствует тепловому излучению с температурой  $T = 2T_0$ :

$$\int_0^\infty \frac{k dk}{2\pi} n_B(k) = \frac{\pi T^2}{12}.$$

Рассчитаем теперь излучение, возникающее при "встряивании" метрики.

При  $t = +0$  метрика имеет вид

$$ds^2 = h dt^2 - \frac{1}{h} dr^2 = d\tau^2 - dx^2,$$

где  $d\tau = \sqrt{h} dt$ ,  $dx = dr/\sqrt{h}$ . В координатах  $(\tau, x)$  наблюдателя, покоящегося в точке  $r > r_g$ , энергия облака квантов, рожденных при  $t = 0$  на интервале  $(x, x + dx)$ , равна

$$dE_p = T_{\tau\tau} dx.$$

Для вычисления этого выражения используем формулы

$$T_{\tau\tau} = \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 T_{tt} = \frac{1}{h} T_{tt}.$$

Компоненту  $T_{tt}$  выразим через компоненты тензора энергии-импульса в координатах  $(\hat{u}, \hat{v})$  (см. (27)) по обычным формулам преобразования тензора. Искомое выражение на поверхности  $t = +0$ , где справедливы соотношения  $\partial \hat{u} / \partial t = \partial \hat{v} / \partial t = h$ , имеет вид

$$T_{tt} = h^2 (T_{\hat{u}\hat{u}} + T_{\hat{v}\hat{v}} + 2T_{\hat{u}\hat{v}}).$$

Половина энергии  $dE_p$  упадет на дыру, а половина уйдет на бесконечность. (Отметим, что при более последовательном подходе с самого начала следовало бы вычислять поток энергии, т.е.  $T_{\tau x}$ .) Поскольку при движении облака в гравитационном поле дыры сохраняется величина  $\sqrt{h} dE_p$ , энергия, ушедшая на бесконечность, будет равна

$$dE = \frac{1}{2} h (T_{\hat{u}\hat{u}} + T_{\hat{v}\hat{v}} + 2T_{\hat{u}\hat{v}}) dr.$$

От точки  $r$  до детектора, висящего в точке  $r = r_0$ , квант движется в течение времени

$$t(r) = \int_r^{r_0} \frac{dr}{h(r)},$$

т.е. энергия  $dE$  будет проходить через детектор в течение времени  $dt = dr/h$ . Отсюда находим интенсивность излучения, образовавшегося при "встряивании":

$$I_s = \frac{1}{2} h^2 (T_{\hat{u}\hat{u}} + T_{\hat{v}\hat{v}} + 2T_{\hat{u}\hat{v}}). \tag{30}$$

Здесь все величины берутся при  $t = +0$ . Из (27) находим

$$T_{\hat{u}\hat{u}} = T_{\hat{v}\hat{v}} = \frac{r_g}{16\pi r^3 h} \left(1 + \frac{r_g}{4rh}\right), \quad T_{\hat{u}\hat{v}} = \frac{r_g}{48\pi r^3 h}. \tag{31}$$

При  $t \rightarrow +\infty$  излучение приходит из области  $r \approx r_g$ . Учитывая это обстоятельство, из (30) и (31) заключаем, что при  $t \rightarrow +\infty$  кванты, рожденные при "встряивании", дают постоянный вклад в интенсивность, равный

$$I_s = \frac{1}{64\pi r_g^2}. \tag{32}$$

Как и следовало ожидать, разность  $I_t$  и  $I_s$  совпадает с интенсивностью истинного излучения Хокинга:

$$I_t - I_s = \frac{1}{192\pi r_g^2} = \frac{\pi T_0^2}{12}.$$

Суммируем полученные результаты:

1. На "встряивание" метрики тратится бесконечно большая энергия (уже отсюда видна физическая неосуществимость ММК).

2. "Неправильная" энергия, возникающая при встряхивании метрики, излучается, налагаясь на обычный спектр Хокинга. Тем самым мы убедились, что для излучения Хокинга детали коллапса не важны в том смысле, что можно разделить вклады в поток энергии

на чисто хокинговский и нефизический, возникающий из-за "скачка" метрики, причем для хокинговской компоненты существенно  $\langle \hat{0} | T_{\mu\nu} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}}$  равно нулю, а  $\langle \hat{0} | T_{\alpha\beta} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}}$  имеет вид

В заключение авторы выражают благодарность Е.Л. Суркову, П.О. Федичеву за полезные обсуждения данной работы.

#### 4. Приложение

Приведем математически более строгое обоснование полученных выше результатов. Выражение для потока энергии, регистрируемой детектором, движущимся по произвольной траектории с 4-скоростью  $U^\mu$ , имеет вид

$$I = \langle \hat{0} | T_{\mu\nu} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} U^\mu n^\nu, \quad (33)$$

где  $n^\mu n_\mu = -1$ ,  $U^\mu n_\mu = 0$ . В координатах (24) для детектора с траекторией  $r = \text{const}$  получаем

$$U^{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{r_g}{\hat{u}} \\ 1 - \frac{r_g}{\hat{v}} \end{pmatrix}, \quad n^{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{r_g}{\hat{u}} \\ -1 + \frac{r_g}{\hat{v}} \end{pmatrix}.$$

Тогда для потока энергии имеем

$$I_t = \frac{1}{h} \left[ \langle \hat{0} | T_{\hat{u}\hat{u}} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} \left(1 + \frac{r_g}{\hat{u}}\right)^2 - \langle \hat{0} | T_{\hat{v}\hat{v}} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} \left(1 - \frac{r_g}{\hat{v}}\right)^2 \right].$$

Отметим, что измеряемый детектором поток энергии (33) состоит из двух слагаемых различной физической природы: слагаемого, обусловленного поляризацией вакуума (для траектории  $r = \text{const}$  оно равно нулю), и слагаемого, связанного с излучением, уходящим на бесконечность. Если интересоваться только вторым слагаемым, то компоненты  $\langle \hat{0} | T_{\mu\nu} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}}$  в (33) следует заменить на  $\langle \hat{0} | T_{\alpha\beta} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} - \langle \hat{0} | T_{\alpha\beta} | 0 \rangle_{\text{ren}}$ , где второе слагаемое вычисляется аналогично первому (см. раздел 3), но с исполь-

зованием других координат, соответствующих out-вакууму  $|0\rangle$ :

$$u = t - r_*(r) = -r_*(-\hat{u}),$$

$$v = r_*^{-1}(t + r_*(r)) = \hat{v}.$$

Проведя несложные выкладки, получим результат (29).

Энергию, излученную при встряхивании метрики, можно вычислить по формуле

$$dE = \langle \hat{0} | T_{\mu\nu} | \hat{0} \rangle_{\text{ren}} \xi^\mu d\Sigma^\nu,$$

где  $\xi$  — времениподобный вектор Киллинга, имеющийся в области  $t > 0$ ,  $r > r_g$ :  $\xi^{\hat{u}} = 1 + r_g/\hat{u}$ ,  $\xi^{\hat{v}} = 1 - r_g/\hat{v}$ ,

$$d\Sigma_\mu = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial r} dr$$

— элемент поверхности  $t = \text{const}$  [11],  $\xi_{\mu\nu}$  — абсолютно антисимметричный тензор двумерного пространства. После несложных вычислений (см. раздел 3) получаем результат (32).

#### Список литературы

1. Hawking S W *Nature* **248** 30 (1974)
2. Биррелл Н, Девис П *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени* (М.: Мир, 1984)
3. Boulware D G *Phys. Rev. D* **11** 2169 (1976)
4. Gerlach U H *Phys. Rev. D* **14** 2169 (1976)
5. Davies P C W *Proc. Roy. Soc. A* **351** 129 (1976)
6. Davies P C W, Fulling S A, Unruh W G *Phys. Rev. D* **13** 2720 (1976)
7. Волович И В, Загребнов В А, Фролов В П *ТМФ* **33** 3 (1977)
8. Unruh W G *Phys. Rev. D* **15** 365 (1977)
9. Фролов В П *УФН* **188** (3) 473 (1976)
10. Fulling S A *Phys. Rev. D* **15** 2411 (1977)
11. Новиков И Д, Фролов В П *Физика черных дыр* (М.: Наука, 1986)
12. Walker W R *Phys. Rev. D* **31** 767 (1985)
13. Гриб А А, Мамаев С Г, Мостепаненко В М *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях* (М.: Атомиздат, 1980)

#### THE HAWKING EFFECT IN THE SUDDEN GRAVITATIONAL COLLAPSE MODEL

L.I. Men'shikov, A.N. Pinzul  
Russian Research Centre "Kurchatov Institute"  
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia  
Tel. (7-095) 196-74 39  
Fax (7-095) 194-19 94  
E-mail: limensch@lmpp.kiae.su

The mechanism of Hawking radiation is investigated with the example of the sudden gravitational collapse model. It is shown that the virtual particle-antiparticle pairs are destroyed by the tidal forces of the black hole, in line with the currently accepted ideas.

PACS numbers: **04.50. + h**

Bibliography — 13 references

Received 31 January 1995