

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Регулярные и квазирегулярные спектры  
в разупорядоченных слоистых структурах

А.В. Белинский

*Рассмотрены два примера задач, решаемых методами статистической оптики. Они довольно наглядны, допускают ясные интерпретации и не требуют трудоемких вычислений. Показано, как первая задача — о влиянии случайных изменений оптической толщины интерферометра Фабри–Перо на его спектры пропускания — помогла решить вторую: "загадку" экспериментальных спектров полидоменных кристаллов KDP. Эти примеры могут быть полезны при решении других статистических задач.*

PACS numbers: 07.60.L, 42.25.Hz, 78.66.–w

## Содержание

1. Введение (691).
  2. Идеальный интерферометр Фабри–Перо (691).
  3. Геометрооптическая модель интерферометра Фабри–Перо со случайными ступенчатыми дефектами зеркал (692).
  4. Сегнетоэлектрическая фаза кристалла KDP и его спектральное пропускание в поляризованном свете (694).
  5. Преобразование поляризации света блоком поперечных доменов (696).
  6. Комбинация блоков поперечных и продольных доменов (698).
  7. Влияние дисперсии толщины доменов (698).
  8. Заключение (700).
  9. Приложение (701).
- Список литературы (702).

## 1. Введение

Анализ основных этапов развития современной статистической оптики показывает, что в настоящее время стадия ее становления перешла в стадию бурного развития. Этому способствовали успехи в освоении техники счета одиночных фотонов, которые "статистичны" уже в силу своей квантовой природы. В этой области получены столь впечатляющие результаты, что можно говорить о своего рода "квантовом взрыве", разразившемся в последнее десятилетие. Есть, однако, интересные эффекты и в классической статистической оптике. Хотелось бы надеяться, что к такого рода эффектам относятся обсуждаемые в данной статье примеры.

А.В. Белинский, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет,  
119899 Москва, Воробьевы горы  
Тел. (095) 143-48-31. Факс (095) 939-31-13  
E-mail: postmaster@spr.phys.msu.ru

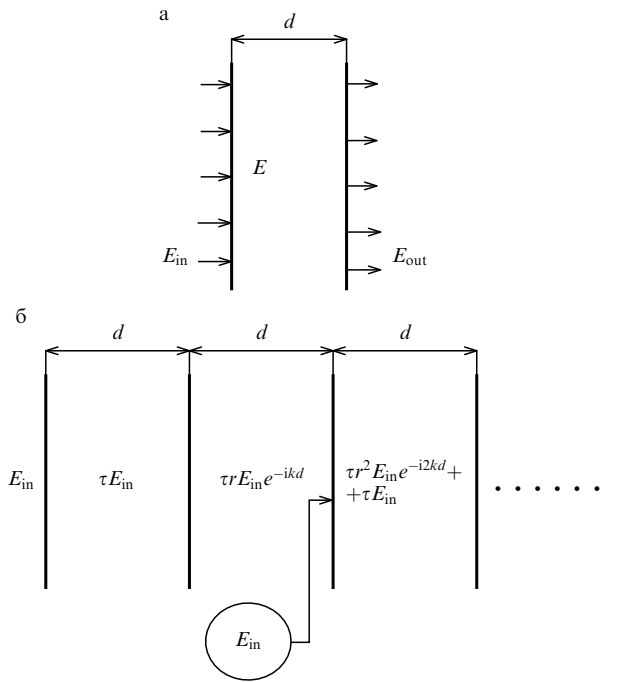
Статья поступила 23 ноября 1994 г.,  
после доработки 31 января 1995 г.

Рассмотрим систему резонансных элементов, образующих статистический ансамбль. Резонансные частоты элементов случайны, но имеют некоторую среднюю частоту и конечную дисперсию. Возбуждение системы хаотично (в случае оптического возбуждения — это белый свет). Как повлияет случайный характер элементов на спектральную характеристику системы в целом? Ясно, что она частично утратит свой резонансный характер. В тривиальном случае это ухудшает потребительские свойства системы. Характерным примером являются случайные дефекты зеркал в интерферометре Фабри–Перо [1–5]. Но существуют ситуации, когда подобное "стохастическое" смягчение резонанса носит даже конструктивный характер. Пример — доменная структура в кристалле KDP ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ), охлажденном ниже температуры Кюри. До последнего времени отсутствовала модель, способная объяснить происхождение в нем своеобразных квазирегулярных спектров пропускания, которые зарегистрированы экспериментально при работе с поляризованным светом [6]. Толщины доменных слоев в кристалле случайны. Далее читатель сможет убедиться в том, что такая разупорядоченность, как ни странно, способствует определенной регуляризации спектров, проявляющейся в их гармонической промодулированности. В этом можно усмотреть упомянутую выше конструктивную роль нерегулярности.

В отличие от большинства задач статистической оптики, как правило, требующих громоздких вычислений, рассмотрение этих двух примеров с единых позиций является весьма наглядным и дает интересные результаты, которые могут быть полезны при анализе других типов систем.

## 2. Идеальный интерферометр Фабри–Перо

Идеальный интерферометр Фабри–Перо, как известно, представляет собой два плоских параллельных частично пропускающих зеркала, разделенных промежутком с



**Рис. 1.** Идеальный интерферометр Фабри–Перо (а), состоящий из двух параллельных частично пропускающих зеркал, и его развертка (б). Интерферометр освещается нормально падающей плоской волной с амплитудой  $E_{in}$ . Сразу после выходного зеркала устанавливается поле с амплитудой  $E$ , а на выходе — с  $E_{out}$ . Последовательные отражения от зеркал удобно описывать с помощью развертки (б)

оптической толщиной  $d$  (рис. 1а). Проще всего описывать такой интерферометр, нарисовав его развертку, т.е. последовательные изображения одного зеркала другим (рис. 1б).

Пусть интерферометр освещается параллельным пучком лучей, нормальным по отношению к зеркалам. Комплексную медленно меняющуюся амплитуду этого пучка обозначим через  $E_{in}$ . Входное зеркало пропустит в интерферометр излучение с амплитудой  $\tau E_{in}$ , где  $\tau$  — коэффициент пропускания зеркал по амплитуде. Далее пучок приобретет фазовую задержку  $kd$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число, и отразится от второго зеркала (а в развертке на рис. 1б он преодолеет вторую плоскую границу с амплитудным пропусканием  $r$ , где  $r$  — амплитудный коэффициент отражения зеркал). После полного цикла обхода интерферометра пучком его амплитуда окажется равной  $\tau r^2 \exp(-i2kd) E_{in}$ . При отражении от входного зеркала к этому пучку добавится еще одна порция освещающего излучения  $\tau E_{in}$ , и цикл повторится снова.

Итак, амплитуда поля внутри интерферометра вблизи входного зеркала представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$E = \tau E_{in} \sum_{n=0}^{\infty} (r \exp(-ikd))^{2n} = \frac{\tau E_{in}}{1 - (r \exp(-ikd))^2}, \quad (1)$$

а на выходе интерферометра получим

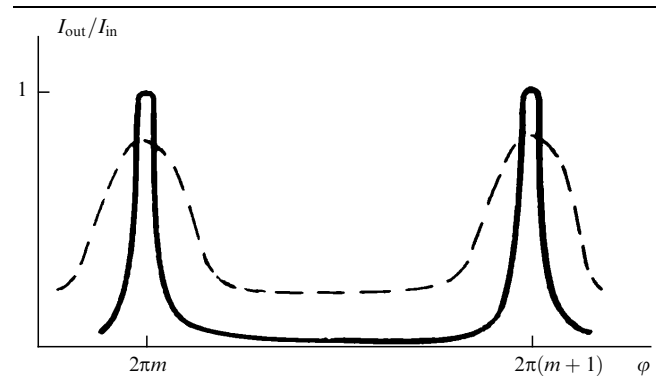
$$E_{out} = \tau \exp(-ikd) E = \frac{\tau^2 \exp(-ikd) E_{in}}{1 - (r \exp(-ikd))^2}. \quad (2)$$

Таким образом, интенсивность выходного поля равна

$$I_{out}(\varphi) = \frac{T^2 I_{in}}{1 - 2R \cos \varphi + R^2}, \quad (3)$$

где  $\varphi = 2kd$  — фазовый набег за полный цикл обхода пучком интерферометра,  $T = |\tau|^2$  и  $R = |r|^2$  — коэффициенты пропускания и отражения зеркал по интенсивности, причем в отсутствие потерь  $R + T = 1$ . Далее везде полагаем, что это условие выполняется.

Выражения (2), (3) носят название формул Эйри (см., например, [7]). Функция (3) представляет собой периодические пики единичной амплитуды. Следовательно, осветив интерферометр белым светом и анализируя спектр на выходе, получим "гребенку" эквидистантных полос (рис. 2, сплошная кривая).



**Рис. 2.** Спектральное пропускание идеального интерферометра Фабри–Перо (сплошная кривая) и интерферометра со случайными гауссовыми флуктуациями толщины (штриховая кривая)

### 3. Геометрооптическая модель интерферометра Фабри–Перо со случайными ступенчатыми дефектами зеркал

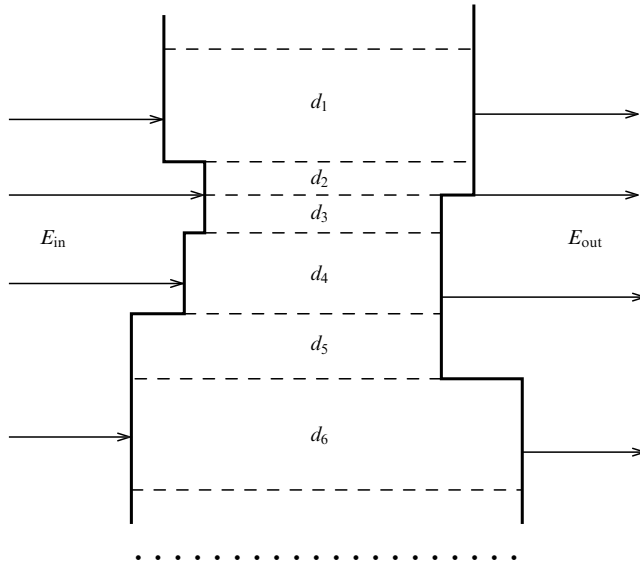
Согласно (3) функция пропускания интерферометра Фабри–Перо высокой добротности (т.е. с коэффициентами отражения зеркал  $R$  близкими к единице) имеет вид острых пиков (см. рис. 2), что свидетельствует о высокой чувствительности к изменению фазы пучка  $\varphi$ , преодолевающего пространство между зеркалами. В реальном интерферометре дефекты изготовления зеркал и флуктуации оптической плотности среды, заполняющей интерферометр, ведут к фазовым набегам, которые следует рассматривать как случайные. Они связаны со случайными изменениями оптической толщины  $d$ . Такого рода погрешности могут существенно снизить качество интерферометра.

Моменты распределения интенсивности излучения на выходе интерферометра можно определить как

$$\langle I_{out}^n(k) \rangle = \int_0^{\infty} I_{out}^n(kd) w(d) dd, \quad (4)$$

где  $w(d)$  — функция распределения случайной толщины,  $n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим следующую модель неидеального интерферометра. Пусть дефекты зеркал имеют вид ступенек случайной высоты и площади (рис. 3). При нормальном падении освещающего излучения в геометрооптическом



**Рис. 3.** Интерферометр Фабри–Перо со ступенчатыми зеркалами. Штриховыми прямыми выделены идеальные в геометрооптическом приближении интерферометры с постоянными, но отличающимися друг от друга толщинами  $d_j$ . Эти "микроинтерферометры" образуют статистический ансамбль, который составляет реальный интерферометр в целом

приближении такой интерферометр представляет собой систему идеальных интерферометров с различными оптическими толщинами. Статистику последних в простейшем случае естественно полагать гауссовой

$$w(\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5)$$

где для удобства мы перешли к фазовым флуктуациям  $\varphi = 2kd$  с дисперсией  $\sigma^2$ ,  $k$  — волновое число на некоторой центральной частоте исследуемого спектра, а  $\tilde{d}$  — флуктуационная составляющая толщины:  $d = \tilde{d} + \tilde{d}$ ,  $\langle \tilde{d} \rangle = 0$ . В сравнительно узком спектральном интервале влиянием  $k$  на  $w(\varphi)$  можно пренебречь.

Модель гауссовой статистики фазовых неоднородностей оправдана центральной предельной теоремой теории вероятностей при неконтролируемом случайном изменении параметров среды и толщины интерферометра.

Фазовый набег при одном полном обходе интерферометра волной представим в виде

$$2kd = \varphi_{\max} + \bar{\varphi} + \varphi, \quad (6)$$

где  $\varphi_{\max} = 2\pi m$  — фаза, соответствующая ближайшему интерференционному максимуму,  $m$  — целое число;  $\bar{\varphi} \leq \pi$  — регулярная составляющая фазовой отстройки от резонанса (интерференционного максимума), а  $\varphi$  — флуктуационная фаза.

Интеграл (4) с учетом (5), (6) можно вычислить, воспользовавшись аппроксимацией пиков функции (3) лоренцевым контуром

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{in}}} &= \frac{T^2}{1 - 2R \cos(2kd) + R^2} \equiv \frac{1}{1 + F \sin^2[(\bar{\varphi} + \varphi)/2]} \cong \\ &\cong \frac{1}{1 + F(\bar{\varphi} + \varphi)^2/4}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $F = 4R/(1 - R)^2$  — фактор резкости идеального интерферометра. Такая аппроксимация, заключающаяся в замене синуса его аргументом, справедлива вблизи интерференционного пика при малых  $(\bar{\varphi} + \varphi) \ll 1$ . Заметим, что "гребенка" одинаковых пиков функции (3) заменяется одним, причем точность аппроксимации растет с увеличением добротности интерферометра (коэффициентов отражения  $R$  и фактора резкости  $F$ ), поскольку узкому пику соответствуют малые отклонения фазы  $\bar{\varphi}$ .

Итак,

$$\frac{\langle I_{\text{out}}^n(\bar{\varphi}) \rangle}{I_{\text{in}}^n} \cong \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\varphi^2/2\sigma^2)}{[1 + 1/4 F(\bar{\varphi} + \varphi)^2]^n} d\varphi. \quad (8)$$

Последнее выражение представляет собой свертку гауссова и лоренцева (при  $n = 1$ ) контуров, метод аналитического вычисления которой описан в приложении. В частности первые два момента выходной интенсивности равны

$$\langle I_{\text{out}}(\bar{\varphi}) \rangle = \pi^{1/2} v I_{\text{in}} \text{Re} \left\{ [1 - \text{erf}(v + i\varphi')] \times \exp[(v + i\varphi')^2] \right\}, \quad (9)$$

$$\langle I_{\text{out}}^2(\bar{\varphi}) \rangle = I_{\text{in}}^2 \left\{ v^2 + \pi^{1/2} v \text{Re} \left\{ [1 - \text{erf}(v + i\varphi')] \times \left[ \frac{1}{2} + v(v + i\varphi') \right] \exp[(v + i\varphi')^2] \right\} \right\}, \quad (10)$$

где  $v = (2/\sigma^2 F)^{1/2}$ ,  $\varphi' = \bar{\varphi}/2^{1/2}\sigma$ ,  $\text{erf}(x) = (2/\pi^{1/2}) \times \int_0^x \exp(-t^2) dt$  — интеграл вероятности или функция ошибок.

Если параметры  $F \gg 1$  и  $v \ll 1$ , то

$$\langle I_{\text{out}}(\bar{\varphi}) \rangle \cong I_{\text{in}} U^{-1}(\sigma) \exp\left[-\frac{\bar{\varphi}^2}{\varphi_0^2 U^2(\sigma)}\right], \quad (11)$$

где  $U(\sigma) = [1 + (2\sigma^2 \ln 2)/\varphi_0^2]$ ,  $\varphi_0 \cong 2/F^{1/2}$  — полуширина интерференционного пика идеального интерферометра. Следовательно, соответствующая полуширина спектрального пика реального интерферометра равна

$$\varphi_{1/2} \cong [\varphi_0^2 + 2\sigma^2 \ln 2]^{1/2}. \quad (12)$$

Таким образом, для интерферометра с гауссовыми флуктуациями толщины аддитивно складываются квадрат полуширины интерференционного пика идеального интерферометра и дисперсия фазовых флуктуаций, приведенная к уровню 1/2.

Возможный вид спектральной функции пропускания, рассчитанный согласно (9), представлен на рис. 2 (штриховая кривая). Небольшие флуктуации резонансных частот "микроинтерферометров", составляющих реальный интерферометр, не приводят к хаотизации спектрального пропускания системы в целом. Они лишь "сглаживают" спектр, снижая его контрастность и уширяют контуры интерференционных максимумов. Формально это следует из того факта, что функция пропускания системы, согласно (8), представляет собой свертку идеального спектрального контура интерферометра и функции распределения случайной составляющей фазового набег.

Рассмотрим еще один интересный пример статистики "ступенек" зеркал интерферометра. Он интересен не

только в методическом плане, но также и тем, что аналогичная (12) формула для полуширины линии в нем может быть получена нетривиальным способом.

Предположим вначале, что амплитуды положительных (т.е. с положительной флуктуационной фазовой добавкой) и отрицательных ступенек одинаковы и дают фазовые сдвиги  $\pm\psi$ . Тогда статистика фазы должна быть аналогична статистике случайного двоичного сигнала  $\varphi = (-1)^n\psi$  (см., например, [8]). Здесь  $n = n(0, \rho)$  — число пересечений нулевого среднего значения фазы (т.е. число ступенек) на длине  $\rho$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), подчиняющееся пуассоновскому закону

$$p_n = \frac{(\kappa\rho)^n \exp(-\kappa\rho)}{n!}, \quad (13)$$

где  $\kappa$  — плотность или среднее число пересечений на единице длины.

Рассматриваемый интерферометр представляет собой, таким образом, устройство, состоящее из двух интерферометров. В одном из них имеем фазовое смещение  $\varphi = \psi$  с вероятностью  $p_+ = p_0 + p_2 + \dots = \exp(-\kappa\rho) \operatorname{ch}(\kappa\rho)$ , а в другом интерферометре уже  $\varphi = -\psi$  с вероятностью  $p_- = p_1 + p_3 + \dots = \exp(-\kappa\rho) \operatorname{sh}(\kappa\rho)$ . Следовательно,

$$\langle I_{\text{out}}(\bar{\varphi}, \psi) \rangle = p_+ I_{\text{out}}(\bar{\varphi} + \psi) + p_- I_{\text{out}}(\bar{\varphi} - \psi), \quad (14)$$

где  $I_{\text{out}}$  с аргументами  $\varphi \rightarrow \varphi \pm \psi$  определяется в соответствии с (3).

Учтем теперь флуктуации амплитуд ступенек, полагая для простоты их функцию распределения равномерной в интервале от 0 до  $v$

$$w(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{v} & \text{при } 0 \leq \psi \leq v, \\ 0 & \text{при } \psi > v. \end{cases} \quad (15)$$

Усреднение (14) по распределению (15) дает

$$\langle I_{\text{out}}(\bar{\varphi}) \rangle = (v^2 G)^{-1/2} \left\{ \arctan \left[ G^{1/2} \tan \left( \frac{v + \bar{\varphi}}{2} \right) \right] + \arctan \left[ G^{1/2} \tan \left( \frac{v - \bar{\varphi}}{2} \right) \right] \right\}, \quad (16)$$

где

$$G = \left( \frac{1+R}{1-R} \right)^2 \cong F. \quad (17)$$

При малых  $v$  и  $\bar{\varphi}$

$$\langle I_{\text{out}}(\bar{\varphi}) \rangle \cong (v^2 G)^{-1/2} \left[ \arctan \left( \frac{v G^{1/2}}{1 - G(v^2 - \bar{\varphi}^2)/4} \right) + \delta\pi \right], \quad (18)$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } G \frac{v^2 - \bar{\varphi}^2}{4} < 1, \\ 1 & \text{при } G \frac{v^2 - \bar{\varphi}^2}{4} > 1. \end{cases} \quad (19)$$

При выводе (16) и (18) полагали  $\kappa\rho \gg 1$ .

Формулы (16) и (18) достаточно сложны, чтобы непосредственно из каждой выразить ширину спектральных пиков. Однако совместное их использование позволяет решить такую задачу достаточно просто и элегантно. Действительно, согласно (16), максимальное значение выходной интенсивности в пике, наступающее при  $\bar{\varphi} = 0$ , равно

$$\langle I_{\text{out}} \rangle_{\text{max}} = 2(v^2 G)^{-1/2} \arctan \left[ G^{1/2} \tan \left( \frac{v}{2} \right) \right]. \quad (20)$$

Половина этого значения определяет полуширину спектра пика по уровню 0,5. Тогда, согласно (18), эта полуширина находится из уравнения

$$\arctan \left[ G^{1/2} \tan \left( \frac{v}{2} \right) \right] = \arctan \left[ \frac{v G^{1/2}}{1 - G(v^2 - \bar{\varphi}_{1/2}^2)/4} \right] + \delta\pi \quad (21)$$

и равна

$$\bar{\varphi}_{1/2} = \left( \frac{4}{G + v^2} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

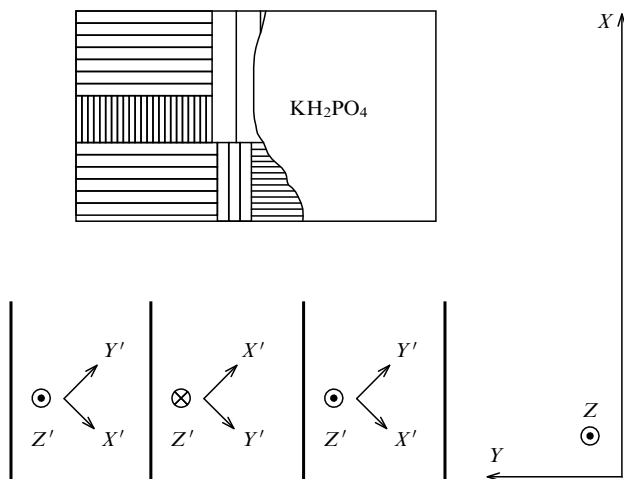
Эта формула аналогична (12) и смысл ее очевиден.

Все описанные нами эффекты рассмотрены в рамках геометрической оптики. Насколько это правомочно и соответствует реальным ситуациям? Каков характер воздействия дифракции? Как ни странно, в данном случае дифракция оказывает положительное влияние на неидеальный интерферометр, повышая его добротность [5]. Действительно, сразу после отражения от ступеньки на зеркале фазовый фронт отраженной волны также оказывается ступенчатым. В рамках геометрической оптики он таким и останется независимо от пройденного расстояния. Дифракция же "сглаживает" эту ступеньку. А при увеличении расстояния между зеркалами (оптической толщины  $d$ ) влияние ступеньки уменьшается, приближая ситуацию к случаю идеально плоских зеркал.

#### 4. Сегнетоэлектрическая фаза кристалла KDP и его спектральное пропускание в поляризованном свете

Кристаллы группы KDP в сегнетоэлектрической фазе имеют слоистую доменную структуру (рис. 4), образующуюся при охлаждении кристалла ниже температуры Кюри, которая составляет  $123^\circ\text{K}$ . Конфигурация, возникающая при фазовом переходе доменной системы, обеспечивает минимум свободной энергии как функции температуры, напряженности электрического поля и механического напряжения. При этом, вообще говоря, толщина доменов и размеры полидоменных двойниковых блоков могут изменяться в широких пределах, так что для конкретной реализации невозможно заранее предсказать характер модуляции оптических свойств, вызванный доменной структурой. Однако из соображений симметрии (принципа Кюри [9]) всегда известна ориентация доменных стенок по отношению к кристаллографическим осям, направление вектора поляризации и тип симметрии кристалла в сегнетоэлектрической фазе.

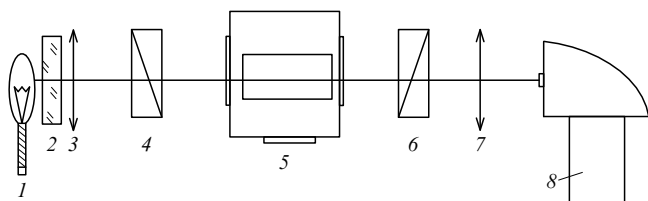
В доменной структуре кристаллов типа KDP можно выделить отдельные блоки, состоящие из доменов с



**Рис. 4.** Схематическое изображение доменной структуры и ориентация кристаллографических осей сегнетоэлектрической фазы кристалла KDP. При охлаждении образуются два вида доменных блоков — продольные и поперечные. Внизу показан увеличенный фрагмент нескольких поперечных доменов и ориентация осей в них

взаимно параллельными стенками (см. рис. 4). Ориентация доменных стенок жестко определена — их плоскости перпендикулярны либо тетрагональной оси  $X$ , либо тетрагональной оси  $Y$  [10–12]. По мере распространения света в кристалле волны рассеиваются на последовательно сменяющих друг друга блоках доменов двух типов ориентации доменных стенок. В экспериментах [6] анализировалось излучение, распространяющееся параллельно плоскости доменных стенок блоков одного типа (назовем их блоками продольных доменов) и пересекающее стенки доменов блоков другого типа (в дальнейшем — блоков поперечных доменов).

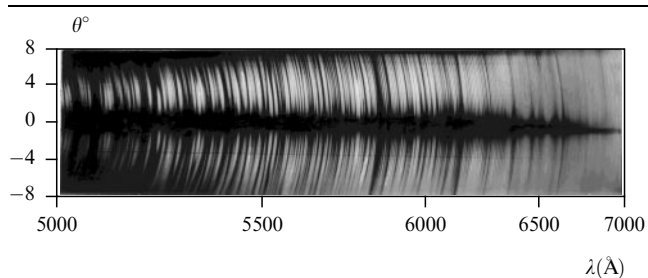
Упрощенная схема экспериментальной установки для исследования спектров пропускания представлена на рис. 5. Образцы KDP, имеющие форму прямоугольных параллелепипедов, вырезанных вдоль тетрагональных осей, помещались в азотный криостат. Для изменения размеров доменов вдоль полярной оси  $Z'$  прикладывалось постоянное электрическое поле ( $0-4 \text{ кВ см}^{-1}$ ). Осветительная система, состоящая из вольфрамовой лампы, рассеивателя, короткофокусной линзы 3 и поляроида, формировала расходящийся пучок поляризованного белого света в пределах  $\pm 10^\circ$  относительно тетрагональной оси  $X$  (либо  $Y$ ) в плоскости  $XZ$ . Прошедший через кристалл и анализатор свет фокусировался линзой 7 на щель спектрографа, на выходе которого регистрировался двумерный спектр в координатах "длина волны —



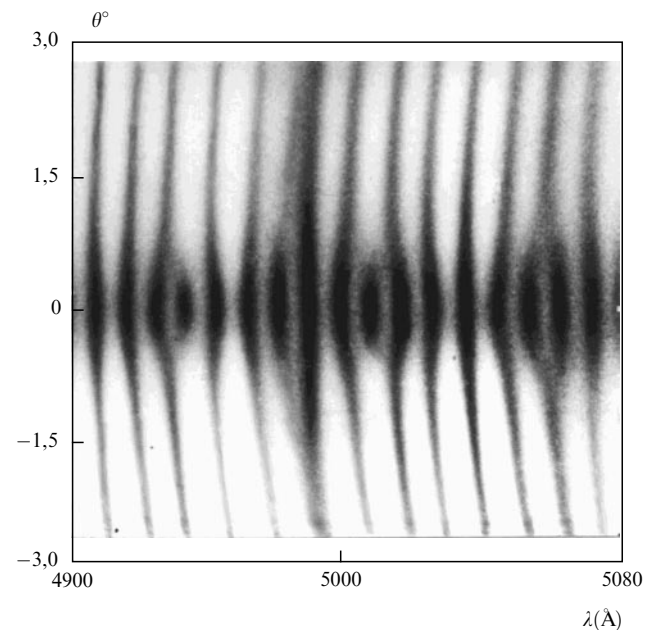
**Рис. 5.** Упрощенная схема эксперимента по исследованию спектров кристалла KDP в поляризованном свете: 1 — вольфрамовая лампа, 2 — светорассеиватель, 3, 7 — объективы, 4 — поляризатор, 5 — кристалл KDP в криостате, 6 — анализатор, 8 — спектрограф

угол". Спектры регистрировались на фотопленке, либо фотоэлектронной системой.

Фотографии спектров полидоменных кристаллов в геометрии  $X(Z, Y)XZ$  (первый символ дает направление волнового вектора, освещающего излучения на входе, символы в скобках дают направления вектора поляризации излучения на входе и на выходе, соответственно, а последние два символа определяют плоскость, в которой лежит волновой вектор рассеянного излучения, т.е. на выходе) приведены на рис. 6 и рис. 7. Зависимость нормированной интенсивности прошедшего излучения от длины волны представлена на рис. 8.



**Рис. 6.** Фотография частотно-углового спектра пропускания полидоменного кристалла KDP длиной 30 мм



**Рис. 7.** Фотография фрагмента частотно-углового спектра пропускания кристалла длиной 5 мм, интересной особенностью которого является наличие сложной системы полос вблизи нулевого угла  $\theta$

Приведенные спектры пропускания полидоменных кристаллов в скрещенных поляроидах обладают рядом интересных особенностей.

1. Наблюдается резкая зависимость интенсивности прошедшего света ортогональной (относительно падающей) поляризации от длины волны и угла наблюдения. Частотно-угловые спектры (см. рис. 6 и рис. 7) состоят из чередующихся линий максимумов и минимумов интенсивности, имеющих определенную кривизну. Спектр полидоменного кристалла, полученный при параллельных направлениях пропускания поляризатора и анализатора, является дополнительным по отношению к спектру

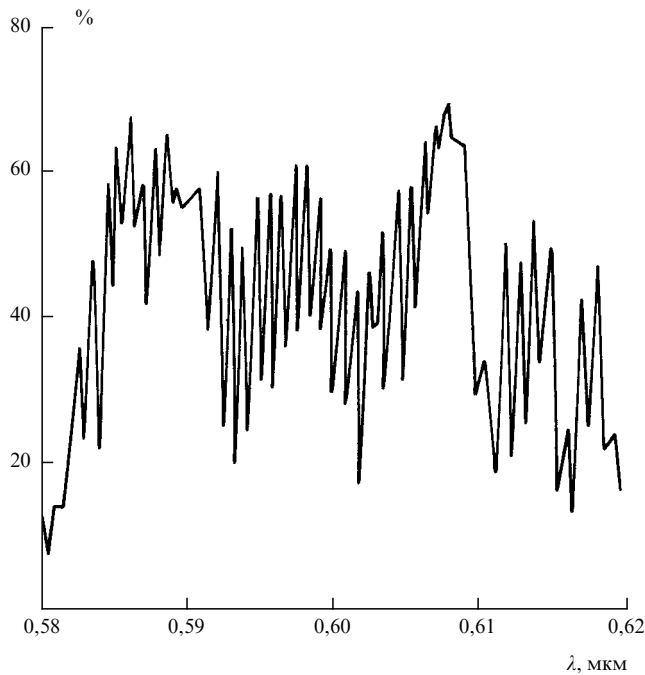


Рис. 8. Фрагмент спектральной зависимости коэффициента пропускания кристалла KDP в скрещенных поляризаторах. Длина кристалла 30 мм,  $\theta = 6^\circ$

в скрещенных поляризаторах: на месте максимумов интенсивности наблюдаются минимумы и наоборот.

2. Характерна высокая чувствительность спектров к изменению доменной структуры. При варьировании внешнего постоянного электрического поля, толщины кристалла, либо области кристалла, через которую проходит излучение, меняется доменная подсистема, а вместе с ней относительная интенсивность и частотный сдвиг линий. Кривизна линий при этом, как правило, остается постоянной. При полной монодоменизации кристалла (разрушении его доменной структуры) какое-либо излучение ортогональной поляризации на выходе кристалла практически отсутствует.

3. Наблюдается высокая степень деполяризации: интенсивность излучения на выходе кристалла достигает 70 % интенсивности падающего света.

4. Частотно-угловой спектр, как правило, регулярный и представляет собой почти эквидистантный набор полос. Характерное частотное расстояние между полосами увеличивается по мере роста длины волны или уменьшения толщины образца.

Интересна история вопроса. Обсуждаемая тема далеко не нова. Интерес к ней возникал и в 60-х [13, 14], и в 70-х годах [15, 16]. В [13, 14] впервые описан эффект модуляции интенсивности монохроматического излучения, прошедшего через сегнетоэлектрические кристаллы KDP и DKDP [ $K(D_xH_{1-x})_2PO_4$ ]. В [15] частотная модуляция света была обнаружена при регистрации рамановских спектров полидоменного KDP. Для объяснения наблюдаемых эффектов привлекается один и тот же механизм — механизм взаимодействия излучения ортогонально-поляризованных мод при переходе через поперечно-ориентированные границы доменов одинаковой толщины. В [16] приводится наиболее полное описание модели.

Позднее были обнаружены характерные особенности спектров поляритонного рассеяния света в KDP [17, 18],

приводящие к существенному отличию этих спектров от спектров монодоменных образцов. Причины отличия могли быть сходны с описанными в [13–16]. Для выяснения этого вопроса авторы работы [6] также обратились к наблюдению линейных спектров пропускания полидоменных образцов KDP. Была использована методика регистрации частотно-угловых спектров пропускания, описанная выше и позволяющая получить подробную информацию о характеристиках прошедшего излучения. Результатом стало наблюдение качественно новых особенностей пропускания, не укладывающихся в рамки модели, развитой в предшествующих работах [13–16]. Анализ причин, способных вызвать наблюдаемые явления, привел авторов работы [6] к пересмотру известного механизма формирования спектров пропускания полидоменной сверхрешетки кристалла.

Вопросы распространения света в кристалле со сверхструктурой типа KDP представляются интересными и в настоящее время. Подобные объекты часто используются в различных областях физики твердого тела, нелинейной оптике и т.д. Для адекватного описания возникающих там эффектов необходимо полное понимание того, что происходит на простейшем уровне линейного распространения электромагнитных волн через сверхрешетку с симметрией описываемого типа. Попытке решения этой задачи посвящено дальнейшее изложение.

## 5. Преобразование поляризации света блоком поперечных доменов

Рассмотрим распространение света по изолированному блоку поперечных доменов. Обозначим домены, ось  $Z$  которых направлена вверх, индексом "+", а соседние с ними домены (с осью  $Z$ , направленной вниз) — индексом "–".

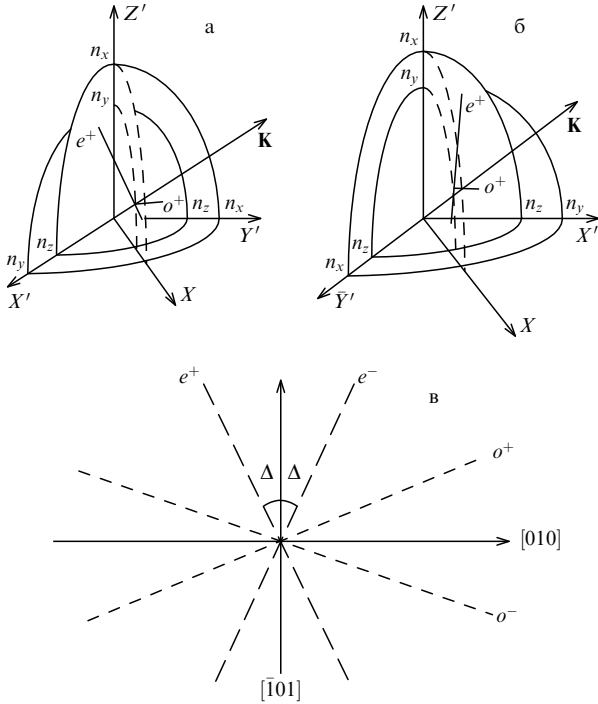
Если осветить кристалл плоской волной, фронт которой параллелен входной поверхности кристалла и стенкам поперечных доменов, то пучок света в кристалле разложится на два — с ортогональными направлениями поляризации (обозначенными нами как " $o$ " и " $e$ "), одно из которых (" $e$ ") параллельно оси  $Z$ . Наклоним освещающую плоскую волну на угол  $\theta$  в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа (см. рис. 4). При этом ортогональные направления поляризации окажутся повернутыми относительно первоначального положения на угол  $\pm\Delta$  в зависимости от индекса домена ("+" или "–") так, что направление " $e$ " будет составлять с осью  $Z$  угол  $\Delta$  [16] (рис. 9).

Предположим, что в некотором положительном  $N$ -ом домене комплексные амплитуды " $o$ " и " $e$ " волн соответственно равны  $O_N$  и  $E_N$ . Тогда, согласно рис. 9, переход к отрицательному  $(N+1)$ -ому домену сопровождается унитарным преобразованием

$$\begin{aligned} O_{N+1} &= O_N \cos(2\Delta) - E_N \exp(i\delta) \sin(2\Delta), \\ E_{N+1} &= O_N \sin(2\Delta) + E_N \exp(i\delta) \cos(2\Delta). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь в качестве опорной фазы принята фаза волны " $o$ ", несовпадение которой с фазой волны " $e$ " определяется разностью

$$\delta \cong 2\pi d \frac{n_o - n_e}{\lambda \cos(\theta/n_e)}, \quad (24)$$



**Рис. 9.** Индикатрисы показателей преломления противоположных доменов "+" (а) и "-" (б), а также ориентация направлений поляризации волн в случае распространения света в плоскости тетрагональных осей  $X$  и  $Z$  (в),  $[010]$  и  $[101]$  соответствуют направлениям поляризации в отсутствии доменной структуры

где  $d$  — толщина домена, а  $n_x$  — соответствующие индексам показатели преломления ( $\alpha = o, e$ ).

Следующее далее последовательное преобразование (переход от домена "-" к домену "+") имеет вид

$$\begin{aligned} O_{N+2} &= O_{N+1} \cos(2\Delta) + E_{N+1} \exp(i\delta) \sin(2\Delta), \\ E_{N+2} &= -O_{N+1} \sin(2\Delta) + E_{N+1} \exp(i\delta) \cos(2\Delta), \end{aligned} \quad (25)$$

т.е. отличается от (23) знаком  $\Delta$ . Таким образом, в общем случае

$$\begin{pmatrix} O_{N+1} \\ E_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\Delta) & -\exp(i\delta) \sin(2\Delta) \\ \sin(2\Delta) & \exp(i\delta) \cos(2\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_N \\ E_N \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\Delta = (-1)^N |\Delta|.$$

Эти соотношения позволяют моделировать прохождение света в доменной структуре и будут использованы нами в дальнейших численных расчетах. Отметим, что в силу унитарности преобразования (26) и соответствующей нормировки по интенсивности условие  $|O_N|^2 + |E_N|^2 = 1$  должно соблюдаться при любых  $N$ .

Как показывают оценки, для  $\lambda \approx 0,6$  мкм и  $T = 100^\circ\text{C}$  имеем  $n_o - n_e \approx 0,04$ , и при  $\theta = 6^\circ$  угол  $2\Delta \approx 0,3^\circ$ . Несмотря на столь незначительную величину поворота ортогональных направлений поляризации, взаимное преобразование волн "o" и "e" при достаточно большом количестве доменов может быть весьма существенным.

Если все домены поперечного блока имеют одинаковую толщину, то минимальной ячейкой периодичности является компонент, состоящий из двух — положительного и отрицательного — доменов. Такой компонент

описывается произведением матриц (26) при  $N = 1$  и 2:

$$\begin{aligned} D^{(2)} &\equiv \begin{pmatrix} C & \exp(i\delta) S \\ -S & \exp(i\delta) C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -\exp(i\delta) S \\ S & \exp(i\delta) C \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C^2 + \exp(i\delta) S^2 & \exp(i\delta) (\exp(i\delta) - 1) CS \\ (\exp(i\delta) - 1) CS & \exp(i\delta) (\exp(i\delta) C^2 + S^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $C \equiv \cos(2\Delta)$ ,  $S \equiv \sin(2\Delta)$ .

При  $\delta = 0$  или  $\delta = 2\pi m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , "o" и "e" волны не взаимодействуют ( $N$  — четное)

$$D \equiv D^{(N)} D^{(N-2)} \dots D^{(4)} D^{(2)} = D^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$O_N = O_0, \quad E_N = E_0.$$

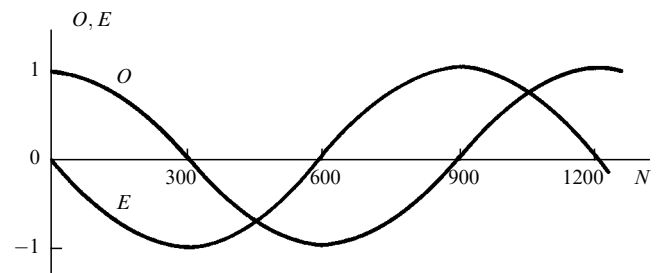
С другой стороны, при  $\delta = \pi + 2\pi m$

$$\begin{aligned} D^{(2)} &= \begin{pmatrix} \cos(4\Delta) & \sin(4\Delta) \\ -\sin(4\Delta) & \cos(4\Delta) \end{pmatrix}, \\ D^{(N)} &= \begin{pmatrix} \cos(2N\Delta) & \sin(2N\Delta) \\ -\sin(2N\Delta) & \cos(2N\Delta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Предположим, что излучение в исходном домене линейно поляризовано по направлению "o":

$$\begin{pmatrix} O_0 \\ E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

тогда взаимодействие "o" и "e" волн при оптимальной фазе  $\delta = \pi + 2\pi m$  (например,  $\delta = \pi$  при  $\lambda = 0,6$  мкм,  $d = 7,5$  мкм) наиболее эффективно (рис. 10):  $O_N = \cos(2N\Delta)$ ,  $E_N = -\sin(2N\Delta)$ . Амплитуды волн изменяются гармонически и все время остаются действительными. Для выполнения последнего условия достаточно соблюдения (30) и  $\delta = \pi m$ .



**Рис. 10.** Эволюция амплитуд волн "o" и "e" при распространении света через  $N$  поперечных доменных слоев толщиной  $d = 7,5$  мм для длины волны света  $\lambda = 0,6$  мкм

Из рис. 10 видно, что 300 слоистых доменов полностью перекачивают всю энергию из "o" в "e" волну, т.е. поворачивают плоскость поляризации исходного излучения на  $90^\circ$ . В этом можно усмотреть аналогию с версией парадокса Зено, сформулированной Пересом [19], в смысле высокой эффективности преобразования излучения большим количеством одинаковых элементов, влияние каждого из которых незначительно. При этом преобразование большим количеством слабо влияющих элементов в пределе оказывается более эффективным, чем аналогичное преобразование малым количеством сильно влияющих элементов (подробнее см. [19]).

## 6. Комбинация блоков поперечных и продольных доменов

Воспользуемся полученными выше результатами в случае оптимальной фазы  $\delta = \pm\pi$ , несколько усложнив рассматриваемую модель.

Пусть два блока по 150 поперечных доменов разделены фазовой пластинкой  $\Phi$  (рис. 11), которая вносит дополнительную фазу  $\varphi$  в "e" волну. Если  $\varphi = 0$  или  $2\pi m$ , то такая система эквивалентна просто трем слоям доменов, и "o" волна полностью превратится в "e" волну. Картина радикально изменится при  $\varphi = (2m + 1)\pi$ : при  $N = 150$  "e" волна меняет знак (см. рис. 10), и мы как бы попадаем в точку  $N = 1050$ , после которой следующие 150 слоев возвращают амплитуды волн к исходным, т.е. подчиняющимся (30). Таким образом, помещенное между скрещенными поляризаторами, ориентированными по направлениям "o" и "e", устройство, представленное на рис. 11, является эффективным затвором, управляемым фазовой пластинкой  $\Phi$ . Заметим, что в отсутствие "обкладок" поперечных доменов сама по себе фазовая пластинка  $\Phi$  никакого влияния на излучение с амплитудами (30) не оказывала бы, так как волны "e" на входе не было бы, и никакие фазовые добавки к ней ни на что бы ни влияли.

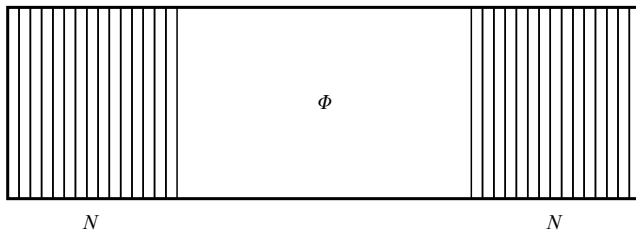


Рис. 11. Схематическое изображение доменной "тройки" — фазовой пластины  $\Phi$  (в частности продольного блока доменов) в окружении двух поперечных доменных блоков

Роль фазовой пластинки в рассматриваемом устройстве может играть блок из продольных доменов (см. рис. 4). Действительно, в рассматриваемой геометрии эксперимента для наклонных под углом  $\theta$  пучков границы между продольными доменами блока как бы отсутствуют в силу равенства показателей преломления соседних продольных доменов и одинаковой ориентации поляризаций "o" и "e" волн.

Фазовый набег  $\varphi$  в блоке продольных доменов в рассматриваемых условиях можно описать формулой для  $\delta$  (24), если под  $d$  понимать не толщину доменного слоя, а длину всего продольного блока в направлении нормали к входной поверхности кристалла. В частности, если эта длина составляет 3 мм, то  $\varphi = 2\pi m$ ,  $m = 200$  для  $\lambda = 0,6$  мкм. Соседние длины волн, для которых также  $\varphi = 2\pi m$ , но  $m = 199$  и  $201$ , отличаются от  $\lambda = 0,6$  мкм примерно на 3 нм. Таким образом, при освещении рассматриваемого устройства широкополосным белым светом, казалось бы, должен возникнуть спектр эквидистантных полос, аналогичный наблюдаемому в эксперименте. Однако при этом мы забываем о резонансном характере взаимодействия "o" и "e" волн в блоках поперечных доменов: условие  $\delta = \pm\pi$  для них выполняется только для одной длины волны, а следующие

максимумы в спектре отстоят от первого довольно далеко.

Для выяснения корректности возникшей гипотезы было исследовано влияние разности фаз  $\delta$  на эффективность взаимодействия "o" и "e" волн в блоке поперечных доменов. Результаты для исходного состояния поляризации (30) представлены на рис. 12.

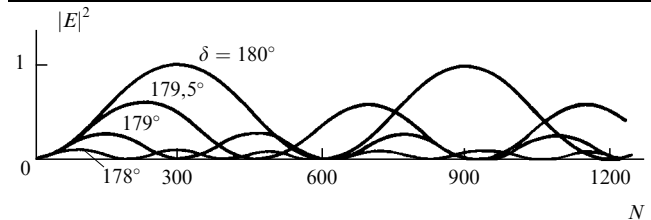


Рис. 12. Зависимость интенсивности "e" волн от числа пройденных поперечных доменов  $N$  толщиной  $d = 7,5$  мкм для различных фазовых набегов  $\delta$ ;  $\lambda = 0,6$  мкм

Амплитуды  $O_N$  и  $E_N$  в случае произвольных  $\delta$  становятся комплексными. На рис. 12 представлены зависимости интенсивности "e" волны от  $N$  при различных  $\delta$ . Зависимость же  $|E_N|^2$  от  $\delta$  при фиксированном  $N$  дает пики, ширина которых составляет приблизительно  $1^\circ$  отклонений фазы  $\delta$  от оптимального значения  $\pm 180^\circ$ , или  $\cong 3$  нм в единицах длин волн относительно значения  $\lambda = 0,6$  мкм. Вся система эквидистантных линий, отвечающих условиям  $\varphi = 2\pi m$ , должна занимать только узкий спектральный интервал, определяемый шириной интерференционного пика. Это не согласуется с тем фактом, что линии в экспериментальных спектрах зарегистрированы во всем видимом диапазоне. Иногда можно выделить несколько систем эквидистантных полос с несколько различным наклоном, однако и в этих случаях каждая система занимает значительно больший спектральный интервал.

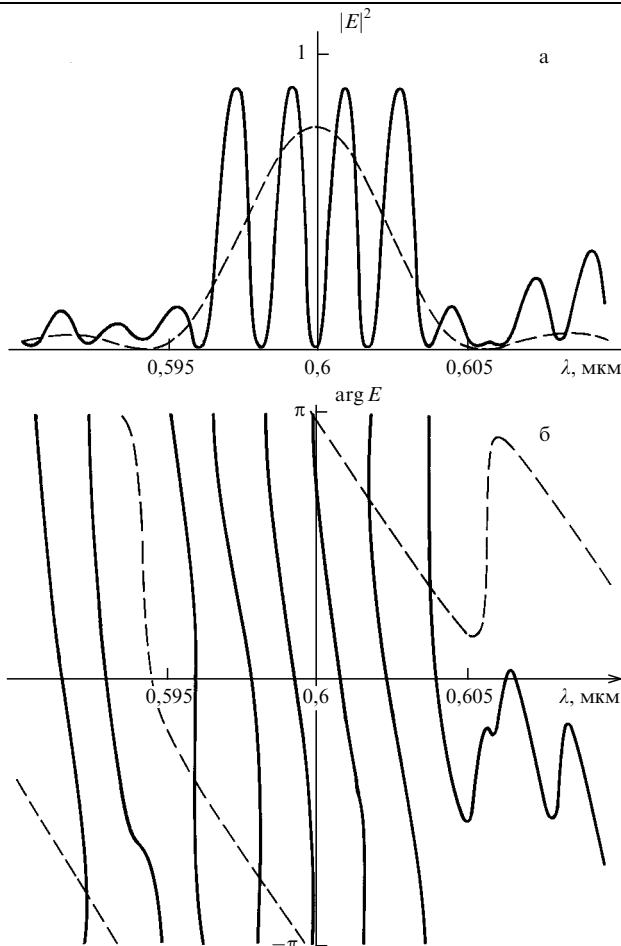
Таким образом, учет промежуточного влияния блоков продольных доменов приводит к возможности появления эквидистантных линий, при этом расстояние между линиями соответствует наблюдаемой картине по порядку величины. Большие коэффициенты перекачки интенсивности излучения из одной поляризации в другую также могут быть объяснены исходя из реального числа доменных стенок в использованных образцах. Однако требуется дальнейшая модификация модели, которая бы смягчала резонансный характер взаимодействия волн ортогональных поляризаций в блоках поперечных доменов. Для этого полезно вспомнить результаты, описанные выше при рассмотрении интерферометра Фабри–Перо.

## 7. Влияние дисперсии толщины доменов

Домены в сегнетоэлектрических кристаллах типа KDP не образуют идеальных сверхрешеток, объединяясь в блоки. Каждый блок поперечных доменов может содержать домены различной толщины. Это должно приводить к уширению резонансной кривой взаимодействия ортогональных поляризаций. Логично предположить, что механизм уширения аналогичен уширению интерференционных пиков при учете случайных флуктуаций оптической толщины резонатора Фабри–Перо (см. раздел 3).



Рассмотрим модификацию схемы предыдущего раздела, учитывающую разброс толщин в каждом блоке относительно общего среднего значения. Пусть в первом и третьем блоках по 200 доменов со средним значением толщины  $\bar{d} = 7,5$  мкм, гауссовой статистикой толщин и среднеквадратичным отклонением  $\sigma \cong 0,185$  мкм. Блок продольных доменов протяженностью 3 мм расположен между двумя блоками поперечных доменов и выполняет роль фазовой пластинки. Результаты компьютерного расчета такой системы представлены на рис. 13. Видно, что учет даже сравнительно небольших отличий в толщинах доменов двух поперечных блоков приводит к появлению значительно большего числа эквидистантных линий в спектре. На практике и число доменов, и средние значения их толщин, и среднеквадратичные отклонения, и характер дисперсии доменных толщин в разных блоках могут быть различны. Кроме того, в процессе формирования спектров рассеяния могут участвовать не только 3 доменных блока, а значительно большее их число. Тем не менее ряд особенностей формирования спектров можно проследить, анализируя результаты рассмотре-



**Рис. 13.** Результаты численного моделирования доменной "тройки": интенсивность (а) и фаза (б) "е" волны после прохождения первых 200 слоев поперечных доменов (штриховые кривые) и третьего (последнего) блока, также состоящего из 200 поперечных доменов (сплошные кривые);  $\theta = 6^\circ$ , средняя толщина доменов обоих поперечных блоков  $\bar{d}_{1,3} = 7,5$  мкм, среднеквадратическое отклонение толщины доменов поперечных блоков  $\sigma_{1,3} = 0,185$  мкм, длина продольного доменного блока  $d_2 = 3$  мм

ния данной простейшей модели, учитывающей как промежуточное воздействие продольных блоков, так и некоторый разброс толщин доменов в поперечных блоках.

Рассмотрим преобразование исходного состояния (30) первым блоком поперечных доменов (штриховые кривые на рис. 13). Резонансная кривая  $|E_{200}(\lambda)|^2$  уширилась по сравнению с проанализированным случаем одинаковых толщин доменов. В первом приближении это уширение можно рассчитать аналогично учету случайных фазовых набегов в интерферометре Фабри–Перо, воспользовавшись, например, соотношением (9).

По сравнению с результатами компьютерного расчета, отраженными на рис. 13а, аналитическая оценка уширения резонансной кривой с помощью интеграла (8) дает несколько завышенные значения. Дело, видимо, в том, что блок поперечных доменов случайной толщины одновременно выполняет роль как взаимопреобразователя "о"–"е" поляризаций, так и фазовой пластинки. Действительно, если в некотором домене сложились оптимальные условия преобразования (его толщина  $d$  и фазы взаимодействующих волн оптимальны), то его граница работает как преобразователь. В противном случае домен остается пассивной фазовой пластинкой. Таким образом, при прохождении светом всего блока часть доменов активно преобразует "о" и "е" волны, а часть — лишь вносит дополнительные фазовые задержки между ними. В пользу такой интерпретации говорит и несколько меньший интервал между спектральными максимумами всей системы ( $\cong 2$  нм) по сравнению с оценками, учитывающими внесение фазовых задержек только вторым блоком продольных доменов, которые дают интервалы  $\cong 3$  нм.

Если блок поперечных доменов одновременно и активный преобразователь, и фазовая пластинка, то при определенных отклонениях фазы ( $\cong \pm\pi$ ) или длины волны от центрального (пикового) значения должны наступать сбои активного преобразования. Именно поэтому в интервалах  $\lambda \cong 0,594–0,595$  мкм и  $\lambda \cong 0,605–0,606$  мкм резонансная кривая  $|E_{200}(\lambda)|^2$  проходит через нули. В этих точках фаза "е" волны не определена и возможны ее скачки (аналогичные скачкам, возникающим при образовании дислокаций и ветвлений интерференционных полос, наблюдаемым в интерферометрии). Как следует из рис. 13б, именно такая картина сложилась в интервале  $\lambda \cong 0,605–0,606$  мкм. Этот фазовый скачок наложился на фазовую модуляцию, вносимую вторым блоком продольных доменов, и в результате произошел сбой периодичности до этого эквидистантных спектральных максимумов (рис. 13а). Подобные эффекты, повидимому, и приводят к наблюдаемым отклонениям межмодовых расстояний от средних значений в экспериментальных спектрах (см. рис. 6–8).

Вообще говоря, появление эквидистантных полос в спектре следует также из довольно простых соображений. Пусть заключительный блок поперечных доменов описывается матрицей  $D$  с размерностью  $2 \times 2$ . Тогда входные и выходные поля этого блока будут связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} O_{\text{out}} \\ E_{\text{out}} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} O_{\text{in}} \\ E_{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Интенсивность одной из выходных поляризаций (скажем, "e"), таким образом, равна

$$|E_{out}|^2 = |D_{21}O_{in}|^2 + |D_{22}E_{in}|^2 + 2\text{Re}(D_{21}D_{22}^*O_{in}E_{in}^*), \quad (32)$$

где  $D_{ij}$  — матричные элементы  $D$ .

Пусть изменение длины волны  $\lambda$  приводит к линейному росту фазы  $\varphi_{in} = \text{arg}(E_{in})$  с масштабом, существенно меньшим масштабов изменения всех остальных, входящих в (32), параметров и величин. Реально такая "мелкомасштабная" фазовая модуляция происходит как раз в блоке продольных доменов. В этом случае, согласно (32), образуется спектр эквидистантных полос с гармонической огибающей в интервале длин волн, где заметны только изменения фазы  $\varphi_{in}$ .

Итак, предложенная модель в состоянии объяснить некоторые интересные особенности наблюдаемых экспериментальных спектров. Она также позволяет сформулировать подходы к решению некорректной обратной задачи: по виду спектров восстановить особенности структуры и статистические характеристики доменов.

Сравнивая экспериментальные спектры, приведенные на рис. 6–8, и данные численных расчетов (рис. 13) можно заключить следующее:

1. Наличие эквидистантных максимумов в широком спектральном диапазоне свидетельствует о более широком распределении толщин доменов поперечных блоков. Пример спектра, вычисленного для случая неодинаковых средних значений и больших среднеквадратичных разбросов доменных толщин двух поперечных блоков, представлен на рис. 14.

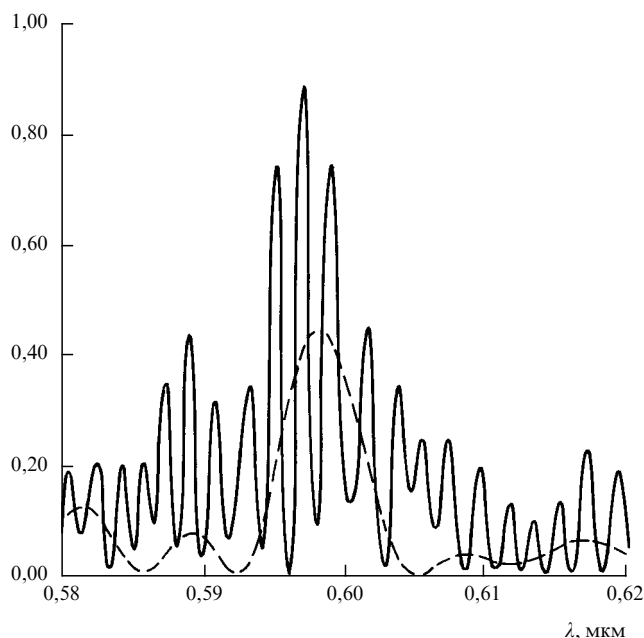


Рис. 14. Результаты численного моделирования спектра доменной "тройки": интенсивность "e" волны после прохождения блока первых 200 слоев поперечных доменов (штриховые кривые) и третьего (последнего) блока, также состоящего из 200 поперечных доменов (сплошные кривые);  $\theta = 6^\circ$ , средняя толщина доменов поперечных блоков  $\bar{d}_1 = 7,4$  мкм,  $\bar{d}_3 = 7,5$  мкм, среднеквадратическое отклонение толщин доменов поперечных блоков  $\sigma_1 = 0,8$  мкм,  $\sigma_3 = 0,74$  мкм, длина продольного доменного блока  $d_2 = 3$  мм

2. Из приведенных данных ясно, что условие равенства средних толщин и статистических характеристик доменов первого и третьего поперечных блоков в такой подсистеме не является обязательным. Важно, чтобы их резонансные кривые перекрывались.

3. В разных спектральных областях, видимо, работают различные "тройки" доменных блоков рассмотренного типа, а результирующий спектр есть суперпозиция спектров этих "троек".

Вернемся к сделанному ранее выводу о том, что блок поперечных доменов одновременно является и активным преобразователем поляризации, и фазовой пластинкой. Это означает, что промежуточный блок продольных доменов, строго говоря, и не требуется. Действительно, пример спектра, образованного *только одним* блоком поперечных доменов, состоящим из шестисот слоев случайной толщины, приведен на рис. 15. Наблюдается существенная модуляция спектра, аналогичная экспериментальным результатам. По сравнению со случаем "тройки" поперечного–продольного–поперечного блоков (см. рис. 13, 14) период модуляции, разумеется, увеличился. Примеры спектров, формируемых тремя блоками поперечных доменов различной средней толщины, приведены на рис. 16. Отметим еще раз (см. раздел 4) характерную особенность этих спектров — период модуляции спектральных полос в длинноволновой области увеличивается (см. рис. 16).

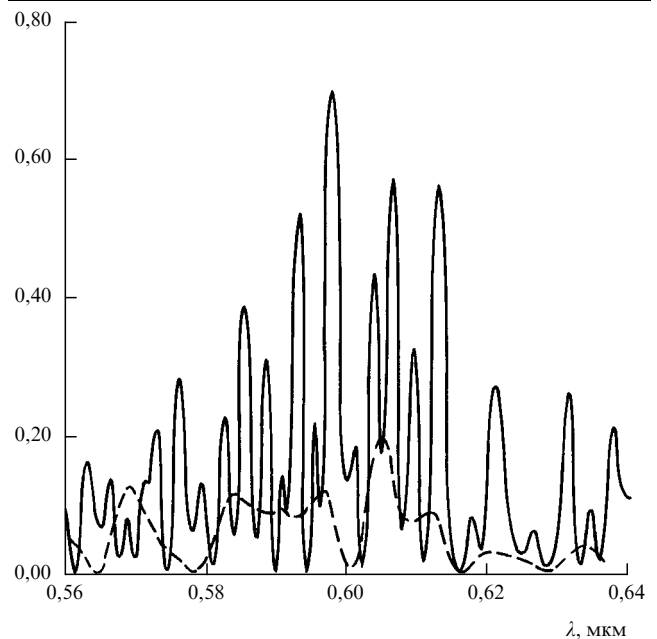
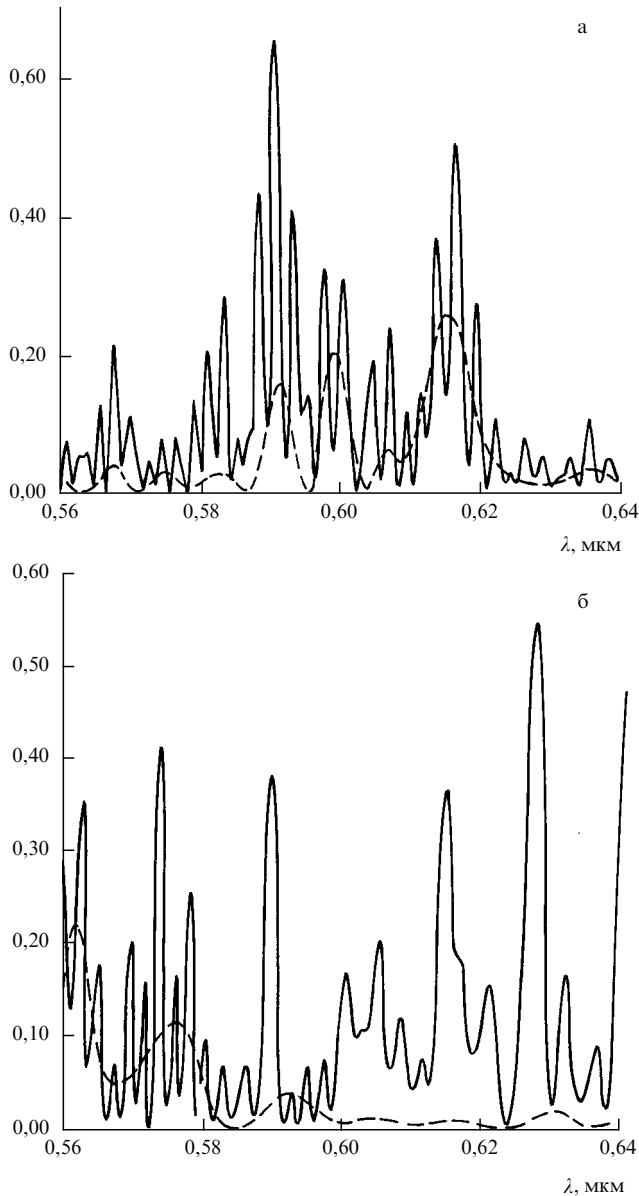


Рис. 15. Результаты численного моделирования спектра блока поперечных доменов: интенсивность "e" волны после прохождения первых 200 слоев поперечных доменов (штриховые кривые) и на выходе 600 поперечных доменов (сплошные кривые);  $\theta = 6^\circ$ , средняя толщина доменов  $\bar{d} = 7,5$  мкм, среднеквадратическое отклонение толщин доменов  $\sigma = 0,8$  мкм

## 8. Заключение

Рассмотрены две задачи из области статистической оптики, которые, несмотря на внешние различия, обладают внутренней связью. "Загадка" трудно объяснимых экспериментальных спектров полидоменных кристаллов KDP, возможно, и до сих пор не была бы решена, не



**Рис. 16.** Результаты численного моделирования спектров трех блоков поперечных доменов (по 200 доменов в каждом): интенсивность "e" волны после прохождения первого блока (штриховые кривые) и третьего (последнего) блока, (сплошные кривые);  $\theta = 6^\circ$ , средние толщины доменов  $\bar{d}_1 = 7,6$  мкм,  $\bar{d}_2 = 10$  мкм,  $\bar{d}_3 = 7,4$  мкм, среднеквадратические отклонения толщин доменов блоков  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$  мкм (а);  $\bar{d}_1 = 7$  мкм,  $\bar{d}_2 = 7,9$  мкм,  $\bar{d}_3 = 7,7$  мкм, среднеквадратические отклонения толщин доменов блоков  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$  мкм (б)

приди на ум эта счастливая аналогия с интерферометром Фабри–Перо. В чем же проявилась ее плодотворность? Ответ прост — даже модель "троек" доменных блоков не могла объяснить квазиэквидистантность полос без учета влияния стохастичности толщин доменов поперечных блоков, аналогичного влиянию флуктуаций толщин интерферометра Фабри–Перо.

Достигнув в этом вопросе определенной ясности, стоит оценить перспективы дальнейшей работы с поперечными кристаллами. Во-первых, интересной представляется возможность решения обратной задачи — восстановления геометрии доменов по спектрам. Во-вторых, авторы работы [6] планируют использовать эти кристаллы в качестве своеобразных нелинейно-оптиче-

ских преобразователей для проведения новых экспериментов по изучению квантовых свойств как самих сверхрешеток, так и электромагнитного излучения в них. В этой связи упомянем недавние работы Д.Н. Клышко [20, 21] по квантованию поля в таких структурах.

Автор очень надеется на неравнодушные читатели к этим интересным объектам исследований и призывает к поиску собственных оригинальных способов их применения. Автор считает своим долгом поблагодарить Г.Х. Китаеву, С.П. Кулика и А.Н. Пенина за предоставленные результаты экспериментов и участие в работе над второй частью статьи (разделы 4–7). Автор также благодарен Л.В. Келдышу и Д.Н. Клышко за полезные обсуждения и замечания. Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-02-14848.

## Приложение

К вычислению интеграла вида

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{[\beta^2 + (x + \gamma)^2]^n} dx, \quad (\text{П1})$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — действительные,  $\alpha > 0$ , а  $n$  — натуральное число, приводит ряд задач, например, связанных со спектральным анализом. Поскольку он отсутствует в известных справочных изданиях, здесь даны результаты аналитического расчета этого интеграла.

Определим вначале значение искомого интеграла при  $n = 1$ . Для этого представим его в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= (2\beta)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{\beta + i(x + \gamma)} dx + \text{к.с.} = \\ &= -\beta^{-1} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{x + \gamma - i\beta} dx \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

где сокращение к.с. означает комплексное сопряжение,  $i$  — мнимая единица, а  $\operatorname{Re}$  — реальная часть. Запишем далее (П2) как сумму двух одинаковых слагаемых:

$$\begin{aligned} I_1 &= -(2\beta)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{x + \gamma - i\beta} dx \right\} + \\ &+ i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{-x + \gamma - i\beta} dx, \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

которая, в свою очередь, преобразуется к виду

$$I_1 = \beta^{-1} \operatorname{Re} \left[ (\beta + i\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{x^2 + (\beta + i\gamma)^2} dx \right], \quad (\text{П4})$$

а это уже известный интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x^2)}{x^2 + (\beta + i\gamma)^2} dx &= \frac{\pi \exp(\alpha(\beta + i\gamma)^2)}{2(\beta + i\gamma)} \times \\ &\times \left\{ 1 - \operatorname{erf}[(\beta + i\gamma)\sqrt{\alpha}] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

где  $\operatorname{erf}(u) = 2\pi^{-1/2} \int_0^u \exp(-t^2) dt$  — интеграл вероятности. Таким образом, окончательно получим

$$I_1 = \left(\frac{\pi}{\beta}\right) \operatorname{Re} \left\{ \left\{ 1 - \operatorname{erf}[(\beta + i\gamma)\sqrt{\alpha}] \right\} \exp[\alpha(\beta + i\gamma)^2] \right\}. \quad (\text{П6})$$

Вычислить интеграл  $I_n$  с произвольным  $n$  можно при помощи рекуррентного соотношения

$$I_n = -n^{-1} \frac{dI_{n-1}}{dp}, \quad (\text{П7})$$

где  $p = \beta^2$ . Например, чтобы найти  $I_2$  нужно просто продифференцировать (П6) по  $\beta^2$  и сменить знак.

### Список литературы

1. Жиглинский А Г, Кучинский В В *Реальный интерферометр Фабри–Перо* (Л.: Машиностроение, 1983)
2. Дунаев В В, Жиглинский А Г, Кучинский В В *Оптика и спектроскопия* **45** 159 (1978)
3. Sloggett G J *Appl. Optics* **23** 2427 (1984)
4. Белинский А В, Чиркин А С *Квантовая электроника* **13** 905 (1986)
5. Белинский А В, Чиркин А С *Квантовая электроника* **13** 1045 (1986)
6. Kitaeva G Kh, Kulik S P, Penin A N, Belinsky A V *Phys Rev. B* **51** 3362 (1995)
7. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Pergamon Press, 1964); Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
8. Тихонов В И *Статистическая радиотехника* (М.: Радио и связь, 1982) с. 130
9. Iona F, Shirane G *Ferroelectric Crystals* (New York: Maxilla, 1962); Иона Ф, Ширане Д *Сегнетоэлектрические кристаллы* (М.: Мир, 1965)
10. Mitsui T, Furuichi J *Phys. Rev.* **90** 193 (1953)
11. Abbe K J *Phys. Soc. Jap.* **56** 757 (1987)
12. Bornarel J *Ferroelectrics* **71** 255 (1987)
13. Hill R M, Ichiki S K *Phys. Rev.* **135** 1630 (1964)
14. Hill R M, Hermann G F, Ichiki S K *J. Appl. Phys.* **36** 3672 (1965)
15. Takagi Y, Shigenari T *Sol. State Comm.* **11** 481 (1972)
16. Takagi T, Shigenari T *J. Opt. Soc. Am.* **63** 995 (1973)
17. Kitaeva G Kh, Kulik S P, Penin A N *Solid State Physics* **29** 2002 (1987)
18. Kitaeva G Kh, Kulik S P, Penin A N *Solid State Physics* **34** 1841 (1992)
19. Peres A *Am. J. Phys.* **48** 931 (1980)
20. Клышко Д Н *ЖЭТФ* **104** 2676 (1993)
21. Клышко Д Н *ЖЭТФ* **105** 1574 (1994)

### REGULAR AND QUASI-REGULAR SPECTRA OF DISORDERING LAYER STRUCTURES

A.V. Belinskii

Physics Department, M.V. Lomonosov State University, Vorob'evy gory, 119899 Moscow

Tel. (095) 143-48 31. Fax (095) 939-31 13

E-mail: postmaster@spr.phys.msu.su

Two examples of problems being solved by statistical optics methods are considered. They are clear enough, can be easily interpreted and, do not require difficult calculations. It is shown how the first problem—the influence of random optical length deviations on Fabry–Perot interferometer transmission spectra — helps to solve the second one: the ‘mystery’ of the experimental spectra of multiply domained  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  crystals. These examples can be useful for solving other statistical problems.

PACS numbers: 07.60.L, 42.25.Hz, **78.66.**–w

Bibliography — 21 references

Received 23 November 1994, revised 31 January 1995