

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике адронов

А. В. Батунин

Дается краткий обзор современного состояния математического аппарата, применяемого для исследования фракталов — бесконечных множеств с нецелой хаусдорфовой размерностью. Показано, как фрактальный анализ применяется в физике адронов. В этой связи обсуждается гипотеза о присутствии универсальности Фейгенбаума в характеристиках множественного образования частиц.

PACS numbers: 47.53. + n, 13.90. + i

Содержание

1. Введение (645).
 2. Математический формализм (646).
 - 2.1. Мощность множества. 2.2. Топологическая размерность.
 - 2.3. Мера и размерность Хаусдорфа. 2.4. Размерности Реньи.
 - 2.5. Стохастический анализ.
 3. Физические приложения (650).
 - 3.1. Получение зависимости $\tau(q)$. 3.2. Предельные циклы и аттрактор Фейгенбаума. 3.3. Метод трансфер-матриц. 3.4. Анализ событий в соударениях адронов. 3.5. Бифуркационная модель. 3.6. Универсальность Фейгенбаума и динамика удвоений в физике адронов.
 4. Заключение (659).
- Список литературы (659).

1. Введение

Фрактальные множества (фракталы) — это бесконечные множества с нецелой хаусдорфовой размерностью [1]. На практике, однако, мы всегда имеем дело с конечными множествами: множеством заряженных частиц, рожденных при соударении адронов; кристаллами льда, складывающимися в морозный узор на стекле; вихрями в турбулентной жидкости и т.д. Тем не менее оказывается, что при достаточно большом отношении (порядка сотни и больше) размера всего объекта к размеру составляющих его "кирпичиков" можно забыть о конечности числа "кирпичиков" на масштабах, значительно превышающих их размер, и применять математический формализм, развитый для истинных фракталов.

Это было сделано в последние двадцать лет буквально во всех областях физики: от физики твердого

тела (исследование спиновых стекол) и жидкостей (анализ возникновения турбулентности) до астрофизики (изучение распределений звезд, галактик и облаков космической пыли), и позволило выявить интереснейшие закономерности, ускользавшие до этого (см. один из последних междисциплинарных сборников [2]). В физику адронов идеи фрактальности начали проникать в конце семидесятых годов [3–5], хотя подлинный интерес к этой теме проявился здесь несколько позднее, после практически одновременного выхода работы Бяласа и Пещанского [6], предложивших исследовать перемежаемость (intermittency) распределений заряженных частиц в импульсном пространстве с помощью факториальных моментов, и работы Дремина [7], где впервые была определена размерность внутренних блужданий партонов.

С тех пор фрактальный анализ стал общепризнанным как среди теоретиков, так и среди экспериментаторов мощным инструментом исследования динамики множественного образования частиц. Назрела, на наш взгляд, насущная необходимость собрать и упорядочить материал, касающийся как теории фракталов, так и ее применения в адронной физике, разбросанный по (конечному) множеству прекрасных книг, обзоров [8–12] и оригинальных статей, сделав его по возможности кратким и доступным для всех желающих изучить предмет.

Данный обзор делится на две части. В первой части (раздел 2) вводятся понятия мощности множества, топологических инвариантов — лебеговой и индуктивной размерностей, зависящих от метрики пространства — хаусдорфовой размерности и обобщенных размерностей Реньи, спектральной функции. Кратко даются также основные понятия стохастического анализа, предложенного в недавней работе Шертнера и Лавджоя [13]: "домашние" и "дикие" сингулярности, коразмерности, следовый момент. В этой части мы старались избегать, где это было возможно, непривычных широкому кругу физиков математических терминов и излишне строгих математических формулировок. Заинтересованный чита-

А. В. Батунин. Институт физики высоких энергий
142284 Протвино, Московская обл., Россия
E-mail: batunin@mx.ihep.su

Статья поступила 24 января 1995 г.

тель с легкостью их восстановит по имеющимся ссылкам.

Во второй части (раздел 3) показывается, как фрактальный анализ применяется на практике. В качестве примера подробно рассмотрен один из известнейших фракталов — аттрактор Фейгенбаума, а также его конечные аппроксимации — предельные 2^m -циклы, характеризующие переход от порядка к хаосу огромного числа известных нелинейных динамических систем. Далее описывается метод Фейгенбаума–Енсена–Прокачиа по извлечению динамической информации из данных о структуре фракталов (метод трансфер-матриц), который затем применяется в физике адронов. Полученные результаты указывают на то, что динамикой, ответственной за наблюдаемые распределения заряженных частиц, может быть динамика удвоения периода, приводящая при асимптотически высоких энергиях к аттрактору Фейгенбаума.

Следует, однако, отметить, что даже приняв данную гипотезу, принципиально невозможно однозначно восстановить уравнения, управляющие динамикой процесса, ибо универсальности Фейгенбаума удовлетворяет достаточно широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений. Ситуация выглядит парадоксальной — мы можем предсказывать поведение решений уравнения, которого не знаем! Более того, даже для известного уравнения нельзя заранее, т.е. не решая его, узнать, будут ли его решения испытывать бифуркации удвоения периода при изменении управляющего параметра или нет. Поэтому на сегодняшний день вопрос о природе фракталов в физике адронов остается открытым — к ним могут приводить, например, уравнения квантовой хромодинамики [14] или фазовый переход второго рода [15, 16].

2. Математический формализм

2.1. Мощность множества

Под словом множество везде далее, если это специально не оговаривается, мы будем понимать множество с бесконечным числом элементов (бесконечное множество). Для сравнения бесконечных множеств друг с другом Георгом Кантором [17, 18] в 1874 г. было введено понятие мощности множества или кардинального числа. Два множества по определению имеют одинаковую *мощность* (эквивалентны), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (не обязательно непрерывное). Множество A имеет большую мощность, чем множество B , если при любом отображении множеств друг на друга остаются лишние элементы множества A .

Мощность пустого множества полагается равной нулю. Следующим по мощности идет множество натуральных чисел, называемое *счетным* множеством. Всякое конечное множество, очевидно, равномощно части натурального ряда чисел и называется *не более чем счетным*.

Множество рациональных и множество алгебраических чисел счетны. Объединение счетного числа счетных множеств тоже счетно. Множество иррациональных чисел и множество действительных чисел имеют следующую по рангу мощность — мощность *континуума*. Множество всех внутренних точек отрезка $[0, 1]$

имеет также мощность континуума (взаимно однозначное соответствие со всей числовой прямой можно, например, установить с помощью функции $y = (-1/\pi) \operatorname{arccot} x$).

Мощность множества всех точек плоскости (двумерного континуума) равна мощности действительных чисел, т.е. мощности континуума. Более того, такую же мощность имеет континуум бесконечного, но счетного числа измерений, а также множество всех *непрерывных* действительных функций действительной переменной. Если же взять множество *всех*, в том числе и *разрывных* действительных функций действительной переменной, то оно имеет мощность больше мощности континуума.

Отметим, что равенство мощностей континуумов любого счетного числа измерений, т.е. существование взаимно однозначного соответствия между их элементами, достигается за счет *разрывности* такого соответствия. *Непрерывность* и *однозначность* отображения только в одну сторону также не гарантируют того, что континуумы разного числа измерений можно будет отличить друг от друга — примером здесь может служить известная кривая Пеано [19], однозначно и непрерывно отображающая отрезок на квадрат. Если же потребовать *взаимооднозначности* и *непрерывности* как самого отображения одного множества на другое, так и обратного ему отображения (так называемый *гомеоморфизм*), то лишь тогда можно ввести характеристику, инвариантную относительно таких (гомеоморфных) отображений — *размерность* множества.

2.2. Топологическая размерность

Величины, инвариантные относительно гомеоморфных отображений, называются топологическими инвариантами. Различают два определения размерности множества A : индуктивную размерность $\operatorname{ind} A$ и размерность Лебега $\dim A$.

Первый набросок индуктивной формы определения размерности дал Анри Пуанкаре в 1912 г. в своей статье "Почему пространство имеет три измерения?" [20]: "...чтобы разбить пространства, необходимы множества, называемые поверхностями; чтобы разбить поверхности, необходимы множества, называемые линиями; чтобы разбить линии, необходимы множества, называемые точками...". В современном виде определение индуктивной размерности, восходящее к Брауэру [21], Урысону и Менгеру [22, 23], таково: множество A имеет $\operatorname{ind} A \leq n$, где n — целое, если ко всякой окрестности Ox произвольной точки $x \in A$ можно найти окрестность $O_1x \in O_x$, граница G которой имеет $\operatorname{ind} G \leq n - 1$.

Пустое множество по определению имеет размерность -1 . Множество *нульмерно*, если каждая его точка обладает произвольно малыми окрестностями с пустой границей. Например, следующие множества нульмерны:

- любое непустое конечное или счетное множество;
- множество действительных рациональных чисел;
- множество действительных иррациональных чисел;
- любое множество действительных чисел, не содержащее никакого интервала;
- множество точек n -мерного евклидова пространства, все координаты которых рациональны.

Отметим, что все нульмерные множества *несвязны*, т.е. могут быть разбиты на непустые не пересекающиеся открытые множества. Однако обратное неверно: для

любого n существует вполне несвязное множество размерности n [22, 23].

Размерность Лебега [24] для множества A , $\dim A$, определяется через *кратность* покрытия (наибольшее из таких целых чисел n , для которых в данной системе подмножеств есть n элементов с непустым пересечением).

Размерность $\dim A$ множества A есть наименьшее из таких целых чисел n , для которых при каждом $\epsilon > 0$ найдется замкнутое покрытие кратности $\leq n + 1$, причем диаметр каждого множества покрытия не превосходит ϵ .

В частности, определение размерности по Лебегу утверждает, что всякое двумерное ($n = 2$) множество может быть покрыто сколь угодно мелкими замкнутыми множествами так, чтобы множества примыкали друг к другу не более чем по три ($n + 1 = 3$), и не может быть покрыто сколь угодно мелкими множествами так, чтобы они примыкали только по два.

Доказано [22], что индуктивная и лебеговы размерности одного и того же множества A совпадают:

$$\dim A = \text{ind } A. \quad (1)$$

Для любых двух множеств A и B справедливо неравенство [23]

$$\dim(A \cup B) \leq \dim A + \dim B + 1. \quad (2)$$

Любое n -мерное множество может быть представлено как сумма $n + 1$ нульмерных множеств и не может быть представлено как сумма меньшего числа нульмерных множеств. Размерность n -мерного евклидова пространства E_n равна n .

Любое метрическое со счетным базисом множество A с $\dim A \leq n$ можно гомеоморфно отобразить на евклидово пространство E с $\dim E = 2n + 1$ [25]. Число $2n + 1$ нельзя понизить, т.е. существуют n -мерные пространства, которые нельзя гомеоморфно отобразить в E_{2n} . Например, существует линия ($\dim = 1$), которую нельзя гомеоморфно отобразить на плоскость ($\dim = 2$), но можно — на трехмерное евклидово пространство ($\dim = 3$) [23].

Топологический инвариант — размерность — оказывается тесно связанным с метрическим понятием *меры*, так как пространство размерности n имеет положительную n -мерную меру (обратное в общем случае неверно).

2.3. Мера и размерность Хаусдорфа

Поясним, что такое d -мерная мера для любого действительного числа $0 \leq d < \infty$, которая была введена Хаусдорфом [26] в 1919 г.

Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ — произвольное разложение множества A на счетное число подмножеств A_i диаметром $\delta(A_i) < \epsilon$. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдем

$$m_d^\epsilon = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta^d(A_i). \quad (3)$$

Положим

$$m_d(A) = \sup_{\epsilon > 0} m_d^\epsilon(A), \quad (4)$$

тогда $m_d(A)$ называется d -мерной мерой множества A . Очевидно, что $m_0(A) = 0$, если A — пустое множество; $m_0(A) = n$, если A — конечное множество из n точек, и $m_0(A) = \infty$, если A — бесконечное множество.

Мера Хаусдорфа $m_d(A)$ — невозрастающая функция от d для данного множества A . Более того, из $d < g$ и $m_d(A) < \infty$ следует, что $m_g(A) = 0$.

Хаусдорфовой размерностью D_H множества A называется верхняя грань ($\sup$) множества всех таких действительных чисел d , для которых $m_d(A) > 0$. Подчеркнем два важных отличия D_H от топологической размерности $\dim A$:

— D_H — не обязательно целое число;

— D_H не является топологическим инвариантом, так как она зависит от метрики, введенной на данном множестве.

Замечательно, однако, что нижняя грань ($\inf$) всех D_H , соответствующих всевозможным метрикам на данном множестве, есть его топологическая размерность [27]:

$$\inf D_H(A) = \dim A. \quad (5)$$

Обычно D_H вычисляют следующим образом. Покроем полностью данное множество A конечной системой замкнутых множеств A_i с диаметрами $\delta(A_i) < \epsilon$. Определим минимальное число $N(\epsilon)$ таких множеств для каждого ϵ . Ясно, что $N(\epsilon)$ положительно для всех $\epsilon > 0$ и неограниченно возрастает при $\epsilon \rightarrow 0$, если только A не состоит из конечного числа точек. Пусть существует положительное число c такое, что справедливо неравенство

$$N(\epsilon) \geq \frac{c}{\epsilon^r} \quad \text{для любого } \epsilon > 0, \quad (6)$$

где r — некое действительное число. Тогда

$$D_H = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon} \right]. \quad (7)$$

Найдем по этой формуле хаусдорфову размерность некоторых знаменитых фрактальных множеств (наконец-то мы добрались до собственно фракталов!).

Канторово множество (КМ) определяется как множество всех таких действительных чисел, которые можно выразить в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad \text{где } a_i = 0 \text{ или } 2. \quad (8)$$

Проще представить себе КМ как множество точек, оставшихся в конце следующей (бесконечной) процедуры: берем единичный отрезок, разбиваем его на три равные части и среднюю часть выбрасываем; затем каждый из оставшихся отрезков (длиной $1/3$) снова разбиваем на три части и среднюю часть выбрасываем и т.д. Легко убедиться, что сумма длин L выброшенных отрезков в точности равна единице:

$$L = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1.$$

(Такой же результат получается, если на каждом шаге выбрасывать не треть отрезка, а любую его конечную часть.) Это подтверждает тот факт, что линейная мера КМ равна нулю. Найдем его D_H . На n -ом шаге построения требуется 2^n отрезков длиной $(1/3)^n$ каждый, чтобы покрыть КМ. Следовательно,

$$D_H^{\text{КМ}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log 2^n}{\log (1/3)^n} \right) = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,630929 \dots \quad (9)$$

Аналогично для *кривой Коха* — линии бесконечной длины, ограничивающей конечную площадь на плоскости [28], $D_H = \log 4 / \log 3 = 1,261859 \dots$. *Ковер Серпинского* — аналог КМ на квадрате — имеет $D_H = \log 8 / \log 3 = 1,892789 \dots$, *универсальная кривая Менгера* — аналог КМ на кубе — имеет $D_H = \log 20 / \log 3 = 2,727833 \dots$ [23].

Заметим, что все три последние фрактала имеют топологическую размерность ($\dim$), равную единице, а $\dim \text{КМ} = 0$.

При вычислении размерности Хаусдорфа мы полагаем, что метрика на всем данном множестве одна и та же. Как быть, если разные области данного множества имеют различные метрики? Иными словами, когда одни области множества более "плотные", а другие более "разреженные"? Ответ на этот вопрос дает следующий раздел.

2.4. Размерности Реньи

Вновь полностью покроем данное множество A конечной системой замкнутых множеств A_i с диаметрами $\delta_i < \epsilon$ ($\epsilon > 0$) и определим минимальное число $N(\epsilon)$ таких множеств для каждого ϵ . Пусть на каждом множестве A_i действует своя метрика, так что соответствующая размерность Хаусдорфа равна $D_H(A_i)$. Каждому множеству A_i приписывается его вес p_i , определяемый как вероятность элементу множества A принадлежать также и множеству A_i . При аппроксимации бесконечных множеств A и A_i конечными множествами, состоящими из N и N_i элементов соответственно, p_i находится по формуле

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}. \quad (10)$$

На практике при исследовании фрактальных фазовых траекторий в качестве p_i берут величину, обратно пропорциональную времени между двумя последовательными посещениями точкой на фазовой траектории данного множества A_i . Понятно, что чем более плотно A_i , т.е. чем больше его элементов содержится в единице объема фазового пространства, тем больше его вес. Подчеркнем, что при таком определении плотности наибольшую плотность имеют множества с наименьшей размерностью Хаусдорфа, так как их элементы сосредоточены в минимальных объемах фазового пространства.

Удобно ввести так называемый показатель сингулярности α_i для данного веса p_i

$$p_i(l) \propto l^{\alpha_i}, \quad (11)$$

показывающий, насколько быстро убывает число элементов множества A_i при уменьшении диаметра l -окрестности произвольного элемента внутри A_i . Чем меньше α_i , тем медленнее это убывание и тем более плотное множество мы имеем.

Например, монофрактал при фиксированном l можно покрыть N кусками, где $N \propto l^{-D_H}$ (см. (7)). Следовательно, для каждого такого куска покрытия получаем одинаковые $p_i = 1/N$, и тогда

$$p_i(l) \propto l^{D_H}, \quad \text{т.е. } \alpha_i = D_H. \quad (12)$$

В случае мультифрактала (т.е. фрактального множества, состоящего из монофракталов с различными размерно-

стями Хаусдорфа) мы имеем целый спектр сингулярностей: $\alpha_{\min} < \alpha_i < \alpha_{\max}$.

По аналогии с термодинамикой можно определить функцию $\Gamma(q, \tau)$, называемую статистической суммой и являющуюся обобщением меры Хаусдорфа (3) для мультифракталов. Каждое подмножество входит в $\Gamma(q, \tau)$ со своим весом p_i :

$$\Gamma(q, \tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q \delta_i^{-\tau}. \quad (13)$$

Очевидно, что при $q = 0$ функция $\Gamma(q, \tau)$ переходит в обычную $(-\tau)$ -мерную меру Хаусдорфа $m_{-\tau}(A)$ для всего множества (см. (3), (4)), так что соответствующее значение $-\tau(q = 0)$ равно размерности Хаусдорфа для множества A :

$$-\tau(0) = D_H(A). \quad (14)$$

Можно показать [9, 29], что для каждого значения q также найдется такое единственное значение $\tau(q)$, что функция $\Gamma(q, \tau(q))$ будет иметь конечное положительное значение $0 < \Gamma(q, \tau(q)) < \infty$. Тогда для каждого действительного значения q можно ввести *обобщенную размерность Реньи* D_q ,

$$\tau(q) = D_q(q - 1). \quad (15)$$

При таком определении размерность Реньи D_0 равняется размерности Хаусдорфа D_H множества A . Обычно дополнительно накладывается условие нормировки $\Gamma(q, \tau) = 1$ для всех q и $\tau(q)$, для которых $\Gamma(q, \tau)$ положительна и конечна. Чтобы условие нормировки для $\Gamma(q, \tau)$ переходило в условие нормировки на сумму весов подмножеств множества A

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \quad (16)$$

должно выполняться равенство $\tau(1) = 0$. Из (13) видно, что при $q \gg 1$ главный вклад в $\Gamma(q, \tau)$ дают множества с наибольшим весом, т.е. наиболее плотные множества с минимальными α . Подставляя (11) и (15) в (13) и требуя $\Gamma(q, \tau) = 1$, получаем, что $D_{\infty} = \alpha_{\min}$. Аналогично при $q \ll 0$ главный вклад будут давать множества с наименьшим весом, т.е. наиболее разреженные с максимальными α , и $D_{-\infty} = \alpha_{\max}$. Следовательно, D_{∞} равна размерности Хаусдорфа для самых плотных подмножеств множества A , а $D_{-\infty}$ есть размерность Хаусдорфа для самых разреженных подмножеств.

Следующий шаг — это определение, как много подмножеств с данной сингулярностью α_i содержится внутри множества A . Иными словами, нужно найти размерность $f(\alpha_i)$ фракталов с сингулярностью α_i внутри мультифрактала A . Согласно (7) для размерности Хаусдорфа, для числа кусков диаметром l , покрывающих фракталы с сингулярностью α_i , мы можем записать

$$n(\alpha_i, l) \propto l^{-f(\alpha_i)}. \quad (17)$$

Если α меняется непрерывно с плотностью $\rho(\alpha)$, то число фракталов с размерностями в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ будет подчиняться закону

$$n(\alpha, l) = d\alpha \rho(\alpha) l^{-f(\alpha)}. \quad (18)$$

Тогда, подставляя в (13) выражение для p_i из (12), переходя к пределу $l \rightarrow 0$ и заменяя суммирование по i интегрированием по α , получаем

$$\Gamma(q, \tau) = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(l)} l_i^{q\alpha - \tau(q)} = l^{-\tau(q)} \int d\alpha \rho(\alpha) l^{q\alpha - f(\alpha)} = 1. \quad (19)$$

Интеграл можно вычислить методом перевала, так как при $l \rightarrow 0$ наибольший вклад дает область интегрирования с минимальным показателем степени. Очевидно, этот минимум определяется условиями

$$[q\alpha - f(\alpha)]' = 0, \quad [q\alpha - f(\alpha)]'' > 0, \quad (20)$$

откуда немедленно получаем

$$f'(\alpha_0) = q, \quad f''(\alpha_0) < 0. \quad (21)$$

Заметим, что здесь α_0 уже является функцией q . Далее, заменяя значение интеграла в (19) значением подынтегральной функции в точке экстремума, с учетом нормировки для $\rho(\alpha)$ получаем

$$\tau(q) = q\alpha_0(q) - f(\alpha_0(q)). \quad (22)$$

Функция $f(\alpha)$ называется спектральной функцией данного мультифрактала, ее типичный вид показан на рис. 1. Легко заметить, что $f(\alpha)$ связана с функцией $\tau(q)$ преобразованием Лежандра, так как подставляя первое выражение из (21) в (22), получаем

$$\tau(q) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha). \quad (23)$$

Справедлива и обратная формула:

$$f(\alpha) = q\tau'(q) - \tau(q), \quad \text{так как } \alpha(q) = \tau'(q). \quad (24)$$

Очевидно, что для монофрактала спектральная функция "стягивается" в δ -функцию, так как весь монофрактал характеризуется одним значением α , равным его размерности Хаусдорфа (см. (12)), и $f(\alpha) = \alpha$.

Типичный мультифрактал имеет конечное число как самых плотных, так и самых разреженных подмножеств (чаще всего по одному), следовательно, множество их

нульмерно (см. раздел 2.2), и спектральная функция в этих точках обращается в нуль:

$$f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0. \quad (25)$$

Из (21) получаем, что в точке $\alpha(0)$ спектральная функция имеет максимум. Из (24) и (14) следует, что этот максимум равен размерности Хаусдорфа данного мультифрактала:

$$f_{\max}(\alpha) = f(\alpha(0)) = -\tau(0) = D_H(A). \quad (26)$$

Как правило, для исследуемого мультифрактала сначала вычисляют зависимость $\tau(q)$ (или $q(\tau)$), смотря, что более удобно в каждом конкретном случае), а затем по формуле (24) находят его спектральную функцию.

2.5. Стохастический анализ

Все изложенное выше можно назвать "геометрическим" анализом фракталов. Ограниченность такого подхода была замечена в недавней работе Шертцера и Лавджоя [13], предложивших гораздо более общий подход к исследованию фракталов — так называемый "стохастический" анализ. Ниже в данном разделе мы дадим его основные положения, отсылая за подробностями к оригинальным работам [13, 30, 31].

Рассмотрим вновь множество A , состоящее из подмножеств A_i с весами p_i и соответствующими показателями сингулярности α_i (см. (11)). Будем рассматривать числа p_i как реализации некоего "поля" ψ , полученного в результате последовательных итераций процесса случайного дробления больших структур на меньшие с заданным распределением вероятностей (например, известная α -модель [6]). Такая картина применяется, в частности, для описания переноса энергии от больших вихрей к малым в турбулентной жидкости, где роль поля ψ играет плотность потока энергии. Понятно, что строгое в математическом смысле поле (бесконечное число степеней свободы) получится лишь при бесконечно мелком дроблении (или, как мы говорили в предыдущих разделах, покрытии) исходного множества A . На конечных масштабах ($\sim l$) мы получаем дискретный аналог поля ψ_l , заданного на N_l множествах с весами p_i . Его поведение характеризуется распределением вероятностей

$$\Pr(\psi_l \geq l^{-\gamma}) \propto l^{c(\gamma)} \quad (27)$$

или связанным с ним через преобразование Лапласа законом для моментов порядка q :

$$\langle \psi_l^q \rangle \propto l^{-K(q)} \propto \int l^{-q\gamma + c(\gamma)} d\gamma. \quad (28)$$

Показатель $c(\gamma)$ в (27) называется коразмерностью, так как распределение вероятностей определяет долю вероятностного пространства, занятого сингулярностями, превышающими число γ . На масштабах l эту вероятность можно оценить как отношение числа $N_l(\gamma)$ множеств с соответствующими сингулярностями к полному числу множеств N_l на данном масштабе разбиения:

$$\Pr(\psi_l \geq l^{-\gamma}) \propto \frac{N_l(\gamma)}{N_l}, \quad (29)$$

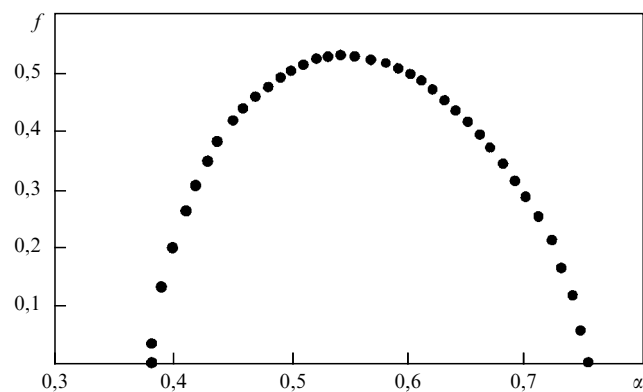


Рис. 1. Спектральная функция для аттрактора Фейгенбаума, вычисленная по (55)

сп. с (10). Как связаны γ и $c(\gamma)$ с введенными ранее α и $f(\alpha)$? Такую связь можно установить, но лишь для значений γ , $c(\gamma) \leq D$, где D — размерность (евклидова) пространства, в которое вложено наше исходное множество A . Действительно, из (7) и (18) получаем $N_l \propto l^{-D}$ и $N_l(\gamma) \propto l^{-f(\gamma)}$. Проинтегрируем поле ψ_l по D -мерному пространству на множестве A :

$$P_l(A) = \int \psi_l d^D x. \quad (30)$$

$P_l(A)$ соответствует потоку энергии (в турбулентности) или весу p_i (на фрактале). Из (27) и (29) тогда немедленно получаем

$$\Pr(P_l(A_i) \geq l^{\alpha_i}) \propto l^{D-f(\alpha_i)}, \quad (31)$$

где использовано соотношение $\int d^D x \propto l^D$. Следовательно,

$$\alpha = D - \gamma, \quad f(\alpha) = D - c(\gamma). \quad (32)$$

Отсюда сразу видна ограниченность "геометрического" подхода: α и $f(\alpha)$ по определению положительны, поэтому в D -мерном пространстве мы можем увидеть только часть сингулярностей поля ψ_l : $0 \leq \gamma$, $c(\gamma) \leq D$, так называемые "домашние" (calm) сингулярности. Сингулярности с $\gamma > D$ называются "дикими" (wild). Увеличивая D , если это возможно, мы расширяем область наблюдаемых сингулярностей. Подчеркнем, что внутренними характеристиками поля ψ , не зависящими от D , являются γ и $c(\gamma)$, в то время как α и $f(\alpha)$ расходятся при $D \rightarrow \infty$.

Выпишем аналог статистической суммы, так называемый следовый момент для поля ψ_l , наблюдаемого на множестве A с разбиением диаметра l :

$$\text{Tr}_A \psi_l^q = \left\langle \sum_A \psi_l^q l^{Dq} \right\rangle \propto \left\langle \sum_i P_l^q(A_i) \right\rangle, \quad (33)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций поля ψ на данном масштабе l . В частности, в адронной физике этому соответствует усреднение по набору событий при фиксированном размере бина в импульсном пространстве. Вспомня, что $P_l(A_i)$ соответствует весу p_i на фрактале с разбиением на части и диаметром l , и, используя (13), из (33) и (28) получаем

$$\text{Tr}_A \psi_l^q \propto l^{\tau(q)} \propto l^{D(q-1)-K(q)}, \quad (34)$$

устанавливая тем самым связь между функцией $\tau(q)$, зависящей от D , и внутренней характеристикой поля $K(q)$. Точно так же как $f(\alpha)$ и $\tau(q)$, так и $c(\gamma)$ и $K(q)$ связаны через преобразование Лежандра:

$$K(q) = \gamma c'(\gamma) - c(\gamma), \quad q = c'(\gamma), \quad (35)$$

$$c(\gamma) = qK'(q) - K(q), \quad \gamma = K'(q). \quad (36)$$

Подведем итоги. Мы узнали, что геометрический подход к исследованию фракталов ограничен: значения величин α и $f(\alpha)$ зависят от размерности объемлющего пространства и, следовательно, не могут считаться внутренними характеристиками объекта. Другими словами, весь спектр сингулярностей нам недоступен, во-

первых, из-за конечности D , во-вторых, из-за чрезвычайной редкости сильных сингулярностей (флуктуаций), так что они практически невероятны в единичной реализации (событии). Следовательно, чтобы получить более полную информацию о сингулярностях поля ψ , для которого наше множество A есть лишь D -мерная проекция, нужно увеличивать D и число реализаций (событий), по которым затем проводится усреднение. В частности, в адронной физике переходят от проекции на ось быстрот ($D=1$) к трехмерному импульсному пространству ($D=3$) и набирают большое число (порядка сотен тысяч) событий образования заряженных частиц.

К сожалению, этого недостаточно, так как существуют случайные процессы, генерирующие поля с так называемыми "жесткими" (hard) сингулярностями, которые нелокализованы в пространстве (в окрестности некоторых точек x не существует предела $\lim_{l \rightarrow 0} \gamma_l(x)$) и которые, следовательно, в принципе не охватываются геометрической версией фрактального анализа. Но это тема отдельной статьи, и заинтересованных читателей мы отсылаем к работам [13, 14, 30, 31], а во второй части данного обзора (раздел 3.3) будет показано, как все-таки можно, оставаясь в рамках геометрического подхода, извлечь необходимую информацию о процессе, генерирующем данный мультифрактал.

3. Физические приложения

В этом разделе будет показано, как геометрическая версия фрактального анализа применяется на практике. Точнее, будет рассмотрена только связь этого метода с универсальностью Фейгенбаума, поскольку другие применения были описаны, например, в обзорах [9–12]. Мы исследуем вначале абстрактные математические объекты — аттрактор Фейгенбаума и его конечные аппроксимации — предельные циклы, а затем перейдем к изучению реальных множеств — распределений заряженных частиц на оси быстрот.

3.1. Получение зависимости $\tau(q)$

На практике мы всегда имеем дело с конечными множествами: будь то множество точек на фазовой траектории или множество заряженных частиц, рожденных при соударении протонов.

Разобьем данное множество, состоящее из n_{tot} элементов на N непересекающихся групп A_i , $i = 1, 2, \dots, N$ с одинаковым числом элементов n в каждой. Очевидно, $nN = n_{\text{tot}}$. Каждая такая группа элементов A_i получает одинаковый вес $p_i = 1/N$, но отличный от других диаметр (бин) δ_i . Рассмотрим, например, множество заряженных частиц в проекции на ось быстрот в отдельном событии, так что y_i обозначает быстроту i -ой частицы. Тогда диаметр δ_j находится по формуле

$$\delta_j = |x_{jn} - x_{(j-1)n+1}|. \quad (37)$$

Здесь индекс j нумерует группы частиц ($j = 1, 2, \dots, N$), а x_i — координата i -ой частицы на единичном отрезке $[0, 1]$, полученном из полного интервала по быстройте $[-y_{\text{max}}, y_{\text{max}}]$ с помощью какого-либо гладкого преобразования: например,

$$x_i = \frac{\tanh y_i + 1}{2}.$$

Тогда из (13) и условия $\Gamma(q, \tau) = 1$ получаем

$$\sum_{i=1}^N p_i^q \delta_i^{-\tau} = N^{-q} \sum_{i=1}^N \delta_i^{-\tau} = 1. \quad (38)$$

Отсюда легко находим зависимость

$$q(\tau) = \frac{1}{\log N} \log \sum_{i=1}^N \delta_i^{-\tau}, \quad (39)$$

обратив которую получаем зависимость $\tau(q)$. Этот способ (назовем его *способом одинаковых весов*) применяется в адронной физике лишь тогда, когда быстроты всех наблюдаемых частиц в данном событии известны с достаточно высокой точностью.

Можно, однако, сразу найти $\tau(q)$. Для этого разобьем полный интервал по быстрой на равные бины диаметром δ . Тогда одинаковым бинам будут соответствовать разные веса p_i : $p_i = n_i/n_{\text{tot}}$, где n_i — число частиц в i -ом бине. Более конкретно, определим моменты G_q [32]:

$$G_q(\delta) = \sum_{i=1}^N p_i^q, \quad (40)$$

где суммирование ведется по всем непустым бинам. Вновь отобразим полный интервал по быстрой на единичный интервал $[0, 1]$ с помощью какого-либо гладкого преобразования. Тогда для не очень малых δ (т.е. когда число пустых бинов не слишком велико) из условия $\Gamma(q, \tau) = 1$ следует

$$G_q(\delta) = \delta^{\tau(q)}, \quad \tau(q) = \frac{\log G_q(\delta)}{\log \delta}. \quad (41)$$

На практике этот метод оказывается менее точным, чем способ одинаковых весов.

В качестве иллюстрации применим способ одинаковых весов к канторову множеству. На n -ом шаге его построения мы имеем

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \delta_i = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (42)$$

так что из (13) и условия $\Gamma(q, \tau) = 1$ сразу получаем

$$\tau(q) = (q-1) \frac{\log 2}{\log 3}, \quad \text{т.е.} \quad D_q = \frac{\log 2}{\log 3} \quad (43)$$

для всех q . Из (24) следует, что

$$\alpha = D_q = \frac{\log 2}{\log 3} = \text{const}, \quad f(\alpha) = D_q = \alpha = \text{const}, \quad (44)$$

как и следовало ожидать для монофрактала.

Далее мы применим описанный выше формализм к одному из самых, на наш взгляд, известных мультифракталов — аттрактору Фейгенбаума, тем более, что в последние годы выдвинута гипотеза о его присутствии в характеристиках множественного образования частиц при высоких энергиях [33–36].

3.2. Предельные циклы и аттрактор Фейгенбаума

Аттрактор Фейгенбаума является мультифракталом на интервале $[0, 1]$, гомеоморфным канторову множеству.

Аттрактор Фейгенбаума получается в результате бесконечной серии бифуркаций удвоения периода предельных циклов для одномерных однопараметрических отображений интервала $[0, 1]$ на себя. (Напомним, что бифуркацией называется резкое качественное изменение поведения решения некоего нелинейного уравнения при плавном изменении управляющего параметра.) Чтобы такие бифуркации были возможны, данные отображения должны удовлетворять следующим условиям [37]:

- иметь единственный максимум на интервале $[0, 1]$;
- слева от максимума монотонно возрастать, а справа от максимума монотонно убывать;
- гладко зависеть от управляющего параметра;
- шварциан отображения в точке бифуркации должен быть отрицателен.

Напомним, что шварцианом (производной Шварца) функции $f(x)$ называется выражение вида

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Очевидно, что гладкие отображения с квадратичным максимумом удовлетворяют перечисленным выше условиям, так что аттрактор Фейгенбаума можно получить, итерируя центр интервала $[0, 1]$ с помощью, например, логистического отображения:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (45)$$

при $\lambda = \lambda_\infty \equiv 3,5699456 \dots$. Если управляющий параметр λ принимает значения из интервала $3 < \lambda < \lambda_\infty$, то последовательность точек x_n при $n \rightarrow \infty$ будет сходиться к некоторому предельному 2^m -циклу ($m = 1, 2, \dots$), соответствующему данному значению $\lambda = \lambda_m$. Каждый такой предельный цикл можно рассматривать как конечную аппроксимацию аттрактора Фейгенбаума. При плавном увеличении λ внутри интервала $3 < \lambda < \lambda_\infty$ периоды предельных циклов последовательно удваиваются: $2^m \rightarrow 2^{m+1}$, т.е. происходят бифуркации удвоения цикла. Название "аттрактор" в данном случае отражает тот факт, что под действием итераций по формуле (45) при $\lambda = \lambda_\infty$ все точки интервала $[0, 1]$, за исключением счетного множества точек, притягиваются к аттрактору Фейгенбаума [37, 38].

Свое название этот мультифрактал получил в 1978 г. по имени своего первооткрывателя и исследователя, американского ученого Майкла Фейгенбаума из Лос-Аламоса. (Перевод его статьи см. в [39].) Суть открытия состоит в том, что бифуркации циклов для всех отображений, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, описываются двумя универсальными константами (константами Фейгенбаума) [40, 41]:

$$\alpha_F = 2,5029078 \dots, \quad \delta_F = 4,6692016 \dots \quad (46)$$

Константа δ_F характеризует скорость сходимости управляющего параметра к предельному значению:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} = \delta_F, \quad (47)$$

в то время как константа α_F характеризует масштаб последовательных "расщеплений" элементов предель-

ных циклов после каждой бифуркации:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|x_m - 1/2|}{|x_{m+1} - 1/2|} = \alpha_F, \quad (48)$$

где x_m означает элемент предельного 2^m -цикла, ближайший к элементу цикла $x = 1/2$.

Одномерные однопараметрические отображения широко используются для исследования фазовых траекторий нелинейных динамических систем, где они появляются в качестве отображений Пуанкаре [42]. (Напомним, что отображением Пуанкаре называется зависимость вида $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(n), \lambda)$, получающаяся при пересечении фазовой траектории в d -мерном фазовом пространстве с $(d-k)$ -мерной гиперплоскостью:

$$\mathbf{x}(n) = \{x_1(n), x_2(n), \dots, x_{d-k}(n)\}.$$

Число n нумерует последовательность точек пересечения вдоль фазовой траектории.) Как выяснилось, перечисленные выше требования, предъявляемые к отображениям, являются достаточно мягкими и им удовлетворяет огромное множество реальных физических систем, так что открытие Фейгенбаума вызвало целый взрыв экспериментов, подтвердивших существование универсальных констант [43].

Построим по (45) предельные суперстабильные 8-, 16-, 32-, 64- и 2048-циклы. Приставка "супер" означает, что в данный цикл входит элемент, где первая производная отображения обращается в нуль (в нашем случае это $x = 1/2$). 2048-цикл с большой точностью воспроизводит характеристики аттрактора Фейгенбаума, см. [29]. Для получения зависимости $q(\tau)$ применим способ одинаковых весов, так как координаты элементов цикла на интервале $[0, 1]$ известны с любой точностью [38]. Ближайшие элементы цикла объединяются в пары, порождая разбиение на N отрезков ($N = 2^{m-1}$ для 2^m -цикла) с весом $p_i = 1/N$ каждый. Задавая различные τ , мы находим по формуле (39) зависимость $q(\tau)$ для каждого цикла. Обобщенные размерности Реньи D_q находились затем согласно (15). В табл. 1 приведены полученные величины D_∞ , D_0 и $D_{-\infty}$ для предельных 2^m -циклов и аттрактора Фейгенбаума.

Напомним, что

$$D_\infty = D_H^{\min}, \quad D_{-\infty} = D_H^{\max} \quad (49)$$

среди всех D_H для подмножеств множества A (раздел 2.4). Для аттрактора Фейгенбаума значения $D_H^{\min}$ будут давать подмножества, гомеоморфные канторову множеству с масштабом α_F^{-2} , а $D_H^{\max}$ — аналогичные подмножества с масштабом α_F^{-1} [29]. Другими словами, для вычисления предельных размерностей Реньи аттрактора Фейгенбаума мы воспользуемся формулами (42), где вместо $1/3$ сначала подставим α_F^{-2} , а затем α_F^{-1} , и из (43)

получим соответственно

$$D_\infty^F = \frac{\log 2}{2 \log \alpha_F} = 0,377756\dots, \quad (50)$$

$$D_{-\infty}^F = 2D_\infty^F = \frac{\log 2}{\log \alpha_F} = 0,755512\dots \quad (51)$$

Для размерностей Реньи с произвольным q аналитическую зависимость можно получить, аппроксимируя аттрактор Фейгенбаума канторовым множеством с двумя масштабами [29] $\delta_1 = \alpha_F^{-1}$ и $\delta_2 = \alpha_F^{-2}$ с равными весами $p_1 = p_2 = 1/2$. Подставляя эти выражения в (13), для 2^m -цикла в пределе $m \rightarrow \infty$ получаем

$$\Gamma(q, \tau) = (p_1^q \delta_1^\tau + p_2^q \delta_2^\tau)^m = 1. \quad (52)$$

Отсюда

$$\alpha^\tau (\alpha^\tau + 1) = 2^q \quad (53)$$

и

$$D_q^F = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{\log(\sqrt{1/4 + 2^q} - 1/2)}{(q-1) \log \alpha_F}. \quad (54)$$

Для предельных размерностей Реньи $D_{-\infty}^F$ и D_∞^F соотношение (54) дает точные значения. Для D_0^F мы получаем величину 0,525, которая только на 2,5 % отличается от истинного значения 0,537... Для промежуточных D_q^F точность лучше, чем 2,5 %.

Из (54) также легко получить явное выражение для спектральной функции аттрактора Фейгенбаума $f_F(\alpha)$:

$$f_F(\alpha) = \frac{\alpha \log \alpha - \alpha_1 \log \alpha_1 - \alpha_2 \log \alpha_2}{\log 2}, \quad (55)$$

$$\alpha_1 = 2\alpha - 2D_\infty, \quad \alpha_2 = 2D_\infty - \alpha.$$

Она изображена на рис. 1.

3.3. Метод трансфер-матриц

В этом разделе будет показано, как использовать наши знания о фрактальной структуре исследуемого множества (его размерности Реньи) для получения информации о динамике, ответственной за происхождение данного множества. Это стало возможно благодаря методу трансфер-матриц, предложенному в 1986 г. Фейгенбаумом, Енсенем и Прокачиа [44]. Ключевая идея метода состоит в аналогии между процессом последовательных покрытий фрактала и теорией трансфер-матриц соответствующей модели Изинга [45].

Рассмотрим конечное покрытие исследуемого фрактала с помощью N непересекающихся кусков $\{\Delta_i\}$. Пусть, как обычно, δ_i — диаметр i -го куска, а p_i — его вес. Применим способ одинаковых весов (раздел 3.1) для нахождения $q(\tau)$ -зависимости данного множества, т.е. рассмотрим такое покрытие фрактала, что все $p_i = 1/N$. Тогда функция $q(\tau)$ находится из (39). Будем теперь последовательно увеличивать число кусков N степенным образом, все более точно покрывая данный фрактал: $N = N_n = a^n$, где n — натуральное число, $a > 0$. Тогда для каждого n мы можем обозначить δ_i ($1 \leq i \leq N$) через $\delta_{\epsilon_n, \dots, \epsilon_1}$, где ϵ_i принимает a значений $0, 1, \dots, a-1$, если a — целое. Если же a — дробное, то ϵ_i принимает $[a] + 1$ значений $0, 1, \dots, [a]$, где $[a]$ — целая часть числа a . Далее

Таблица 1

2^m	D_∞	D_0	$D_{-\infty}$
8	0,284	0,358	0,446
16	0,310	0,403	0,519
32	0,324	0,430	0,563
64	0,334	0,448	0,593
∞	0,377...	0,537...	0,755...

везде для простоты мы ограничимся случаем целых a . Определим отношение диаметров покрытий в соседних "поколениях" [44]:

$$\frac{\delta_{\epsilon_{n+1}, \epsilon_n, \dots, \epsilon_1}}{\delta_{\epsilon_n, \dots, \epsilon_1}} = \sigma_{\epsilon_{n+1}, \epsilon_n, \dots, \epsilon_1}. \quad (56)$$

Допустим, что это отношение зависит только от двух последних индексов $\epsilon_{n+1}, \epsilon_n$. Тогда $\sigma_{\epsilon_{n+1}, \epsilon_n}$ определяет матрицу $a \times a$, и любой диаметр может теперь быть записан через произведение элементов данных матриц:

$$\delta_{\epsilon_n, \dots, \epsilon_1} = \sigma_{\epsilon_n \epsilon_{n-1}} \sigma_{\epsilon_{n-1} \epsilon_{n-2}} \dots \sigma_{\epsilon_2 \epsilon_1} \delta_{\epsilon_1}. \quad (57)$$

По повторяющимся индексам здесь нет суммирования. Оно появляется при подстановке данного выражения в (39), где сумма в знаменателе правой части принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \delta_i^{-\tau} &= \sum_{\text{все } \epsilon} (\sigma_{\epsilon_n \epsilon_{n-1}} \sigma_{\epsilon_{n-1} \epsilon_{n-2}} \dots \sigma_{\epsilon_2 \epsilon_1} \delta_{\epsilon_1})^{-\tau} = \\ &= \sum_{\epsilon_n, \epsilon_1} [\sigma(\tau)]_{\epsilon_n \epsilon_1}^n \delta_{\epsilon_1}^{-\tau} = \text{Tr} [\sigma^n(\tau)], \end{aligned} \quad (58)$$

$$[\sigma(\tau)]_{\epsilon_j \epsilon_k} \equiv \sigma_{\epsilon_j \epsilon_k}^{-\tau}.$$

Мы видим, что суммирование по i переходит в суммирование по всевозможным ϵ , что в свою очередь сводится к произведению σ -матриц. Здесь становится очевидной аналогия с вычислением статистической суммы Z_N в одномерной модели Изинга с взаимодействием с ближайшими соседями [45]:

$$Z_N = \sum_{\text{все } \epsilon} \exp\left(-\frac{S}{kT}\right), \quad S = E \sum_i \epsilon_i \epsilon_{i+1} + H \sum_i \epsilon_i, \quad (59)$$

где ϵ_i — спиновая переменная в i -ом узле, принимающая m значений, T — температура, E — константа спин-спинового взаимодействия, H — приложенное магнитное поле. В простейшем нетривиальном случае $m = 2$ соответствующая трансфер-матрица $\sigma_{\epsilon_i \epsilon_j}$ выглядит следующим образом:

$$\sigma = \xi \begin{pmatrix} \exp(-J - K) & \exp J \\ \exp J & \exp(-J + K) \end{pmatrix},$$

где ξ — нормировочный множитель, $J = E/kT$, $K = H/kT$. Число спиновых состояний m в каждом узле соответствующей цепочки Изинга определяет размер трансфер-матрицы и соответствует тому, во сколько раз на каждом шаге увеличивается число кусков покрытия фрактала (a). Элементы нашей трансфер-матрицы несут информацию о масштабе последовательных уменьшений кусков покрытия фрактала.

Размер области взаимодействия зависит от того, как далеко распространяется "память" в определении отношения (56). Если мы оборвем последовательность $\epsilon_{n+1}, \epsilon_n, \dots, \epsilon_1$ после ϵ_n , то получим взаимодействие ближайших соседей. Такое ограничение оправдано, так как мы знаем, что в подавляющем большинстве фрактальных множеств (в особенности тех, что принадлежат к области, граничащей с хаосом) "память" обычно спадает экспоненциально.

Взятие следа в (58) сводится к вычислению суммы n -ых степеней собственных значений λ_j матрицы $\sigma(\tau)$:

$$\text{Tr} [\sigma^n(\tau)] = \sum_{j=1}^a \lambda_j^n. \quad (60)$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ (так называемый термодинамический предел на языке модели Изинга) "выживает" лишь наибольшее собственное значение λ_+ , и мы из (39), (58) и (60) получаем

$$q_a(\tau) = \frac{\log \lambda_+(\tau)}{\log a}. \quad (61)$$

Индекс a мы использовали, чтобы отличить функцию $q_a(\tau)$ от (39). Заметим, что a и $\lambda_+(\tau)$ связаны соотношением

$$a^{q(\tau)} = \lambda_+(\tau), \quad (62)$$

непосредственно следующим из (61).

Значение $\lambda_+(\tau)$ находим из соответствующего характеристического полинома a -ой степени для матрицы $a \times a$. В простейшем нетривиальном случае матрицы 2×2 (что соответствует $1 \leq a \leq 2$) получаем

$$\lambda_+^2(\tau) - \lambda_+(\tau)(\sigma_{00}^{-\tau} + \sigma_{11}^{-\tau}) + (\sigma_{00}\sigma_{11})^{-\tau} - (\sigma_{01}\sigma_{10})^{-\tau} = 0. \quad (63)$$

Элементы матрицы σ_{01} и σ_{10} появляются только в виде произведения, и, следовательно, $\lambda_+(\tau)$ зависит от трех масштабов. Значит, вместе с $\lambda_+(\tau)$ мы имеем четыре неизвестных, и, следовательно, нам нужно как минимум четыре экспериментальных точки $\tau(q)$. Обычно одна из них берется при $q = 0$, так как $\tau(0) = -D_0$ (см. (14)).

Тогда из (62) следует, что $\lambda(-D_0) = 1$, и из (63) получаем

$$\sigma_{01}\sigma_{10} = [(1 - \sigma_{00}^{D_0})(1 - \sigma_{11}^{D_0})]^{1/D_0}. \quad (64)$$

Отметим, что из (62) при $q = 1$ ($\tau = 0$) следует $a = \lambda_+(0)$. При $\tau = 0$ формула (63) дает два решения для $\lambda_+(0)$ (а следовательно, и для величины a): $\lambda_+(0) = 2$ при всех $\sigma_{ij} \neq 0$ и $\lambda_+(0) = (\sqrt{5} + 1)/2$ при $\sigma_{00} = 0$ или $\sigma_{11} = 0$.

Подведем итоги. Пусть мы знаем зависимость $q(\tau)$ для данного фрактала и хотим узнать, какой динамический процесс порождает данный фрактал (например, траекторию в фазовом пространстве или какое-либо ее сечение Пуанкаре). Под словами "узнать динамический процесс" мы подразумеваем "вычислить элементы трансфер-матрицы и число a ", так как последние однозначно определяют тип соответствующего отображения Пуанкаре. "Динамика" означает динамику по отношению к соответствующему управляющему параметру, а не динамику процесса во времени при фиксированном значении управляющего параметра. К примеру, динамике бифуркаций удвоения периода, очевидно, соответствует $a = 2$.

A priori неизвестно, чему равно a , и, следовательно, неизвестен размер трансфер-матрицы. Поэтому начинают с простейшего нетривиального случая матриц 2×2 , решая систему четырех нелинейных уравнений (63). Значение a находится затем из (62). Если решения есть и они достаточно устойчивы по отношению к разным четверкам $q(\tau)$, то на этом все заканчивается —

динамика считается установленной. Если же решений нет или они очень сильно меняются при разных четверках $q(\tau)$, то тогда исследуют случай матриц 3×3 . Если же и здесь устойчивые решения не обнаружены, берут матрицы 4×4 , и т.д.

Необходимо сделать одно замечание. В эксперименте достижима лишь конечная точность измерения диаметра покрытия исследуемого фрактала, скажем, $\Delta\delta$. Флуктуации диаметров $\delta_i \rightarrow \delta_i + \Delta\delta$ вызывают флуктуации в q , $q \rightarrow q + \Delta q$, где

$$\delta q \sim -\tau \Delta\delta \frac{N^{q(\tau+1)-q(\tau)}}{\log N}. \quad (65)$$

Поэтому, чтобы минимизировать влияние экспериментальных флуктуаций на конечный результат, нужно брать значения τ вблизи нуля.

Метод трансфер-матриц работает, если среди собственных значений σ -матрицы существует одно, много большее остальных. Тогда функция $q_a(\tau)$ (61) с хорошей точностью будет фитировать "экспериментальную" функцию $q(\tau)$ (39) на достаточно большом интервале.

Применим метод трансфер-матриц к предельным циклам и аттрактору Фейгенбаума, чтобы убедиться, что этот метод действительно позволяет обнаружить динамику удвоения периода. Имея зависимость $q(\tau)$ для каждого предельного цикла и аттрактора Фейгенбаума, из (63) и (62) мы находим элементы соответствующих трансфер-матриц и величину a (табл. 2). Последняя с большой точностью равняется двум для всех циклов и аттрактора Фейгенбаума, как и следовало ожидать, а величины σ_{00} , σ_{11} и $\sigma_{01}\sigma_{10}$ сходятся снизу к предельным значениям. Предельные значения по построению (см. (56)) выражаются через α_F :

$$\sigma_{00}^{AF} = \alpha_F^{-1}, \quad \sigma_{11}^{AF} = \alpha_F^{-2}. \quad (66)$$

Тогда $D_{-\infty}^F$ и D_{∞}^F связаны с σ_{00} и σ_{11} следующим образом:

$$D_{-\infty}^F = -\frac{\log 2}{\log \sigma_{00}}, \quad D_{\infty}^F = -\frac{\log 2}{\log \sigma_{11}}. \quad (67)$$

С высокой точностью эти равенства выполняются и для предельных циклов: ср. 2-ой и 4-ый столбцы из табл. 1 и 6-ой и 7-ой столбцы из табл. 2.

Таким образом, метод трансфер-матриц позволил однозначно установить природу предельных циклов:

- они самоподобны, если разрешение покрытия последовательно увеличивать в два раза ($a = 2$);
- в их построении участвуют два масштаба (σ_{00} и σ_{11}), сходящихся к α_F^{-1} и α_F^{-2} соответственно;
- все элементы трансфер-матрицы отличны от нуля.

Единственная динамика, удовлетворяющая всем этим условиям, — это динамика удвоения периода, порождаемая отображением Пуанкаре с квадратичным

максимумом. Если какой-либо другой исследуемый фрактал обнаружит те же свойства элементов трансфер-матрицы, то можно с уверенностью утверждать, что динамика, его порождающая — это динамика удвоения периода. Метод трансфер-матриц уже был успешно применен для обработки данных эксперимента Бенара по возникновению конвективных валов в ртути [44].

3.4. Анализ событий в соударениях адронов

Вооруженные столь многообещающим методом применим метод трансфер-матриц к анализу событий в адрон-адронных соударениях. Будем считать, что координаты наблюдаемых частиц в импульсном пространстве образуют конечное множество, являющееся аппроксимацией некоего неизвестного фрактала [46], динамику возникновения которого мы хотим узнать. Такой подход в адронной физике в последние несколько лет стал мощным инструментом исследования множественного образования частиц [12].

Для простоты возьмем одномерное сечение импульсного пространства — ось быстрот, и быстроты наблюдаемых частиц обозначим через y_i . Возникает прозрачная аналогия с одномерным сечением Пуанкаре некоей многомерной фазовой траектории, причем быстроты наблюдаемых частиц соответствуют точкам пересечения этой траектории с сечением Пуанкаре.

Подчеркнем, что наша интерпретация связи между распределениями по множественности в столкновениях частиц и моделью Изинга радикально отличается от обычной интерпретации, встречающейся в литературе [47, 48]. Обычно частица на оси быстрот отождествлялась со спиновой переменной со значением 1 на цепочке Изинга (спин 0 соответствует отсутствию частицы), а трансфер-матрица отражала взаимодействие этих спинов. Естественно, этот подход не допускал обобщения на более сложные цепочки Изинга, когда в каждом узле возможно более двух спиновых состояний и/или взаимодействия не только ближайшие узлы цепочки.

В нашей же модели частицам не сопоставляются спиновые переменные, последние возникают лишь при переходе между разными разбиениями одного и того же множества частиц на оси быстрот, которое рассматривается как приближение некоторого бесконечного фрактального множества. "Спин-спиновое взаимодействие" в нашем подходе является сугубо "топологической" характеристикой фрактала и никоим образом не связано с корреляциями в положении реальных частиц на оси быстрот. Наша модель допускает обобщение на более сложные цепочки Изинга, что представляется автору весьма перспективным полем деятельности, но это уже тема отдельной публикации.

Для сравнения были выбраны два экспериментальных события: известное аномальное событие NA22-коллораации [49], изучавшей π^+p -взаимодействие при энергии в системе центра масс $\sqrt{s} = 22$ ГэВ, и событие JACEE-коллораации, полученное при взаимодействии ядра кремния из космических лучей с фотоэмульсией при энергии около 4 ТэВ/нуклон (Si-AgBr-взаимодействие) [50]. Для NA22-события зависимость $q(\tau)$ находилась с помощью способа одинаковых весов (см. (39)), так как для него известны быстроты всех 26 частиц с хорошей точностью ($\Delta p/p < 2\%$). Полный интервал по скорости отображался на единичный отрезок $[0, 1]$ с помощью гладкого преобразования $x_i = (\tanh y_i + 1)/2$ и все

Таблица 2

2^m	a	σ_{00}	σ_{11}	$\sigma_{01}\sigma_{10}$	$-\frac{\log 2}{\log \sigma_{11}}$	$-\frac{\log 2}{\log \sigma_{00}}$
8	2,000	0,2091	0,0857	0,0210	0,282	0,443
16	2,000	0,2613	0,1062	0,0315	0,309	0,517
32	1,999	0,2852	0,1160	0,0404	0,322	0,553
64	1,999	0,3029	0,1234	0,0458	0,331	0,580
∞	2,000...	0,399...	0,1596	0,0722	0,377...	0,755...

Таблица 3

n_{tot}	D_{∞}	D_0	$D_{-\infty}$	a	σ_{00}	σ_{11}	$\sigma_{01}\sigma_{10}$	$-\frac{\log 2}{\log \sigma_{11}}$	$-\frac{\log 2}{\log \sigma_{00}}$
26	0,337	0,811	1,241	2,000	0,550	0,125	0,238	0,334	1,16
24	0,326	0,666	1,181	1,999	0,558	0,117	0,120	0,324	1,19
22	0,315	0,737	1,163	1,999	0,579	0,108	0,166	0,312	1,27
20	0,302	0,568	0,975	2,000	0,470	0,098	0,089	0,299	0,918
18	0,288	0,657	1,066	2,000	0,608	0,088	0,101	0,286	1,39
16	0,273	0,492	0,881	2,000	0,458	0,076	0,049	0,270	0,888
119	0,487	0,782	1,37	1,999	0,609	0,241	0,140	0,488	1,40

частицы, начиная с первой, объединялись в пары с ближайшим соседом на оси x . Диаметр δ_i вычислялся по формуле (37).

Для JACEE-события была получена зависимость $\tau(q)$ (через G_q -моменты (40)), так как для этого события известна лишь гистограмма $dN/d\eta$ с размером бина по псевдобыстроте 0,1, причем анализировалась не вся гистограмма, а лишь ее превышение над гладким фоном [51, 52] — 119 частиц из общего числа $n_{\text{ch}} = 1010 \pm 30$.

Далее для получения размерностей Реньи и элементов трансфер-матриц для каждого события бралось свое значение $\tau(0)$ и три любые другие значения $\tau(q)$ (см. также замечание в разделе 3.3), которые затем подставлялись в (63). Получающаяся система четырех нелинейных уравнений численно решалась многомерным методом Ньютона.

Результаты представлены в табл. 3, где последняя строка ($n_{\text{tot}} = 119$) соответствует JACEE-событию, а остальные строки относятся к NA22-событию. Числа в первом столбце означают число частиц, включенных в анализ: последовательно отбрасывались по две крайних частицы (одна из передней полусферы, другая из задней), тем самым вырезалась центральная область взаимодействия.

Для обоих событий метод трансфер-матриц обнаружил динамику удвоения ($a = 2$), отличие от нуля всех матричных элементов и неплохое согласие теоретических (в районе 8-, 16- и 32-циклов) и экспериментальных величин матричного элемента σ_{11} , который ответствен за участки фрактала с максимальной плотностью элементов. Более того, D_q -зависимость для NA22-события с 20 центральными частицами практически совпадает с D_q -зависимостью для предельного 16-цикла при $q \geq 6$ (рис. 2). Оказывается, что это совпадение не случайно, и в следующем разделе мы кратко познакомимся с бифуркационной моделью, объясняющей это явление.

3.5. Бифуркационная модель

Бифуркационная модель (БМ) была предложена автором в 1992 г. [33] для объяснения природы перемежаемости (intermittency) в быстротных распределениях заряженных частиц, рожденных при высоких энергиях [6, 11, 12]. Основные предположения БМ следующие.

1) Существует нелинейное уравнение, управляющее динамикой кварков и глюонов, решения которого зависят только от одного параметра — энергии столкновения в отдельном событии $\sqrt{s}$.

2) Число расщеплений фазовой траектории, соответствующей данному решению, определяет число промежуточных частиц (кланов), которые могут распасться в наблюдаемые частицы.

3) Число распадных частиц k в каждом распаде может варьироваться, но среднее по всем распадам и событиям остается постоянным для разных энергий.

4) На фазовой траектории существует одномерное сечение Пуанкаре, которое имеет единственный квадратичный максимум, если в качестве направления сечения в фазовом пространстве выбрать ось быстрот.

Другими словами, после некоторых преобразований мы можем записать отображение Пуанкаре в виде логистического отображения (45), причем управляющий параметр λ зависит от энергии столкновения следующим образом [33]:

$$\lambda \simeq \lambda_{\infty} - \frac{1}{3\sqrt{s}}, \quad (68)$$

$\sqrt{s}$ — энергия столкновения в гигаэлектронвольтах. Напомним, что для каждого значения $\lambda \in [3, \lambda_{\infty}]$ существует один и только один предельный устойчивый 2^m -цикл ($m = 1, 2, 3, \dots$) на единичном интервале $[0, 1]$, причем положение каждого элемента цикла может быть

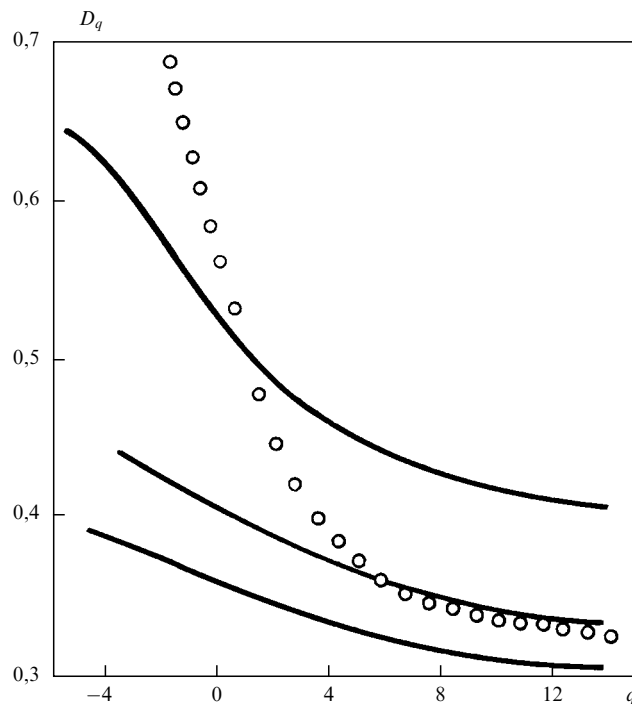


Рис. 2. Зависимости размерностей Реньи D_q от q для аттрактора Фейгенбаума (кривая 1), для предельных 16- и 8-циклов (кривые 2 и 3 соответственно) и для аномального события NA22-коллаборации [49] (4), где в анализ были включены только 20 центральных частиц

вычислено с любой точностью. Полный интервал по быстрой $[-y_{\max}, y_{\max}]$ отображается на $[0, 1]$ с помощью какого-либо гладкого преобразования, скажем, $(\tanh y + 1)/2$, которое не меняет топологических характеристик исходного фрактального множества (образованного кланами).

Следовательно, для любой энергии столкновения в данном событии $\sqrt{s}$ можно найти по формуле (68) соответствующую величину λ и, следовательно, соответствующий 2^m -цикл. Это ключевой момент для БМ: наблюдаемые распределения частиц в импульсном фазовом пространстве (в частности, по быстрой) — это не что иное, как "образы" распределения элементов предельных 2^m -циклов на единичном интервале.

Распады кланов на вторичные частицы разрезают исходное фрактальное множество, что дает увеличение наблюдаемых размерностей Реньи D_q с $q < 0$ в сравнении с истинными D_q . Именно этим в рамках БМ и объясняется некоторое расхождение в значениях элемента матрицы σ_{00} , ответственного за участки фрактала с минимальной плотностью частиц.

Это подтверждается также и значениями $D_{-\infty}$, D_0 и D_{∞} для JACEF-события, которые совпадают с соответствующими усредненными величинами для событий из столкновений тяжелых ионов [53]. Отметим выполнение с высокой точностью равенства (67) для экспериментальных событий (ср. 2-ой, 4-ый и 9-ый, 10-ый столбцы из табл. 3), особенно для D_{∞} и σ_{11} , не искаженных распадами кланов. Следовательно, элементы трансформатрицы для наблюдаемых экспериментальных событий мы можем прямо получать из D_{∞} , D_0 и $D_{-\infty}$, даже не решая уравнение (63).

Для D_q с $q > 0$, особенно с $q \gg 1$, ответственными за наиболее плотные участки фрактала, мы ожидаем очень малые отклонения от истинных значений D_q . Действительно, если кланы распадаются изотропно и независимо друг от друга, то вероятность несколько π -мезонам попасть в некий интервал по быстрой пропорциональна размеру интервала. Следовательно, чем меньше интервал, т.е. чем больше плотность частиц на интервале, тем меньше вероятность случайной "имитации" истинной фрактальной размерности вторичными π -мезонами.

Существуют ли иные характеристики множественного образования частиц, кроме D_q при $q \gg 1$, предсказываемые БМ и допускающие прямое сравнение с экспериментом? Ответ на этот вопрос положительный, и именно к нему мы переходим в следующем разделе.

3.6. Универсальность Фейгенбаума и динамика удвоений в физике адронов

Следующая характеристика предельного 2^m -цикла, также допускающая прямое сравнение с экспериментом, — это зависимость максимального числа элементов $n_{\max}$ внутри фиксированного интервала $\delta\zeta$ от величины $\delta\zeta$.

Теоретической зависимости $n_{\max}(\delta\zeta)/\delta\zeta$ в эксперименте соответствует максимальная плотность частиц $A_{\max}$, определяемая следующим образом:

$$A_{\max} \equiv \left\langle \frac{\Delta n_{\max}}{\Delta\eta} \right\rangle, \quad (69)$$

где $\Delta\eta$ — фиксированный интервал по псевдобыстрой, $\Delta n_{\max}$ — максимальное число частиц в интервале $\Delta\eta$, которое определяется сканированием интервалом $\Delta\eta$ по

полному интервалу по псевдобыстрой η для каждого события, а затем берется среднее по всем событиям $\langle \dots \rangle$. На рис. 3 приведены данные для $A_{\max}$ во взаимодействиях π^+p , pp [49], $\bar{p}p$ [54] и p -AgBr [55] при различных энергиях и при двух фиксированных интервалах по псевдобыстрой $\Delta\eta$: $\Delta\eta = 0, 5$ и $0,1$.

Согласно БМ число кланов, рожденных в столкновениях частиц, может равняться только 2^m , $m = 1, 2, 3 \dots$. Все промежуточные значения для множественности есть результат распада кланов на вторичные адроны. Следовательно, БМ предсказывает величину $n_{\max}(\delta\zeta)$ лишь для кланов, т.е. для множественностей 2^m , которые берутся в качестве соответствующих размеров циклов. Чтобы сравнивать наши вычисления с экспериментальными данными, надо задать соответствие между $\Delta\eta$ и $\delta\zeta \in [0, 1]$. Для этой цели находим максимальное число бинов

$$M_{\max}^{\text{exp}} = \frac{2y_{\max}}{\Delta\eta} \quad (70)$$

для каждого эксперимента и приравняем к его теоретическому значению:

$$M_{\max}^{\text{exp}} = M_{\max}^{\text{theor}} = M_{\max}. \quad (71)$$

Тогда справедливо следующее соответствие:

$$\Delta\eta \Leftrightarrow \delta\zeta = \frac{1}{M_{\max}}. \quad (72)$$

Заметим, что значение для $y_{\max}$ для множественности 2^m мы берем не из эксперимента, а из соотношения

$$y_{\max} = \log \frac{(\sqrt{s})_{m+1} - 2m_N}{m_{\pi}}, \quad (73)$$

где m_N (m_{π}) — масса нуклона (π -мезона), $(\sqrt{s})_{m+1}$ — пороговая энергия возникновения следующего 2^{m+1} -цикла (см. (68)). Для величин $m = 1, 2, \dots, 6$ соответствующие энергии $(\sqrt{s})_m$ таковы (в гигаэлектронвольтах):

m	1	2	3	4	5	6
$(\sqrt{s})_m$	1,00	4,67	21,8	102	475	2218.

(74)

Таким образом, для каждой величины $\sqrt{s}$ и фиксированного значения $\Delta\eta$ можно найти соответствующий цикл 2^m из (74) и соответствующий размер бина $\delta\zeta \in [0, 1]$ из (72). С этой величиной $\delta\zeta$ мы сканируем по всему единичному интервалу, чтобы отыскать $n_{\max}(\delta\zeta)$, и в итоге находим величину $n_{\max}(\delta\zeta)/\Delta\eta$ (см. рис. 3). Согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительное. В частности, БМ объясняет экспериментально наблюдаемый [49, 55] единичный наклон зависимости $A_{\max}(n_{\text{ch}})$ для больших n_{ch} ,

$$A_{\max} = a n_{\text{ch}} + b, \quad a_{\text{theor}} = 1, \quad (75)$$

как обусловленный самоподобной структурой 2^m -циклов. Другими словами, любой конечный кусок единичного интервала, содержащий достаточно много элементов 2^m -цикла, воспроизводит структуру остальных

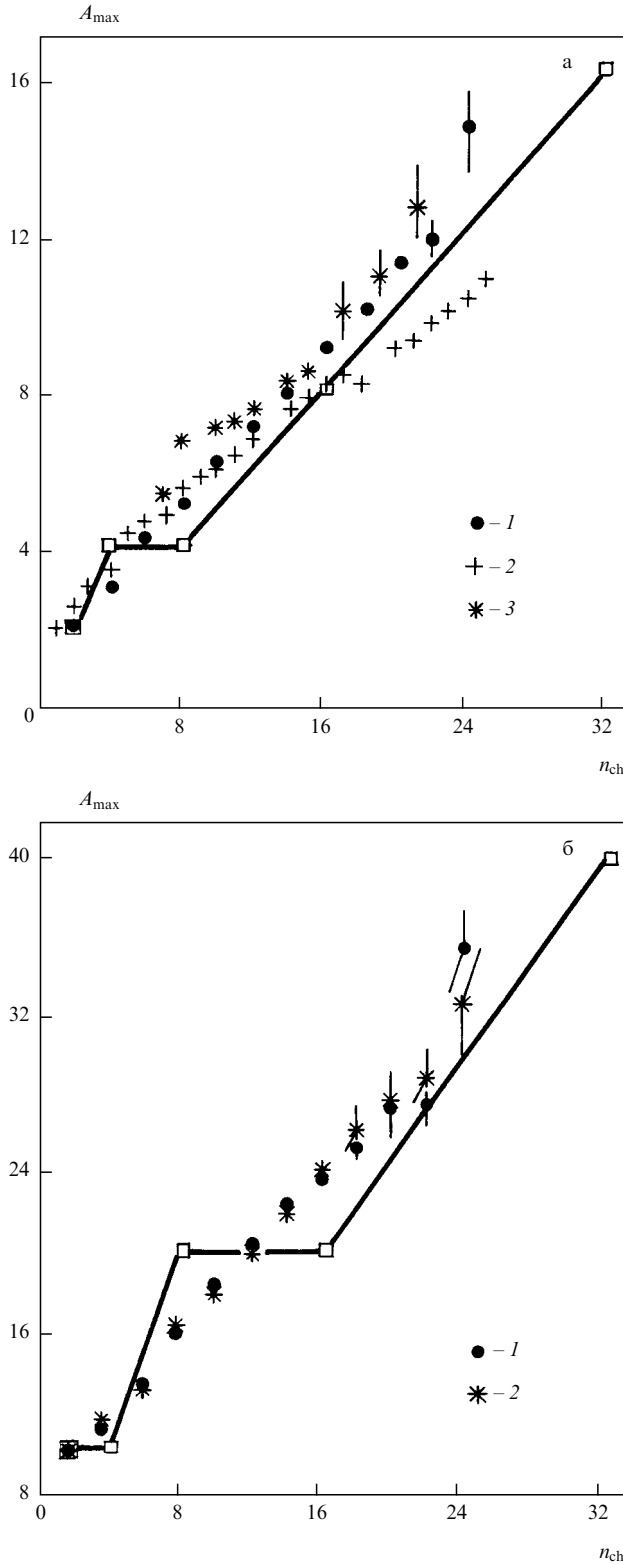


Рис. 3. Зависимость $A_{\max}$ от n_{ch} (69) при $\Delta\eta = 0,5$ (а) и $\Delta\eta = 0,1$ (б). Экспериментальные точки: (а) 1 — π^+p -столкновения при $\sqrt{s} = 22$ ГэВ [49], 2 — $\bar{p}p$ -столкновения при $\sqrt{s} = 540$ ГэВ [54], 3 — p -AgBr-взаимодействия при $p_{\text{LAB}} = 400$ ГэВ [55]; (б) 1 — π^+p -столкновения при $\sqrt{s} = 22$ ГэВ [49], 2 — pp -столкновения при $\sqrt{s} = 22$ ГэВ. Теоретические предсказания — светлые квадраты, для удобства соединены отрезками прямой линии

2^n -циклов, $n > m$. Единственным отличием при фиксированном разрешении будет увеличивающееся (удваивающееся) число элементов цикла внутри интервала $\delta\xi$ и, как

результат, величина $n_{\max}$ будет удваиваться при каждом переходе $m \rightarrow m+1$. Чем больше будет величина $\delta\xi$ (или $\Delta\eta$ в эксперименте), тем раньше, т.е. для меньших множественностей, можно будет наблюдать такое самоподобие и, следовательно, линейную зависимость $A_{\max}(n_{\text{ch}})$. Действительно, на рис. 3 видно, что (75) выполняется для $n_{\text{ch}} \geq 8$ при $\Delta\eta = 0,5$, в то время как при $\Delta\eta = 0,1$ эта формула становится справедливой только для $n_{\text{ch}} \geq 16$. Заметим, что в тривиальном случае равномерного распределения частиц по быстрой линейный рост $A_{\max}(n_{\text{ch}})$ наблюдался бы начиная прямо с $n_{\text{ch}} = 2$ до бесконечности.

Более интересным, по нашему мнению, было бы измерение обратной зависимости, $n/\Delta\eta_{\min}(n)$ при фиксированной энергии столкновения. Сначала отберем события с одинаковым числом n_{tot} заряженных частиц. Затем для каждого фиксированного $n = 2, 3, 4, \dots < n_{\text{tot}}$ находим в каждом событии минимальный интервал $\Delta\eta_{\min}(n)$ на оси (псевдо)быстрот, который содержит данное число заряженных частиц, а затем усредняем по всем событиям. Желательно проделать данный анализ для наборов событий, полная множественность которых n_{tot} отличается вдвое: например, для $n_{\text{tot}} = 2\langle n_{\text{ch}} \rangle$, $\langle n_{\text{ch}} \rangle$ и $\langle n_{\text{ch}} \rangle/2$.

Для предельных 2^m -циклов аналогичная зависимость $n/\delta\xi_{\min}(n)$ может быть вычислена аналитически по формуле (13) при $\tau = 1$:

$$\frac{n}{\delta\xi_{\min}(n)} \propto \delta\xi_{\min}^{-v}, \quad v = 1 - \frac{1}{q(1) - 1}, \quad (76)$$

что дает, к примеру, значения $v = 0,628$ и $v = 0,605$ для 16- и 32-циклов соответственно. Для аттрактора Фейгенбаума

$$q(1) = \frac{\log(\alpha_F^2 + \alpha_F)}{\log 2} = 3,132158 \dots, \quad (77)$$

что дает $v = 0,53099 \dots$. Мы также нашли численно $\delta\xi_{\min}(n)$ при $n = 2, 3, 4, \dots$ для предельных 16-, 32- и 64-циклов и изобраили величину $n/\Delta\eta_{\min}(n)$ (обозначенную как $A_{\max}$) в зависимости от $\Delta\eta_{\min}$ (рис. 4). Величина $\Delta\eta_{\min}$ определяется как обычно (см. (70)–(72)):

$$\Delta\eta_{\min} = 2y_{\max}\delta\xi_{\min}. \quad (78)$$

Крайняя левая точка каждой кривой на рис. 4 соответствует значению $n = 2$. Все эти кривые хорошо фитируются прямой линией с наклоном $-0,65 \pm 0,03$ (см. (76)).

Реально в эксперименте [56] уже измерялась величина, тесно связанная с данной — так называемая "энтропия" S — как функция размера симметричного интервала по быстрой $|y| \leq y_c$. Энтропия S определяется следующим образом:

$$S = (n_{\text{ch}} + 1) \ln(n_{\text{ch}} + 1) - n_{\text{ch}} \ln n_{\text{ch}}, \quad (79)$$

где n_{ch} — число заряженных частиц в интервале $|y| \leq y_c$. Если изобразить $S/y_{\max}$ как функцию масштабной переменной $\ln(y_c/y_{\max})$, где, как обычно, $y_{\max} = \ln(\sqrt{s} - 2m_N)/m_\pi$, то обнаружится, что большая часть кривой практически является прямой линией с наклоном $(\approx 0,090 \pm 0,002)$, нечувствительным к $\sqrt{s}$ (рис. 5)

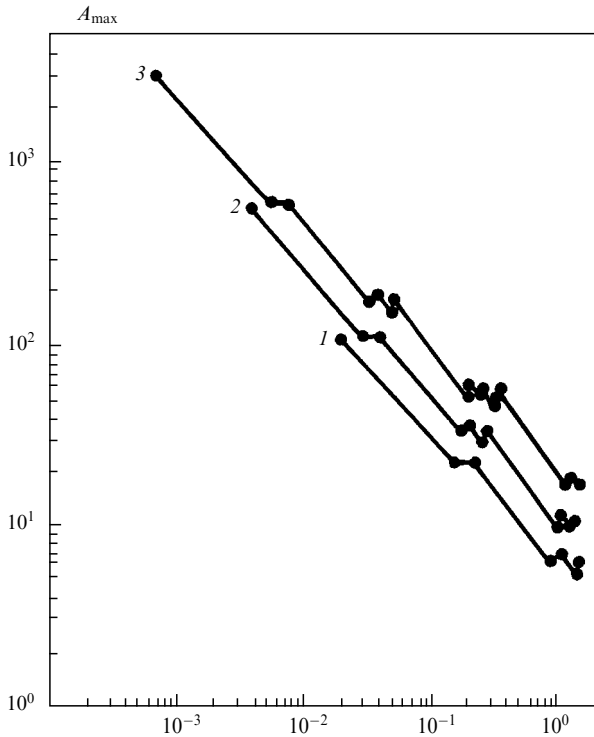


Рис. 4. Зависимость величины $n/\Delta\eta_{\min}(n)$ (обозначенной как $A_{\max}$) от $\Delta\eta_{\min}$ для предельных 16-, 32- и 64-циклов (1, 2, 3 соответственно)

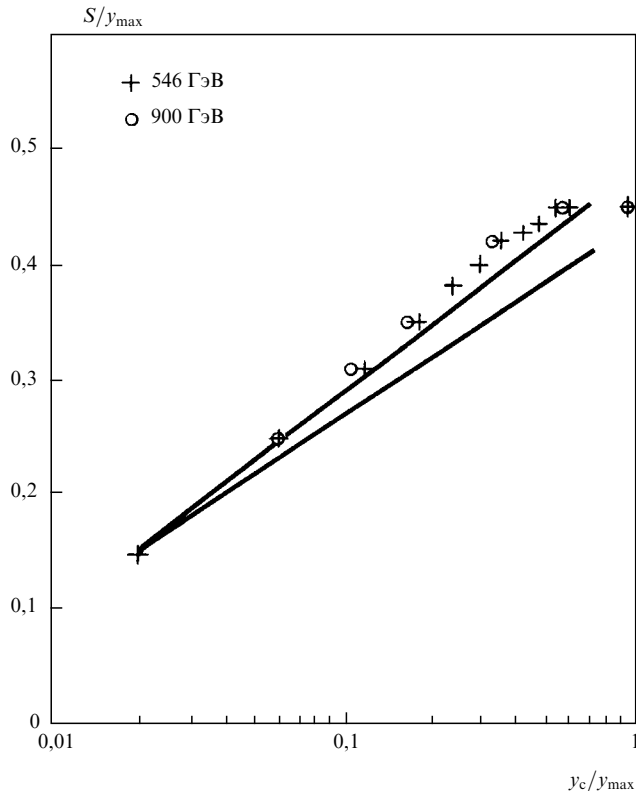


Рис. 5. Зависимость нормированной энтропии $S/y_{\max}$ от масштабной переменной $y_c/y_{\max}$. Экспериментальные точки соответствуют $\bar{p}p$ -столкновениям при $\sqrt{s} = 546$ ГэВ [59] и при 900 ГэВ [60]. Теоретические кривые соответствуют предельным 4- и 8-циклам (1 и 2)

[56]. Отметим, что если записать зависимость $n_{\text{ch}}(y_c)$ в виде

$$n_{\text{ch}} = \left(\frac{\sqrt{s}}{m_{\pi\perp}} \right)^{\beta(y_c/y_{\max})}, \quad (80)$$

подобно аппроксимации [57] по данным по множественности в $\bar{p}p$ -соударениях в интервале энергий $\sqrt{s} = 5\text{--}900$ ГэВ

$$\langle n_{\text{tot}} \rangle = \left(\frac{\sqrt{s}}{m_{\pi\perp}} \right)^{\beta}, \quad (81)$$

где $\beta \equiv \beta(1) = 0,449 \pm 0,018$, $m_{\pi\perp} = 0,231$ ГэВ, то легко увидеть, что $S/y_{\max} \rightarrow \beta(y_c/y_{\max})$ для больших n_{ch} . Теоретическое значение для величины β дается формулой [58]

$$\beta \equiv \beta(1) = \frac{\log 2}{\log \delta_F} = 0,449806\dots, \quad (82)$$

где δ_F — вторая константа Фейгенбаума (см. (46)).

Далее, из (81) следует, что

$$\ln \langle n_{\text{tot}} \rangle \simeq \beta y_{\max}, \quad (83)$$

и тогда

$$\frac{S}{y_{\max}} \simeq \beta \frac{\ln n_{\text{ch}}}{\ln n_{\text{tot}}}. \quad (84)$$

Что говорит БМ о правой части этого равенства? Зададим соответствие $\delta\xi_{\min} \Leftrightarrow y_c/y_{\max}$. Тогда число элементов определенного 2^m -цикла, попадающего внутрь интервала длиной $\delta\xi_{\min}$, будет соответствовать экспериментальной величине n_{ch} в интервале $|y| \leq y_c$. Снова, используя (13) при $\tau = 1$, получаем

$$\beta \frac{\ln n_{\text{ch}}}{\ln n_{\text{tot}}} = \frac{\beta}{(q-1) \ln n_{\text{tot}}} \ln \delta\xi_{\min} + \beta, \quad (85)$$

т.е. действительно, теория предсказывает в логарифмической шкале прямую с наклоном

$$k = \frac{\beta}{(q-1) \ln n_{\text{tot}}}.$$

Для предельных 4-, 8- и 16-циклов получаем $k = 0,083, 0,072, 0,060$ соответственно, что очень неплохо согласуется с экспериментальным наклоном $0,090 \pm 0,002$ (см. рис. 5). Нужно обязательно также принять во внимание, что, во-первых, теория отражает положение кланов на оси быстрот и их распад на вторичные частицы несколько изменит наклон данной прямой; во-вторых, теория предсказывает наклон в предположении, что y_c есть минимальное расстояние на оси быстрот, "покрывающее" данное число частиц, а экспериментальное значение y_c заведомо больше теоретического или равно ему.

Следовательно, более предпочтительным, с точки зрения БМ, было бы измерение величины $B \equiv \ln(n_{\text{ch}}/n_{\text{tot}})$ как функции масштабной переменной $y_c/y_{\max}$. Здесь уже y_c обозначает минимальный интервал $|y| < y_c$, который содержит данное число n_{ch} заряженных частиц. Для предельных циклов из (13) для величины B

получаем

$$B = \frac{1}{q(1) - 1} \ln \delta \xi_{\min}(n). \quad (86)$$

Величины $1/(q(1) - 1)$ для предельных 8-, 16- и 32-циклов равны 0,335, 0,372 и 0,395 соответственно.

4. Заключение

В данном обзоре мы кратко проследили более чем столетнюю эволюцию математического аппарата, необходимого для исследования фракталов — от канторовского понятия мощности бесконечного множества до обобщенных размерностей Реньи. Мы познакомились с топологической размерностью по Лебегу и по Брауэру–Менгеру–Урынсону, а также с понятием меры и размерности Хаусдорфа, зависящими от метрики топологического пространства. В конце раздела 2 также были даны начальные сведения о новом методе исследования фракталов — стохастическом анализе.

В разделе 3 мы применили введенный математический аппарат к одному из самых известных фракталов, обнаруженному за последние годы буквально во всех областях физики — аттрактору Фейгенбаума. Далее мы познакомились с методом трансфер-матриц, связывающим процесс последовательного все более точного покрытия данного фрактала с теорией трансфер-матриц соответствующей модели Изинга. Этот метод, позволяющий извлекать информацию о динамике процесса, порождающего данный фрактал, был успешно применен ранее для анализа турбулентности в физике жидкостей. Мы применили этот метод к двум событиям множественного образования частиц в адрон-адронных соударениях и показали, что динамикой, ответственной за данное распределение частиц на оси быстрот, с большой вероятностью может быть динамика удвоения периода, приводящая при бесконечных энергиях столкновения к аттрактору Фейгенбаума.

Этот результат может иметь далеко идущие последствия. Во-первых, присутствие универсальности Фейгенбаума существенно сужает класс уравнений, претендующих на роль управляющих динамикой процессов рождения адронов, так как в таком случае они должны иметь решения с квадратичной особенностью в соответствующем отображении Пуанкаре.

Во-вторых, обобщение универсальности Фейгенбаума на релятивистские процессы позволяет использовать в адронной физике многие результаты теории унимодальных отображений. В частности, в рамках данной гипотезы удается вычислить без параметров показатели роста с энергией средней множественности частиц в различных интервалах по быстрой [33], зависимость от множественности максимальной плотности частиц на единицу быстроты [33, 51], отношение длин и высот ступенек в зависимости среднего поперечного импульса от множественности при фиксированной энергии столкновения [35].

Следующим шагом, на наш взгляд, должно стать изучение с помощью метода трансфер-матриц "обычных" событий в адрон-адронных и ядро-ядерных соударениях, а также в e^+e^- -аннигиляции, так как динамика удвоения периода, если она на самом деле есть, должна проявляться во всех событиях.

В заключение мне приятно поблагодарить И.В. Андреева, И.М. Дремина и А.К. Лиходеда за ценные замечания, а также М.Т. Назирова и Б.Б. Левченко за плодотворные обсуждения. Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 94-02-03314.

Список литературы

1. Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (N.Y.: W H Freeman, 1982)
2. *Fractals in the Natural and Applied Sciences* (Ed. M M Novak) (IFIP, A-41, North-Holland, 1994)
3. Konishi K, Ukawa A, Veneziano G *Nucl. Phys. B* **157** 45 (1979)
4. Giovannini A *Proc. IX Conf. on Multiparticle Dynamics* (1979) p. 364
5. Carruthers P, Mihn Duong Van, Los Alamos Report LA-UR-83-2419 (1983)
6. Bialas A, Peschanski R *Nucl. Phys. B* **273** 730 (1986)
7. Дремин И М *Письма в ЖЭТФ* **45** 643 (1987)
8. Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **146** 493 (1985)
9. Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **56** 147 (1987)
10. Зельдович Я Б, Молчанов С А, Рузмакин А А, Соколов Д Д *УФН* **152** 3 (1987)
11. Дремин И М *УФН* **160** 105 (1990)
12. Де Вольф Е А, Дремин И М, Киттель В *УФН* **163** 3 (1993)
13. Schertzer D, Lovejoy S *Physica A* **185** 187 (1992)
14. Dokshitzer Yu L, Dremmin I M *Nucl. Phys. B* **402** 139 (1993)
15. Дремин И М, Назиров М Т *ЯФ* **55** 197 (1992)
16. Hwa R C *Phys. Rev. D* **47** 2773 (1993)
17. Cantor G J. *reine und angew. Math.* **77** 258 (1874)
18. Клейн Ф *Элементарная математика с точки зрения высшей* (М.: Наука, 1987) Т. 1
19. Peano G *Math. Ann.* **36** 157 (1890)
20. Poincare H *Revue de Mathématique et de Morale* 486 (1912)
21. Brouwer L E J. *Math.* **142** 146 (1913)
22. Александров П С *Комбинаторная топология* (М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947)
23. Гуревич В, Волмен Г *Теория размерности* (М.: Иностран. лит., 1948)
24. Lebesgue H *Math. Ann.* **70** 166 (1911)
25. Mazurkevich A *Fund. Math.* **10** 311 (1927)
26. Hausdorff F *Math. Ann.* **79** 157 (1919)
27. Pontryagin L, Shnirelman L *Ann. Math.* **33** 156 (1932)
28. Шустер Г *Детерминированный хаос* (М.: Мир, 1988)
29. Halsey T C et al. *Phys. Rev. A* **33** 1141 (1986)
30. Brax Ph, Peschanski R *Phys. Lett. B* **253** 225 (1991)
31. Ratti S P et al. *Z. Phys. C* **61** 229 (1994)
32. Chiu C B, Hwa R C *Phys. Rev. D* **43** 100 (1991)
33. Батунин А В *ЯФ* **55** 2525 (1992)
34. Батунин А В *ЯФ* **57** 1078 (1994)
35. Batunin A V *Phys. Lett. B* **318** 391 (1993)
36. Batunin A V, Sergeev S M *Phys. Lett. B* **327** 293 (1994)
37. Шарковский А Н и др. *Динамика одномерных отображений* (Киев: Наукова думка, 1989)
38. Вул Е Б, Синай Я Г, Ханин К М *УМН* **30** (3) 3 (1984)
39. Фейгенбаум М *УФН* **141** 343 (1983)
40. Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* **19** 25 (1978); **21** 669 (1979)
41. Feigenbaum M J *Comm. Math. Phys.* **77** 65 (1980)
42. Poincare H *Amer. J. Math.* **7** 213 (1885)
43. Cvitanovic P *Universality in Chaos* (Bristol: Adam Hilger, 1984)
44. Feigenbaum M J, Jensen M H, Procaccia I *Phys. Rev. Lett.* **57** 1503 (1986)
45. Бэкстер Р *Точно решаемые модели в статистической механике* (М.: Мир, 1985)
46. Dremmin I M *Multiparticle Dynamics. Festschrift for Leon Van Hove* (Eds A Giovannini, W Kittel) (Singapore: World Scientific, 1989) p. 455
47. Chau L L, Huang D W *Phys. Lett. B* **283** 1 (1992)
48. Seixas J *Mod. Phys. Lett. A* **6** 1237 (1991)
49. Adamus M et al. (NA22 Collab.) *Phys. Lett. B* **185** 200 (1987)
50. Burnett T H et al. (JACEE Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **50** 2062 (1983)

51. Batunin A V *Proc. 12th Intern. Conf. on Noise in Phys. Systems and 1/f Fluctuations* (St. Louis, August 16–20, 1993) (Eds P H Handel, A L Chung) p. 569
52. Takagi F *Phys. Rev. Lett.* **53** 427 (1984)
53. Shivpuri R K, Verma V K *Phys. Rev. D* **47** 123 (1993)
54. Geich-Gimbel Ch (UA5/2) Bonn Univ. Preprint HE-85-36 (Bonn, 1985)
55. Ghosh D, Sen S, Roy J *Phys. Rev. D* **47** 1235 (1993)
56. Carruthers P A, Plumer M, Raha S, Weiner R M *Phys. Lett. B* **212** 369 (1988)
57. Batunin A V, Yuschenko O P *Mod. Phys. Lett. A* **5** 2377 (1990)
58. Batunin A V Preprint IHEP 87-91 (Protvino, 1991)
59. Alner G J et al. (UA5) *Phys. Lett. B* **121** 209 (1983); **160** 193 (1985)
60. Alner G J et al. (UA5) *Phys. Lett. B* **167** 476 (1986)

FRACTAL ANALYSIS AND FEIGENBAUM UNIVERSALITY IN HADRON PHYSICS

A.V. Batunin

*Institute for High Energy Physics
142284 Protvino, Moscow Region, Russia
E-mail: batunin@mx.ihep.su*

The current state of the mathematical formalism applying to the study of fractals—infinite sets with noninteger Hausdorff dimension is briefly reviewed. The application of fractal analysis to hadron physics is shown. In this connection, the hypothesis of the presence of Feigenbaum universality in hadron multiproduction characteristics is discussed.

PACS numbers: **47.53. + n**, **13.90. + i**

Bibliography — 60 references

Received 24 January 1995