

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Фракталы, топологические дефекты и невылетание в решеточных калибровочных теориях

М.И. Поликарпов

Обсуждаются топологические дефекты в решеточных калибровочных теориях: монополи, вихри и струны. Оказывается, что эти объекты образуют кластеры, имеющие нецелую размерность, т.е. являются фракталами. Фрактальная размерность отражает физические свойства системы, в частности исследование кластеров токов монополей в решеточных калибровочных $U(1)$ - и $SU(2)$ -теориях позволяет исследовать механизм невылетания. В фазе невылетания линии тока магнитных монополей образуют перколирующий кластер и настолько плотны, что их размерность больше единицы, в фазе вылетания эта размерность тривиальна — равна единице. Показано также, что натяжение струны пропорционально размерности токов протяженных монополей. Эти факты согласуются с моделью невылетания, основанной на конденсации магнитных монополей в сверхпроводящую фазу, при этом струна между кварком и антикварком аналогична нити Абрикосова в сверхпроводнике. Описано применение теории фракталов к задаче фиксации калибровки в решеточных калибровочных теориях. Показано также, что в $SU(2)$ -глободинамике вблизи точки фазового перехода домены фазы деконфайнмента имеют нецелую размерность. Кроме монополей, обсуждаются свойства кластеров вихрей и струн в трехмерной и в четырехмерной ХУ-модели. Физические объекты, которые им соответствуют, — это вихри в жидком гелии и "глобальные космические струны".

PACS numbers: 02.20.Nq, 11.15.Na, **11.25.-w**, **47.53. + n**

Содержание

1. Введение (627).
 2. Фрактальные свойства доменов деконфайнмента (629).
 3. Фрактальная размерность в качестве параметра порядка конфайнмент–деконфайнмент (630).
 4. Абелиевы магнитные монополи и невылетание в глободинамике (632).
 5. Фиксация калибровки в решеточных теориях (635).
 6. Вихри и струны в ХУ-модели (637).
 7. Заключение (639).
- Приложение. Краткое введение в решеточные теории (640).
Список литературы (643).

1. Введение

В последние годы в совершенно различных областях — в физике, в математике, в биологии — были обнаружены объекты, имеющие нецелую размерность — фракталы [1]. В настоящем кратком обзоре мы приведем примеры

фракталов, найденных при численном моделировании решеточных калибровочных теорий. Вначале кратко обсудим основные свойства фракталов. Много интересных примеров и строгих определений приведено в известной книге Мандельброта [1] и в обзоре Паладина и Вульпиани [2].

Основным свойством фракталов является нецелое значение их размерности. В действительности существует бесконечно много определений фрактальной размерности, которые дают одинаковые значения для объектов целой размерности, но (в общем случае) приводят к разным значениям для фракталов. Неоднозначность определения нецелой размерности не очень важна. В конкретных приложениях важен сам факт существования фрактала. В качестве введения мы дадим простейшее определение размерности фрактала. Рассмотрим объект, состоящий из большого числа точек, каким-то образом расположенных в D -мерном евклидовом пространстве. Рассчитаем среднее число точек, помещающихся в сферу радиуса R (рис. 1). Для этого рассмотрим функцию

$$f(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j} \theta(R - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|), \quad (1)$$

здесь N — общее число точек, $\mathbf{x}_i$ — их координаты, θ — ступенчатая функция. Если рассматриваемый объект — фрактал, то $f(R) \propto R^{D_f}$, и степень D_f можно принять за фрактальную размерность объекта. В реальных примерах существует конечный интервал значений R , в кото-

М.И. Поликарпов. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, Б. Черемушкинская 25
Тел. (095) 123-02-92
Факс (095) 123-65-84
E-mail: polykarp@vxitep.itep.ru; polykarp@vxdesy.desy.de

Статья поступила 11 февраля 1995 г.

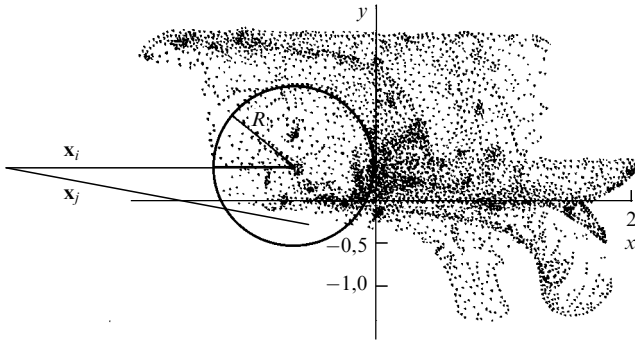


Рис. 1. Вычисление размерности фрактала, заданного отображением (2)

ром функция f пропорциональна степени R . Очевидно, что R должно быть (много) меньше размера всего фрактала, т.е. $R < L_f$. Ясно также, что R должно быть (много) больше минимального расстояния между точками l_f . Чем больше общее число точек, тем лучше точность определения размерности D_f из соотношения (1). Само существование конечного интервала, в котором $f(R) \propto R^{D_f}$, отражает фундаментальное свойство фракталов — их скейлинговую инвариантность, т.е. самоподобность на разных масштабах. Более сложные объекты — мультифракталы — имеют более нетривиальные свойства [2]. Богатый материал для развлечений на компьютере предоставляют рекурсивные уравнения; например фрактал, приведенный на рис. 1, определяется отображением

$$\begin{aligned} x^{\text{new}} &= \sin(x^{\text{old}}) + \cos\left(\frac{1}{y^{\text{old}}}\right), \\ y^{\text{new}} &= -\sin\left(\frac{1}{x^{\text{old}}}\right) + \cos(y^{\text{old}}). \end{aligned} \quad (2)$$

Другой простой пример — это диффузионный процесс N точек ("бактерий"), в котором каждая точка с некоторой вероятностью "размножается" или "умирает". На рис. 2, взятом из работы [3], показан такой процесс для 500 точек, живущих на плоскости. В начальной конфигурации точки случайно разбросаны по квадрату (рис. 2а). На каждом шаге процесса половина случайно выбранных точек исчезает, оставшиеся точки "удваиваются"; после этого каждая точка сдвигается с шагом, пропорциональным случайному числу, распределенному с гауссовой плотностью вероятности (броуновское движение). После 50 таких шагов формируется несколько островов (кластеров) (рис. 2б). После большого числа шагов выживает один кластер, имеющий фрактальную размерность (рис. 2в); все точки (бактерии) в данном кластере имеют одного предка. Интересно, что средний линейный размер этого фрактала не зависит от размерности пространства (и пропорционален корню из общего числа частиц), а также то, что центр тяжести диффундирует со скоростью одной частицы [3].

Как показывает практика (и два приведенных выше примера), фракталы почти всегда возникают при численном моделировании даже достаточно простых систем. Для физических моделей существование фракталов довольно часто отражает существование какого-либо нетривиального физического явления. Знаменитым примером,

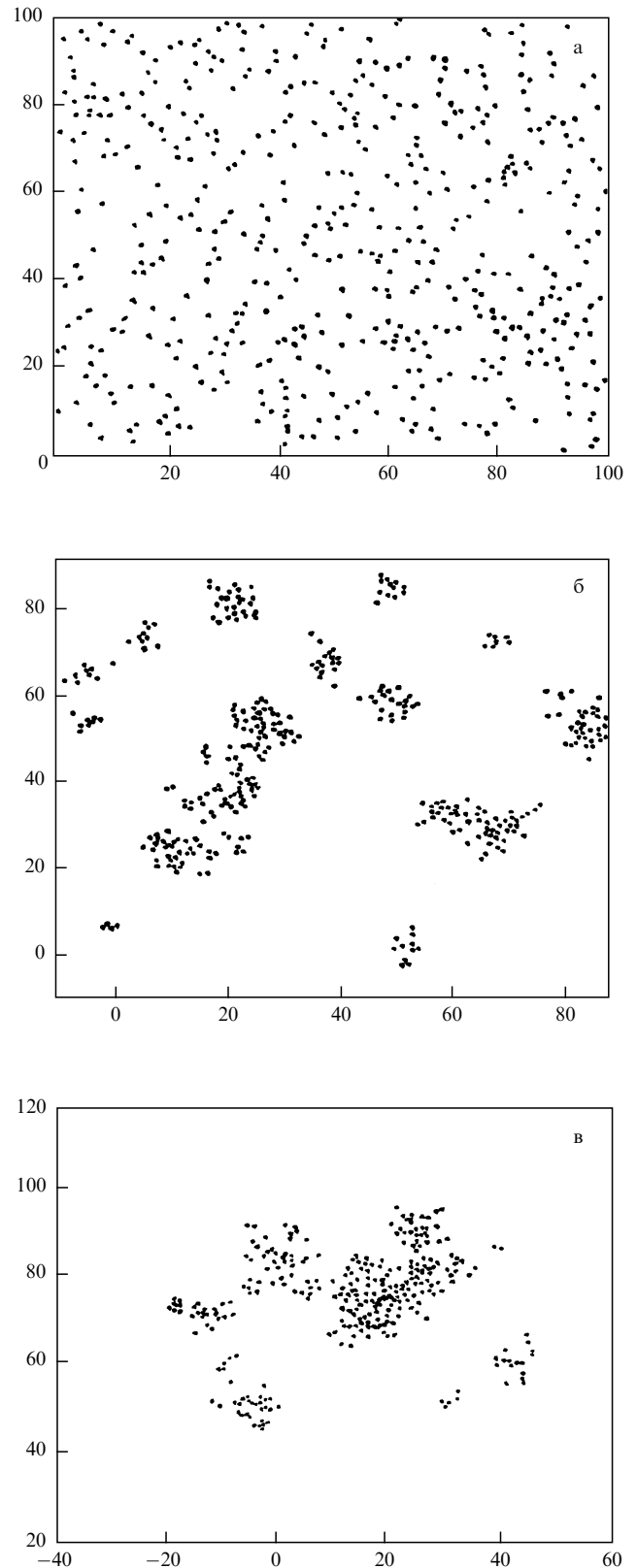


Рис. 2. Развитие первоначально равномерно распределенного множества точек (а) в диффузионном процессе с репродукцией; конфигурация после 50 шагов (б) и после 400 шагов (в). На первый взгляд, довольно удивительно, что точки не "расползаются" по плоскости, но при любом числе шагов занимают компактную область [3]

найденным Мандельбротом, является приложение [1, 2] фракталов к теории турбулентности.

В настоящем обзоре мы надеемся показать, что понятие "фрактал" является полезным для описания физических явлений в решеточных калибровочных теориях. По крайней мере, изучение фрактальных свойств вакуума глюодинамики существенно помогло автору понять механизм невылечения цвета. Более двадцати лет назад было предположено [4–6], что хромодинамика является теорией сильных взаимодействий. Однако один из основных вопросов, который обязана объяснить такая теория — механизм невылечения цвета — до сих пор не поддается аналитическому исследованию. Причина, конечно, заключается в неумении аналитически работать с теорией поля с большой константой связи. С другой стороны, в численных расчетах на решетке ясно видна трубка хромоэлектрического поля между статическими кварком и антикварком (см., например, [7]). В настоящем обзоре мы покажем, что численные расчеты предоставляют возможность понять механизм невылечения. Наиболее популярное теоретическое объяснение невылечения основано на модели, предложенной Хофтом и Мандельштамом [8, 9], в которой трубка электрического поля, возникающая между кварком и антикварком, является дуальным аналогом струны Абрикосова [10] в сверхпроводнике. Для этого нужно, чтобы вакуум теории был подобен сверхпроводнику, однако вместо конденсата куперовских пар необходимо существование конденсата монополей; такой вакуум обычно называют "дуальным сверхпроводником".

В разделе 3 мы обсудим, как возникает подобный механизм невылечения в компактной электродинамике. В частности мы покажем, что линии тока магнитных монополей на решетке образуют фракталы [11], и их размерность D_f играет роль параметра порядка для фазового перехода конфайнмент–деконфайнмент.

В разделе 4 рассмотрена простейшая неабелева теория на решетке — $SU(2)$ -глюодинамика. У нас отсутствует интуиция в понимании физических эффектов в неабелевых теориях, зато мы хорошо понимаем классические абелевы теории — существует ясная картина физических явлений, основанная на уравнениях Максвелла. Поэтому, прежде чем исследовать невылечение в неабелевых теориях, приходится их сначала "проецировать" на абелевы, а затем пытаться доказать существование сверхпроводящей фазы абелевых монополей, которые играют роль куперовских пар. Как и в разделе 3, исследование линий тока магнитных монополей помогает установить механизм невылечения.

В разделе 5 рассмотрена проблема фиксации калибровки в решеточных теориях. Для компактных полей фиксация даже такой простой калибровки, как $\partial_\mu A_\mu = 0$, представляет собой нетривиальную задачу, и мы покажем, что для ее решения полезно исследовать фрактальную размерность. Рассмотрены также другие, важные для приложений, примеры калибровок.

В разделе 6 описаны фрактальные свойства вихрей в трехмерной XU -модели и "глобальных струн" в четырехмерной XU -модели.

В Приложении приведены основные понятия решеточных калибровочных теорий, необходимые для понимания основного материала обзора.

В следующем разделе мы рассмотрим фрактальные свойства доменов деконфайнмента [12] в глюонной

плазме в районе фазового перехода конфайнмент–деконфайнмент. Этот простой пример позволит ввести необходимые для дальнейшего изложения определения и понятия.

2. Фрактальные свойства доменов деконфайнмента

При достаточно большой температуре ($T_c \sim 200$ МэВ) в глюодинамике происходит фазовый переход, фаза невылечения цвета сменяется фазой вылечения. В настоящем разделе, основанном на результатах работы [12], показано, что домены фазы деконфайнмента в решеточной калибровочной $SU(2)$ -теории имеют нецелую размерность вблизи фазового перехода.

При конечной температуре решеточная теория определяется на асимметричной решетке. Физическая температура на решетке размера $N_s^3 N_t$ связана с шагом решетки a следующим образом: $T = 1/(N_t a)$ (N_s — размер решетки по пространственному, а N_t — по временному направлению; чтобы понятие температуры было определено, нужно, чтобы $N_s \ll N_t$). Так как a зависит от затравочного заряда g , то температуру можно варьировать, меняя или N_t , или g . Мы проводили расчеты на решетке размера $8^3 \cdot 4$. В этой теории фазовый переход имеет место при $4/g_c^2 \approx 2,32$ [13, 14]. Параметром порядка является линия Полякова–Вильсона [15], квантовое среднее которой связано со свободной энергией цветного заряда следующим образом: $L \propto \exp(-F/T)$. По определению

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} \exp \left[i \int_0^{1/T} dt A_4(x) \right],$$

в решеточных обозначениях

$$L(x) = \frac{1}{2} \text{Tr} \prod_{n=1}^{N_t} U_{x,4},$$

$x = (x, na)$. Следовательно, в фазе конфайнмента, где $F = \infty$, $\langle L \rangle = 0$, в районе фазового перехода $F < \infty$ и $\langle L \rangle \neq 0$.

Таким образом, каждому узлу пространственной решетки можно приписать значение L . Отличное от нуля среднее $\langle L \rangle$ возникает из-за того, что распределение значений L несимметрично. По определению мы полагаем, что данный узел решетки лежит в фазе деконфайнмента, если значение L , соответствующее этому узлу, усредненное с шестью значениями величины L , соответствующей соседним узлам, больше некоторого значения ϵ . В этом случае предполагается, что фаза деконфайнмента занимает соответствующий элементарный куб, принадлежащий дуальной решетке¹, рассматриваемая точка лежит в центре этого куба. Если два куба имеют общую грань, то мы полагаем, что они принадлежат одному домену. Итак, каждой конфигурации полей сопоставляется некоторое количество трехмерных доменов фазы деконфайнмента. Их число и структура определяются, вообще говоря, значением параметра ϵ , однако оказывается, что его вариация в широких пределах не влияет существенно на результаты. В фазе

¹ Понятие "дуальная решетка" определено в Приложении.

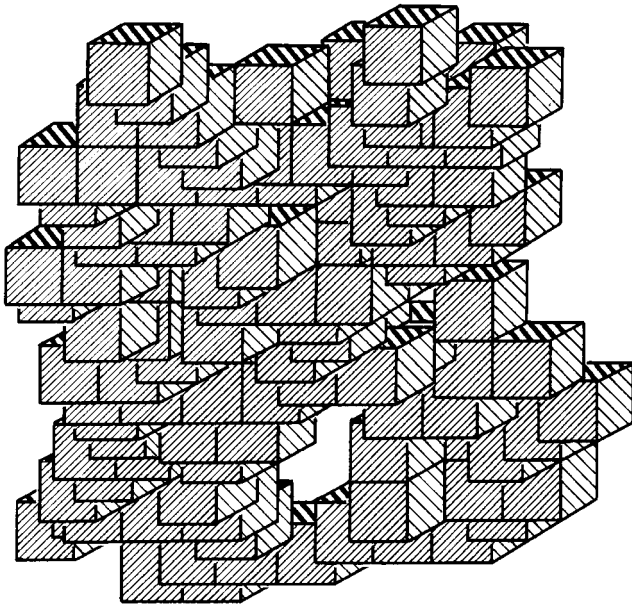


Рис. 3. Пример домена фазы вылетания в $SU(2)$ -глюодинике, температура близка к критической: $T \approx 0,95T_c$

конфайнмента форма доменов довольно проста: они состоят из нескольких кубов. Рядом же с фазовым переходом их структура довольно сложна, как это можно видеть на примере домена, показанного на рис. 3.

Мы рассмотрели несколько решеточных конфигураций полей в районе фазового перехода и измеряли объемы и площади доменов деконфайнмента. Для $4/g^2 = 2,29$ результаты представлены на рис. 4. Зависимость объема от площади очень хорошо описывается формулой $V = \text{const} \cdot A^\alpha$, где $\alpha = 1,12 \pm 0,05$. Для $4/g^2 = 2,29$ ($T < T_c$) и $4/g^2 = 2,35$ ($T > T_c$) результаты совпадают в пределах ошибок. Если бы домены были нормальными трехмерными объектами, то в этом случае $V = \text{const} \cdot A^{3/2}$, эта зависимость показана штриховой линией на рис. 4. Из нашего результата следует, что домены имеют "рыхлую" структуру, что видно также на рис. 3. Исследование фрактальных свойств доменов [16–18], проведенное вблизи фазового перехода в трехмерной модели Изинга, также приводит к нетривиальному

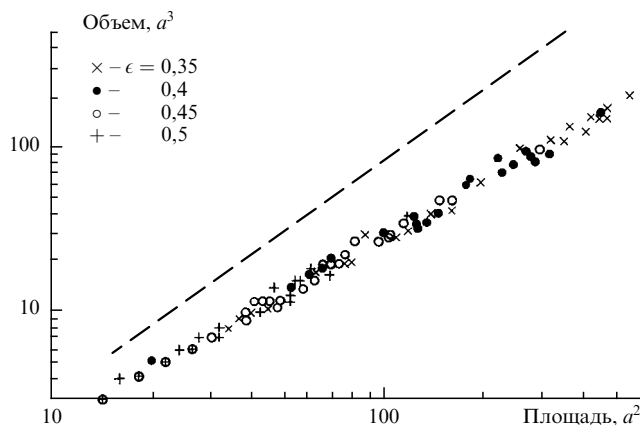


Рис. 4. Зависимость объема доменов деконфайнмента от площади их поверхности. Штриховой линией показана зависимость $V = \text{const} \cdot A^{3/2}$

показателю $\alpha_1 = 1,15 \pm 0,05$. Эти числа можно сравнить с величиной $\alpha = 1,03 \pm 0,03$, полученной в рассмотренном нами примере при $g^2 = \infty$, т.е. для случайно распределенных между -1 и 1 значений L . Подчеркнем, что при $g^2 = \infty$ области с $L > \epsilon$ не имеют смысла доменов деконфайнмента.

Вычисление фрактальной размерности доменов фазы деконфайнмента, проведенное на основе формулы (1), показывает, что $D_f = 2,3 \pm 0,4$. Видно, что точность определения D_f невелика. Для объектов, лежащих на решетке, можно предложить гораздо более простое определение фрактальной размерности. Рассматриваемые домены составлены из элементарных ячеек (кубов) дуальной трехмерной решетки. На исходной решетке каждому домену соответствует объект, состоящий из ребер и узлов. Узлы находятся в центрах кубов, а ребра пересекают общие грани соседних кубов. Размерность кластера, состоящего из ребер решетки, может быть определена как отношение числа ребер N_l к числу принадлежащих кластеру узлов N_s , т.е.

$$D_f = \frac{N_l}{N_s}. \quad (3)$$

На периодической D -мерной решетке число ребер в D раз больше числа узлов, поэтому наше определение дает правильное значение размерности для объекта, занимающего все ребра на решетке. А для линий меньшей плотности мы получаем естественную интерполяцию между целыми размерностями. Применяя это определение к доменам фазы деконфайнмента, получаем, что $D_f = 2,5 \pm 0,2$ при $\epsilon = 0,4-0,45$. Расчеты, проведенные А.И. Веселовым, показывают, что α слабо зависит от температуры и практически не меняется при переходе от решетки размера $8^3 \cdot 4$ к решетке $16^3 \cdot 4$.

3. Фрактальная размерность в качестве параметра порядка конфайнмент–деконфайнмент

Настоящий раздел основан на результатах работы [11]. Обычно используемые параметры порядка, определяющие фазу калибровочного поля (конфайнмент–деконфайнмент), — это натяжение струны σ [19] и значение линии Полякова L [15]. Натяжение струны — это сила, действующая между бесконечно удаленными друг от друга кварком и антикварком. Поэтому $\sigma = 0$ в фазе деконфайнмента и $\sigma \neq 0$ в фазе конфайнмента. Как мы уже отмечали, в фазе деконфайнмента $L \neq 0$, а в фазе конфайнмента $L = 0$. Предлагаемый нами параметр порядка связан с механизмом невылетания, основанным на модели вакуума, в котором существует конденсат магнитных монополей.

Хорошо известно, что в компактной четырехмерной и трехмерной квантовой электродинамике сконденсированные монополи действительно ответственны за невылетание [20–22]. В настоящем разделе мы рассмотрим монополи в четырехмерной компактной решеточной электродинамике. Введенные определения окажутся полезными для рассмотрения в следующем разделе физически более интересного примера — решеточной глюодинике.

Теперь опишем результаты численных расчетов. Компактная электродинамика — это теория абелевых

калибровочных полей A_μ , область изменения которых конечна, интервал не имеет значения, и в решеточных теориях обычно принимают $-\pi < A_\mu a \leq \pi$ (a — длина ребра решетки). В четырехмерной компактной решеточной электродинамике существует фаза невылечения при больших значениях заряда (при $\beta < \beta_c$, где $\beta = 1/e^2$, e — затравочный заряд). Благодаря тому, что калибровочные поля определены по модулю $2\pi/a$, тензор напряженности (определен ниже — формула (5)) может иметь сингулярности, которые соответствуют монополям [21, 22]. В непрерывной теории для нахождения заряда внутри объема, ограниченного поверхностью S , используется теорема Гаусса:

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \int_S F_{\mu\nu} d^2\sigma_{\mu\nu}.$$

Эта же теорема, примененная к дуальному тензору напряженности, дает значение магнитного заряда

$$m = \frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} d^2\sigma_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Ненулевое значение m возникает благодаря наличию сингулярности (струны Дирака) в $F_{\mu\nu}$.

Прежде чем написать решеточный аналог определения магнитного заряда m , напомним определение полей в решеточной теории. В компактной электродинамике динамические переменные θ ($-\pi \leq \theta < \pi$) определены на ребрах решетки. Переменная $\theta_{x,\mu}$, соответствующая ребру решетки, выходящему из точки x по направлению μ , пропорциональна вектор-потенциалу: $\theta_{x,\mu} = A_\mu(x)a$, где a — длина ребра решетки. Каждому плакету (элементарному квадрату на решетке) соответствует фаза, пропорциональная тензору напряженности:

$$\theta_p = \theta_{x,\mu} + \theta_{x+\hat{\mu},\nu} - \theta_{x,\nu} - \theta_{x+\hat{\nu},\mu} \pmod{2\pi} = a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^4), \quad (5)$$

здесь $\hat{\mu}$ — вектор длины a , направленный по оси μ . Стандартное действие теории в соответствии с формулой (П.1) имеет вид $S = \beta(1 - \cos \theta_p)$.

Применяя формулу (4) к элементарному трехмерному кубу на решетке и переходя от интегрирования по поверхности к суммированию по граням куба (считается, что a мало), получим формулу

$$m = \frac{1}{4\pi} \sum_p \theta_p, \quad (6)$$

суммирование проводится по фазам плакетов, которые соответствуют граням куба; их ориентация показана на рис. 5. Из этого рисунка видно, что каждое значение $\theta_{x,\mu}$ входит в сумму (6) дважды: один раз со знаком "+", другой раз со знаком "-", и m может принимать ненулевое значение только благодаря тому, что в определении θ_p (5) присутствует $\pmod{2\pi}$. Для некомпактных полей $\pmod{2\pi}$ в определении тензора напряженности отсутствует и $m = 0$. Это отражает элементарный факт отсутствия монополей в некомпактной электродинамике. Возникающий при $m \neq 0$ разрыв в 2π на плакете соответствует образованию дираковской струны на решетке. Легко показать, что $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Дискретные значения заряда находятся в соответствии с усло-

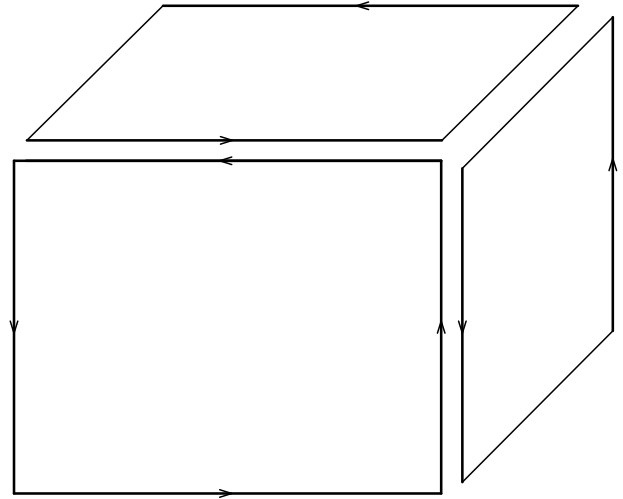


Рис. 5. Обход по плакетам, являющимся гранями куба, в котором вычисляется магнитный заряд по формуле (6)

вием квантования Дирака. В четырехмерном пространстве монополям соответствуют линии тока, которые принадлежат ребрам дуальной четырехмерной решетки (статическому монополю соответствует ток, направленный по "временной оси"). Любому трехмерному кубу на четырехмерной решетке соответствует ребро на дуальной решетке. Куб определяется тремя направлениями, и ребро дуальное кубу направлено по четвертому направлению. Если данному трехмерному кубу соответствует магнитный заряд m (6), то по дуальному ребру течет магнитный ток $*j = m$ (см. Приложение). Можно доказать, что линии тока замкнуты, и это, конечно, отвечает закону сохранения магнитного заряда.

В численных экспериментах было найдено [23–25], что в фазе невылечения линии тока густо покрывают дуальную решетку, наблюдается много самопересечений. В фазе вылечения линии тока разрежены. Примеры проекций линий тока из четырехмерного пространства на двумерную поверхность страницы для фаз вылечения и невылечения показаны на рис. 6а и рис. 6б соответственно. Впервые такие рисунки были приведены в [24, 25].

Оказывается, что адекватный язык, описывающий токи монополей на решетке, — это фрактальная размерность D_f , для определения которой мы используем выражение (3). Для различных значений β в решеточной калибровочной $U(1)$ -теории мы генерировали решеточные поля и выделяли линии магнитных токов. В каждой конфигурации полей обнаруживается несколько связанных объектов (кластеров). На рис. 7 показана зависимость средней размерности наибольшего из кластеров от величины β . Видно, что в фазе конфайнмента ($\beta < \beta_c$) размерность D_f нетривиальна (объект, составленный из линий, имеет размерность $D_f > 1$). При $\beta > \beta_c$ $D_f = 1$. Поведение предлагаемого параметра порядка D_f качественно соответствует картине конденсации магнитных монополей в фазе конфайнмента. Магнитные токи в фазе, где монополи сконденсированы, настолько плотны, что имеют размерность больше единицы. Еще более прямое численное подтверждение эффекта конденсации монополей было получено в [26], в которой вычислялся эффективный потенциал монополей; оказы-

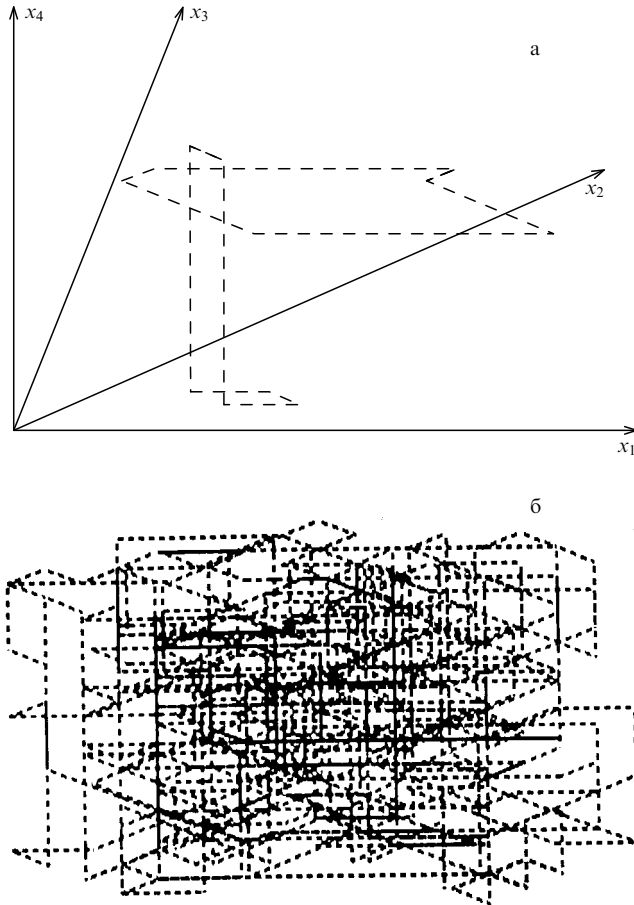


Рис. 6. Линии токов магнитных монополей в компактной решеточной электродинамике: (а) фаза вылетания; (б) фаза невылетания

валяется, что в фазе невылетания этот потенциал имеет минимум, соответствующий конденсату монополей (хиггсовский потенциал), а в фазе вылетания среднее значение оператора рождения монополя по вакууму равно нулю.

Наконец, в работах [27, 28] исследовались перколяционные свойства [29, 30] кластеров монополей, и было обнаружено, что в фазе невылетания существует ненуле-

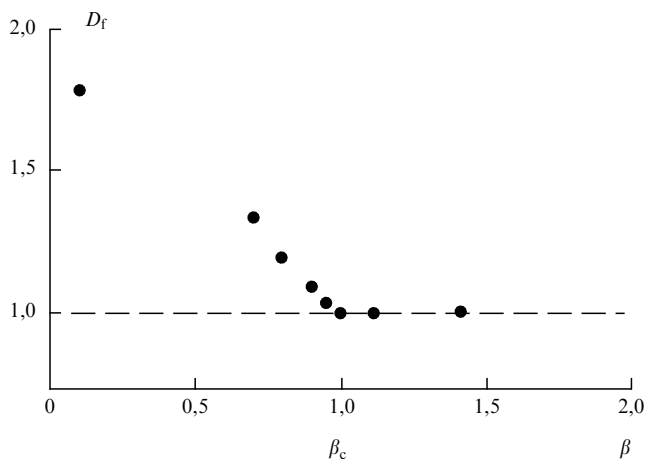


Рис. 7. Зависимость средней размерности наибольшего из кластеров токов магнитных монополей от β в компактной решеточной электродинамике

вая вероятность того, что две точки соединены монопольным током, если расстояние между ними стремится к бесконечности. В фазе вылетания эта вероятность равна нулю. Для заданного значения β мы генерировали 10 конфигураций полей на решетке размера 10^4 и вычисляли вероятность того, что две точки, находящиеся на расстоянии L , соединены линией монопольного тока. Затем эта вероятность подгонялась функцией

$$f(L) = A \frac{\exp(-mL)}{L^\alpha} + C^4, \quad (7)$$

где A , α , m и C — подгоночные параметры. Зависимость C^2 от β представлена на рис. 8. Если $\phi(x)$ — оператор рождения монополей, то вычисляемая вероятность пропорциональна коррелятору $\langle \phi(0)\bar{\phi}(0)\phi(x)\bar{\phi}(x) \rangle$, и параметр C имеет смысл конденсата монополей. Из рис. 8 следует важный факт: в фазе вылетания, $\beta > \beta_c$ (в фазе невылетания, $\beta < \beta_c$), конденсат монополей равен (не равен) нулю, что, конечно, согласуется с обсуждаемым механизмом невылетания. Сравнение рис. 7 и 8 показывает, что нетривиальное значение фрактальной размерности монопольных токов (D_f) соответствует фазе невылетания, в которой сконденсированы монополи. Величина $D_f - 1$ ведет себя подобно параметру порядка $D_f - 1 > 0$ для $\beta < \beta_c$ и $D_f - 1 \approx 0$ для $\beta > \beta_c$.

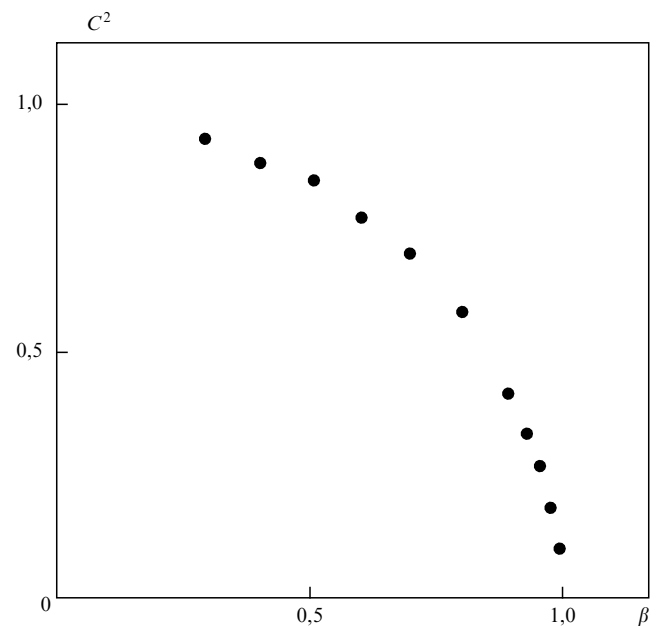


Рис. 8. Квадрат величины конденсата монополей в компактной решеточной электродинамике в зависимости от β . Вычисления проводились на решетке размера 10^4

4. Абелевы магнитные монополи и невылетание в глюодинамике

В известной работе 'т Хофта [31] была предложена такая частичная фиксация калибровки в $SU(N)$ -глюодинамике, которая не фиксирует калибровочную группу $[U(1)]^{N-1}$. Диагональные элементы глюонного поля преобразуются при этих абелевых преобразованиях как калибровочные поля, а недиагональные — как поля материи. Благодаря компактности абелевой калибровочной

группы в системе существуют монополи, и если они сконденсированы, то невылетание, как уже обсуждалось, можно объяснить на классическом уровне [9, 8]: вакуум — это сверхпроводник, роль куперовских пар играют монополи, а струна между цветными зарядами — это дуальный аналог струны Абрикосова.

Многие численные эксперименты (см., например, обзор [32]) подтверждают монополярный механизм невылечения $U(1)$ -теории, полученной при помощи абелевой проекции из решеточной $SU(2)$ -глюодинамики. Натяжение струны $\sigma_{U(1)}$, полученное из вильсоновских $U(1)$ -петель (петли, построенные только из абелевых полей, а абелевы поля — это проекция $SU(2)$ -полей), совпадает с полным натяжением $SU(2)$ -струны [33]. Есть указания [34] на то, что плотность монополей подчиняется закону скейлинга, т.е. монополи выживают в непрерывном пределе. Монополярные токи удовлетворяют уравнению Лондона для сверхпроводника [35]. Недавно также было показано [36, 37], что натяжение струны в $SU(2)$ -глюодинамике воспроизводится вкладом токов монополей. Для полной ясности очень важно доказать наличие конденсата абелевых монополей. Известно, что в фазе невылечения плотность монополей велика, а в фазе вылетания мала [24, 25]. Сам по себе этот факт еще не является доказательством рассматриваемой модели конфайнмента. В обычном проводнике плотность свободных зарядов может быть велика, однако для образования нити Абрикосова этого недостаточно, требуется существование конденсата носителей заряда.

В этом разделе мы покажем, что в $SU(2)$ -глюодинамике конденсат монополей, извлеченный (как было описано в предыдущем разделе) исходя из перколяционных свойств магнитных токов, как и следует ожидать, отличен от нуля в фазе невылечения и равен нулю в фазе вылетания [27, 28]. Численное исследование эффективного действия для монополей [38] приводит к аналогичному результату: оказывается, что энтропия монополярных токов больше их энергии. Следовательно, существует монополярный конденсат в $SU(2)$ -глюодинамике при нулевой температуре.

Все упомянутые выше замечательные факты были, однако, получены только для одной, так называемой максимальной абелевой проекции [24, 25]. В действительности существует бесконечно много абелевых проекций данной неабелевой теории. Оказывается, что механизм невылечения зависит от проекции. Ниже мы покажем, как изучение фрактальных свойств монополярных токов показывает выделенность максимальной абелевой проекции.

Начнем с формального определения абелевой проекции [31] и для простоты рассмотрим калибровочную группу $SU(2)$. Абелева проекция — это такая частичная фиксация калибровки неабелевых полей, при которой остается незафиксированной абелева калибровочная группа. Простейший пример такой фиксации — это диагонализация тензора напряженности $F_{\mu\nu}(x)$ для заданных μ и ν . В решеточных обозначениях процедура выглядит следующим образом. Если задана конфигурация полей на решетке $U_{x,\mu}$, то для каждого узла решетки определен аналог тензора напряженности — плакетная матрица $U_{x,\mu\nu}$ (П.2), которая преобразуется при калибровочном преобразовании (П.6) как

$$U'_{x,\mu\nu} = \Omega_x U_{x,\mu\nu} \Omega_x^\dagger. \quad (8)$$

При заданных μ и ν (например, $\mu = 1$, $\nu = 2$) можно в каждом узле решетки так подобрать матрицы калибровочных преобразований Ω_x , что $U'_{x,\mu\nu}$ будет диагональной. Очевидно, что преобразование

$$\Omega_x \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(i\alpha_x) & 0 \\ 0 & \exp(-i\alpha_x) \end{pmatrix} \Omega_x \quad (9)$$

оставляет матрицу $U'_{x,\mu\nu}$ диагональной. Поэтому матрица Ω определена с точностью до преобразования (9). При этом оставшемся незафиксированным абелевом преобразовании матричные элементы полей $U_{x,\mu}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{x,\mu}^{11} &\rightarrow U_{x,\mu}^{11} \exp[i(\alpha_x - \alpha_{x+\mu})], \\ U_{x,\mu}^{12} &\rightarrow U_{x,\mu}^{12} \exp[i(\alpha_x + \alpha_{x+\mu})]. \end{aligned} \quad (10)$$

Фаза $\theta_{x,\mu}$ диагонального элемента ($U_{x,\mu}^{11} = \exp(i\theta_{x,\mu})|U_{x,\mu}^{11}|$) преобразуется как абелево калибровочное поле на решетке²: $\theta_{x,\mu} \rightarrow \theta_{x,\mu} + \alpha_x - \alpha_{x+\mu}$. Процедура изучения монополярных токов на решетке в $SU(2)$ -глюодинамике состоит из следующих шагов:

1. Генерация конфигураций $SU(2)$ -полей с весом $\exp(-S)$, где S — $SU(2)$ -действие.

2. Проекция полученных $SU(2)$ -полей, например, путем диагонализации $U_{x,12}$ на всей решетке. Теперь фазу диагональных элементов $\theta_{x,\mu}$ можно считать абелевым калибровочным полем.

3. Вычисление монополярных токов по формуле (6), как было описано в предыдущем разделе.

Абелева проекция, которая заключается в диагонализации $U_{x,\mu\nu}$, не приводит к интересным физическим результатам. В действительности существует бесконечно много проекций $SU(2) \rightarrow U(1)$. Вместо плакетной матрицы, которая диагонализуется при помощи калибровочного преобразования, можно взять любой оператор, который преобразуется подобно (8): $X(x) \rightarrow \Omega_x X(x) \Omega_x^\dagger$. Например, при конечной температуре можно диагонализировать линию Полякова

$$L(x) = \prod_{i=1}^N U_{x+(i-1)\hat{\mu},\mu}, \quad \mu = 4,$$

которая, как легко видеть, преобразуется при калибровочных преобразованиях именно таким образом. Другой пример — это максимальная абелева проекция [24, 25], которая соответствует поиску следующего максимума:

$$\max_{\Omega_x} \sum_{x,\mu} \text{Tr}(U'_{x,\mu} \sigma_3 U'^{\dagger}_{x,\mu} \sigma_3). \quad (11)$$

Здесь $U'_{x,\mu}$ — калибровочно преобразованное поле (П.6), сумма берется по всем ребрам решетки. Легко видеть, что эта проекция делает калибровочные поля $U_{x,\mu}$ как можно более диагональными, откуда и происходит ее название. Очевидно, что условие (11) инвариантно относительно абелевых преобразований (9), и фаза $(U'_{x,\mu})^{11}$ играет роль компактного калибровочного поля, из заданной конфигурации которого можно извлекать

² В непрерывном пределе диагональные элементы калибровочного поля также преобразуются как абелевы калибровочные поля: $A_\mu^{ii} \rightarrow A_\mu^{ii} + i\partial_\mu \alpha$, а недиагональные — как поля материи заряда 2: $A_\mu^{\pm} \rightarrow A_\mu^{\pm} \exp(\pm 2i\alpha)$.

монополи. Как отмечено в начале этого раздела, именно в максимальной абелевой проекции получено много указаний на то, что вакуум $SU(2)$ -глюодинамики устроен подобно дуальному сверхпроводнику, монополи, извлеченные из полей $\theta_{x,\mu}$, сконденсированы.

Кроме неоднозначности в выборе проекции неабелевой теории на абелеву, существует неоднозначность в самой $U(1)$ -теории [39]. Можно считать, что $SU(2)$ -теория спроецирована на $U(1)$ -теорию с длиной ребра равной $a, 2a, \dots$. Это означает, что монополи по формуле (6) можно извлекать, суммируя фазы не только элементарных плакетов (см. рис. 5), но и фазы контуров размера $2a$ (рис. 9), $3a, \dots$. Такие "протяженные" монополи [39] размера $2^3, 3^3, \dots$ играют, возможно, важную роль в формулировке действия глюодинамики в терминах монопольных токов [40].

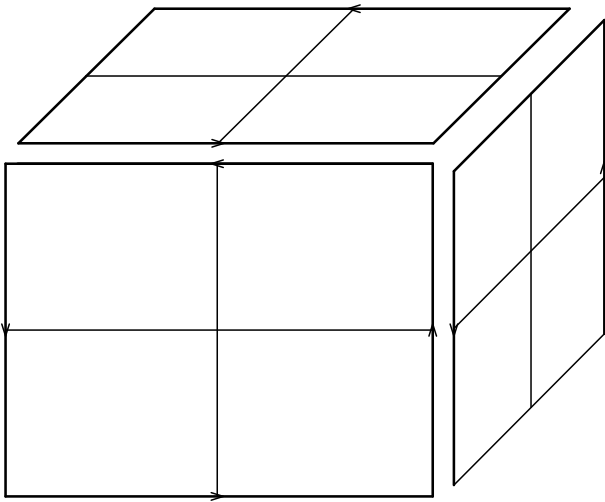


Рис. 9. Конструкция протяженного монополя

Оказывается, фрактальная размерность монопольных токов пропорциональна натяжению струны σ (силе, действующей между бесконечно удаленными друг от друга кварком и антикварком), и величина монопольного конденсата скоррелирована с натяжением струны. Для вариации натяжения струны мы использовали [39, 27, 28] два метода: первый — более физический — вариация температуры; второй — более формальный — так называемая процедура охлаждения калибровочных полей.

На рис. 10 показана зависимость величины конденсата магнитных монополей от температуры. Вычисления проводились [27, 28] для $SU(2)$ -глюодинамики на решетке размера $10^3 \cdot 4$. Величина конденсата вычислялась исходя из перколяционных свойств монопольных токов (см. пояснение к формуле (7) предыдущего раздела). Монопольные токи были извлечены исходя из максимальной абелевой проекции. На рис. 10 приведены также данные для натяжения струны σ , полученные в работе [41]. Видно, что как конденсат, так и натяжение струны обращаются в нуль в критической точке $T = T_c$. Такой же результат был получен [28] и для монополей размера 2^3 и 3^3 . Фрактальная размерность токов монополей $1^3, 2^3$ и 3^3 больше единицы при $T < T_c$ (в области невымывания) и тривиальна ($D_f = 1$) при $T > T_c$. Таким образом, перколяционные свойства кластеров монопо-

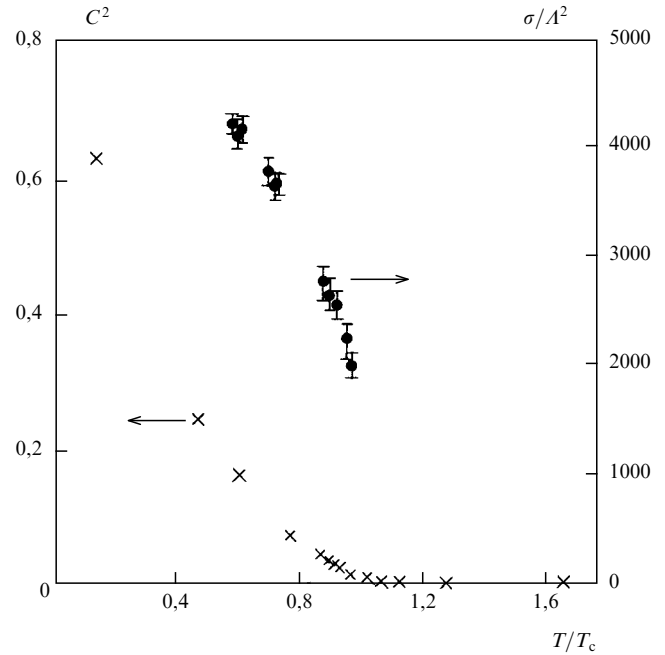


Рис. 10. Зависимость квадрата конденсата монополей (×) и натяжения струны (•) в $SU(2)$ -глюодинамике от температуры

лей и их фрактальная размерность для максимальной абелевой проекции $SU(2)$ -глюодинамики при конечной температуре указывают на монопольный механизм невымывания.

Аналогичные результаты были получены [39] при вариации натяжения струны методом охлаждения вакуумных полей. Этот метод [42–45] состоит в последовательной вариации реберных матриц $U_{x,\mu}$ таким образом, чтобы каждая вариация приводила к минимизации действия. Таким образом, каждый раз ищется локальный минимум, глобальный минимум ($U_{x,\mu} = 1$ для всех x и μ) достигается через несколько десятков или даже сотен проходов через все ребра решетки. На первых нескольких шагах натяжение струны почти постоянно [46], а при дальнейших охлаждающих шагах оно падает [47]. Таким образом, процедура охлаждения позволяет плавно варьировать натяжение струны. Если исходная конфигурация полей распределена с плотностью вероятности $\exp\{-S\}$, то после первого же шага охлаждения поля уже не распределены так. Процедуру охлаждения можно рассматривать как движение в конфигурационном пространстве полей по некоторой траектории, которая соединяет квантовые поля с вакуумным полем $A_\mu = \Omega^+ \partial_\mu \Omega$.

На рис. 11 представлена зависимость [39] фрактальной размерности токов монополей для максимальной абелевой проекции $SU(2)$ -глюодинамики от натяжения струны. Исходные конфигурации $SU(2)$ -полей были получены методом Монте-Карло на решетке размера 10^4 для затравочного заряда $g^2 \approx 1,78$, затем эти конфигурации охлаждались, на каждом шаге охлаждения фиксировалась максимальная абелева проекция и вычислялась фрактальная размерность монопольных токов, а также натяжение струны. Видно, что фрактальная размерность токов монополей размера $1^3, 2^3$ и 3^3 пропорциональна натяжению струны. Эта корреляция опять указывает на монопольный механизм невымывания. Отметим, что монополи размера 1^3 при охлаждении

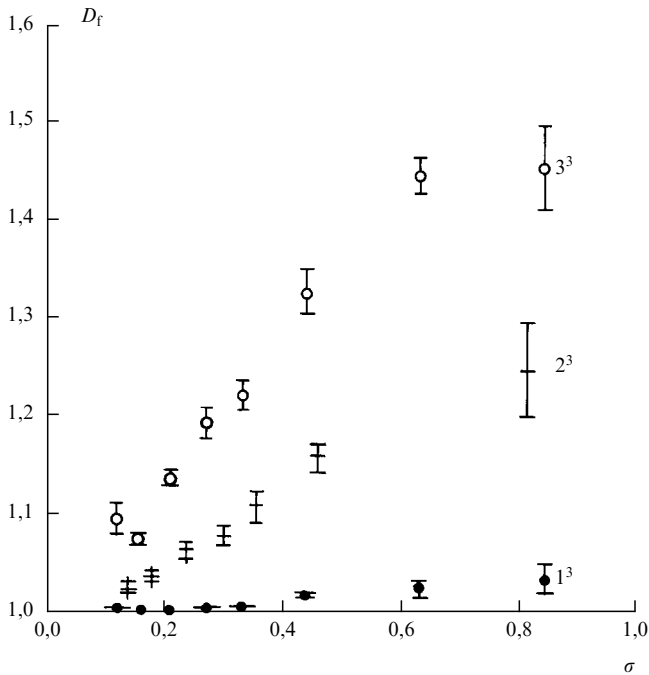


Рис. 11. Зависимость фрактальной размерности токов монополей размера 1^3 , 2^3 и 3^3 от натяжения струны в процессе охлаждения. Монополи извлекались из максимальной абелевой проекции $SU(2)$ -глюодиники

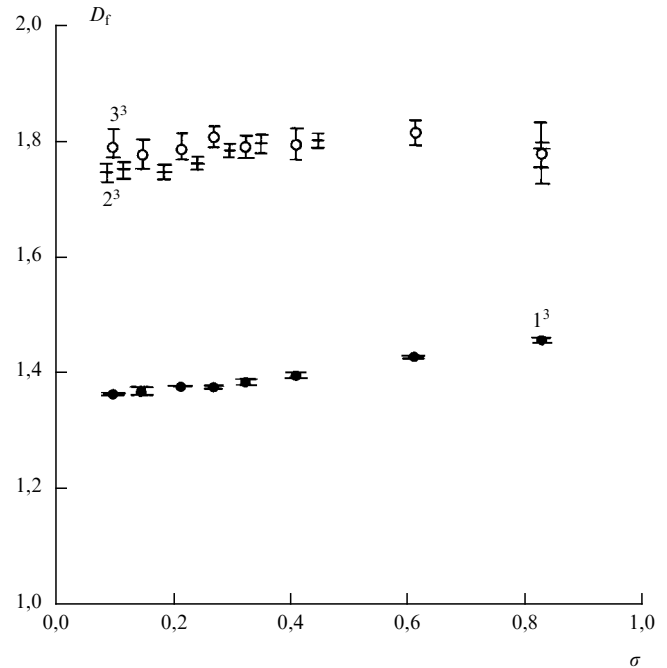


Рис. 12. То же, что и на рис. 11, но монополи извлекались из проекции $SU(2)$ -глюодиники, которая соответствует диагонализации плакетной матрицы

быстро исчезают, и численные оценки показывают, что их плотность слишком мала, чтобы объяснить натяжение струны. Таким образом, в "охлажденном вакууме" за невылетание ответственны протяженные монополи размера 2^3 , 3^3 , ... В настоящее время в литературе активно обсуждается роль протяженных монополей в механизме невылетания. Из упомянутых нами результатов следует, что протяженные монополи важны при конечной длине ребра решетки (так как наши данные получены при одном значении затравочного заряда g); важно понять, монополи какого размера ответственны за невылетание в непрерывном пределе. Они могут быть как конечного размера (порядка радиуса невылетания), так и нулевого размера.

На рис. 12, полностью аналогичном рис. 11, показана размерность токов монополей в зависимости от натяжения струны [39]. На этот раз на каждом шаге охлаждения использовалась абелева проекция, соответствующая диагонализации плакетной матрицы $U_{x,12}$ (П.2). Очевидно, что при такой абелевой проекции фрактальная размерность не пропорциональна натяжению струны, и это есть серьезное указание на то, что теперь монополи не ответственны за невылетание. Подробное обсуждение выделенности максимальной абелевой проекции проведено в работе [48]. Оказывается, что в решеточной глюодинике существует пример абелевой проекции ("минимальная абелева проекция"), в которой, как можно показать, за невылетание ответственны не монополи, а "минополи" — топологические объекты, построенные из недиагональных элементов решеточных полей $U_{x,\mu}^{12}$. Напомним, что монополи извлекаются из фазы диагональных элементов $U_{x,\mu}^{11}$.

Подробное обсуждение механизма невылетания в произвольной абелевой проекции выходит за рамки настоящего обзора. Отметим, однако, что в общем

случае как диагональные поля $U_{x,\mu}^{11}$ (калибровочные $U(1)$ -поля), так и недиагональные $U_{x,\mu}^{12}$ ($U(1)$ -поля материи) могут быть ответственны за невылетание [48–50]. Можно думать, что существует некий ответственный за невылетание объект, который естественным образом описывается в терминах $SU(2)$ -полей и который переходит в абелевы монополи в максимальной абелевой проекции, в других абелевых проекциях этот объект может переходить в топологические дефекты, построенные как из диагональных, так и из недиагональных элементов полей $U_{x,\mu}^{11}$ и $U_{x,\mu}^{12}$. Наиболее вероятным кандидатом является [51] классическое решение типа диона [52–55]; дионы различных размеров можно идентифицировать с протяженными монополями различных размеров. Предварительные численные эксперименты автора подтверждают такую картину. Вывод из материала настоящего раздела следующий: хотя много деталей остаются неясными, видно, что численное исследование решеточной глюодиники позволило установить в общих чертах механизм невылетания цвета — в максимальной абелевой проекции вакуум ведет себя подобно дуальному сверхпроводнику.

5. Фиксация калибровки в решеточных теориях

Физический интерес представляют, конечно, калибровочно-инвариантные величины, однако в последние годы появилась большая серия работ, в которых исследуются в хромодинамике и в глюодинике решеточные калибровочные поля для фиксированной калибровки (см., например, [56] и ссылки в этой работе). Задача проецирования неабелевой группы на абелеву, обсуждавшаяся в предыдущем разделе, технически также очень близка к фиксации калибровки. В настоящем раз-

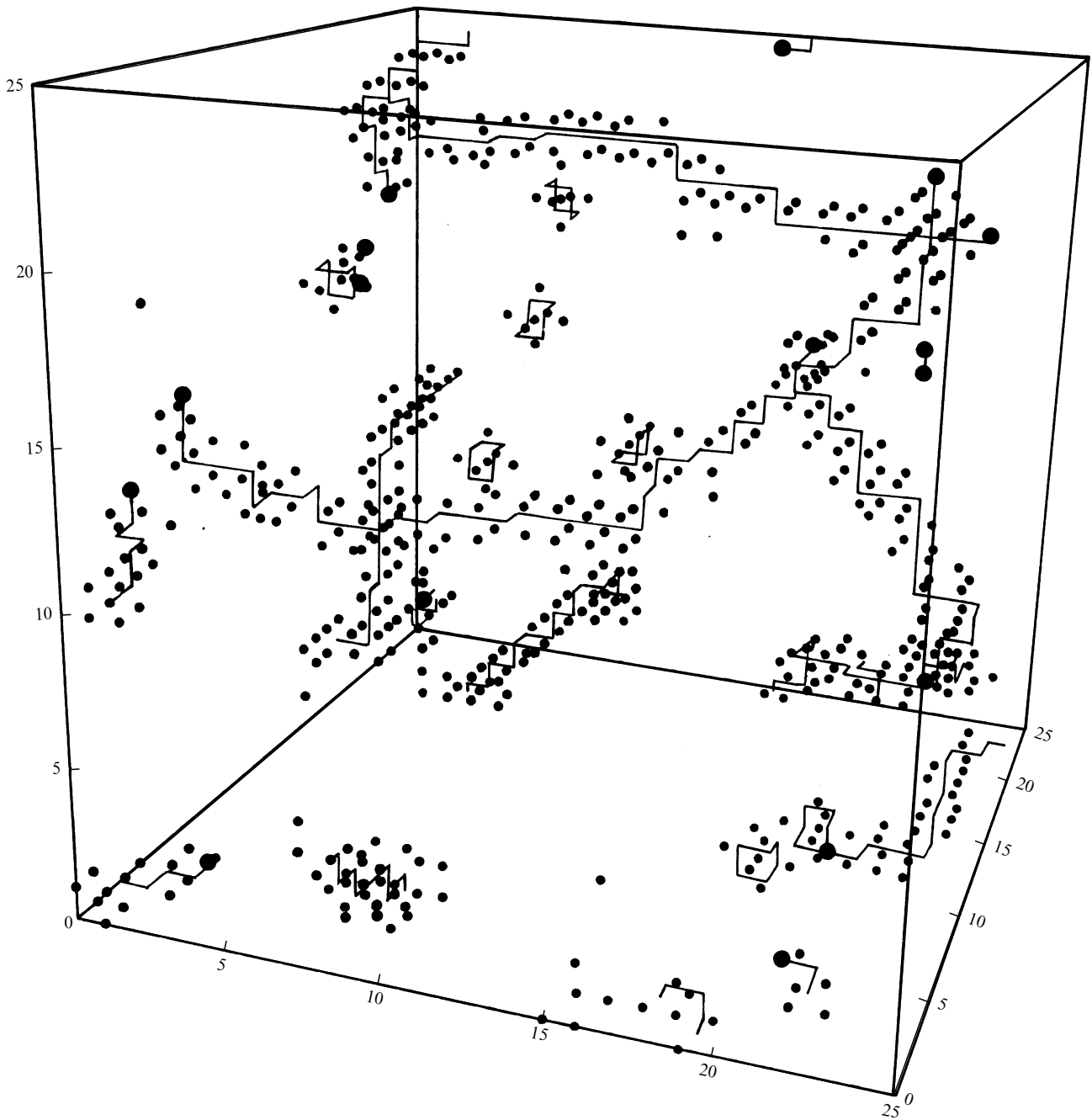


Рис. 13. Типичная конфигурация полей трехмерной компактной электродинамики на решетке 25^3 . Маленькими точками показаны области, где фиксируется калибровка Ландау, большие точки указывают положение монополей. Линии соответствуют струнам Дирака, которые занимают фиксированное положение при фиксированной калибровке

деле мы покажем, как теория фракталов применяется к проблеме фиксации калибровки.

Достаточно просто фиксировать калибровку $A_0 = 0$ в решеточной теории со свободными граничными условиями. Однако решеточный аналог калибровки Ландау ($\partial_\mu A_\mu = 0$) уже нетривиален даже для компактной электродинамики, так как задача оказывается существенно нелинейной. Корректной решеточной формулировкой калибровки Ландау является поиск следующего максимума:

$$\max_{\Omega_x} \sum_x F(x), \quad F(x) = \sum_{\mu=1}^D \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (\Omega_x^\dagger U_{x,\mu} \Omega_{x+\hat{\mu}}). \quad (12)$$

Дифференциальное условие экстремума, соответствующее этому максимуму, переходит в непрерывном пределе в $\partial_\mu A_\mu = 0$. Условие (12) нелокально, и обычно в численных расчетах много раз компьютер проходит по всем точкам решетки, максимизируя в каждой точке $F(x)$, при этом варьируется только Ω_x при фиксированных остальных Ω_y ($y \neq x$). Процесс достаточно быстро сходится, однако оказывается, что в ряде точек x функция $F(x)$ максимизируется намного хуже, чем в большинстве других точек на решетке.

В качестве примера приведем результаты работы [57], в которой фиксировалась калибровка Ландау для полей трехмерной компактной электродинамики, полученных для заряда $e^2 = 1/2, 3$ на решетке размера 25^3 . После

фиксации калибровки типичное значение функции $F(x)$ порядка 0,95. Однако в 3 % точек $F(x) < 0,77$. Эти точки, в которых трудно фиксировать калибровку, изображены маленькими кружками на рис. 13, взятом из работы [57]. Мы измерили фрактальную размерность областей, образованных этими точками, и оказалось, что $D_f \sim 1$. Так как в трехмерной электродинамике единственные известные одномерные объекты — это струны Дирака (которые в фиксированной калибровке занимают определенное положение), то легко догадаться, что именно они ответственны за области с малым $F(x)$ (области, где плохо фиксируется калибровка). На рис. 13 сплошными линиями показаны струны Дирака, а большими точками — монополи и антимонполи. На решетку наложены периодические граничные условия, поэтому струны Дирака, кажущиеся разрывными, в действительности либо замкнуты, либо начинаются на монополях и заканчиваются антимонполями. Если струна Дирака направлена по оси z , то ее вектор-потенциал в цилиндрических координатах имеет вид

$$\mathbf{A}^{\text{str}} = \vec{\phi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

если монополь расположен в начале координат, то в сферических координатах

$$\mathbf{A}^{\text{mon}} = \vec{\phi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}.$$

Ясно, что сингулярности в струнах Дирака и в монополях препятствуют фиксации калибровки.

Для $SU(3)$ -глюодинамики на решетке также исследовалась [56] калибровка Ландау. На рис. 14 кружками показана фрактальная размерность объектов, образованных точками, в которых есть сложности с фиксацией

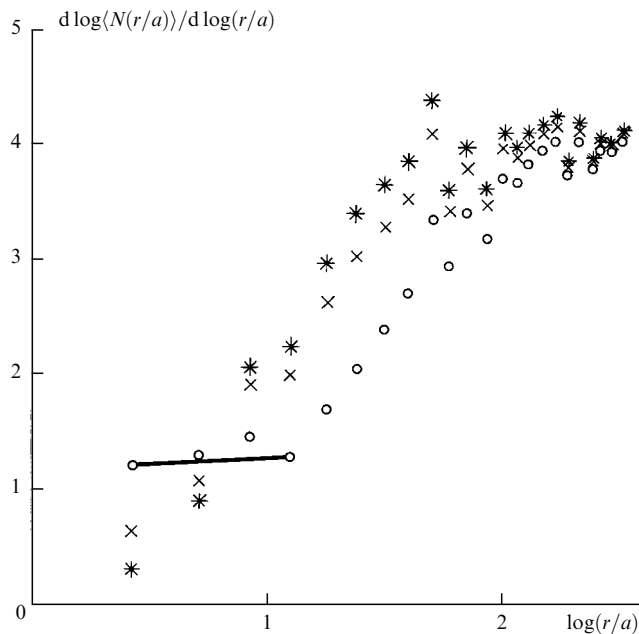


Рис. 14. Фрактальная размерность областей, где плохо фиксируется калибровка Ландау в $SU(3)$ -глюодинамике (○). Линия проведена на месте плато, которое соответствует $D_f \approx 1$. Аналогичные данные для максимальной абелевой проекции (×) плато не имеют. Для сравнения показаны также данные для случайно распределенных точек (*)

калибровки. Мы вычисляли функцию $f(R)$ по формуле (1), и на рис. 14 отложена зависимость³

$$D_f = \frac{\partial \ln f(R)}{\partial \ln R}. \quad (13)$$

При $R < R_{\text{max}} \sim 1,2$ ясно видно плато $D_f \sim 1$; при больших значениях R величина D_f стремится к размерности решетки, равной 4. Такое поведение D_f показывает, что существуют объекты с размерностью близкой к единице; их линейный размер меньше $2R_{\text{max}} \sim 2,5$. Объекты случайно распределены по решетке, поэтому, когда значение R велико (больше линейного размера объектов), D_f стремится к размерности решетки — к четырем. На рис. 14 звездочками показана размерность D_f , полученная по формуле (13) для случайно разбросанных по решетке точек. Видно, что D_f плавно увеличивается от нуля до четырех при изменении R от нуля до $R_1 \sim 1,5$. Никаких плато при малых R не наблюдается, и, когда R становится больше среднего расстояния между точками ($R \geq R_1$), значение D_f становится примерно равным размерности решетки — четырем. Величина R_1 , начиная с которой D_f для случайно разбросанных точек выходит на плато, конечно, зависит от плотности точек ρ . Мы подбирали ρ таким образом, чтобы R_1 было порядка R_{max} .

При максимальной абелевой проекции $SU(N) \rightarrow [U(1)]^{N-1}$ [31, 24, 25], которая обсуждалась в предыдущем разделе, также возникают области на решетке, в которых максимум (11) достигается гораздо хуже, чем в большинстве точек на решетке. Размерность этих областей, вычисленная по формуле (13), показана на рис. 14 крестиками. Видно, что D_f ведет себя так же, как и для случайного распределения. Все результаты, представленные на рис. 14, получены [56] путем обработки восьми независимых конфигураций $SU(3)$ -полей на решетке размера $24^3 \cdot 40$ для $g^2 = 1$ (g — затравочный заряд на решетке).

Таким образом, фиксация калибровки Ландау (12) выделяет в четырехмерной $SU(3)$ -глюодинамике некоторые одномерные объекты. Максимальная абелева проекция приводит к случайно разбросанным по решетке точечным объектам. Пока не известен физический смысл ни одномерных, ни точечных объектов. Одномерные объекты, возможно, связаны с динамикой невылечения, как показано в работе [56], они чувствительны к температурному фазовому переходу. В фазе конфайнмента, благодаря тому, что линии запутаны, их размерность больше единицы ($D_f \sim 1,3$ при $T \leq T_c$), в точке фазового перехода размерность скачком меняется и $D_f \sim 1$ при $T \geq T_c$.

6. Вихри и струны в XY-модели

Монополи, обсуждавшиеся в предыдущих разделах, — точечные объекты; их динамика в четырехмерном пространстве-времени определяется одномерными монополярными мировыми линиями. В настоящем разделе мы обсудим струноподобные объекты, которым соответствуют в четырехмерном пространстве-времени мировые поверхности. Будут рассмотрены дефекты, соответ-

³ В настоящем разделе мы полагаем длину шага решетки a равной единице.

ствующие "глобальным космическим струнам" [58]. Непертурбативное исследование этих объектов может быть важно, так как космические струны, возможно, ответственны за следующий сценарий образования галактик. При большой температуре (в ранней Вселенной) $U(1)$ -симметрия не нарушена, и существует конденсат струн. Это возможно благодаря тому, что коэффициент натяжения струны равен нулю в этой фазе, и рождение замкнутой струны не требует энергии. Во Вселенной сконденсированные струны образуют кластеры, размер которых порядка размера Вселенной (эффект перколяции). При понижении температуры происходит фазовый переход, соответствующий нарушению $U(1)$ -симметрии. Возникает отличное от нуля натяжение струны, и струны становятся массивными объектами. Маленькие замкнутые струны "схлопываются" и распадаются на голдстоуновские бозоны. Струны, имеющие размер порядка размера Вселенной, "замораживаются" и образуют стабильные массивные структуры, на которых происходит аккреция космической пыли, приводящая к образованию галактик.

Общая причина возникновения топологических дефектов — это компактность динамических переменных. Если в D -мерном пространстве имеется поле размерности⁴ k , то размерность соответствующего дефекта, живущего на дуальной решетке, равна $D - k - 2$ [59, 60]. В XY -модели, рассмотренной в Приложении, компактная динамическая переменная — это скалярное поле φ_i , прикрепленное к узлам решетки i , для него $k = 0$. Поэтому, как обсуждается в Приложении, размерность дефекта j (П.13) равна нулю для $D = 2$, единице для $D = 3$ и двум для $D = 4$. Для компактной электродинамики $k = 1$, $D = 4$ и размерность дефекта — тока монополя — равна единице, как и должно быть. Знаменитый фазовый переход Березинского–Костерлица–Таулеса [61, 62] в двумерной XY -модели обусловлен нульмерными вихрями. Для $D = 3$ и $D = 4$, как мы обсудим в настоящем разделе, динамика одномерных и двумерных вихрей также тесно связана с фазовым переходом.

Решеточная XY -модель — это дискретизованный вариант теории скалярного поля Φ с нарушенной глобальной $U(1)$ -симметрией. Потенциал в такой теории поля равен $\lambda(|\Phi|^2 - \Phi_0^2)^2$, при $\lambda \rightarrow \infty$ радиальная часть $|\Phi|$ замораживается и оставшаяся динамическая переменная φ компактна ($\Phi = |\Phi_0| \exp(i\varphi)$). В действии остается только кинетическая часть для поля φ . Решеточное действие (П.12) XY -модели фактически является кинетической энергией поля φ ; косинус в действии (П.12), который учитывает компактность, может быть заменен любой 2π -периодической функцией, такой, что

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{const} \cdot x^2.$$

Последнее условие означает, что в непрерывном пределе ($a \rightarrow 0$) решеточное действие S переходит в непрерывное

$$\beta \int (\nabla \varphi)^2 d^D x.$$

⁴ Мы обсуждаем поля, которые являются антисимметричными тензорами ранга k ; для скалярного поля $k = 0$, и поле прикреплено к узлу решетки, для калибровочного поля, принадлежащего ребру, $k = 1$, для "гиперполя" $h_{\mu\nu}(x) = -h_{\nu\mu}(x)$, принадлежащего плакету, $k = 2$ и т.д.

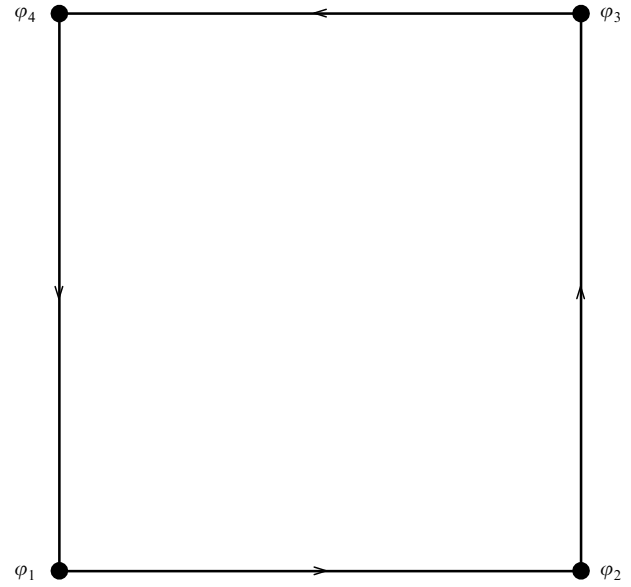


Рис. 15. Плакет и скалярные переменные φ_i

В скалярной теории с нарушенной глобальной $U(1)$ -симметрией существуют "глобальные струны" [58], которые в точности соответствуют топологическим дефектам в решеточной XY -модели, рассмотренным в Приложении. Действительно, при обходе вокруг струны скалярное поле Φ приобретает дополнительную фазу 2π [58]. Именно этому соответствует обход по плакету (рис. 15), приводящий к дефекту $j \neq 0$ (П.13), так как φ — фаза поля Φ .

Итак, топологические дефекты четырехмерной XY -модели — это глобальные струны, топологические дефекты в трехмерной XY -модели — это вихри в скалярной трехмерной теории, например, вихри в жидком гелии ниже λ -точки [63, 64]. Дефекты в трехмерной модели, конечно, могут рассматриваться и как специфические конфигурации спинов в трехмерном кристалле.

Перейдем к описанию результатов численных расчетов в XY -модели. Для $D = 3$ в модели с действием (П.12) существует фазовый переход при $\beta_c \approx 0,4542$ [65, 66] и $\beta_c \approx 0,32$ для $D = 4$ [60].

Для $D = 3$ и для $D = 4$ фрактальные свойства вихрей и струн оказываются такими же, как у линий монополей в электродинамике (раздел 3) и в глюодинимике (раздел 4). Ниже фазового перехода ($\beta < \beta_c$) размерность нетривиальна — для мировых поверхностей струн $D_f > 2$, для вихрей $D_f > 1$; для $\beta > \beta_c$ вихри и струны образуют кластеры с простой геометрией, и $D_f = 2$ для мировых поверхностей струн ($4DXY$) и $D_f = 1$ для вихрей ($3DXY$) [67, 60]. Перколяционные свойства дефектов в XY -модели также полностью аналогичны свойствам монополей: при $\beta < \beta_c$ существует ненулевая вероятность того, что две точки соединены вихревой линией для $D = 3$ или мировой поверхностью струны для $D = 4$, если расстояние между рассматриваемыми точками стремится к бесконечности. При $\beta > \beta_c$ эта вероятность равна нулю. Графики для зависимостей фрактальной размерности дефектов от β и конденсата C от β приведены в работах [67, 60], они полностью аналогичны рис. 7 и рис. 8. В районе фазового перехода происходит полная перестройка геометрии кластеров, образованных дефектами. Мы опишем свойства кластеров, которые

образованы замкнутыми поверхностями (мировыми поверхностями струн) на четырехмерной решетке. При β близком к нулю вероятность того, что данный плакет принадлежит к мировой поверхности струны, равна примерно $1/6$. На решетке существует один большой кластер со множеством ручек, имеются также маленькие кластеры (сателлиты), с топологией сферы (в дальнейшем мы для краткости будем называть их просто сферами). Поверхность сфер составляет порядка 0,1 % от поверхности большого кластера. Отдельные сателлиты с числом ручек не равным нулю (например, торы) наблюдаются с вероятностью меньшей, чем 10^{-5} . При увеличении β площадь поверхности большого кластера и число ручек уменьшается. Ситуация рядом с фазовым переходом $\beta \neq \beta_c$ следующая. Большой перколирующий кластер по-прежнему один, площадь его поверхности примерно в два раза меньше, чем при $\beta = 0$, сателлиты имеют площадь поверхности равную примерно 3 % от площади большого кластера, вероятность⁵ найти среди сателлитов объект с топологией тора равна примерно 0,1. При $\beta > \beta_c$ картина существенно меняется. Не существует отдельного большого кластера с линейным размером порядка размера решетки. Имеется много объектов с топологией тора, общая площадь всех кластеров быстро убывает с ростом β .

Для определения численных характеристик геометрии кластеров мы приведем данные для среднего числа ручек. Число ручек g связано с числом Эйлера

$$N_E = 2 - 2g, \quad (14)$$

которое легко рассчитать в нашем случае:

$$N_E = n_p - n_l + n_s; \quad (15)$$

здесь n_p — число плакетов, n_l — число ребер и n_s — число узлов, образующих рассматриваемую поверхность. На рис. 16, взятом из работы [60], показана зависимость числа ручек от "обратной температуры" β . Число ручек взято с весом пропорциональным площади данной поверхности:

$$\langle g \rangle = \frac{\sum_i g_i S_i}{V \sum_i S_i}, \quad (16)$$

здесь суммы в числителе и знаменателе берутся по всем кластерам, принадлежащим различным конфигурациям полей ϕ , разыгранным методом Монте-Карло для каждого значения β , g_i — число ручек данного кластера, S_i — площадь его поверхности. Множитель обратно пропорциональный объему решетки ($V = L^4$) включен для того, чтобы можно было сравнивать результаты, полученные на решетках различных размеров; на рис. 16 приведены результаты расчетов на решетке размера 8^4 ; при каждом значении β было исследовано 20 статистически независимых конфигураций полей. Из этого рисунка видно, что в "высокотемпературной фазе" ($\beta < \beta_c$) поверхности имеют нетривиальную топологию — большое число ручек — и величина $\langle g \rangle$ существенно отлична от нуля. Такое поведение поверхностей соответствует нулевому натяжению струны, приводящему к конденсату струн при $\beta < \beta_c$.

⁵ Все вероятности приведены для решетки размера 10^4 .

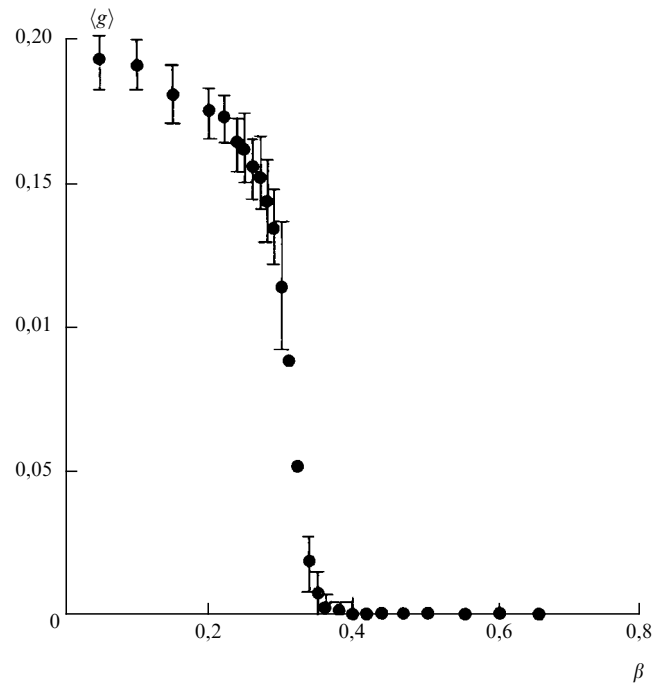


Рис. 16. Среднее число ручек на мировых поверхностях глобальных струн, взятое с весом пропорциональным площади

Таким образом, исследование дефектов в 3D- и 4DXY-моделях показывает, что ниже фазового перехода ($\beta < \beta_c$) они сконцентрированы, о чем свидетельствуют их перколяционные свойства, фрактальная размерность и геометрическая структура.

7. Заключение

В настоящем обзоре мы рассматривали в основном свойства топологических дефектов, исключение составляет раздел 2, в котором рассмотрена более стандартная задача — фрактальная размерность доменов вблизи фазового перехода. Помимо вынесенных в заглавие обзора фрактальных свойств, мы обсуждали также свойство перколяции кластеров и их геометрические характеристики (число Эйлера для мировых поверхностей струн). Основной вывод, который можно сделать из приведенных фактов — это то, что все эти характеристики хорошо "чувствуют" фазовый переход, их поведение различно в различных фазах. Скажем, можно показать, что главный вклад в конденсат C (7) дают слагаемые $\propto 1/\beta$ ниже фазового перехода и слагаемые $\propto \exp(-c\beta)$ выше фазового перехода. Такое поведение также характерно для фрактальной размерности кластеров дефектов и для числа ручек на мировых поверхностях струн.

Следует отметить, что существует хорошо развитая аналитическая теория абелевых топологических дефектов (монополей, вихрей и струн) [68, 69, 20, 70, 59, 71, 60]. В частности, можно явно записать операторы рождения топологического дефекта, конструкция таких нелокальных операторов весьма нетривиальна, и мы кратко опишем ее. Для этого полезно вспомнить оператор рождения заряженной частицы, предложенный Дираком [72]. При калибровочном преобразовании оператор заряженного поля материи преобразуется следующим образом: $\phi'(x) = \phi(x) \exp[i\alpha(x)]$. Оказывается, можно

предложить следующий калибровочно-инвариантный оператор:

$$\phi_c(x) = \phi(x) \exp \left\{ i \int B_k(x-y) A_k(y) dy \right\}. \quad (17)$$

Здесь B_k — функция Грина: $\partial_k B_k = \delta(x)$, A_μ — калибровочное поле, которое изменяется при калибровочных преобразованиях следующим образом: $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$. Очевидно, что $\phi_c(x)$ — калибровочно-инвариантный оператор, описывающий заряд, окруженный кулоновским облаком фотонов. Чтобы построить оператор рождения монополя [68, 69], вначале от компактной электродинамики нужно перейти к дуальной теории, которая является некоторым предельным случаем абелевой модели Хиггса. Поля материи теперь несут магнитный заряд, и применив к ним конструкцию Дирака (17), а затем возвратившись из дуальной теории в исходную теорию, мы получим оператор рождения монополя.

Другой пример — это оператор рождения [71] струны Абрикосова–Нильсена–Ольсена в абелевой модели Хиггса. Струна несет в себе замкнутый магнитный поток, и опять вначале мы должны перейти к дуальной теории, которая содержит калибровочное и гиперкалибровочное⁶ поля. Построив из калибровочного поля дуальной теории петлю Вильсона $\tilde{W}_C$, мы создаем магнитный поток вдоль контура C . Оператор $\tilde{W}_C$ калибровочно-инвариантен, но не гиперкалибровочно-инвариантен; применив конструкцию, аналогичную построению Дирака (17), получим гиперкалибровочно-инвариантный оператор в дуальной теории. Этот оператор, как показано в работе [71], является оператором рождения струны Абрикосова–Нильсена–Ольсена на контуре C . Если в предложенной конструкции положить электрический заряд равным нулю, то мы получим оператор рождения глобальной струны [70], которая обсуждалась в разделе 6. Более подробное описание аналитических подходов к исследованию топологических дефектов выходит за рамки настоящего обзора.

Вероятно, самым полезным приложением теории фракталов оказалось исследование механизма невылетания в $SU(2)$ -глюодинамике. Схожесть свойств монополярных токов в $SU(2)$ -глюодинамике и в компактной электродинамике, указывает на то, что в максимальной абелевой проекции $SU(2)$ -теории невылетание обусловлено конденсатом монополей и вакуум устроен подобно дуальному сверхпроводнику. Как отмечалось в конце раздела 4, несмотря на то, что общий сценарий невылетания понятен, существует много частных нерешенных вопросов. Например, существует бесконечно много проекций $SU(2) \rightarrow U(1)$, и в некоторых проекциях за невылетание ответственны не монополи, а другие топологические дефекты (минополи) [48]. Можно рассматривать монополи конечного размера — протяженные монополи; какого размера монополи ответственны за невылетание, еще предстоит выяснить.

Автор весьма обязан А. Ди Джакомо, Т.Л. Иваненко, Ж.-П. Паффути, А.В. Починскому, Ю.А. Симонову,

Я. Смиуту, А.И. Веселову и У. Визе за ценные обсуждения. Я также благодарен К. Гуаральдо, А. Селиванову, В.Г. Шевченко и Ю.А. Коржавину за предоставление вычислительной техники. Я чрезвычайно признателен Чанг-Йи Ченгу, который первый познакомил меня с теорией фракталов.

Работа частично финансировалась Международным научным фондом (грант MJM000), Японской физической ассоциацией (грант JSPS) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант 93-02-03609). Автор приносит глубокую благодарность упомянутым фондам.

Приложение

Краткое введение в решеточные теории

В настоящем Приложении представлены основные определения из теории поля на решетке. Автор отдает себе отчет в том, что для читателя, совершенно не знакомого с решеточными теориями, материала, изложенного ниже, недостаточно, и читателю необходимо ознакомиться, например, с книгой [73] или с обзором [74], чтобы в деталях понять содержание настоящей работы. Для читателя, хорошо знакомого с решеточными теориями, это Приложение еще более бесполезно, и ему можно его не читать.

Основная идея решеточной теории — это переход от бесконечномерного функционального интеграла в мнимом времени к конечномерному. Для этого четырехмерное (в общем случае D -мерное) пространство-время разбивают на решетку. Решетка в D -мерном евклидовом пространстве состоит из узлов (точек), ребер, плакетов (элементарных квадратов), элементарных кубов, ..., элементарных D -мерных гиперкубов. Легко понять, что на решетке с периодическими граничными условиями полное число узлов равно L^D , если на каждой из координатных осей лежит L узлов. На такой решетке DL^D ребер (из каждого узла в положительных направлениях смотрит D ребер); $[D(D-1)/2]L^D$ плакетов, $[D(D-1) \dots (D-d+1)/d!]L^D$ элементарных объектов размерности d . Динамические переменные (аналоги непрерывных полей), которые могут быть числами или элементами группы, могут быть прикреплены к узлам, ребрам, плакетам и т.д. Упомянем классический (и самый элементарный) пример — модель Изинга, в которой динамические переменные σ , принимающие значения ± 1 , прикреплены к узлам решетки. В общем случае скаляры ϕ_x прикреплены к узлам решетки (x — координата узла). Векторы $U_{x,\mu}$ прикреплены к ребрам, x — координата начала ребра, μ — его направление. Антисимметричные тензоры, например тензор напряженности, соответствуют плакетам и характеризуются двумя направлениями и координатой: $\theta_{x,\mu\nu}$.

В качестве действия теории поля на решетке можно взять любое выражение, которое в пределе, когда длина ребра решетки a стремится к нулю⁷, стремится к классическому выражению для действия. Простейший вариант — это замена производных конечными разностями на решетке, а интеграла по всему пространству —

⁶ Гиперкалибровочное поле $h_{\mu\nu} = -h_{\nu\mu}$ — это поле, лагранжиан которого инвариантен относительно гиперкалибровочных преобразований $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \chi_\nu - \partial_\nu \chi_\mu$, χ_μ — параметр гиперкалибровочно-го преобразования.

⁷ В обзоре, следуя общепринятым обозначениям, мы используем систему единиц, в которой $a = 1$, если это не затрудняет понимания материала. Иногда, для ясности, мы оставляем a в формулах.

суммой по всей решетке. Формулировка калибровочной теории на решетке требует осторожности. Дело в том, что если просто написать дискретный аналог непрерывного действия, то потеряется калибровочная инвариантность, что может привести к серьезным следствиям. Например, глюодинамика теряет свойство невылечения цвета [75, 76].

Первоначальный вариант решеточного действия для калибровочных полей [19, 77] был записан калибровочно-инвариантным образом:

$$S = \beta \left(1 - \sum_{x, \mu > \nu} \frac{1}{N} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} U_{x, \mu \nu} \right). \quad (\text{П.1})$$

Здесь суммирование идет по всем плакетам, $U_{x, \mu \nu}$ — плакетная переменная:

$$U_{x, \mu \nu} = U_{x, \mu} U_{x+\hat{\mu}, \nu} U_{x+\hat{\mu}, \mu}^+ U_{x, \nu}^+, \quad (\text{П.2})$$

$\hat{\mu}$ — единичный вектор, направленный по оси μ , а динамическая переменная $U_{x, \mu}$, прикрепленная к ребру решетки, является матрицей размера $N \times N$ и принадлежит представлению калибровочной группы G . Связь с калибровочным полем $\hat{A}_\mu$, которое соответствует алгебре G , следующая:

$$U_{x, \mu} = \exp[iag\hat{A}_\mu(x)], \quad (\text{П.3})$$

здесь g — затравочный заряд теории.

Если подставить это выражение в (П.1), рассмотреть лидирующее по a слагаемое и перейти от суммирования к интегрированию, то получим для $\beta = 2N/g^2$, что

$$S = \frac{1}{2} \int \operatorname{Tr} \hat{F}_{\mu\nu}^2 d^4x + O(a^6),$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu], \quad (\text{П.4})$$

т.е. решеточное действие (П.1) переходит в непрерывном пределе в стандартное действие калибровочных полей.

Производящий функционал квантовой глюодинамики выглядит стандартным образом:

$$\mathcal{Z} = \int DU \exp(-S), \quad (\text{П.5})$$

здесь $DU = \prod_{x, \mu} dU_{x, \mu}$ — интеграл по всем динамическим переменным. Действие S (П.1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$U'_{x, \mu} = \Omega_x U_{x, \mu} \Omega_{x+\mu}^+, \quad (\text{П.6})$$

здесь Ω_x — матрица калибровочных преобразований, прикрепленная к узлу x . Чтобы выражение (П.5) было калибровочно-инвариантно, необходимо, чтобы мера интегрирования обладала следующими свойствами: $dU_{x, \mu} = dU_{x, \mu} V_1 = dV_2 U_{x, \mu}$ для произвольных V_1 и V_2 , т.е. $dU_{x, \mu}$ — это мера Хаара для группы G . В непрерывном пределе ($a \rightarrow 0$), используя выражение (П.3), легко увидеть, что (П.6) соответствует обычному калибровочному преобразованию:

$$A_\mu \rightarrow \Omega^+ A_\mu \Omega + \frac{i}{g} \Omega^+ \partial_\mu \Omega.$$

Действие (П.1) не единственно, существует бесконечно много калибровочно-инвариантных действий на

решетке, которые в непрерывном пределе переходят в действие Янга–Миллса. Нетривиально, что в квантовом непрерывном пределе все численно исследованные действия дают для квантовой глюодинамики одинаковые (в пределах статистических ошибок) результаты. Это свойство "универсальности" можно теоретически доказать [78] для глюодинамики с большим числом цветов.

Одним из основных мотивов формулировки решеточных калибровочных теорий являлась перспектива получать физические результаты в виде ряда по обратному заряду ($1/g$), а не в виде стандартного ряда теории возмущений по g . В лидирующем порядке разложения сильной связи по $1/g$ было показано существование невылечения цветных зарядов [19]. Дальнейшие теоретические и численные исследования привели к выводу, что этот результат, вероятно, не имеет отношения к непрерывному пределу. Тем не менее оказалось, что решеточная формулировка позволяет получать (по крайней мере на суперкомпьютерах) физические результаты. В действительности до начала 80-х годов трудно было представить, что фейнмановский интеграл по путям для теории поля может быть исследован численно. Неожиданный успех, достигнутый Кройцем (см. книгу [73] и ссылки в ней) при генерации методом Монте-Карло решеточных калибровочных теорий, породил новое направление в физике сильных взаимодействий — численное моделирование квантовой хромодинамики. Решающим техническим приемом оказался метод Монте-Карло, который состоит в следующем⁸.

Предположим, нам нужно вычислить величину (аналог квантового среднего)

$$\langle F(U) \rangle = \frac{\int F(U) \exp[-S(U)] dU}{\int \exp[-S(U)] dU}, \quad (\text{П.7})$$

здесь $\int dU$ — некоторый конечномерный интеграл. Если случайно разбрасывать точки по области интегрирования (один набор точек U_i мы называем конфигурацией), то

$$\langle F(U) \rangle \approx \frac{\sum_{i=1}^N F(U_i) \exp[-S(U_i)]}{\sum_{i=1}^N \exp[-S(U_i)]}, \quad (\text{П.8})$$

равенство достигается в пределе, когда число конфигураций N стремится к бесконечности. Предложенная процедура, скорее всего, окажется численно чрезвычайно медленно сходящейся. Причина заключается в наличии экспоненты под знаком сумм в (П.8), для случайных U_i большинство конфигураций будет экспоненциально подавлено. Чтобы улучшить сходимость, конфигурации следует разбрасывать с плотностью вероятности

$$\rho(U) = \frac{\exp[-S(U)]}{\int \exp[-S(U)] dU}, \quad (\text{П.9})$$

⁸ Идея применить стохастические методы для решения уравнения Шрёдингера была впервые, по-видимому, высказана Ферми, который заметил, что уравнение диффузии с поглощением эквивалентно уравнению Шрёдингера в мнимом времени. В это время Ферми работал над лос-аламосским проектом, над которым также работал фон Нейман, предложивший знаменитый метод Монте-Карло для расчета рассеяния нейтронов. Замечание Ферми не было опубликовано, однако оно упоминается в работе [79].

теперь

$$\langle F(U) \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(U_i), \quad (\text{П.10})$$

и экспоненциально малые множители отсутствуют. Таким методом удастся проводить вычисления на достаточно больших решетках: например, рис. 14 из раздела 5 получен для $SU(2)$ -глюодинамики, помещенной на решетку размера $24^3 \cdot 40$, число ребер на этой решетке $N_l = 4 \cdot 24^3 \cdot 40$, и на каждом ребре вычисляется трехкратный интеграл (3 — число генераторов группы $SU(2)$), таким образом, вычислялся интеграл кратности $3N_l = 663520$. Успех в вычислениях интегралов такой кратности определяется не только хорошо разработанными методами Монте-Карло, но и тем, что физически интересны не сильно нелокальные величины, усредненные по всему объему решетки.

Первый вопрос, который возникает при анализе численных данных, — какое отношение к непрерывному пределу имеют полученные результаты? Непрерывный предел — это тот предел, когда не чувствуется дискретная структура решетки и нет влияния конечного объема решетки. С точки зрения решеточной теории такой предел должен наступать в точках фазового перехода второго рода. Так как при приближении к этим точкам корреляционная длина ξ стремится к бесконечности в решеточных единицах: $\xi/a \rightarrow \infty$ (a — длина ребра решетки), то физические величины, выражающиеся через ξ , не чувствуют решеточного шага a , другими словами, эффективно $a \rightarrow 0$. Для решеточной калибровочной $SU(N)$ -теории длина ребра решетки при достаточно малом затравочном заряде g следующим образом выражается через решеточный параметр обрезания Λ_L :

$$a = \frac{1}{\Lambda_L} \left[\frac{24\pi^2}{11} \frac{\beta}{N^2} \right]^{51/121} \exp \left\{ -\frac{12\pi^2}{11} \frac{\beta}{N^2} \right\}, \quad \beta = \frac{2N}{g^2}. \quad (\text{П.11})$$

Это выражение есть не что иное, как двухпетлевой вариант формулы асимптотической свободы

$$g^2 = \frac{1}{c \ln(p/A)},$$

где вместо внешнего импульса p использована обратная длина решетки $1/a$. Из (П.11) видно, что $a \rightarrow 0$ при $g \rightarrow 0$, т.е. наступает непрерывный предел теории. Однако численные расчеты невозможно проводить при слишком малом g , так как, чтобы иметь конечный физический объем решетки ($V = L^4 a^4$), требуется при $a \rightarrow 0$ рассматривать решетку со все большим числом узлов ($L \sim 1/a$). Число же динамических переменных ($\sim L^4$) ограничено мощностью компьютера. Таким образом, возникает задача об определении в конкретных расчетах наличия непрерывного предела. Так как единственным размерным параметром теории является длина ребра решетки, то размерные величины выражаются только через нее.

Самой простой и наиболее полно изученной физической величиной, полученной путем численного моделирования решеточных калибровочных теорий, является так называемое натяжение струны σ . Эта величина определяет силу взаимодействия бесконечно удаленных друг от друга, бесконечно тяжелых кварка и антикварка. Так как действие (П.1) и производящий функционал (П.5)

для глюодинамики не содержат размерных величин, то численно находится не коэффициент натяжения струны σ , а безразмерная величина $\chi = \sigma a^2$. В непрерывном пределе благодаря (П.11) известна зависимость χ от затравочного заряда g , такая зависимость действительно наблюдалась в численных экспериментах. Описанная процедура является стандартной проверкой существования непрерывного предела решеточной теории [73].

В разделах 3–6 настоящего обзора рассматриваются так называемые топологические дефекты — монополи, вихри и струны. Сейчас мы обсудим простейший топологический дефект, который возникает в XY -модели. Эта модель имеет действие

$$S = \beta \sum_{x,\mu} \cos(\varphi_x - \varphi_{x+\hat{\mu}}), \quad (\text{П.12})$$

константа β имеет смысл обратной температуры; суммирование проводится по всем ребрам решетки, которые определяются узлом x и направлением μ ; динамические переменные φ_x , определенные в узлах решетки, компактны: $-\pi < \varphi_x \leq \pi$. Косинус в (П.12) можно заменить любой 2π -периодической функцией, от этого динамические свойства модели качественно не изменяются. В такой модели существуют топологические возбуждения, которые определяются следующим образом. Рассмотрим элементарный плакет (см. рис. 15), к углам которого прикреплены компактные динамические переменные φ_i ($i = 1, \dots, 4$). Вычислим величину

$$*j = \frac{1}{2\pi} ([\varphi_1 - \varphi_2]_{2\pi} + [\varphi_2 - \varphi_3]_{2\pi} + [\varphi_3 - \varphi_4]_{2\pi} + [\varphi_4 - \varphi_1]_{2\pi}), \quad (\text{П.13})$$

где $[\alpha]_{2\pi}$ означает вычисление величины α по модулю 2π :

$$[\alpha]_{2\pi} = \alpha + 2\pi p, \quad -\pi < (\alpha + 2\pi p) \leq \pi.$$

Таким образом, ребрам 12, 23, 34 и 41 соответствуют целочисленные переменные $p_1, \dots, p_4$, через которые $*j$ выражается как

$$*j = p_1 + p_2 + p_3 + p_4. \quad (\text{П.14})$$

Если $*j \neq 0$, то можно сказать, что существует дислокация, которую для двумерной модели следует приписать центру рассматриваемого плакета. Для трехмерной модели дислокацию следует приписать ребру дуальной решетки⁹, который перпендикулярен плакету и проходит через его центр. В четырехмерном пространстве дислокация приписана плакету дуальной решетки, который перпендикулярен исходному плакету и проходит через его центр. Таким образом, дислокация находится на дуальной решетке, и мы используем обозначение $*j$, а не просто j .

Итак, из заданной конфигурации полей φ можно выделить дислокации $*j$. Имеют место два замечательных свойства $*j$. Во-первых, существует закон сохранения, который приводит к тому, что в трехмерной модели

⁹ Дуальная решетка определяется следующим образом. Исходная решетка смещается на полшага ($a/2$) по положительному направлению оси 1, оси 2, ..., оси D . Таким образом, узлы дуальной решетки оказываются в центрах элементарных D -мерных гиперкубов исходной решетки.

линии, образованные на дуальной решетке токами $*j$, замкнуты. В четырехмерной модели $*j$ образуют замкнутые поверхности. Этот закон сохранения есть решеточный аналог [70, 60] закона сохранения тока, соответствующего топологическому дефекту.

Для $D = 3$ дислокации $*j$ — это вихри, аналогичные вихрям в сверхтекучем гелии, для $D = 4$ плакетты на дуальной решетке с $*j \neq 0$ — это мировые поверхности замкнутых "глобальных струн" [58]. Более подробно физический смысл $*j$ обсуждается в разделе 6.

Второе важное свойство $*j$ — это топологический характер возмущений, которые приводят к $*j \neq 0$. Это очевидно хотя бы из того, что из непрерывных переменных φ_i мы построили целое число $*j$. Это значит, что достаточно малая, но конечная вариация φ_i не меняет $*j$, т.е. $*j$ — топологический заряд. Явный пример для рис. 15 следующий: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\varphi_2 = -\varphi_3 = -\pi + \delta$, тогда $*j = 1$, если $0 < \delta < \pi/2$.

Хрестоматийной иллюстрацией связи топологического дефекта с физическим явлением служит роль вихрей в динамике фазового перехода в двумерной XU -модели [61, 62, 20]. В разделе 6 мы обсуждаем свойства вихрей в трехмерной и четырехмерной XU -моделях. Монополи, изучаемые в разделах 3–5, так же как и вихри, являются топологическими дефектами в абелевых теориях. Единственное отличие состоит в том, что вихри строятся из переменных ϕ , прикрепленных к узлам решетки, а монополи — из векторных полей $\theta_{x,\mu}$, прикрепленных к ребрам решетки. Существует формализм дифференциальных форм на решетке [59, 60, 70], при помощи которого топологические дефекты описываются универсальным образом.

Список литературы

- Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: Freeman, 1982)
- Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **156** 147 (1987)
- Yi-Cheng Zhang, Serva M, Polikarpov M *J. Stat. Phys.* **58** 849 (1990)
- Gross D, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343 (1973)
- Politzer H *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346 (1973)
- Weinberg S *Phys. Rev. Lett.* **31** 474 (1973)
- Bali G S, Schilling K, Schlichter C Preprint CERN-TH.7413/94
- 't Hooft G, in *High Energy Physics* (Ed. M Zichichi) (Bologna: Editrice Compositori, 1976)
- Mandelstam S *Phys. Rep. C* **23** 245 (1976)
- Абрикосов А А *ЖЭТФ* **32** 1442 (1957)
- Поликарпов М И, Визе У *Письма в ЖЭТФ* **51** 296 (1990)
- Polikarpov M I *Phys. Lett. B* **236** 61 (1990)
- Engels J et al. *Nucl. Phys. B* **205** [FS5] 545 (1982)
- Kuti J, Polonyi J, Szlachany I *Phys. Lett. B* **98** 199 (1981)
- Polyakov A M *Phys. Lett. B* **72** 477 (1978)
- Domb C *J. Phys. A* **9** L14 (1976)
- Binder K *Ann. Phys.* **98** 390 (1976)
- Cambier J L, Nauenberg M, in *Proc. Sixth Trieste International Symposium on Fractals in Physics, ICTP, Trieste, Italy, July 9–12, 1985* (Eds L Pietronero, E Tosatti) (North-Holland, 1986)
- Wilson K *Phys. Rev. D* **10** 2445 (1974)
- Polyakov A M *Gauge Fields and Strings* (New York: Harwood, 1987)
- Banks T, Myerson R, Kogut J *Nucl. Phys. B* **129** 493 (1977)
- Cardy J L *Nucl. Phys. B* **170** [FS1] 369 (1980)
- Degrand T A, Toussaint D *Phys. Rev. D* **22** 2478 (1980)
- Kronfeld A S, Schierholz G, Wiese U-J *Nucl. Phys. B* **293** 461 (1987)
- Kronfeld A S et al. *Phys. Lett. B* **198** 516 (1987)
- Polley L, Polikarpov M I, Wiese U-J *Phys. Lett. B* **253** 212 (1991)
- Иваненко Т Л, Поликарпов М И, Починский А В *Письма в ЖЭТФ* **53** 517 (1991)
- Ivanenko T L, Pochinsky A V, Polikarpov M I *Phys. Lett. B* **302** 458 (1993)
- Essam J W, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Eds C Domb, M S Green) (London–New York: Academic Press, 1972) vol. 2
- Grimmett G *Percolation* (New York: Springer-Verlag, 1989)
- 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **190** [FS3] 455 (1981)
- Suzuki T *Proc. of the Symposium Lattice 92, Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **30** 176 (1993)
- Suzuki T, Yotsuyanagi I *Phys. Rev. D* **42** 4257 (1990)
- Bornyakov V G et al. *Phys. Lett. B* **261** 116 (1991)
- Singh V, Browne D, Haymaker R *Phys. Lett. B* **306** 115 (1993)
- Shiba H, Suzuki T Preprint Kanazawa Univ. 94-07 (Kanazawa, 1994)
- Stack J D, Neiman S D, Wensley R J Preprint ILL-(TH)-94-14 (Illinois, 1994)
- Shiba H, Suzuki T Preprint Kanazawa Univ. 94-12 (Kanazawa, 1994)
- Ivanenko T L, Polikarpov M I, Pochinsky A V *Phys. Lett. B* **252** 631 (1990)
- Kitahara S, Matsubara Y, Suzuki T Preprint Kanazawa Univ. 94-24 (Kanazawa, 1994)
- Kanaya K, Satz H *Phys. Rev. D* **34** 3193 (1986)
- Berg B *Phys. Lett. B* **104** 475 (1981)
- Iwazaki Y, Yoshie T *Phys. Lett. B* **127** 197 (1983)
- Teper M *Phys. Lett. B* **162** 357 (1985)
- Ilgenfritz E M et al. *Nucl. Phys. B* **268** 693 (1986)
- Campostrini M et al. *Phys. Lett. B* **225** 403 (1989)
- Polikarpov M I, Veselov A I *Nucl. Phys. B* **297** 34 (1988)
- Chernodub M N, Polikarpov M I, Veselov A I *Phys. Lett. B* **342** 303 (1995)
- Chernodub M N, Polikarpov M I, Zubkov M A *Proc. of the Symposium Lattice 93, Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **34** 256 (1994)
- Поликарпов М И, Чернодуб М Н *Письма в ЖЭТФ* **59** 439 (1994)
- Smit J, van der Sijs A *Nucl. Phys. B* **355** 603 (1991)
- 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **79** 276 (1974)
- Поляков А М *Письма в ЖЭТФ* **20** 430 (1974)
- Богомольный Е Б *ЯФ* **24** 449 (1976)
- Prasad M K, Sommerfield C H *Phys. Rev. Lett.* **35** 760 (1975)
- Polikarpov M I, Yee K *Phys. Lett. B* **333** 452 (1994)
- Polikarpov M I, Yee K, Zubkov M A *Phys. Rev. D* **48** 3377 (1993)
- Vilenkin A *Phys. Rep.* **121** 263 (1985)
- Ivanenko T L, Polikarpov M I Preprint ИТЭР-49 (Moscow, 1991)
- Букезов А К, Визе У-Е, Поликарпов М И, Починский А В *ЯФ* **56** 214 (1993)
- Березинский В Л *ЖЭТФ* **59** 907 (1970)
- Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C* **6** 1181 (1973)
- Onsager L *Nuovo Cimento* **6** 279 (1949)
- Feynman R *Proc. Low Temperature Phys.* (Amsterdam: North-Holland, 1955) vol. 1, ch. 2
- Williams G *Phys. Rev. Lett.* **59** 1926 (1987); *Erratum* **61** 1142 (1988)
- Shenoy S R Preprint Universität Karlsruhe, FRG (1989)
- Pochinsky A V, Polikarpov M I, Yurchenko B N *Phys. Lett. A* **154** 194 (1991)
- Fröhlich J, Marchetti P A *Europhys. Lett.* **2** 933 (1986)
- Fröhlich J, Marchetti P A *Commun. Math. Phys.* **112** 343 (1987)
- Polikarpov M I, Wiese U-J Preprint HLRZ 90-78 (Jülich, Germany, 1990)
- Polikarpov M I, Wiese U-J, Zubkov M A *Phys. Lett. B* **309** 133 (1993)
- Dirac P A M *Canad. J. Phys.* **33** 650 (1955)
- Creutz M *Quarks, Gluons and Lattices* (Cambridge University Press, 1985) [Кройц М *Кварки, глюоны и решетки* (Москва: Мир, 1987)]
- Макеенко Ю М *УФН* **143** 161 (1984)
- Patrascioiu A, Seiler E, Stamatescu I O *Phys. Lett. B* **107** 364 (1981)
- Seiler E, Stamatescu I O, Zwanziger D *Nucl. Phys. B* **239** 177 (1984)
- Polyakov A M *Phys. Rev. B* **59** 79 (1975)
- Makeenko Yu M, Polikarpov M I *Nucl. Phys. B* **205** [FS5] 386 (1982)
- Metropolis N, Ulam S *J. Amer. Stat. Assoc.* **247** 335 (1949)

**FRACTALS, TOPOLOGICAL DEFECTS AND CONFINEMENT
IN LATTICE GAUGE THEORIES****M.I. Polikarpov***Institute of Theoretical and Experimental Physics,**B. Cheremushkinskaya 25, 117259 Moscow, Russia**Tel. (7-095) 123-02 92**Fax (7-095) 123-65 84**E-mail: polykarp@vxitep.itep.ru; polykarp@vxdesy.desy.de*

Topological defects — monopoles, vortices, and strings — are discussed. It is shown that these objects form clusters with a nonintegral dimensionality, i.e. they are fractals. The fractal dimensionality reflects the physical properties of a system. In particular, studies of monopole current clusters in $U(1)$ and $SU(2)$ lattice gauge theories make it possible to identify the confinement mechanism. In the confinement phase the current lines of a magnetic monopole form a percolating cluster and these lines are so dense that their dimensionality exceeds unity, whereas in the nonconfinement phase their dimensionality is trivial: it is equal to unity. It is also shown that the tension in a string is proportional to the dimensionality of extended monopole currents. This is in agreement with a confinement model based on the condensation of magnetic monopoles into a superconducting phase. A string between a quark and an antiquark is then analogous to an Abrikosov filament in a superconductor. An account is given of the application of the theory of fractals in the problem of gauge fixing in lattice gauge theories. It is also demonstrated that in $SU(2)$ gluodynamics, domains of the deconfinement phase have a nonintegral dimensionality near a phase transition point. Apart from monopoles, the review deals also with the properties of vortex and string clusters in three-dimensional and four-dimensional XY models. The corresponding physical objects are vortices in liquid helium and 'global cosmic strings'.

PACS numbers: 02.20.Nq, 11.15.Ha, **11.25.-w**, **47.53.+n**

Bibliography — 79 references

Received 14 February 1995