

ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Критические явления в спиновых системах с беспорядком

Вик.С. Доценко

В обзоре излагаются теоретические подходы и идеи, развитые для вычисления сингулярностей термодинамических функций при фазовых переходах второго рода в спиновых системах со слабым замороженным беспорядком. В частности рассматриваются r -компонентные векторные магнетики и двумерная модель Изинга со случайными спин-спиновыми взаимодействиями. Предложено обобщение традиционной теории ренормгруппы, которое учитывает непертурбативные степени свободы спин-стекольной природы. Изучаются также низкотемпературные свойства и фазовый переход в изинговских системах со случайными магнитными полями.

PACS numbers: 05.70.Fh, **05.50.+q**, 05.70.Jk

Содержание

1. Введение (481).
 2. Скейлинговая теория критических явлений (482).
2.1. Общие принципы статистической механики. 2.2. Приближение среднего поля. 2.3. Теория Гинзбурга–Ландау. 2.4. Критические индексы. 2.5. Скейлинг. 2.6. Ренормгруппа и ϵ -разложение. 2.7. Теплоемкость в четырехмерной системе.
 3. Критическое поведение в системах с примесями (494).
3.1. Критерий Харриса. 3.2. Самоусреднение и метод реплик. 3.3. Критические индексы в теории ϕ^4 с беспорядком. 3.4. Критическое поведение теплоемкости в четырехмерной системе.
 4. Спин-стекольные эффекты в критических явлениях (500).
4.1. Непертурбативные степени свободы. 4.2. Нарушение репличной симметрии в теории ренормгруппы. 4.3. Скейлинговые свойства и нарушение репличной симметрии. 4.4. Нерешенные проблемы.
 5. Двумерная модель Изинга с примесями (510).
5.1. Особенности двумерной системы. 5.2. Фермионное решение. 5.3. Критическое поведение в модели с примесями. 5.4. Численные эксперименты. 5.5. Фазовая диаграмма.
 6. Изинговские системы со случайными магнитными полями (520).
6.1. Модель. 6.2. Общий подход. 6.3. Эффекты Гриффица в низкотемпературной области. 6.4. Фазовый переход.
 7. Заключение (526).
- Список литературы (527).

Вик.С. Доценко. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 117940 Москва, ул. Косыгина 2
Факс (095) 938-20-77, E-mail: dotsen@itp.ac.ru
Laboratoire de Physique Theorique, Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond, 75231 Paris, Cedex 05, France
Tel. (33-1) 47 07 71 46, Fax (33-1) 43 36 76 66
E-mail: dotsenko@physique.ens.fr

Статья поступила на английском языке 20 сентября 1994 г.;
перевод представлен 26 января 1995 г.,
после доработки 16 марта 1995 г.

Перевод на русский язык Вик.С. Доценко, М.Б. Кадомцев

1. Введение

Этот обзор посвящен теории критических явлений при фазовых переходах второго рода. В настоящее время принято считать, что, по крайней мере, на качественном уровне эта область статистической механики очень хорошо изучена. Более того, в отличие от многих других областей теоретической физики здесь в некоторых случаях можно даже говорить о *количественном* соответствии теории и эксперимента. В связи с этим может возникнуть (иллюзорное) чувство, будто в мире фазовых переходов едва ли можно было бы ожидать каких-либо качественно новых явлений. Цель данного обзора — показать, что подобная убежденность является ошибочной.

Теория критических явлений имеет дело с макроскопическими статистическими системами, находящимися вблизи точки фазового перехода, где происходит спонтанное нарушение симметрии. Наблюдаемые физические явления в этой ситуации характеризуются крупномасштабными неустойчивостями, или флуктуациями (к сожалению, тому есть много примеров даже в повседневной жизни). Согласно традиционной скейлинговой теории фазовых переходов второго рода, крупномасштабные флуктуации характеризуются некоторым главным масштабом, называемым обычно корреляционной длиной R_c . При приближении к критической точке корреляционная длина растет и в этой точке становится бесконечной. Крупномасштабные флуктуации приводят к сингулярностям в макроскопических наблюдаемых характеристиках системы. Эти сингулярности являются главным предметом исследования теории.

Первоначально при изучении фазовых переходов второго рода обычно предполагалось, что рассматриваемые системы являются идеально однородными. В реальных образцах, однако, всегда присутствуют какие-либо дефекты и примеси. Поэтому вполне естественным является вопрос о влиянии слабого беспорядка на фазовые переходы.

Много лет назад доминировала точка зрения, что примеси либо полностью разрушают крупномасштабные флуктуации и в результате сингулярности термодинамических функций "сглаживаются", либо только сдвигают критическую точку, но на само критическое поведение влияния не оказывают. Позднее удалось понять, что возможна качественно иная ситуация, когда достаточно близко к точке перехода благодаря примесям устанавливается новый критический режим, который описывается новыми *универсальными* критическими индексами. Однако согласно самым последним исследованиям появились указания на то, что ситуация может оказаться значительно более сложной. А именно, благодаря слабому беспорядку вблизи точки перехода может устанавливаться совершенно новый тип критических явлений спин-стекольной природы. Рассмотрение эффектов, производимых слабым беспорядком вблизи критической точки является главной темой этого обзора.

В определенной степени обзор носит педагогический характер¹ и содержит все необходимые сведения и методы, для того чтобы дать возможность читателю "войти" в данную область исследований, не обращаясь к многочисленным ссылкам. Предполагается, что читатель не обязан знать ничего кроме основных принципов статистической механики. Единственным исключением является четвертый раздел, где без детальных объяснений используются элементы теории спиновых стекол и формализм алгебры нарушения репличной симметрии (с этими понятиями можно ознакомиться, например, в обзоре [9] или книге [11]). Все вычисления (хотя иногда и довольно громоздкие, где этого невозможно избежать) производятся на максимально элементарном уровне. Однако упор делается на качественные физические явления и идеи.

Раздел 2 посвящен систематическому изложению традиционной скейлинговой теории критических явлений, включая ϵ -разложение. Уже много лет, как этот предмет вошел в учебники [1–3], поэтому читатель, знакомый с этой областью, может с легкостью пропустить данный раздел.

В разделе 3 вводится понятие в замороженного беспорядка. Здесь обсуждается физическая идея самоусреднения и в общих терминах рассматривается технический прием, известный как метод реплик. Кроме этого в рамках теории ренормгруппы (РГ) рассматривается традиционная процедура вычислений, позволяющая получить новый универсальный критический режим, который возникает в векторных ферромагнитных спиновых системах со слабым беспорядком.

В разделе 4 рассматривается обобщение теории ренормгруппы, которое позволяет учитывать непертурбативные степени свободы спин-стекольной природы. Здесь показано, что во всех случаях, когда наличие беспорядка существенно для критических явлений, традиционные ренормгрупповые "потoki" (которые описывают новый универсальный критический режим в системах с беспорядком) являются неустойчивыми по отношению к возмущениям спин-стекольного типа. При этом оказывается, что в такой ситуации в общем случае не существует устойчивых фиксированных точек, и ренорм-

групповые потоки приводят к режиму так называемой *сильной связи* на конечных пространственных масштабах. Далее в этом разделе изучаются возможные последствия подобного явления для наблюдаемых физических величин и обсуждается возможность установления вблизи точки перехода совершенно нового типа критического поведения спин-стекольной природы.

В разделе 5 вычисляются критические свойства двумерной модели Изинга с примесями. Здесь выводится точное решение для критического поведения теплоемкости, обсуждаются результаты последних численных экспериментов, и на качественном уровне рассматривается структура фазовой диаграммы.

В разделе 6 изучаются изинговские спиновые системы, в которых замороженный беспорядок присутствует в виде случайных магнитных полей. Свойства статистических систем подобного типа существенно отличаются от моделей, рассмотренных в предыдущих разделах. Изинговские системы со случайными полями представляют особый интерес главным образом по двум причинам. Во-первых, потому, что они имеют многочисленные экспериментальные реализации, и, во-вторых, потому, что несмотря на интенсивные теоретические и экспериментальные исследования на протяжении последних двадцати лет, к настоящему времени даже на качественном уровне достигнут весьма и весьма скромный прогресс в понимании их основных термодинамических свойств.

Заключение написано главным образом для того, чтобы сообщить читателю, какая на самом деле основная идея заключена в тексте данного обзора.

2. Скейлинговая теория критических явлений

2.1. Основные принципы статистической механики

В наиболее общем виде основные принципы статистической механики могут быть сформулированы следующим образом. Пусть микроскопические состояния некоторой *микроскопической* системы, содержащей большое число степеней свободы, описывается конфигурациями N переменных $\{s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Главная величина, которая характеризует микроскопическое состояние, называется *энергией* H и она задается как некоторая функция микроскопических переменных $\{s_i\}$

$$H = H(s_1, s_2, \dots, s_N) \equiv H[s].$$

Эволюция во времени микроскопического состояния системы определяется некоторыми динамическими дифференциальными уравнениями. Кроме этого, предполагается, что никакая реальная система не может быть идеально изолированной от окружающего мира, и взаимодействие с окружающей средой (термостатом) проявляется в виде так называемого *белого шума* в точных динамических уравнениях. Термодинамический белый шум действует как случайная некоррелированная сила, которая приводит к некоторой стохастизации и перемешиванию точных динамических траекторий.

Пусть $A[s]$ — некоторая наблюдаемая величина. Статистическая механика занимается изучением *усредненных* значений наблюдаемых величин. Другими словами, вместо отслеживания точных (меняющихся во времени) значений величины $A[s(t)]$ вводится понятие

¹ Обзор написан на основе курса лекций для студентов Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау.

среднего

$$\langle A \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A[s(t')], \quad (2.1)$$

которое формально может быть получено лишь в результате наблюдения в течение бесконечного интервала времени.

Фундаментальная гипотеза равновесной статистической механики состоит в следующем. Предполагается, что в результате перемешивания динамических траекторий за бесконечное время наблюдения система "посещает" все свои микроскопические состояния по многу раз, и поэтому среднее значение любой наблюдаемой величины (2.1) за бесконечное время может быть получено усреднением по ансамблю состояний системы:

$$\langle A \rangle = \int ds_1 ds_2 \dots ds_N A[s] P(s_1, s_2, \dots, s_N). \quad (2.2)$$

Здесь введена некоторая функция $P[s]$, которая называется *распределением вероятностей* микроскопических состояний системы. Другими словами, считается, что благодаря перемешиванию динамических траекторий вместо решения точных динамических уравнений система может быть описана статистическим образом в терминах функции распределения вероятностей ее микроскопических состояний. Какова бы ни была эта функция, она должна быть нормированной

$$\int ds_1 ds_2 \dots ds_N P(s_1, s_2, \dots, s_N) = 1. \quad (2.3)$$

Фундаментальной величиной статистической механики, которая описывает свойства функции распределения вероятностей, является энтропия. Она определяется как среднее от логарифма функции распределения:

$$S = -\langle \log(P[s]) \rangle \equiv - \int ds_1 ds_2 \dots ds_N P[s] \log(P[s]). \quad (2.4)$$

Прежде всего из этого определения очевидно, что благодаря нормировке (2.3) величина энтропии, по крайней мере, не отрицательна. В некотором смысле величина энтропии может указывать, в какой степени распределение вероятностей системы "упорядочено". Рассмотрим простой иллюстративный пример. Пусть (дискретные) микроскопические состояния системы занумерованы индексом α и допустим, что распределение вероятностей таково, что только L из всех состояний системы имеют ненулевые и равные вероятности. Тогда, благодаря нормировке (2.3), вероятность каждого из таких состояний будет равна $1/L$. Согласно определению энтропии, получаем

$$S = - \sum_{\alpha}^L P_{\alpha} \log P_{\alpha} = \log L.$$

Поэтому, чем более широким является распределение (чем больше L), тем больше величина энтропии. С другой стороны, чем более концентрированной является функция распределения, тем меньше величина энтропии. В

предельном случае, когда с ненулевой вероятностью система может занимать лишь одно микроскопическое состояние, энтропия равна нулю. В некотором смысле величину $\exp(S)$ можно интерпретировать как среднее число микроскопических состояний, занимаемых системой с не малой вероятностью.

Рассмотрим теперь из общих соображений, каким должен быть вид функции распределения. Согласно основной гипотезе статистической механики для средней величины энергии системы имеем

$$E \equiv \langle H \rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha} H_{\alpha}. \quad (2.5)$$

Взаимодействие системы с окружающим миром (термостатом) производит два фундаментальных эффекта. Во-первых, среднее значение энергии системы в термодинамическом равновесии сохраняется. Во-вторых, по каким-то причинам природа устроена таким образом, что, каким бы ни было внутреннее устройство системы, величина ее энтропии в равновесном состоянии стремится стать максимально возможной (ограничение здесь накладывает только условие постоянства энергии). В некотором смысле это естественно: случайный шум, возникающий из-за взаимодействия с термостатом, стремится сделать систему максимально неупорядоченной. Посмотрим теперь, какой должна быть функция распределения, максимизирующая энтропию. Чтобы учесть ограничения, связанные с условиями постоянства энергии (2.5) и нормировки $\sum_{\alpha} P_{\alpha} = 1$, удобно воспользоваться методом лагранжевых множителей. Таким образом, требуется найти максимум следующего выражения по отношению ко всем возможным распределениям P_{α}

$$S_{\beta, \gamma}[P] = - \sum_{\alpha} P_{\alpha} \log(P_{\alpha}) - \beta \left(\sum_{\alpha} P_{\alpha} H_{\alpha} - E \right) - \gamma \left(\sum_{\alpha} P_{\alpha} - 1 \right), \quad (2.6)$$

где β и γ — лагранжевы множители. Варьирование по отношению к P_{α} дает

$$P_{\alpha} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_{\alpha}), \quad (2.7)$$

где величина

$$Z = \sum_{\alpha} \exp(-\beta H_{\alpha}) = \exp(\gamma + 1) \quad (2.8)$$

называется статистической суммой, а параметр β , называемый обратной температурой, определяется из условия

$$\frac{1}{Z} \sum_{\alpha} H_{\alpha} \exp(-\beta H_{\alpha}) = E. \quad (2.9)$$

На практике обычно исходным параметром является температура, а средняя энергия находится как функция температуры из определения (2.9).

Другой фундаментальной величиной статистической механики является свободная энергия, определяемая следующим образом

$$F = E - TS, \quad (2.10)$$

где величина $T = 1/\beta$ называется температурой. Используя результат (2.7), можно легко вывести следующие основные соотношения между свободной энергией, статистической суммой, энтропией и средней энергией

$$F = -T \log(Z), \quad (2.11)$$

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad (2.12)$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log(Z) = F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}. \quad (2.13)$$

Заметим, что согласно определению (2.10) принцип максимума энтропии эквивалентен принципу минимума свободной энергии. Можно легко проверить, что если в качестве исходной величины рассматривать свободную энергию (а не энтропию), то минимизация ее по отношению ко всем возможным функциям распределения приводит к тому же результату (2.7).

2.2. Приближение среднего поля

В магнетиках микроскопическое состояние системы определяется величинами локальных спиновых намагниченностей. Во многих магнитных системах электроны, которые определяют магнитное поведение, локализованы вблизи атомов кристаллической решетки, а силы, которые определяют их взаимную ориентацию, создаются короткодействующими обменными взаимодействиями.

На качественном уровне подобные системы хорошо описываются моделью Изинга. Микроскопическими переменными в таких системах являются изинговские спины σ_i , которые по определению принимают лишь два значения $+1$ или -1 , а энергия микроскопического состояния, как функция ориентаций всех изинговских спинов, записывается в следующем виде (в дальнейшем такая функция будет называться гамильтонианом)

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i. \quad (2.14)$$

Здесь $\langle i, j \rangle$ обозначает суммирование по парам ближайших соседей кристаллической решетки, J_{ij} — это величины спин-спиновых взаимодействий, а h — это внешнее магнитное поле. Если все взаимодействия J_{ij} равны между собой и положительны, то такой гамильтониан описывает ферромагнитную модель Изинга. В противном случае, если все взаимодействия отрицательны, мы имеем антиферромагнитную модель Изинга.

Несмотря на кажущуюся простоту, точное решение (т.е. вычисление статистической суммы и корреляционных функций) для модели Изинга найдено только для одномерных и двумерных моделей в нулевом внешнем поле. Во всех остальных случаях приходится прибегать к приближенным методам. Простейший из таких методов называется приближением среднего поля. Во многих случаях этот метод позволяет получать результаты, которые в действительности не так уж далеки от реальных, и часто с помощью этого метода можно получить качественное представление о том, какие физические явления происходят в той или иной системе.

Исходной точкой приближения среднего поля является предположение о структуре функции распределения. А именно, предполагается, что в равновесном

состоянии функция распределения факторизуется на произведение независимых функций распределения в узлах решетки

$$P[\sigma] = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H[\sigma]) \simeq \prod_i P_i(\sigma_i). \quad (2.15)$$

Для нормированных узельных функций распределения рассматривается следующий анзац

$$P_i(\sigma_i) = \frac{1 + \phi_i}{2} \delta(\sigma_i - 1) + \frac{1 - \phi_i}{2} \delta(\sigma_i + 1), \quad (2.16)$$

где ϕ_i — это некоторые параметры, которые нужно будет определить, исходя из общих принципов, например, из условия минимума соответствующей свободной энергии.

Подобная факторизация функции распределения (2.15) означает, что среднее от любого произведения любых функций в различных узлах также факторизуется на произведение независимых средних

$$\langle f(\sigma_i) g(\sigma_j) \rangle = \langle f(\sigma_i) \rangle \langle g(\sigma_j) \rangle, \quad (2.17)$$

где согласно анзацу (2.15)

$$\langle f(\sigma_i) \rangle = \frac{1 + \phi_i}{2} f(1) + \frac{1 - \phi_i}{2} f(-1). \quad (2.18)$$

В частности для средних узельных намагниченностей мы находим

$$\langle \sigma_i \rangle = \phi_i. \quad (2.19)$$

Поэтому параметры $\{\phi_i\}$ в пробной функции распределения описывают средние узельные намагниченности.

С помощью уравнений (2.15) и (2.16) для энтропии и средней энергии получаем

$$\begin{aligned} S &= -\langle \log(P[\sigma]) \rangle \simeq -\sum_i \langle \log(P_i(\sigma_i)) \rangle = \\ &= -\sum_i \left[\frac{1 + \phi_i}{2} \log\left(\frac{1 + \phi_i}{2}\right) + \frac{1 - \phi_i}{2} \log\left(\frac{1 - \phi_i}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} \phi_i \phi_j - h \sum_i \phi_i. \quad (2.21)$$

Соответственно, для свободной энергии (2.10) находим

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2} \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} \phi_i \phi_j - h \sum_i \phi_i + \\ &+ T \sum_i \left[\frac{1 + \phi_i}{2} \log\left(\frac{1 + \phi_i}{2}\right) + \frac{1 - \phi_i}{2} \log\left(\frac{1 - \phi_i}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для большей конкретности рассмотрим ферромагнитную систему на D -мерной кубической решетке. Пусть все спин-спиновые взаимодействия равны некоторой положительной константе $J_{ij} = J/2D > 0$ (множитель $1/2D$ добавлен просто для удобства). В такой модели каждый спин имеет $2D$ ближайших соседей. Поскольку система однородна, естественно предположить, что все параметры ϕ_i тоже должны быть равны между собой:

$\phi_i = \phi$. В этом случае для свободной энергии (2.22) находим

$$\frac{F}{V} \equiv f(\phi) = -\frac{1}{2} J \phi^2 - h \phi + T \left[\frac{1+\phi}{2} \log \left(\frac{1+\phi}{2} \right) + \frac{1-\phi}{2} \log \left(\frac{1-\phi}{2} \right) \right], \quad (2.23)$$

где V — это объем системы и f — плотность свободной энергии.

Необходимым условием минимума функции f является $df(\phi)/d\phi = 0$, или

$$-J\phi - h + T \operatorname{arctanh}(\phi) = 0. \quad (2.24)$$

В результате мы получаем уравнение, которое определяет величину параметра порядка ϕ

$$\phi = \tanh[\beta(J\phi + h)]. \quad (2.25)$$

Заметим теперь, что условием минимума свободной энергии является $d^2f/d\phi^2 > 0$. С помощью (2.24) находим

$$\frac{1}{1-\phi^2} > \beta J. \quad (2.26)$$

Рассмотрим сначала случай нулевого магнитного поля ($h = 0$). Легко видеть, что если $T > T_c = J$, то единственным решением уравнения (2.25): $\phi = \tanh(\beta J \phi)$ является $\phi = 0$, и это решение удовлетворяет условию (2.26). Таким образом, при всех температурах выше T_c минимум свободной энергии достигается в состоянии, в котором средние спиновые намагниченности равны нулю.

Однако при $T < T_c$, кроме решения $\phi = 0$ уравнение $\phi = \tanh(\beta J \phi)$ имеет два нетривиальных решения $\phi = \pm \phi(T) \neq 0$. Легко проверить, что в этой области температур решение $\phi = 0$ становится максимумом, а не минимумом свободной энергии, а минимум достигается при $\phi = \pm \phi(T)$. Поэтому в низкотемпературной области $T < T_c$ свободная энергия имеет два минимума, которые характеризуются ненулевыми средними спиновыми намагниченностями противоположного знака.

Вблизи T_c намагниченность $\phi(T)$ мала. В этом случае в уравнении (2.25) можно сделать разложение по степеням ϕ . В главном порядке по $\tau \equiv (T/T_c - 1)$, $|\tau| \ll 1$, находим

$$\phi(T) = \text{const } |\tau|^{1/2} \quad (\tau < 0). \quad (2.27)$$

Поэтому при $T \rightarrow T_c$ снизу, $\phi(T) \rightarrow 0$.

Соответственно разложение свободной энергии (2.23), как функции малого параметра ϕ , имеет вид

$$f(\phi) = \frac{1}{2} \tau \phi^2 + \frac{1}{4} g \phi^4 - h \phi, \quad (2.28)$$

где $g = T/3$ и для простоты мы будем считать, что $J = 1$. Качественный вид функции $f(\phi)$ при $T > T_c$ ($\tau > 0$) и при $T < T_c$ ($\tau < 0$) показан на рис. 1. Заметим, что поскольку полная свободная энергия F пропорциональна объему системы, величина барьера свободной энергии, разделяющего состояния $\phi = \pm \phi(T)$ при $T < T_c$ также пропорциональна объему системы. Поэтому в *термодина-*

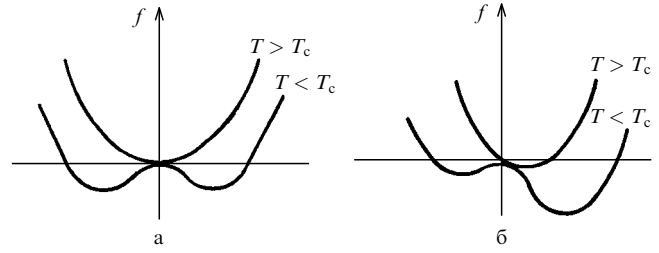


Рис. 1. Свободная энергия ферромагнитной модели Изинга (а) в нулевом магнитном поле и (б) в ненулевом внешнем магнитном поле

мическом пределе $V \rightarrow \infty$ (который как раз и соответствует рассмотрению макроскопических систем) барьер, разделяющий эти два состояния, становится бесконечным.

Приведенный выше простой анализ на качественном уровне дает представление о фундаментальном явлении, которое называется спонтанным нарушением симметрии. При температуре $T = T_c$ происходит фазовый переход второго рода. При этом в области температур $T < T_c$ симметрия по отношению к глобальному изменению знака всех спинов оказывается нарушенной, и в системе возникает два (вместо одного) основных состояния. Эти два состояния отличаются знаком средней спиновой намагниченности, причем в пространстве состояний они разделены макроскопическим барьером свободной энергии.

В слабом магнитном поле ($h \ll 1$) качественный вид свободной энергии показан на рис. 1б. В точке фазового перехода уравнение $df/d\phi = 0$ имеет вид

$$\tau \phi + g \phi^3 = h. \quad (2.29)$$

Это уравнение имеет ненулевое решение для параметра порядка ϕ при всех температурах. В частности, в низкотемпературной области ($\tau < 0$) находим

$$\phi \simeq \begin{cases} \left(\frac{|\tau|}{g} \right)^{1/2} + \frac{h}{2\tau}, & h \ll h_c(\tau), \\ \left(\frac{h}{g} \right)^{1/3}, & h \gg h_c(\tau), \end{cases} \quad (2.30)$$

где

$$h_c(\tau) = \frac{1}{\sqrt{g}} |\tau|^{3/2}. \quad (2.31)$$

В высокотемпературной области ($\tau > 0$) находим

$$\phi \simeq \begin{cases} \frac{h}{\tau}, & h \ll h_c(\tau), \\ \left(\frac{h}{g} \right)^{1/3}, & h \gg h_c(\tau). \end{cases} \quad (2.32)$$

Поэтому при $h \neq 0$ фазовый переход оказывается "размытым" в температурном интервале $|\tau| \sim h^{2/3}$ (уравнение (2.31)) вблизи T_c . Таким образом, в ненулевом внешнем магнитном поле настоящего фазового перехода спонтанного нарушения симметрии не существует.

Физическая величина, которая описывает отклик системы на бесконечно малое внешнее поле, называется

магнитной восприимчивостью. Она определяется следующим образом

$$\chi = \left. \frac{\partial \phi}{\partial h} \right|_{h=0}. \quad (2.33)$$

Согласно (2.30)–(2.32) вблизи критической точки магнитная восприимчивость оказывается расходящейся

$$\chi \simeq \begin{cases} \tau^{-1}, & T > T_c, \\ \frac{1}{2} |\tau|^{-1}, & T < T_c. \end{cases} \quad (2.34)$$

Соответственно для так называемой нелинейной восприимчивости $\chi(h) = \partial \phi / \partial h$ в критической точке ($g^{-1/2} |\tau|^{3/2} \ll h$) находим

$$\chi(h) \simeq h^{-2/3}. \quad (2.35)$$

Еще одной физической величиной, которая описывает поведение системы вблизи точки фазового перехода, является теплоемкость

$$C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}. \quad (2.36)$$

Согласно (2.27) и (2.28) для теплоемкости вблизи критической точки (в нулевом внешнем поле) имеем

$$C \simeq \begin{cases} \text{const} = \frac{1}{2g}, & T > T_c, \\ 0, & T < T_c. \end{cases} \quad (2.37)$$

Разумеется, рассмотренный выше анализ поведения системы при фазовом переходе в рамках довольно примитивного приближения среднего поля нельзя считать надежным. Тем не менее на качественном уровне он демонстрирует очень важное физическое явление: вблизи точки фазового перехода второго рода по крайней мере некоторые физические величины могут оказаться сингулярными.

Рассмотрим теперь простое и естественное улучшение приближения среднего поля.

2.3. Теория Гинзбурга–Ландау

Самым главным и очевидным дефектом рассмотренного выше приближения среднего поля является то, что оно не учитывает корреляции между спинами. Оказывается, что если интересоваться вкладом в термодинамику лишь от степеней свободы, соответствующих большим пространственным масштабам (а именно они, как мы увидим ниже, ответственны за главные сингулярности термодинамических функций), то приближение среднего поля легко обобщить с учетом спиновых корреляций. В этом случае параметр порядка ϕ_i является почти пространственно однородным и поэтому может быть представлен как медленно меняющаяся в пространстве функция (с малыми градиентами), зависящая от непрерывных пространственных координат. При этом член в гамильтониане (2.14), который описывает спиновые взаимодействия, может быть представлен следующим образом

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \phi_i \phi_j \rightarrow \frac{1}{2} \int d^D x [\phi^2(x) + (\nabla \phi(x))^2]. \quad (2.38)$$

Соответственно, с учетом лишь малых пространственных градиентов параметра порядка полный гамильтониан системы может быть представлен следующим образом

$$H = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} \tau \phi^2(x) + \frac{1}{4} g \phi^4(x) - h \phi(x) \right]. \quad (2.39)$$

Теория, которая основана на подобном представлении гамильтониана, называется теорией Гинзбурга–Ландау. В действительности гамильтониан Гинзбурга–Ландау представляет собой просто первые несколько членов разложения по степеням малых параметров ϕ и $(\nabla \phi)$. Вблизи точки фазового перехода второго рода, где параметр порядка является малой величиной и главный вклад в термодинамику происходит от крупномасштабных флуктуаций, подобный подход выглядит вполне естественно.

Рассмотрим вклад, который возникает от малых флуктуаций на фоне однородной конфигурации $\phi_0 = \sqrt{|\tau|/g}$

$$\phi(x) = \phi_0 + \varphi(x), \quad (2.40)$$

где $\varphi(x) \ll \phi_0$.

Для простоты рассмотрим случай нулевого магнитного поля. Разложение гамильтониана (2.39) до второго порядка по φ дает

$$H = H_0 + \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi(x))^2 + |\tau| \varphi^2(x) \right]. \quad (2.41)$$

В фурье-представлении

$$\varphi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \varphi(k) \exp(-ikx) \quad (2.42)$$

имеем

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2 + 2|\tau|) |\varphi(k)|^2 + H_0. \quad (2.43)$$

Поэтому для корреляционной функции

$$G_0(k) \equiv \langle |\varphi(k)|^2 \rangle = \frac{\int D\varphi(k) |\varphi(k)|^2 \exp(-H[\varphi])}{\int D\varphi(k) \exp(-H[\varphi])} \quad (2.44)$$

находим

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + 2|\tau|}. \quad (2.45)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\langle \varphi(k) \varphi(k') \rangle = G_0(k) \delta(k + k'). \quad (2.46)$$

Поэтому для пространственной корреляционной функции

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \langle \langle \phi(0) \phi(x) \rangle \rangle \equiv \langle \phi(0) \phi(x) \rangle - \langle \phi(0) \rangle \langle \phi(x) \rangle = \\ &= \langle \varphi(0) \varphi(x) \rangle = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \langle |\varphi(k)|^2 \rangle \exp(ikx) \end{aligned} \quad (2.47)$$

получаем следующий результат

$$G_0(x) \sim \begin{cases} |x|^{-(D-2)}, & |x| \ll R_c(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2|\tau|}}, \\ \exp\left(-\frac{|x|}{R_c(\tau)}\right), & |x| \gg R_c(\tau). \end{cases} \quad (2.48a)$$

Здесь величина

$$R_c(\tau) \sim |\tau|^{-1/2} \quad (2.49)$$

называется *корреляционной длиной*.

Таким образом, физическая картина вблизи T_c ($|\tau| \ll 1$) выглядит следующим образом. На масштабах много больше корреляционной длины $R_c(\tau) \gg 1$ флуктуации поля $\phi(x)$ вокруг равновесной конфигурации ϕ_0 ($\phi_0 = 0$ при $T > T_c$ и $\phi_0 = \sqrt{|\tau|/g}$ при $T < T_c$) оказываются эффективно независимыми, поскольку их корреляции спадают экспоненциально (2.48б). С другой стороны, на масштабах, меньших $R_c(\tau)$, в так называемой флуктуационной области, флуктуации параметра порядка сильно скоррелированы, так как их корреляционная функция здесь спадает по медленному степенному закону (2.48а). Поэтому во флуктуационной области градиентный член гамильтониана (2.39) является ключевым для теории. В критической точке флуктуационная область становится бесконечной.

Посмотрим теперь, в какой степени приведенные выше простые оценки являются надежными. Очевидно, что разложение (2.41) допустимо и, соответственно, результат (2.48) является правильным только в том случае, если характерная величина флуктуаций ϕ мала по сравнению с равновесной величиной параметра порядка ϕ_0 . Поскольку корреляционная длина R_c является единственным масштабом, который существует в системе вблизи точки перехода, то характерную величину флуктуаций можно оценить следующим образом

$$\overline{\phi^2} \equiv \frac{1}{R_c^D} \int_{|x| < R_c} d^D x \langle \phi(0)\phi(x) \rangle \sim R_c^{-(D-2)}. \quad (2.50)$$

Поэтому приведенные выше простые оценки правильны, только если величина $\overline{\phi^2}$ много меньше соответствующей величины равновесного параметра порядка ϕ_0^2 :

$$R_c^{-D+2} \ll \frac{|\tau|}{g}. \quad (2.51)$$

Используя (2.49), находим, что это условие выполнено при

$$g|\tau|^{(D-4)/2} \ll 1. \quad (2.52)$$

Таким образом, если размерность системы больше четырех, то вблизи точки перехода $|\tau| \rightarrow 0$ условие (2.52) всегда выполняется. С другой стороны, для размерностей $D < 4$ достаточно близко к точке перехода это условие всегда нарушается.

Эти простые оценки приводят к следующим важным выводам:

1) Если размерность пространства D рассматриваемой системы больше 4, то ее критическое поведение вблизи точки фазового перехода полностью описывается простой теорией среднего поля.

2) Если размерность системы меньше 4, то согласно (2.52), теория среднего поля дает правильные результаты только в области температур не слишком близких к T_c

$$\tau \gg \tau_*(D, g) \equiv g^{2/(4-D)} \quad (\tau \ll 1) \quad (2.53)$$

(здесь предполагается, что $g \ll 1$; в противном случае области применимости теории среднего поля вообще не существует). Вблизи T_c , $|\tau| \ll \tau_*$, должен возникать какой-то другой, значительно более нетривиальный (негауссов) критический режим.

2.4. Критические индексы

Согласно современным представлениям флуктуационной теории фазовых переходов предполагается, что вблизи точки перехода критическое поведение физических величин может быть описано в терминах так называемых *критических индексов*. А именно, критические индексы для рассмотренных выше термодинамических величин определяются следующим образом:

параметр порядка

$$\begin{aligned} \phi_0 &\sim |\tau|^\beta, & h \ll h_c(\tau); \tau < 0; \\ \phi_0 &\sim h^{1/\delta}, & h \gg h_c(\tau); \end{aligned}$$

теплоемкость

$$C \sim |\tau|^{-\alpha}, \quad h \ll h_c(\tau);$$

восприимчивость

$$\begin{aligned} \chi &\sim |\tau|^{-\gamma}, & h \ll h_c(\tau); \\ \chi &\sim h^{1/\delta-1}, & h \gg h_c(\tau); \end{aligned}$$

корреляционная длина

$$\begin{aligned} R_c &\sim |\tau|^{-\nu}, & h \ll h_c(\tau); \\ R_c &\sim h^{-\mu}, & h \gg h_c(\tau); \end{aligned}$$

корреляционная функция

$$G(x) \sim |x|^{-D+2-\eta}, \quad |x| \ll R_c, \quad (2.54)$$

где величина критического поля $h_c(\tau) \sim |\tau|^{v/\mu}$ (эта оценка следует из сравнения корреляционных длин в слабых и сильных полях).

В действительности, не все перечисленные выше критические индексы являются независимыми. Исходя из общих соображений можно вывести (см. ниже) следующие простые соотношения:

$$\alpha = 2 - D\nu, \quad (2.55)$$

$$\delta = \frac{D+2-\eta}{D-2+\eta}, \quad (2.56)$$

$$\gamma = (2-\eta)\nu, \quad (2.57)$$

$$2\beta = 2 - \gamma - \alpha, \quad (2.58)$$

$$\mu = \frac{2}{D+2-\eta}. \quad (2.59)$$

Таким образом, для семи критических индексов существует пять соотношений, и это означает, что только два критических индекса являются независимыми. Другими словами, чтобы полностью описать критическое поведение

ние системы, достаточно вычислить лишь какие-либо два критических индекса.

В частности согласно рассмотренной выше теории Гинзбурга–Ландау $\nu = 1/2$ и $\eta = 0$ (см. (2.48), (2.49)). С помощью соотношений (2.55)–(2.59) легко найти все остальные критические индексы: $\alpha = -(D-4)/2$, $\delta = (D+2)/(D-2)$, $\gamma = 1$, $\beta = (D-2)/4$, $\mu = 1/3$. Эти критические индексы полностью описывают критическое поведение изинговской системы с размерностью пространства $D \geq 4$.

Рассмотрим, как можно вывести соотношения (2.55)–(2.59).

Согласно определению теплоемкости

$$C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \quad (2.60)$$

получаем

$$C = \frac{1}{V} \int d^D x \int d^D x' [\langle \phi^2(x) \phi^2(x') \rangle - \langle \phi^2(x) \rangle \langle \phi^2(x') \rangle] \sim \frac{1}{R_c^D} \langle \Phi \rangle^2, \quad (2.61)$$

где

$$\Phi = \int_{|x| < R_c} d^D x \phi^2(x). \quad (2.62)$$

Согласно (2.39) равновесная плотность энергии (на масштабах, больших R_c) пропорциональна $|\tau| \Phi$. Таким образом, равновесное значение величины $\langle \Phi \rangle$ определяется из условия $|\tau| \langle \Phi \rangle \sim T$ (в нашем случае $T \simeq T_c = 1$). Поэтому из (2.61) получаем

$$C \sim R_c^{-D} |\tau|^{-2} \sim |\tau|^{D\nu-2}. \quad (2.63)$$

С другой стороны, согласно определению критического индекса α : $C \sim |\tau|^{-\alpha}$, и в результате мы приходим к соотношению (2.55).

Используя определения восприимчивости критического индекса корреляционной функции η и критического индекса корреляционной длины ν (см. (2.54)), находим

$$\chi = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial h} \Big|_{h=0} = \int d^D x \langle \phi(0) \phi(x) \rangle \sim R_c^D R_c^{2-D-\eta} \sim |\tau|^{-\nu(2-\eta)}. \quad (2.64)$$

С другой стороны $\chi \sim |\tau|^{-\gamma}$, и, тем самым, мы приходим к соотношению (2.57).

Величину восприимчивости (2.64) можно оценить и по-другому

$$\chi \sim R_c^D \phi_0^2 \sim |\tau|^{-D\nu+2\beta}. \quad (2.65)$$

Отсюда находим $\gamma = D\nu - 2\beta$. Используя (2.55), приходим к (2.58).

Оценим характерную величину параметра порядка на масштабах порядка корреляционной длины

$$\psi \equiv \int_{|x| < R_c} d^D x \phi(x). \quad (2.66)$$

Для характерной величины поля ψ получаем

$$\psi_c \equiv \sqrt{\langle \psi^2 \rangle} \sim \left(R_c^D \int_{|x| < R_c} d^D x \langle \phi(0) \phi(x) \rangle \right)^{1/2} \sim R_c^{(D+2-\eta)/2}. \quad (2.67)$$

Критическое значение внешнего поля $h_c(\tau)$ определяется условием

$$\psi_c h_c \sim T (= 1). \quad (2.68)$$

Поэтому при такой величине поля имеем

$$R_c(h) \sim h^{-2/(D+2-\eta)}, \quad (2.69)$$

откуда следует (2.59).

С другой стороны $\psi_c \sim \phi_0 R_c$. Используя соотношение (2.68), результат (2.69) и определение величины $\phi_0 \sim h^{1/\delta}$, находим

$$\psi_c \sim \frac{1}{h} \sim h^{1/\delta} h^{-2D/(D+2-\eta)}. \quad (2.70)$$

Простые алгебраические преобразования приводят к соотношению (2.56).

Заметим, что в реальных вычислениях, которые мы будем рассматривать далее, обычно вычисляются критические индексы корреляционной длины ν и корреляционной функции η , а все остальные критические индексы определяются соотношениями (2.55)–(2.59) автоматически.

2.5. Скейлинг

Понятия критических индексов и корреляционной длины являются ключевыми в теории фазовых переходов второго рода. В скейлинговой теории критических явлений предполагается, что корреляционная длина R_c является единственным масштабом, который существует в системе вблизи T_c . В рассмотренной выше теории Гинзбурга–Ландау на масштабах меньших R_c все пространственные корреляции спадают по степенному закону, поэтому на этих масштабах должно наблюдаться явление *масштабной инвариантности*. С другой стороны в точке фазового перехода корреляционная длина становится бесконечной. Поэтому характеристики системы на масштабах меньших R_c должны быть эквивалентны свойствам всей системы в точке фазового перехода.

Другим важным свойством масштабной инвариантности является то, что микроскопические параметры системы (структура решетки и т.п.) не должны быть существенными для критического поведения. Для критических явлений должны быть существенны лишь "глобальные" характеристики, такие как размерность пространства, топология параметра порядка и т.п.

Приведенные выше рассуждения составляют основу так называемой гипотезы *скейлинга*, которая гласит, что макроскопические свойства системы не должны меняться при глобальном изменении пространственного масштаба системы.

Рассмотрим простые следствия скейлинговой гипотезы. Пусть некоторая система вблизи критической

точки описывается следующим гамильтонианом

$$H = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \phi(x)]^2 + \sum_{n=1} h_n \phi^n(x) \right\}. \quad (2.71)$$

Здесь параметры h_n задают конкретные характеристики данной системы. В частности $h_1 \equiv -h$ описывает внешнее поле; $h_2 \equiv \tau$ — это "масса" в гамильтониане Гинзбурга–Ландау; $h_4 \equiv g/4$; остальные параметры могут описывать другие типы взаимодействий.

В результате масштабного преобразования

$$x \rightarrow \lambda x \quad (\lambda > 1) \quad (2.72)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^D x [\nabla \phi(x)]^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \lambda^{D-2} \int d^D x [\nabla \phi(\lambda x)]^2, \\ h_n \int d^D x \phi^n(x) &\rightarrow \lambda^D \int d^D x \phi^n(\lambda x). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Чтобы градиентный член в гамильтониане остался без изменения (именно этот член обеспечивает скейлинг корреляционных функций), следует изменить масштаб самих флуктуирующих полей

$$\phi(\lambda x) \rightarrow \lambda^{-\Delta_\phi} \phi(x), \quad (2.74)$$

где

$$\Delta_\phi = \frac{D-2}{2}. \quad (2.75)$$

Масштабная размерность Δ_ϕ определяет критическое поведение корреляционной функции

$$G(x) = \langle \phi(0)\phi(x) \rangle \sim |x|^{-2\Delta_\phi}. \quad (2.76)$$

Чтобы после масштабного преобразования гамильтониан (2.71) остался неизменным, следует переопределить параметры h_n следующим образом

$$h_n \rightarrow \lambda^{-\Delta_n} h_n, \quad (2.77)$$

где

$$\Delta_n = \frac{1}{2}(2-n)D + n. \quad (2.78)$$

Величины Δ_n называются *масштабными размерностями* параметров h_n . В частности

$$\Delta_1 \equiv \Delta_h = \frac{1}{2}D + 1, \quad (2.79)$$

$$\Delta_2 \equiv \Delta_\tau = 2, \quad (2.80)$$

$$\Delta_4 \equiv \Delta_g = 4 - D. \quad (2.81)$$

Соответственно, для преобразованных параметров h_λ, τ_λ и g_λ теории Гинзбурга–Ландау имеем

$$h_\lambda = \lambda^{\Delta_h} h, \quad (2.82)$$

$$\tau_\lambda = \lambda^{\Delta_\tau} \tau, \quad (2.83)$$

$$g_\lambda = \lambda^{\Delta_g} g. \quad (2.84)$$

Эти соотношения приводят к следующим выводам:

1) если затравочная масса τ отлична от нуля, то в результате масштабных преобразований величина эффективной массы τ_λ растет, и на масштабе

$$\lambda_c \equiv R_c = |\tau|^{-1/\Delta_\tau} \quad (2.85)$$

величина τ_λ становится порядка единицы. Это указывает на то, что при $\lambda > R_c$ мы выходим из скейлинговой области, и величина R_c является корреляционной длиной. Более того, согласно (2.85) для критического индекса корреляционной длины находим

$$\nu = \frac{1}{\Delta_\tau}; \quad (2.86)$$

2) путем точно таких же рассуждений из (2.79), (2.82) может быть найдена величина (и критический индекс) критического поля $h_c(\tau)$

$$\begin{aligned} h_\lambda \Big|_{\lambda=R_c} &= R_c^{\Delta_h} h_c \sim 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow h_c &\sim R_c^{-\Delta_h} \sim |\tau|^{\Delta_h/\Delta_\tau}; \end{aligned} \quad (2.87)$$

3) если размерность системы $D > 4$, то согласно (2.81) и (2.84) находим, что $\Delta_g < 0$ и поэтому эффективная (зависящая от масштаба) величина параметра g_λ на больших масштабах стремится к нулю. В этом случае на больших масштабах мы получаем гауссову теорию. Именно поэтому системы с размерностью $D > 4$ правильно описываются теорией Гинзбурга–Ландау.

С другой стороны, при размерностях $D < 4$ мы видим, что $\Delta_g > 0$, и эффективная величина параметра g_λ на больших масштабах возрастает. В этом случае ситуация становится весьма нетривиальной, поскольку асимптотическая (на бесконечных масштабах) теория становится негауссовой. Тем не менее, если формально рассмотреть случай размерности близкой к 4, так что величину параметра $\epsilon = 4 - D$ можно считать малой, тогда можно надеяться, что отклонение от гауссовой теории также должно быть малым. В этом случае для описания асимптотической теории можно попытаться строить что-то вроде теории возмущений по малому параметру ϵ (см. раздел 2.6). При этом можно надеяться, что если по каким-то причинам ряд по ϵ окажется "хорошим" и быстро сходящимся, то, подставляя значение $\epsilon = 1$ в конечные результаты, мы получим значения критических индексов, которые, возможно, будут удовлетворительно описывать реальные трехмерные системы.

Удивительная загадка состоит в том, что хотя на самом деле ряд по ϵ ни коим образом нельзя назвать "хорошим" (он даже не является сходящимся), результаты для критических индексов, даваемые первыми тремя порядками, при $\epsilon = 1$ ($D = 3$) оказываются очень близкими к реальным критическим индексам в трехмерных системах.

2.6. Ренормгруппа и ϵ -разложение

Допустим, что на больших масштабах асимптотическая теория описывается гамильтонианом (2.39) (для простоты мы рассматриваем случай нулевого внешнего поля)

$$H = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau \phi^2(x) + \frac{1}{4} g \phi^4(x) \right\}. \quad (2.88)$$

Здесь предполагается, что поле $\phi(x)$ является медленно меняющимся в пространстве, и поэтому его фурье-компоненты $\phi(k)$

$$\phi(x) = \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \phi(k) \exp(ikx) \quad (2.89)$$

отличны от нуля только в полосе длинных волн $|k| < k_0 \ll 1$. Параметры гамильтониана тоже предполагаются малыми: $|\tau| \ll 1$; $g \ll 1$. Соответственно, в фурье-представлении гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H_{k_0} = & \frac{1}{2} \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 |\phi(k)|^2 + \frac{1}{2} \tau \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\phi(k)|^2 + \\ & + \frac{1}{4} g \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \times \\ & \times \phi(k_1) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (2.90)$$

В наиболее общем виде проблема состоит в нахождении систематической процедуры вычисления статистической суммы

$$Z = \left[\prod_{k=0}^{k_0} \int d\phi(k) \right] \exp(-H_{k_0}[\phi]) \quad (2.91)$$

и соответствующей свободной энергии $F = -\ln(Z)$.

Идея ренормгруппового (РГ) подхода состоит в следующем.

На *первом шаге* производится интегрирование только по компонентам поля $\phi(k)$ в ограниченной полосе $\lambda k_0 < k < k_0$, где $\lambda \ll 1$. В результате мы получим новый гамильтониан, который будет зависеть от новой инфракрасной обрезки λk_0 :

$$\exp(-\tilde{H}_{\lambda k_0}[\phi]) \equiv \left[\prod_{k=\lambda k_0}^{k_0} \int d\phi(k) \right] \exp(-H_{k_0}[\phi]). \quad (2.92)$$

При этом предполагается, что, возможно, при некоторых условиях новый гамильтониан $\tilde{H}_{\lambda k_0}[\phi]$ будет иметь ту же самую структуру, что и первоначальный (2.90):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\lambda k_0} = & \frac{1}{2} \tilde{a}(\lambda) \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 |\phi(k)|^2 + \frac{1}{2} \tilde{\tau}(\lambda) \times \\ & \times \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\phi(k)|^2 + \frac{1}{4} \tilde{g}(\lambda) \times \\ & \times \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \times \\ & \times \phi(k_1) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (\dots). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Действительно, в дальнейшем будет показано, что все другие члены (обозначенные "..."), которые могут появиться в гамильтониане $\tilde{H}_{\lambda k_0}[\phi]$ в результате интегри-

рования (2.92), оказываются несущественными при условии малости параметров $\tau \ll 1$, $g \ll 1$, $\lambda \ll 1$ и $\epsilon = (4 - D) \ll 1$. Более того, будет показано, что главные члены в (2.93) оказываются большими по параметру $\xi \equiv \ln(1/\lambda) \gg 1$ при условии, что $\epsilon \ln(1/\lambda) \ll 1$.

На *втором шаге* производится обратное масштабное преобразование (см. раздел 2.5), целью которого является восстановить величину исходной инфракрасной обрезки k_0

$$\begin{aligned} k & \rightarrow \lambda k, \\ \phi(\lambda k) & \rightarrow \theta(\lambda) \phi(k). \end{aligned} \quad (2.94)$$

При этом параметр $\theta(\lambda)$ должен быть выбран так, чтобы коэффициент при $k^2 |\phi(k)|^2$ остался таким же, как и в исходном гамильтониане (2.90):

$$\theta = \lambda^{-(D+2)/2} [\tilde{a}(\lambda)]^{-1/2}. \quad (2.95)$$

Рассмотренные выше два шага составляют так называемое *преобразование перенормировки*. Таким образом, перенормированный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H_{k_0}^{(R)} = & \frac{1}{2} \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 |\phi(k)|^2 + \\ & + \frac{1}{2} \tau^{(R)}(\lambda) \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\phi(k)|^2 + \\ & + \frac{1}{4} g^{(R)}(\lambda) \int_{|k| < k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \times \\ & \times \phi(k_1) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Этот гамильтониан снова зависит от исходной обрезки k_0 , а его параметры оказываются перенормированными

$$\tau^{(R)}(\lambda) = \lambda^{-2} \tilde{a}(\lambda)^{-1} \tilde{\tau}(\lambda), \quad (2.97)$$

$$g^{(R)}(\lambda) = \lambda^{-(4-D)} \tilde{a}(\lambda)^{-2} \tilde{g}(\lambda). \quad (2.98)$$

Идея заключается в том, чтобы такое преобразование РГ применить (бесконечно) много раз, и тогда проблема сведется к исследованию предельных свойств перенормированного гамильтониана, который должен описывать асимптотические (на бесконечных масштабах) свойства системы. При этом надежда состоит в том, что, возможно, такая процедура при некоторых условиях сходится к некоторому определенному предельному гамильтониану H^* (так называемой *фиксированной точке*), который будет уже инвариантным по отношению к преобразованиям РГ. Гипотеза о существовании (негауссова) предельного гамильтониана H^* , инвариантного по отношению к масштабным преобразованиям, представляет собой не что иное, как просто более математизированную формулировку скейлинговой гипотезы, рассмотренной в разделе 2.5.

Разберем процедуру РГ более подробно. Чтобы получить уравнения перенормировок (2.97), (2.98) в явном виде, нужно вычислить параметры $\tilde{a}(\lambda)$, $\tilde{\tau}(\lambda)$, $\tilde{g}(\lambda)$ путем интегрирования по "быстрым" степеням свободы в уравнении (2.92). Разделим "быстрые" поля (с $\lambda k_0 < |k| < k_0$) и "медленные" поля (с $|k| < \lambda k_0$) явным

образом:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \tilde{\phi}(x) + \varphi(x), \\ \tilde{\phi}(x) &= \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k) \exp(ikx), \\ \varphi(x) &= \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \varphi(k) \exp(ikx).\end{aligned}\quad (2.99)$$

После этого гамильтониан (2.90) может быть представлен следующим образом

$$\begin{aligned}H_{k_0}[\tilde{\phi}, \varphi] &= H_{\lambda k_0}[\tilde{\phi}] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^{-1}(k) |\varphi(k)|^2 + V[\tilde{\phi}, \varphi],\end{aligned}\quad (2.100)$$

где

$$G_0(k) = k^{-2}, \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}V[\tilde{\phi}, \varphi] &= \frac{1}{2} \tau \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\varphi(k)|^2 + \\ &+ g \int \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \left[\frac{3}{2} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \varphi(k_3) \varphi(k_4) + \right. \\ &+ \tilde{\phi}(k_1) \varphi(k_2) \varphi(k_3) \varphi(k_4) + \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \varphi(k_4) + \\ &\left. + \frac{1}{4} \varphi(k_1) \varphi(k_2) \varphi(k_3) \varphi(k_4) \right] \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4).\end{aligned}\quad (2.102)$$

На рис. 2 член, описывающий нелинейные взаимодействия $V[\tilde{\phi}, \varphi]$, показан в терминах стандартных диаграммных обозначений. Здесь волнистые линии изображают "медленные" поля $\tilde{\phi}$, прямые линии — "быстрые" поля φ , вершина в виде сплошного круга — "массу" τ , а вершина в виде открытого круга — взаимодействие g , причем в каждой вершине сумма входящих импульсов k равна нулю.

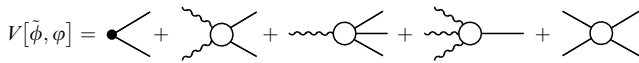


Рис. 2. Диаграммное представление энергии взаимодействия $V[\tilde{\phi}, \varphi]$

Интегрирование по полям φ в уравнении (2.92) может быть представлено в виде

$$\exp(-\tilde{H}_{\lambda k_0}[\tilde{\phi}]) = \exp(-H_{\lambda k_0}[\tilde{\phi}]) \langle \exp(-V[\tilde{\phi}, \varphi]) \rangle, \quad (2.103)$$

где операция усреднения $\langle (\dots) \rangle$ производится следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle (\dots) \rangle &\equiv \left[\prod_{k=\lambda k_0}^{k=k_0} \int d\varphi(k) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^{-1}(k) |\varphi(k)|^2 \right\} (\dots).\end{aligned}\quad (2.104)$$

Разложение теории возмущений по V во втором порядке дает

$$\tilde{H}_{\lambda k_0}[\tilde{\phi}] = H_{\lambda k_0}[\tilde{\phi}] + \langle V \rangle - \frac{1}{2} [\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2]. \quad (2.105)$$

В терминах диаграмм на рис. 2 усреднение $\langle \dots \rangle$ представляет просто спаривание прямых линий. Ненулевой вклад в величину $\langle V \rangle$ показан на рис. 3, где каждая замкнутая петля представляется интегралом

$$\int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0(k) = \frac{S_D}{(2\pi)^D (D-2)} k_0^{(D-2)} (1 - \lambda^{(D-2)}) \quad (2.106)$$

(здесь S_D — это площадь единичной D -мерной сферы).

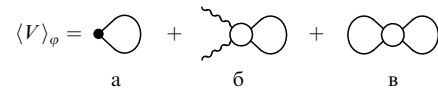


Рис. 3. Диаграммное представление членов первого порядка теории возмущений

В производимых вычислениях рассматривается предел малой обрезки k_0 (большие пространственные масштабы). Кроме того, на каждом шаге РГ масштабный параметр λ также предполагается малым, поэтому при интегрировании по "внутренним" импульсам k ($\lambda k_0 < |k| < k_0$) "внешние" импульсы ($|k| < \lambda k_0$) могут рассматриваться как пренебрежимо малые.

Вклад в первый порядок теории возмущений $\langle V \rangle$ состоит из трех вкладов. Диаграммы (а) и (в) на рис. 3 дают просто некоторые несущественные константы (они не зависят от $\tilde{\phi}$). Диаграмма (б) пропорциональна $|\tilde{\phi}(k)|^2$ и поэтому она дает вклад в массовый член, однако этот вклад пропорционален $k_0^{(D-2)}$ и, таким образом, в асимптотической области $k_0 \rightarrow 0$ им также можно пренебречь. В действительности, мы должны лишь следить за вкладами следующего вида: (1) не зависящими от обрезки k_0 и (2) большими по параметру $\xi \equiv \ln(1/\lambda) \gg 1$.

Рассмотрим второй порядок теории возмущений $\langle \langle V^2 \rangle \rangle \equiv \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2$ (рис. 4). Здесь диаграммы (а), (в) и (и) — это просто несущественные константы. Диаграммы (г) и (ж) пропорциональны положительной степени обрезки k_0 и поэтому их вклад пренебрежимо

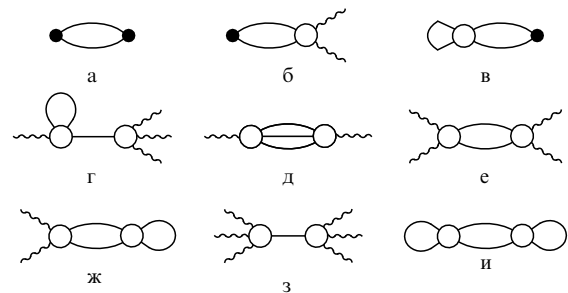


Рис. 4. Диаграммное представление членов второго порядка теории возмущений

мал. Существенный вклад дают диаграммы (б), (д) и (е). Вклад от диаграммы (д) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\tilde{\phi}(k)|^2 \times \\ & \times \int_{\lambda k_0 < |k_{1,2}| < k_0} d^D k_1 d^D k_2 G_0(k_1) G_0(k_2) G_0(k + k_1 + k_2) = \\ & = \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\tilde{\phi}(k)|^2 \int_{\lambda k_0 < |k_{1,2}| < k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2}{k_1^2 k_2^2 (k + k_1 + k_2)^2}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

поскольку $k \ll k_{1,2}$; главный вклад в (2.107) происходит от первых членов разложения по $k/k_{1,2}$

$$\begin{aligned} & g^2 \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\tilde{\phi}(k)|^2 \int_{\lambda k_0 < |k_{1,2}| < k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2}{k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^2} + \\ & + 3g^2 \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\tilde{\phi}(k)|^2 k^2 \int_{\lambda k_0 < |k_{1,2}| < k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2}{k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^4}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Первый член в (2.108) оказывается пропорциональным $k_0^{(D-2)}$ и поэтому несущественен. Можно легко проверить, что в размерности $D = 4 - \epsilon$ с $\epsilon \ll 1$ интегрирование по k_1 и k_2 во втором члене дает фактор, пропорциональный $\ln(1/\lambda) \gg 1$, не зависящий от обрезки. Таким образом, эта диаграмма дает конечный вклад порядка $g^2 \ln(1/\lambda)$ в параметр $\tilde{a}$ в (2.93). Однако, как будет показано ниже, величина параметра g в фиксированной точке оказывается порядка ϵ . Это означает, что диаграмма на рис. 4д дает вклад порядка $\epsilon^2 \ln(1/\lambda)$ для параметра $\tilde{a}$ (в критических индексах это дает поправку порядка ϵ^2). Поэтому до тех пор, пока мы интересуемся поправками первого порядка по ϵ , вклад от диаграммы (д) можно не учитывать

$$\tilde{a} = 1 + O(g^2)\xi, \quad (2.109)$$

где $\xi \equiv \ln(1/\lambda)$.

Диаграмма на рис. 4б дает следующий вклад

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} g\tau \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4} \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\tilde{\phi}(k)|^2 = \\ & = \frac{3}{2} g\tau \frac{S_D}{(2\pi)^D} \frac{k_0^{(D-4)}(1 - \lambda^{(D-4)})}{D-4} \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\tilde{\phi}(k)|^2. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Для размерности $D = 4 - \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$, это дает конечный вклад в параметр $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\tau} = \tau - \frac{3}{8\pi^2} \tau g\xi, \quad (2.111)$$

где мы подставили $S_{D=4} = 2\pi^2$.

Диаграмма на рис. 4е дает вклад

$$\begin{aligned} & \frac{9}{4} g^2 \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4} \times \\ & \times \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) = \\ & = \frac{9}{4} g^2 \frac{S_D}{(2\pi)^D} \frac{k_0^{(D-4)}(1 - \lambda^{(D-4)})}{D-4} \times \\ & \times \int_{|k| < \lambda k_0} \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Для размерности $D = 4 - \epsilon$ это дает следующий вклад в перенормировку параметра $\tilde{g}$

$$\tilde{g} = g - \frac{9}{8\pi^2} g^2 \xi. \quad (2.113)$$

Далее, после обратного масштабного преобразования, восстанавливающего первоначальную обрезку k_0 , согласно уравнениям (2.97), (2.98) для перенормированных параметров $\tau^{(R)}$ и $g^{(R)}$ получаем следующий результат

$$\begin{aligned} \tau^{(R)} &= \left(\tau - \frac{3}{8\pi^2} \tau g\xi \right) \exp(2\xi), \\ g^{(R)} &= \left(g - \frac{9}{8\pi^2} g^2 \xi \right) \exp(\epsilon\xi). \end{aligned} \quad (2.114)$$

С учетом, что $g\xi \ll 1$ и $\epsilon\xi \ll 1$ эти уравнения могут быть переписаны следующим образом

$$\begin{aligned} \ln(\tau^{(R)}) - \ln(\tau) &= 2\xi - \frac{3}{8\pi^2} g\xi, \\ g^{(R)} - g &= \epsilon g\xi - \frac{9}{8\pi^2} g^2 \xi. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Теперь, если иметь в виду, что преобразования РГ производятся непрерывным образом, то эволюцию (с увеличением масштаба) параметров гамильтониана можно описать в терминах дифференциальных уравнений. Из (2.115) получаем

$$\frac{d}{d\xi} \ln|\tau| = 2 - \frac{3}{8\pi^2} g, \quad (2.116)$$

$$\frac{dg}{d\xi} = \epsilon g - \frac{9}{8\pi^2} g^2. \quad (2.117)$$

Условие на фиксированную точку g^* задается условием $dg/d\xi = 0$, из которого находим

$$g^* = \frac{8\pi^2}{9} \epsilon. \quad (2.118)$$

После этого из уравнения (2.116) можно легко найти масштабную размерность

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{1}{3} \epsilon. \quad (2.119)$$

И, наконец, из уравнения (2.86) находим значение критического индекса

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \epsilon. \quad (2.120)$$

Поскольку величина g^* в фиксированной точке оказалась порядка ϵ , из уравнений (2.109), (2.94) и (2.95) следует, что поправок к масштабной размерности Δ_ϕ поля ϕ в этом порядке по ϵ не существует. Соответственно (см. (2.76), (2.75)) в первом порядке по ϵ критический индекс η (см. (2.54)) корреляционной функции $\langle \phi(0)\phi(x) \rangle$ остается равным нулю, как и в теории Гинзбурга–Ландау.

Используя соотношения (2.55)–(2.59), можно легко найти все остальные критические индексы

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6} \epsilon, & \gamma &= 1 + \frac{1}{6} \epsilon, & \beta &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \epsilon, \\ \delta &= 3 + \epsilon, & \mu &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

В таблице 1 приводятся значения критических индексов в первом порядке по ϵ для трехмерной системы ($\epsilon = 1$). Для сравнения приводим значения тех же критических индексов, получаемых численным моделированием и в теории Гинзбурга–Ландау.

Таблица 1

Физические величины и соответствующие критические индексы		ϵ -разложение	Численное моделирование	Теория Гинзбурга–Ландау
Параметр порядка	β	0,333	$0,312 \pm 0,003$	0,5
	δ	4	$5,15 \pm 0,02$	3
Теплоемкость	α	0,167	$0,125 \pm 0,015$	0
Восприимчивость	γ	1,167	$1,250 \pm 0,003$	1
Корреляционная длина	ν	0,583	$0,642 \pm 0,003$	0,5
Корреляционная функция	η	0	$0,055 \pm 0,010$	0

Схема получения критических индексов во втором порядке по ϵ точно такая же, как и рассмотренная выше, с той лишь разницей, что в этом случае требуется учитывать диаграммы следующего порядка по g (см., например, [3], [2]).

Интересно отметить, что хотя с математической точки зрения описанная в этом разделе процедура ϵ -разложения не вполне обоснованна, тем не менее, она дает возможность вычислять критические индексы с довольно хорошей точностью.

2.7. Теплоемкость в четырехмерной системе

Хотя в системах с размерностью $D = 4$ критический индекс теплоемкости α равен нулю, это вовсе не обязательно означает, что теплоемкость в критической точке не сингулярна. В действительности, в этом случае сингулярность теплоемкости оказывается логарифмической (а не степенной). В качестве полезного упражнения рассмотрим, какова процедура вычисления сингулярной части теплоемкости в четырехмерной системе. Согласно определению теплоемкости (см. (2.60), (2.61))

$$C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = \frac{1}{V} \int d^4 x \int d^4 x' \langle \langle \phi^2(x) \phi^2(x') \rangle \rangle =$$

$$= \int_{|x| < R_c(\tau)} d^4 x \langle \langle \phi^2(0) \phi^2(x) \rangle \rangle. \quad (2.122)$$

Поскольку на масштабах больших корреляционной длины все корреляции спадают экспоненциально, интегрирование в (2.122) может быть обрезано сверху величиной $R_c(\tau) \sim |\tau|^{-1/2}$. Интеграл в (2.122) может быть вычислен путем суммирования так называемых "паркетных" диаграмм [4], показанных на рис. 5. Идея "паркетных"

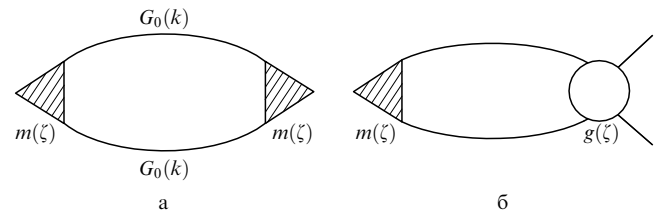


Рис. 5. (а) Диаграммное представление теплоемкости. (б) Диаграмма, которая дает вклад в перенормировку "одетой" массы $m(\xi)$

вычислений состоит в том, что все вклады от взаимодействий ϕ^4 в корреляционной функции $\langle \langle \phi^2(x) \phi^2(x') \rangle \rangle$ собираются в массовую вершину $m(\xi)$

$$\begin{aligned} C &\simeq \int_{|k| > \sqrt{\tau}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G_0^2(k) \left[\frac{m(k)}{\tau} \right]^2 \sim \int_{|k| > \sqrt{\tau}} \frac{dk}{k} \left[\frac{m(k)}{\tau} \right]^2 \sim \\ &\sim \int_{\xi < \ln(1/\tau)} d\xi \left[\frac{m(\xi)}{\tau} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.123)$$

При этом зависимость от масштаба "одетой" массы $m(\xi)$ определяется РГ уравнениями, которые представляют собой компактный способ суммирования всех наиболее расходящихся графиков. Нетрудно понять, что в главном порядке перенормировка $m(\xi)$ определяется диаграммой, показанной на рис. 5б (см. также (2.110)–(2.113))

$$m^{(R)} = m - 3mg \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^2(k) \rightarrow m - \frac{3}{8\pi^2} mg\xi, \quad (2.124)$$

где, как и раньше, $\xi \equiv \ln(1/\lambda)$. Соответственно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\xi} m(\xi) = -\frac{3}{8\pi^2} m(\xi)g(\xi) \quad (2.125)$$

с начальным условием $m(\xi = 0) = \tau$. Зависимость от масштаба параметра взаимодействия $g(\xi)$ в размерности $D = 4$ определяется прежним уравнением РГ (2.117) с $\epsilon = 0$:

$$\frac{d}{d\xi} g(\xi) = -\frac{9}{8\pi^2} g^2(\xi). \quad (2.126)$$

Решение уравнений (2.125), (2.126) найти не сложно

$$m(\xi) = \tau \left(1 + \frac{9g}{8\pi^2} \xi \right)^{-1/3}, \quad g(\xi) = g \left(1 + \frac{9g}{8\pi^2} \xi \right)^{-1}, \quad (2.127)$$

здесь $g \equiv g(\xi = 0)$. Соответственно, простое интегрирование в (2.123) приводит к следующему результату для сингулярной части теплоемкости

$$C(\tau) \simeq \int_{\xi < \ln(1/\tau)} \frac{d\xi}{[1 + (9g/8\pi^2)\xi]^{2/3}} = \frac{8\pi^2}{3g} \left[\left(1 + \frac{9g}{8\pi^2} \ln \frac{1}{\tau} \right)^{1/3} - 1 \right]. \quad (2.128)$$

Этот результат показывает, что вблизи точки перехода существует малый температурный интервал

$$\tau_g \sim \exp\left(-\frac{8\pi^2}{9g}\right) \ll 1. \quad (2.129)$$

При этом при температурах не слишком близких к T_c ($\tau_g \ll |\tau| \ll 1$) поведение теплоемкости эффективно является таким, как если бы гамильтониан системы был гауссовым (т.е. наличие негауссова взаимодействия является несущественным)

$$C(\tau) \sim \ln \frac{1}{\tau}. \quad (2.130)$$

Естественно, что этот же результат легко получить в рамках теории Гинзбурга–Ландау:

$$C(\tau) \sim \int d^4x \langle \phi^2(0)\phi^2(x) \rangle \sim \int_{|k|<1} d^4k (k^2 + \tau)^{-2} \sim \int_{\sqrt{\tau}}^1 \frac{d^4k}{k^4} \sim \ln \frac{1}{\tau}. \quad (2.131)$$

С другой стороны в непосредственной близости к критической точке при $\tau \ll \tau_g$ теория становится существенно негауссовой, и поведение сингулярной части теплоемкости становится более нетривиальным

$$C(\tau) \sim \frac{1}{g} \left(g \ln \frac{1}{\tau} \right)^{1/3}. \quad (2.132)$$

Таким образом, хотя критический индекс теплоемкости в четырехмерной системе равен нулю, тем не менее, теплоемкость является (логарифмически) сингулярной в критической точке.

3. Критические явления в системах с беспорядком

3.1. Критерий Харриса

До сих пор при изучении фазовых переходов предполагалось, что рассматриваемые системы являются идеально однородными. Однако в реальных физических образцах обязательно присутствуют какие-либо дефекты или примеси. Поэтому естественно возникает вопрос о влиянии слабого беспорядка на явления, которые происходят в фазовых переходах. Как мы видели в разделе 2, главный вклад в термодинамику вблизи критической точки дают крупномасштабные флуктуации. Единственным масштабом, который суще-

ствует в системе вблизи точки перехода, является корреляционная длина $R_c \sim |T/T_c - 1|^{-\nu}$, которая растет при приближении к критической температуре T_c , и в самой точке фазового перехода корреляционная длина становится бесконечной. Наличие крупномасштабных флуктуаций приводит к сингулярностям в термодинамических функциях, и эти сингулярности являются главным предметом изучения теории фазовых переходов.

Если концентрация примесей мала, их влияние на фазовый переход остается слабым до тех пор, пока корреляционная длина не станет достаточно большой, т.е. пока температура не слишком близка к T_c . В этом режиме, естественно, критическое поведение остается тем же самым, что и в соответствующей системе без примесей. Однако при $|\tau| \rightarrow 0$ ($T \rightarrow T_c$) корреляционная длина R_c в конце концов становится больше, чем среднее расстояние между примесями, и их влияние может стать доминирующим.

При приближении к критической точке происходит следующая смена масштабов. Сначала корреляционная длина флуктуаций становится много больше решеточных расстояний, и система "забывает" о решетке. В этом режиме единственным релевантным масштабом остается корреляционная длина $R_c(\tau)$. При дальнейшем приближении к критической точке R_c растет и становится больше, чем среднее расстояние между примесями. Таким образом, эффективная концентрация примесей, измеренная в масштабе корреляционной длины, становится большой. Причем важно, что такая ситуация наступает для любой сколь угодно малой концентрации примесей u . Величина u влияет лишь на величину температурного интервала вблизи T_c , в котором эффективная концентрация становится большой. При $uR_c^D \gg 1$, вообще говоря, нет никаких причин считать, что влияние примесей будет слабым.

Первоначально, много лет назад, считалось, что примеси либо полностью разрушают длинноволновые флуктуации, т.е. сингулярности термодинамических функций сглаживаются [5, 6], или производят лишь сдвигу критической точки, но не влияют на само критическое поведение, т.е. критические индексы остаются такими же, как и в чистой системе [7]. Позднее, однако, удалось понять, что возможна и промежуточная ситуация, когда достаточно близко к точке перехода устанавливается новый критический режим, который описывается новыми *универсальными* критическими индексами [8]. Более того, был выработан очень простой критерий, так называемый критерий Харриса, который позволяет, используя лишь критические индексы чистой системы, на качественном уровне предсказать, в каких случаях примеси существенны для критического поведения, а в каких нет [6, 8]. Согласно этому критерию слабый беспорядок влияет на критическое поведение только в тех случаях, когда критический индекс теплоемкости соответствующей чистой системы положителен, $\alpha > 0$ (т.е. теплоемкость в точке перехода является расходящейся). В противоположном случае, когда $\alpha < 0$ (т.е. теплоемкость конечна в точке перехода), слабый беспорядок не влияет на критическое поведение.

Вывести этот критерий не сложно. Естественно предположить, что при описании системы в терминах гамильтониана Гинзбурга–Ландау (раздел 2.6) наличие примесей должно проявляться в слабых случайных пространственных флуктуациях приведенной температуры τ (т.е.

примеси приводят к пространственным флуктуациям эффективной локальной температуры перехода). Тогда вблизи точки перехода D -мерная изинговская система снова будет описываться в терминах несколько более усложненного варианта гамильтониана Гинзбурга–Ландау

$$H = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} [\tau - \delta\tau(x)] \phi^2(x) + \frac{1}{4} g \phi^4(x) \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь случайный замороженный беспорядок описывается случайной по пространству функцией $\delta\tau(x)$, распределение вероятностей которой предполагается гауссовым

$$P[\delta\tau] = p_0 \exp \left\{ -\frac{1}{4u} \int d^D x [\delta\tau(x)]^2 \right\}, \quad (3.2)$$

где $u \ll 1$ — это малый параметр, который описывает характерную величину беспорядка, а p_0 — нормировочная константа. Для удобства дальнейших обозначений знак функции $\delta\tau(x)$ в (3.1) выбран таким образом, чтобы ее положительные флуктуации приводили к локально упорядоченным областям.

Очевидно, что конфигурации поля $\phi(x)$, которые соответствуют локальным минимумам гамильтониана, удовлетворяют следующему седловому уравнению

$$-\Delta\phi(x) + \tau\phi(x) + g\phi^3(x) = \delta\tau(x)\phi(x). \quad (3.3)$$

Из этого уравнения видно, что отличные от нуля решения возникают в тех областях пространства, где величина $[\tau - \delta\tau(x)]$ отрицательна. Очевидно также, что глобальные решения уравнения (3.3) существенно зависят от конкретной реализации функции $\delta\tau(x)$ и являются сильно неоднородными. Можно получить простую оценку, при каких условиях пространственные флуктуации эффективной температуры перехода оказываются доминирующим фактором для конфигураций поля, соответствующих минимуму энергии.

Рассмотрим большую область пространства Ω_L с характерным линейным размером $L \gg 1$. Каждую такую область можно характеризовать пространственно усредненной величиной функции $\delta\tau(x)$:

$$\delta\tau(\Omega_L) = \frac{1}{L^D} \int_{x \in \Omega_L} d^D x \delta\tau(x). \quad (3.4)$$

Соответственно, для характерной величины температурных флуктуаций (усредненных по реализациям) в такой области находим

$$\delta\tau_L = \left[\overline{\delta\tau^2(\Omega_L)} \right]^{1/2} = \sqrt{2u} L^{-D/2}. \quad (3.5)$$

Тогда характерное среднее значение параметра порядка $\phi(\Omega_L)$ в данной области можно оценить из уравнения

$$\tau + g\phi^2 = \delta\tau(\Omega_L). \quad (3.6)$$

Легко видеть, что если величина τ достаточно мала, а именно,

$$\delta\tau(\Omega_L) \gg \tau, \quad (3.7)$$

то решение уравнения (3.6) полностью определяется только величиной случайной температуры

$$\phi(\Omega_L) \simeq \pm \left[\frac{\delta\tau(\Omega_L)}{g} \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Оценим теперь, при каких характерных размерах подобных локально упорядоченных областей это может происходить. Согласно уравнению (3.5) из условия $\delta\tau_L \gg \tau$ находим

$$L \ll \frac{u^{1/D}}{\tau^{2/D}}. \quad (3.9)$$

С другой стороны, сама по себе оценка параметра порядка в терминах седлового уравнения (3.6) имеет смысл только на масштабах много больше корреляционной длины $R_c \sim \tau^{-\nu}$. Таким образом, имеется еще одно ограничение для величины L

$$L \gg \tau^{-\nu}. \quad (3.10)$$

Поэтому замороженные пространственные флуктуации эффективной температуры оказываются доминирующими при

$$\tau^{-\nu} \ll \frac{u^{1/D}}{\tau^{2/D}} \quad (3.11)$$

или

$$\tau^{2-\nu D} \ll u. \quad (3.12)$$

Согласно скейлинговым соотношениям (см. (2.55)) имеем $2 - \nu D = \alpha$. В результате мы получаем критерий Харриса: если критический индекс теплоемкости чистой системы положителен, то в малом температурном интервале

$$\tau < \tau_* \equiv u^{1/\alpha} \quad (3.13)$$

вблизи T_c слабый беспорядок становится доминирующим фактором.

Заметим, что в маргинальной ситуации, когда $\alpha = 0$, требуется более детальное рассмотрение. Примерами подобных систем являются, например, четырехмерная модель ϕ^4 (раздел 3.3) и двумерная модель Изинга (раздел 5). Вычисления показывают, что во всех подобных случаях, если теплоемкость чистой системы является (логарифмически) расходящейся в критической точке, то наличие слабого беспорядка оказывается существенным для критического поведения.

3.2. Самоусреднение и метод реплик

Главная проблема при решении статистических задач в системах с беспорядком состоит в том, что этот беспорядок является *замороженным*. Формально все результаты для наблюдаемых физических величин в таких системах должны зависеть от полной матрицы спин-спиновых взаимодействий J_{ij} , т.е. они должны определяться *макроскопическим* числом параметров. Понятно, что подобные ответы получать не только невозможно, но и бессмысленно. Очевидно, что то, что принято называть *наблюдаемыми* величинами, должно зависеть от некоторых общих, т.е. усредненных характеристик распределе-

ния случайных спин-спиновых взаимодействий по системе. И здесь мы приходим к понятию *самоусреднения*.

Традиционный способ рассуждения о том, почему должно возникать самоусреднение, состоит в следующем. Свободная энергия, как известно, пропорциональна объему системы V . Поэтому в термодинамическом пределе, когда $V \rightarrow \infty$, главный вклад в термодинамику происходит от объема, а не от границы, т.е. влияние границы есть эффект следующего порядка малости по параметру $1/V$. Далее, любую макроскопическую систему мы можем условно разбить на, опять же, макроскопическое число частей, каждая из которых тоже будет макроскопической. Тогда полная свободная энергия системы может быть представлена в виде суммы свободных энергий ее частей плюс вклад от взаимодействий этих частей на их границах. Если взаимодействия в системе короткодействующие (а это имеет место всегда в нормальных физических системах), то эффект взаимодействия частей полной системы есть эффект границы, и в термодинамическом пределе он исчезает. Поэтому полная свободная энергия системы может быть представлена в виде суммы макроскопического числа членов, каждый из которых содержит в качестве параметров случайные элементы матрицы спин-спиновых взаимодействий и поэтому сам является величиной случайной. Далее, в соответствии с законом больших чисел сумма большого количества случайных величин может быть представлена (в главном порядке) как их среднее, вычисленное в соответствии с их статистическим распределением, умноженное на их число (разумеется, все это справедливо только при выполнении определенных требований на свойства статистического распределения случайных величин). В силу этого рассуждения, свободная энергия макроскопической системы должна самоусредняться *по реализациям* случайных спин-спиновых взаимодействий в соответствии с их статистическим распределением.

Свободная энергия есть логарифм статистической суммы, поэтому все, что нужно для вычисления наблюдаемой термодинамики — это научиться вычислять среднее от логарифма статистической суммы по заданному распределению взаимодействий J_{ij} после вычисления самой статистической суммы. Для выполнения этой программы используется технический прием, известный как метод реплик.

Формальная схема введения реплик состоит в следующем. Как мы уже знаем, для получения физической (самоусредняющейся) свободной энергии системы, мы должны усреднить ее по реализациям случайных взаимодействий:

$$F \equiv \overline{F_J} = -\frac{1}{\beta} \overline{\ln Z_J}, \quad (3.14)$$

где черта сверху обозначает усреднение по случайным взаимодействиям с данным распределением $P[J]$

$$\overline{\ln Z_J} \equiv \left(\prod_{(i,j)} \int dJ_{ij} \right) P[J] \ln Z_J \quad (3.15)$$

и

$$Z_J = \sum_{\sigma} \exp(-\beta H[\sigma]) \quad (3.16)$$

— это статистическая сумма системы, вычисленная при фиксированных взаимодействиях J_{ij} .

Для того чтобы произвести усреднение логарифма в (3.14), производится следующий трюк. Возведем статистическую сумму (3.16) в *целую* степень n . В результате мы получим статистическую сумму системы, состоящей из n не взаимодействующих *идентичных* реплик исходной модели (т.е. имеющих идентичные фиксированные спин-спиновые взаимодействия J_{ij}):

$$Z_J^n = \left(\prod_{a=1}^n \sum_{\sigma^a} \right) \exp \left\{ \beta \sum_{a=1}^n \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i^a \sigma_j^a \right\}. \quad (3.17)$$

Здесь индекс a нумерует реплики. Введем теперь величину

$$F_n = -\frac{1}{\beta n} \ln Z_n, \quad (3.18)$$

где

$$Z_n \equiv \overline{Z_J^n}. \quad (3.19)$$

Если теперь в выражении (3.18) перейти к *формальному* пределу $n \rightarrow 0$, то мы получим нужное нам выражение для свободной энергии (3.14)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} F_n &= -\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\beta n} \ln(Z_n) = -\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\beta n} \ln[\overline{\exp(n \ln Z_J)}] = \\ &= -\frac{1}{\beta} \overline{\ln Z_J} = F. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Таким образом, схема метода реплик состоит в следующем. Требуется вычислить величину F_n для целого n . Затем полученную функцию n аналитически продолжить на нецелые n и перейти к пределу $n \rightarrow 0$.

Эта процедура, хотя и может на первый взгляд показаться весьма сомнительной, в действительности является вполне осмысленной. Во-первых, если свободная энергия является аналитической функцией температуры и других параметров (т.е. она может быть представлена в виде ряда по степеням β), то легко видеть, что метод реплик является правильным в строгом смысле этого слова. Во-вторых, во всех случаях, когда можно провести вычисления каким-либо другим методом, результаты, полученные методом реплик, подтверждаются.

Репличный формализм можно ввести и по-другому, исходя из чисто физических соображений [9, 10]. Рассмотрим общую спиновую систему, описываемую некоторым гамильтонианом $H[J; \sigma]$, который зависит от спиновых переменных $\{\sigma_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) и спин-спиновых взаимодействий J_{ij} (конкретный вид гамильтониана не важен). Если взаимодействия J_{ij} являются замороженными, то формально свободная энергия системы будет зависеть от конкретной реализации параметров J_{ij} :

$$F[J] = -\frac{1}{\beta} \log Z[J]. \quad (3.21)$$

Теперь предположим, что спин-спиновые взаимодействия не являются строго замороженными, т.е. что они тоже могут изменять свои значения, но характерный временной масштаб их динамики много больше временного масштаба, на котором в спиновых степенях свободы устанавливается термодинамическое равновесие. В этом случае свободная энергия (3.21) по-прежнему будет

иметь смысл, и она теперь станет функцией энергии (гамильтонианом) для степеней свободы J_{ij} .

Поскольку спин-спиновые взаимодействия становятся переменными, должно быть установлено пространство, в котором они принимают свои значения. К примеру, связи J_{ij} могут быть переменными, принимающими значения $\pm J_0$, или они могут быть непрерывными переменными, принимающими значения в некотором ограниченном интервале, или что-нибудь еще. В случае замороженных связей пространство взаимодействий J_{ij} задается функцией распределения $P[J]$. В обсуждаемом случае частично расплавленных связей эта функция $P[J]$ имеет смысл внутреннего потенциала для переменных взаимодействий J_{ij} , которая ограничивает пространство их значений.

Предположим теперь, что спиновые степени свободы и степени свободы спиновых взаимодействий *не находятся в состоянии термодинамического равновесия*. А именно, что температура T' в системе спиновых взаимодействий отличается от температуры T спиновых переменных. В этом случае полная статистическая сумма системы будет иметь вид

$$\mathcal{Z} = \int DJ P[J] \exp(-\beta' F[J]) = \int DJ P[J] \exp\left(\frac{\beta'}{\beta} \log Z_J\right) = \int DJ P[J] (Z_J)^n \equiv \overline{(Z_J)^n}, \quad (3.22)$$

где $n = T/T'$. Соответственно, для полной свободной энергии системы получаем

$$\mathcal{F} = -T' \log \{ \overline{(Z[J])^n} \}. \quad (3.23)$$

Таким образом, мы возвратились к обычному репличному формализму, в котором "число реплик" $n = T/T'$ является конечным параметром.

В случае замороженных связей физическая (самоусредняющаяся) свободная энергия получается в пределе $n \rightarrow 0$. С точки зрения рассмотренного выше подхода эта ситуация соответствует пределу бесконечной температуры T' в системе взаимодействий. И это естественно в том смысле, что термодинамика спиновых степеней свободы не производит никакого воздействия на статистику спиновых взаимодействий.

В случае, если спиновые переменные и спиновые взаимодействия находятся в термодинамическом равновесии, т.е. $T' = T$ ($n = 1$), возникает тривиальная ситуация полностью расплавленного беспорядка, какова бы ни была разница характерных времен в динамике взаимодействий J_{ij} и спинов. Это тоже естественно, поскольку термодинамическое описание формально соответствует бесконечным временам, и характерные временные масштабы динамики внутренних степеней свободы не играют никакой роли.

Если же $n \neq 0$ и $n \neq 1$, то возникает промежуточная ситуация, которую можно условно назвать частично расплавленным беспорядком и которая является промежуточной между замороженным беспорядком и расплавленным беспорядком.

3.3. Критические индексы в модели ϕ^4 с беспорядком

Рассмотрим общий случай слабо неупорядоченной p -компонентной спиновой системы, которая вблизи критической точки в непрерывном пределе описывается га-

милтонианом ϕ^4 (см. (3.1))

$$H[\delta\tau, \phi] = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [\nabla \phi_i(x)]^2 + \frac{1}{2} [\tau - \delta\tau(x)] \sum_{i=1}^p \phi_i^2(x) + \frac{1}{4} g \sum_{i,j=1}^p \phi_i^2(x) \phi_j^2(x) \right\}, \quad (3.24)$$

где случайная функция $\delta\tau(x)$ описывается гауссовым распределением (3.2).

В терминах метода реплик следует вычислить усредненную по беспорядку репличную статсумму

$$\begin{aligned} Z_n &= \left[\int D\phi_i(x) \exp(-H[\delta\tau, \phi]) \right]^n = \\ &= \int D\delta\tau(x) \int D\phi_i^a(x) \exp \left\{ -\frac{1}{4u} \int d^D x [\delta\tau(x)]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\nabla \phi_i^a(x)]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} [\tau - \delta\tau(x)] \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\phi_i^a(x)]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} g \sum_{i,j=1}^p \sum_{a=1}^n [\phi_i^a(x)]^2 [\phi_j^a(x)]^2 \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где индекс a нумерует реплики (как обычно, все предэкспоненциальные множители мы опускаем). После гауссова интегрирования по $\delta\tau(x)$ получаем

$$\begin{aligned} Z_n &= \int D\phi_i^a(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\nabla \phi_i^a(x)]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\phi_i^a(x)]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^p \sum_{a,b=1}^n g_{ab} [\phi_i^a(x)]^2 [\phi_j^b(x)]^2 \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$g_{ab} = g\delta_{ab} - u. \quad (3.27)$$

Критическое поведение этой системы в размерности $D = 4 - \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) можно вычислить с помощью стандартной процедуры ренормгруппы, рассмотренной в разделе 2.6.

С учетом векторных и репличных компонент член, описывающий взаимодействие ϕ^4 в экспоненте (3.26), может быть представлен в виде диаграммы, показанной на рис. 6. Аналогично вычислениям раздела 2.6 легко видеть, что (однопетлевая) перенормировка параметра

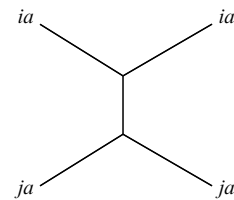


Рис. 6. Диаграммное представление члена взаимодействия $g_{ab} [\phi_i^a(x)]^2 [\phi_j^b(x)]^2$

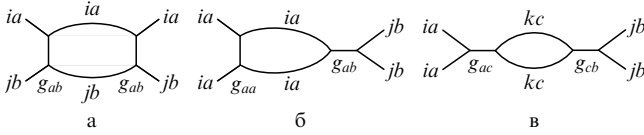


Рис. 7. Диаграммы, которые дают вклад в перенормировку члена взаимодействия $g_{ab}[\phi_i^a(x)]^2[\phi_j^b(x)]^2$



Рис. 8. Диаграммы, которые дают вклад в перенормировку "массового" члена $\tau[\phi_i^a(x)]^2$

взаимодействия g_{ab} дается диаграммами, показанными на рис. 7. Учитывая соответствующие комбинаторные факторы, легко получить вклады этих диаграмм

$$\begin{aligned}
 (a) & \rightarrow g_{ab}^2 \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^2(k) \Big|_{\epsilon \ll 1} \simeq g_{ab}^2 \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{1}{\lambda}, \\
 (b) & \rightarrow \frac{1}{2} (g_{aa} + g_{bb}) g_{ab} \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^2(k) \Big|_{\epsilon \ll 1} \simeq \\
 & \simeq \frac{1}{2} (g_{aa} + g_{bb}) g_{ab} \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{1}{\lambda}, \\
 (c) & \rightarrow \frac{p}{4} \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^2(k) \Big|_{\epsilon \ll 1} \simeq \\
 & \simeq \frac{p}{4} \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{1}{\lambda}. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Соответственно, уравнения РГ имеют вид

$$\frac{dg_{ab}}{d\xi} = \epsilon g_{ab} - \frac{1}{8\pi^2} \left[4g_{ab}^2 + 2(g_{aa} + g_{bb})g_{ab} + p \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} \right]. \quad (3.29)$$

Учитывая определение (3.27), отсюда получаем два уравнения РГ для двух параметров взаимодействия $\tilde{g} \equiv g_{aa} = g - u$ и $g_{a \neq b} = -u$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{g}}{d\xi} &= \epsilon \tilde{g} - \frac{1}{8\pi^2} [(8+p)\tilde{g}^2 + p(n-1)u^2], \\
 \frac{du}{d\xi} &= \epsilon u - \frac{1}{8\pi^2} \{ (4+2p)\tilde{g}u - [4+p(n-2)]u^2 \}. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

В пределе $n \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{g}}{d\xi} &= \epsilon \tilde{g} - \frac{1}{8\pi^2} [(8+p)\tilde{g}^2 - pu^2], \\
 \frac{du}{d\xi} &= \epsilon u - \frac{1}{8\pi^2} [(4+2p)\tilde{g}u - (4-2p)u^2]. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Аналогично, перенормировка массового параметра $\tau[\phi_i^a(x)]^2$ дается диаграммами, показанными на рис. 8

$$\begin{aligned}
 (a) & \rightarrow \tau g_{aa} \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^2(k) \Big|_{\epsilon \ll 1} \simeq \tau g_{aa} \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{1}{\lambda}, \\
 (b) & \rightarrow \frac{1}{2} p \tau \sum_{c=1}^n g_{ca} \int_{\lambda k_0 < |k| < k_0} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G_0^2(k) \Big|_{\epsilon \ll 1} \simeq \\
 & \simeq \frac{1}{2} p \tau \sum_{c=1}^n g_{ca} \frac{p}{8\pi^2} \ln \frac{1}{\lambda}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Заметим, что эти вклады не зависят от выбора конкретного номера реплики a (для простоты можно, например, принять, что $a = 1$). Соответствующее уравнение РГ для "массы" τ имеет вид

$$\frac{d}{d\xi} \ln |\tau| = 2 - \frac{1}{8\pi^2} \left(2g_{aa} + p \sum_{c=1}^n g_{ca} \right). \quad (3.33)$$

В пределе $n \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{d}{d\xi} \ln |\tau| = 2 - \frac{1}{8\pi^2} [(2+p)\tilde{g}(\xi) + pu(\xi)], \quad (3.34)$$

где перенормированные параметры взаимодействия $\tilde{g}(\xi)$ и $u(\xi)$ определяются из уравнений (3.31).

Значения параметров $\tilde{g}^*$ и u^* в фиксированной точке определяются из условий: $d\tilde{g}^*/d\xi = 0$, $du^*/d\xi = 0$

$$\begin{aligned}
 (8+p)\tilde{g}^2 - pu^2 &= 8\pi^2 \epsilon g, \\
 (4+2p)\tilde{g}u - (4-2p)u^2 &= 8\pi^2 \epsilon u. \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют два нетривиальных решения:

$$\tilde{g}^* = \frac{8\pi^2}{p+8} \epsilon, \quad u^* = 0; \quad (3.36)$$

$$\tilde{g}^* = \epsilon \pi^2 \frac{p}{2(p-1)}, \quad u^* = \epsilon \pi^2 \frac{4-p}{2(p-1)} \quad (p \neq 1). \quad (3.37)$$

Очевидно, что первая фиксированная точка (3.36) описывает чистую систему (где $u \equiv 0$), а (3.37) — это некая новая фиксированная точка, которая возникает исключительно из-за наличия в системе беспорядка.

Простой анализ устойчивости РГ траекторий, определяемых линеаризованными уравнениями (3.31) вблизи критических точек (3.36) и (3.37) показывает, что при $p > 4$ устойчивой является "чистая" фиксированная точка (3.36), а "примесная" фиксированная точка (3.37) является неустойчивой. В случае $p < 4$, наоборот, устойчивой является примесная фиксированная точка (3.37), а фиксированная точка чистой системы (3.36) становится неустойчивой. Заметим, что величина u^* в примесной фиксированной точке (3.37) становится отрицательной при $p > 4$, что является совершенно нефизической ситуацией, поскольку параметр u является изначально положительно определенной величиной.

Используя уравнение (3.33) и соотношения (2.86), (2.55) для критических индексов чистой системы (мы обозначим их индексом "(0)"), получаем

$$\begin{aligned}
 \Delta_\tau^{(0)} &= 2 - \frac{1}{8\pi^2} (2+p)\tilde{g}_{(0)}^* = 2 - \frac{2+p}{8+p} \epsilon; \Rightarrow \\
 \Rightarrow \nu_{(0)} &= \frac{1}{\Delta_\tau^{(0)}} \simeq \frac{1}{2} + \frac{2+p}{4(8+p)} \epsilon, \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

$$\alpha_{(0)} = 2 - (4 - \epsilon)v_{(0)} \simeq \frac{4 - p}{2(8 + p)} \epsilon. \quad (3.39)$$

С помощью соотношений (2.55)–(2.59) остальные критические индексы вычисляются автоматически.

Таким образом, наличие слабого беспорядка не влияет на критическое поведение p -компонентной спиновой системы при $p > 4$. Следует обратить внимание, что именно в этом случае критический индекс теплоемкости α чистой системы, согласно результату (3.39), является отрицательным, что полностью согласуется с критерием Харриса (раздел 3.1).

При $p < 4$ фиксированная точка чистой системы (3.36) становится неустойчивой, и критические свойства определяются примесной критической точкой (3.37). Используя (3.33), получаем:

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{1}{8\pi^2} [(2 + p)\tilde{g}^* + pu^*] = 2 - \frac{3p}{8(p - 1)} \epsilon; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\Delta_\tau} \simeq \frac{1}{2} + \frac{3p}{32(p - 1)} \epsilon, \quad (3.40)$$

$$\alpha = 2 - (4 - \epsilon)v \simeq -\frac{4 - p}{8(p - 1)} \epsilon. \quad (3.41)$$

Здесь подразумевается, что параметр p больше единицы. Остальные критические индексы вычисляются автоматически.

Случай однокомпонентной (изинговской) системы, $p = 1$, требует особого рассмотрения. Проблема состоит в том, что при $p = 1$ уравнения (3.31) становятся вырожденными. Оказывается, однако, что такое вырождение является свойством лишь (однопетлевого) приближения первого порядка по ϵ . Можно показать, что с учетом двухпетлевых диаграмм вырождение уравнений РГ снимается, и можно вычислить, что и в изинговском случае, $p = 1$, существует нетривиальная примесная фиксированная точка. Существенное отличие от случаев с $p \neq 1$ состоит лишь в том, что изинговская примесная фиксированная точка оказывается порядка $\sqrt{\epsilon}$ [8]. Мы здесь полностью опускаем рассмотрение изинговского случая, поскольку соответствующие вычисления намного более громоздки, а конечный результат на качественном уровне не отличается от результата, полученного выше для систем с $1 < p < 4$.

Таким образом, в соответствии с критерием Харриса, слабый беспорядок существенно меняет критическое поведение p -компонентной спиновой системы с $p < 4$. При этом вблизи критической точки возникает новый универсальный критический режим, который описывается набором новых (универсальных) критических индексов. Заметим, что в этом новом режиме критический индекс теплоемкости (3.41) оказывается отрицательным в отличие от соответствующего критического индекса чистой системы. Тем самым обеспечивается самосогласованность критерия Харриса (повторное применение критерия Харриса к новому критическому поведению показывает, что оно устойчиво к наличию слабого беспорядка).

Следует подчеркнуть, однако, что несмотря на предельную простоту и ясность рассмотренного в этом разделе подхода, соответствие полученных таким способом результатов реальным физическим явлениям в настоящее время вызывает большие сомнения. В следую-

щей главе будет показано, что благодаря непертурбативным степеням свободы спин-стекольной природы реальная физическая картина критических явлений вблизи точки фазового перехода может оказаться существенно более сложной.

3.4. Критическое поведение теплоемкости в четырехмерной системе

Рассмотрение этого случая полностью аналогично соответствующим вычислениям проделанным в разделе 2.6 для чистой системы (уравнения (2.122) и (2.123)). Для сингулярной части теплоемкости в размерности $D = 4$ имеем

$$C \simeq \int_{|k| > \sqrt{\tau}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G_0^2(k) \left[\frac{m(k)}{\tau} \right]^2 \sim \int_{\xi < \ln(1/\tau)} d\xi \left[\frac{m(\xi)}{\tau} \right]^2. \quad (3.42)$$

Здесь перенормировка "одетой" массы $m(\xi)$ определяется паркетными диаграммами, показанными на рис. 8, а перенормировка параметров взаимодействия $\tilde{g}(\xi)$ и $u(\xi)$ дается уравнениями (3.31) с $\epsilon = 0$:

$$\frac{d}{d\xi} \ln |m| = -\frac{1}{8\pi^2} [(2 + p)\tilde{g} + pu], \quad (3.43)$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\xi} = -\frac{1}{8\pi^2} [(8 + p)\tilde{g}^2 - pu^2], \quad (3.44)$$

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{8\pi^2} [(4 + 2p)\tilde{g}u - (4 - 2p)u^2] \quad (3.45)$$

с начальными условиями $m(\xi = 0) = \tau$, $\tilde{g}(\xi = 0) = g_0$, $u(\xi = 0) = u_0$.

Рассмотрим сначала случай чистой системы, где $u \equiv 0$. Легко убедиться, что решение уравнений (3.43), (3.44) для $m(\xi)$ и $\tilde{g}(\xi) \equiv g(\xi)$ имеет вид

$$g(\xi) = g_0 \left[1 + \frac{(8 + p)g_0}{8\pi^2} \xi \right]^{-1} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \sim \frac{8\pi^2}{8 + p} \xi^{-1},$$

$$m(\xi \rightarrow \infty) \sim \xi^{-(2+p)/(8+p)}. \quad (3.46)$$

Простое интегрирование в (3.42) приводит к следующему результату для сингулярной части теплоемкости

$$C \sim \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{(4-p)/(8+p)}. \quad (3.47)$$

Простые вычисления показывают, что если примесный параметр взаимодействия u не равен нулю, то асимптотика (при $\xi \rightarrow \infty$) решений уравнений (3.43)–(3.45) имеет вид

$$\tilde{g}(\xi) \sim \pi^2 \frac{p}{2(p - 1)} \xi^{-1}; \quad u(\xi) \sim \pi^2 \frac{(4 - p)}{2(p - 1)} \xi^{-1};$$

$$m(\xi) \sim \xi^{-3p/[8(p-1)]}. \quad (3.48)$$

Заметим, однако, что такое асимптотическое решение существует только при $p < 4$, поскольку в противном случае параметр u формально становится отрицательным, а это невозможно просто из физических соображений, поскольку он является положительно определенной

величиной. В действительности, легко понять, что при $p < 4$ параметр $u(\xi)$ просто обращается в нуль на некотором конечном масштабе ξ и после этого асимптотика решений для $m(\xi)$ и $\tilde{g}(\xi)$ совпадает с решением (3.46) для чистой системы.

Заметим также, что случай однокомпонентной системы, $p = 1$, требует особого рассмотрения. Как и в обсуждавшемся выше случае размерности $D = 4 - \epsilon$, здесь требуется учитывать второй порядок ренорм-группы, и это делает весь анализ довольно громоздким, поэтому мы его опускаем.

В случае $1 < p < 4$ простое интегрирование в (3.42) приводит к следующему результату

$$C \sim \left(\ln \frac{1}{\tau} \right)^{-(4-p)/[4(p-1)]}. \quad (3.49)$$

Интересно отметить, что хотя в размерности $D = 4$ критический индекс теплоемкости равен нулю, тем не менее критерий Харриса, сформулированный в несколько более обобщенном виде, по-прежнему работает. А именно, если теплоемкость чистой системы в критической точке является расходящейся (случай $p < 4$, уравнение (3.47)), то наличие слабого беспорядка должно быть существенным для критического поведения (при этом в теплоемкости возникает новый тип (универсальной) сингулярности (3.49)). В противном случае, если теплоемкость чистой системы в точке перехода конечна ($p > 4$, см. (3.47)), то наличие слабого беспорядка на критическое поведение не влияет.

4. Спин-стекольные эффекты в критических явлениях

4.1. Непертурбативные степени свободы

В этом разделе мы рассмотрим влияние на критические явления нетривиальных спин-стекольных эффектов, которые в предыдущем рассмотрении не принимались во внимание. Мы увидим, что вблизи точки фазового перехода эти эффекты могут полностью изменить всю физическую картину критического поведения.

Вкратце, рассмотренная в разделе 3 традиционная точка зрения на влияние, производимое слабым беспорядком, состоит в следующем. Если критический индекс теплоемкости чистой системы отрицателен, $\alpha < 0$, то наличие слабого беспорядка является несущественным для критических явлений. В противоположном случае при $\alpha > 0$ наличие сколь угодно слабого беспорядка является существенным для критического поведения и достаточно близко к точке перехода, при $\tau < \tau_u \equiv u^{1/\alpha}$, устанавливается новый универсальный критический режим, который описывается новым набором критических индексов. В этом смысле никаких качественно новых физических явлений слабый беспорядок не производит.

В действительности, как мы увидим далее, в случае, когда наличие беспорядка является существенным для критического поведения, ситуация может оказаться значительно более нетривиальной. Рассмотрим снова основные физические принципы традиционного ренорм-группового подхода.

Вблизи точки перехода D -мерная изинговская система со слабым беспорядком описывается гамильто-

нианом Гинзбурга–Ландау

$$H = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} [\tau - \delta\tau(x)] \phi^2(x) + \frac{1}{4} g \phi^4(x) \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь, как обычно, замороженный беспорядок описывается флуктуирующей по пространству локальной температурой перехода $\delta\tau(x)$ с гауссовым распределением

$$P[\delta\tau] = p_0 \exp \left\{ -\frac{1}{4u} \int d^D x [\delta\tau(x)]^2 \right\}, \quad (4.2)$$

где $u \ll 1$ — это малый параметр, описывающий величину беспорядка, а p_0 — нормировочная константа.

Если мы интересуемся критическими свойствами системы, то согласно общим принципам в статистической сумме следует проинтегрировать по всем локальным конфигурациям поля вплоть до масштаба корреляционной длины (которая в точке перехода является бесконечной). Такие вычисления обычно выполняются в рамках ренормгруппового подхода, который, как принято считать, самосогласованным образом как раз и учитывает все флуктуации поля в скейлинговой области на масштабах корреляционной длины R_c .

Для аналитического вывода известных результатов о критическом поведении используется ренормгрупповой формализм, разработанный для случая пространственной размерности $D = 4 - \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$. При этом, как мы видели в предыдущей главе, наличие слабого беспорядка приводит к тому, что фиксированная точка РГ, описывающая чистую систему, становится неустойчивой, и ренормгрупповые траектории уходят в другую (универсальную) фиксированную точку $g_* \neq 0$; $u_* \neq 0$, которая, как принято считать, и описывает критическое поведение системы с беспорядком.

В таком подходе, однако, совершенно не учитывается одно важное обстоятельство. Рассмотрим свойства основного состояния системы с гамильтонианом (4.1). Конфигурации поля $\phi(x)$, которые соответствуют локальным минимумам энергии, удовлетворяют седловому уравнению

$$-\Delta\phi(x) + [\tau - \delta\tau(x)]\phi(x) + g\phi^3(x) = 0. \quad (4.3)$$

Ясно, что решения этого уравнения зависят от конкретного выбора случайной функции $\delta\tau(x)$ и являются неоднородными. При этом в областях пространства, где величина $[\tau - \delta\tau(x)]$ отрицательна, значение поля $\phi(x)$ отлично от нуля. Более того, нетрудно понять, что существует экспоненциально большое по объему системы число различных решений седлового уравнения (4.3). Действительно, для данной реализации случайной функции $\delta\tau(x)$ существует макроскопическое число пространственных "островов", где $[\tau - \delta\tau(x)] < 0$ (это области пространства, где локальная температура ниже T_c), и в каждом таком "острове" существует два локальных решения, соответствующих минимуму энергии: одно "вверх" (значение поля положительно), а другое "вниз" (значение поля отрицательно). Эти локальные конфигурации разделены конечными энергетическими барьерами, величина которых тем больше, чем больше размер данного "острова".

Проблема теперь состоит в том, что традиционный ренормгрупповой подход есть не что иное, как просто суммирование теории возмущений на фоне некоторого основного состояния, и соответственно, такой подход не может учитывать конфигурации поля, соответствующие другим локальным минимумам энергии, находящимся "за барьером". В чистой системе подобная проблема не возникает, так как в этом случае имеется единственная конфигурация поля, соответствующая минимуму энергии. Однако в ситуации, когда существует макроскопическое число локальных минимумов энергии, разделенных конечными барьерами, оправданность применения традиционной ренормгруппы вызывает большие сомнения.

Систематический способ вычисления статистической суммы должен состоять в следующем. Во-первых, следует проинтегрировать по флуктуациям поля вокруг данных минимумов энергии, и, во-вторых, нужно также просуммировать по всем таким минимумам. Ввиду того, что конфигурации поля, соответствующие локальным минимумам, сами являются некоторыми нелокальными функционалами случайной функции $\delta\tau(x)$, возможность успешного выполнения подобной программы представляется совершенно нереальной.

С другой стороны, существует альтернативный подход, который был разработан как раз для ситуаций, когда приходится иметь дело со статистическими системами с многочисленными локальными минимумами энергии. Эта техника называется схемой нарушения репличной симметрии (НРС) Паризи, и она сыграла ключевую роль в понимании физики спин-стекольного состояния (см., например, [11]). Последние исследования показывают, что формализм НРС может оказаться весьма плодотворным и для проблем, связанных с учетом разного рода флуктуационных степеней свободы [12–14]. Более того, в последних исследованиях формализм НРС был успешно применен в рамках традиционной теории ренормгруппы на примере двумерной модели Sine–Gordon, где было показано, что обычные ренормгрупповые потоки неустойчивы по отношению к введению взаимодействий, нарушающих репличную симметрию [15].

Можно привести веские аргументы в пользу того, что в рассматриваемом случае суммирование по локальным минимумам может привести к появлению дополнительных нетривиальных потенциалов взаимодействия флуктуирующих полей, имеющих структуру с НРС Паризи [16]. Поскольку проблема суммирования по локальным минимумам гамильтониана (4.1) остается пока еще в значительной мере не изученной, и ее рассмотрение требует использования аппарата теории спиновых стекол, то здесь мы ограничимся лишь общей схемой рассуждений.

В традиционном подходе для усреднения по замороженному беспорядку используется стандартный метод реплик (раздел 3.2). При этом рассматриваемая проблема сводится к вычислению репличной статистической суммы $Z_n \equiv \mathbb{Z}^n[\delta\tau]$ (см. (3.26))

$$Z_n = \int D\phi_a(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n [\nabla \phi_a(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau \sum_{a=1}^n \phi_a^2(x) + \frac{1}{4} \sum_{a,b=1}^n g_{ab} \phi_a^2(x) \phi_b^2(x) \right\} \right\}, \quad (4.4)$$

где

$$g_{ab} = g\delta_{ab} - u \quad (4.5)$$

представляет собой *реплично-симметричную* матрицу взаимодействий. Если так сформулированную проблему решать в рамках обычной ренормгруппы (как это делается в разделе 3.3), то фактически это будет означать суммирование ряда теории возмущений на фоне однородного состояния $\phi = 0$. Однако, когда существуют многочисленные конфигурации поля, соответствующие локальным минимумам энергии (заметим, что конфигурация $\phi = 0$, хотя и является экстремумом гамильтониана, соответствует вовсе не минимуму, а максимуму энергии), подобный подход представляется необоснованным.

Обозначим *локальные* решения уравнения (4.3) через $\psi^{(i)}(x)$, где индекс $i = 1, 2, \dots, N_0$ нумерует пространственные "острова", где $\delta\tau(x) > \tau$. Если размер L_0 данного острова, где $[\delta\tau(x) - \tau] > 0$ не слишком мал, то величина $\psi^{(i)}(x)$ в этом "острове" будет $\sim \pm[\delta\tau(x) - \tau]/g^{1/2}$, где $\delta\tau(x)$ следует интерпретировать, как величину $\delta\tau$, усредненную по данной области размера L_0 . Очевидно, что в системе имеется конечная пространственная плотность таких "островов", т.е. величина N_0 является макроскопической: $N_0 = \kappa V$, где V — это объем системы, а κ — некоторая константа (зависящая от τ). Приближенно глобальную конфигурацию поля $\Phi(x)$, соответствующую минимуму энергии, можно тогда сконструировать как объединение всех таких локальных решений, взятых с произвольными знаками:

$$\Phi_{(\alpha)}[x; \delta\tau(x)] = \sum_{i=1}^{\kappa V} \sigma_i \psi^{(i)}(x), \quad (4.6)$$

где теперь появилась новая изинговская степень свободы $\sigma_i = \pm 1$. Понятно, что полное число таких конфигураций должно быть $2^{\kappa V}$. Обозначим эти глобальные конфигурации индексом $\alpha = 1, 2, \dots, K = 2^{\kappa V}$. Как уже обсуждалось выше, представляется весьма сомнительным, чтобы традиционное интегрирование по флуктуациям вокруг конфигурации $\phi(x) = 0$ смогло учесть конфигурации поля $\phi(x)$ вблизи решений $\Phi(x)$, поскольку все такие решения разделены конечными энергетическими барьерами. Более адекватным представляется подход, в котором малые флуктуации вокруг каждой из конфигураций $\Phi_{(\alpha)}[x; \delta\tau]$ учитываются отдельно. Таким образом, предлагается просуммировать по всем K глобальным минимумам $\Phi_{(\alpha)}[x; \delta\tau]$ (непертурбативные степени свободы), и кроме этого проинтегрировать по "гладким" флуктуациям поля $\varphi(x)$ вблизи этих минимумов

$$\begin{aligned} Z[\delta\tau] &= \int D\varphi(x) \sum_{\alpha}^K \exp(-H[\Phi_{(\alpha)} + \varphi; \delta\tau]) = \\ &= \int D\varphi(x) \exp(-H[\varphi; \delta\tau]) \times \tilde{Z}[\varphi; \delta\tau], \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[\varphi; \delta\tau] &= \sum_{\alpha}^K \exp \left\{ -H_{\alpha} - \int d^D x \left[\frac{3}{2} g \Phi_{(\alpha)}^2(x; \delta\tau) \varphi^2(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g \Phi_{(\alpha)}(x; \delta\tau) \varphi^3(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

и H_{α} — энергия минимума номер α .

Теперь мы должны выполнить усреднение по замороженному беспорядку и в результате для репличной статистической суммы Z_n получим:

$$Z_n = \int D\delta\tau P[\delta\tau] \int D\varphi_a \exp \left\{ - \sum_{a=1}^n H[\varphi_a; \delta\tau] \right\} \times \tilde{Z}_n[\varphi_a; \delta\tau], \quad (4.9)$$

где, как обычно, индекс a нумерует реплики, и

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n[\varphi_a; \delta\tau] = & \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^K \exp \left\{ - \sum_a^n H_{\alpha_a} - \right. \\ & \left. - \int d^D x \sum_a^n \left[\frac{3}{2} g \Phi_{(\alpha_a)}^2(x; \delta\tau) \varphi_a^2(x) + g \Phi_{(\alpha_a)}(x; \delta\tau) \varphi_a^3(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Очевидно, что если бы решение для минимума энергии было единственным, то из представления (4.9), (4.10) мы бы все равно вернулись к обычной реплично-симметричной задаче (4.4), (4.5). Однако в данном случае, когда мы имеем экспоненциально большое число решений, проблема становится в высшей степени нетривиальной, и систематического подхода к ее решению пока не найдено.

Глобальное решение $\Phi_{(x)}$ является некоторым нелокальным функционалом случайной функции $\delta\tau(x)$. Случайные степени свободы этого решения можно разделить на два существенно разных типа. Прежде всего такое решение, зависящее от стохастической переменной $\delta\tau(x)$, обладает замороженной случайностью. Однако даже когда функция $\delta\tau(x)$ фиксирована (для данной реализации беспорядка), решения $\Phi_{(x)}(x)$ содержат в себе термодинамические изинговские степени свободы: конфигурации $\Phi_{(x)}(x)$ с различными номерами α отличаются выбором знаков переменных $\{\sigma\}$ в локальных минимумах на пространственных "островах", где локальная температура ниже T_c . В этой ситуации упрощенный подход может состоять в том, чтобы для данной реализации беспорядка $\delta\tau(x)$ рассматривать локальные решения $\psi^{(i)}(x)$, как будто они являются независимыми стохастическими переменными с некоторым заданным (зависящим от $\delta\tau(x)$) статистическим распределением. В результате (после некоторых дополнительных упрощающих предположений) можно показать, что благодаря взаимодействию флуктуирующих полей с конфигурациями локальных минимумов (член $\Phi_{(\alpha_a)}^2 \varphi_a^2$ в уравнении (4.10)) суммирование по этим минимумам в репличной статистической сумме $\tilde{Z}_n[\varphi_a]$ (см. (4.10)) может привести к появлению в эффективном репличном гамильтониане для флуктуирующих полей дополнительных взаимодействий вида

$$\sum_{a,b} g_{ab} \varphi_a^2 \varphi_b^2,$$

где матрица g_{ab} не является реплично-симметричной, а имеет структуру НРС Паризи [16].

Таким образом, мы можем снова вернуться к изучению критических явлений, производимых флуктуациями, в терминах традиционной ренормгруппы, однако теперь взаимодействия ϕ^4 будут определяться некоторой матрицей, имеющей структуру Паризи. Идея состоит в том, что, возможно, по аналогии со спиновыми стеклами подобная обобщенная схема ренормгруппы самосогласованно учитывает те релевантные

степени свободы, которые возникают от многочисленных локальных минимумов энергии. В частности, неустойчивость традиционной реплично-симметричной ренормгруппы по отношению к введению потенциалов с НРС будет указывать на то, что наличие многочисленных минимумов радикально меняет критические свойства системы во флуктуационной области.

В этом разделе мы будем рассматривать ситуацию, когда матрица взаимодействия g_{ab} имеет структуру Паризи общего вида. В действительности, конечно, в каждой данной системе с конкретными статистическими свойствами беспорядка должна возникать (если вообще возникает) структура Паризи совершенно определенного типа. Однако, как уже упоминалось выше, в настоящее время не существует систематического решения проблемы суммирования по локальным минимумам энергии, и, соответственно, нельзя ответить на вопрос, какая конкретно структура Паризи возникает в каждой данной системе. Поэтому нас сейчас, главным образом, будет интересовать вопрос, как в принципе спонтанное НРС во взаимодействиях флуктуирующих полей может сказываться на критических свойствах системы.

В разделе 4.2 будет показано, что во всех случаях, когда, согласно критерию Харриса, беспорядок влияет на критическое поведение, фиксированные точки обычной реплично-симметричной ренормгруппы (рассматривавшиеся в предыдущей главе) неустойчивы по отношению к введению потенциалов с нарушенной репличной симметрией. Более того, будет показано, что в случае НРС общего вида ренормгрупповые траектории приходят к режиму так называемой *сильной связи* на конечном пространственном масштабе $R_* \sim \exp(1/u)$ (который соответствует температурному масштабу $\tau_* \sim \exp(-1/u)$). В общем случае, какова бы ни была затравочная матрица g_{ab} с непрерывным НРС, на этом масштабе параметры перенормированной матрицы становятся немалыми [17].

Обычно феномен сильной связи в ренормгруппе указывает на то, что ключевую роль в термодинамике должны играть какие-то существенно пертурбативные степени свободы. Возможно, в рассматриваемом случае такими степенями свободы являются экспоненциально редкие "инстантоны" в тех областях пространства, где величина $\delta\tau(x) \sim 1$, и, соответственно, величина поля $\varphi(x)$ тоже должна быть порядка ± 1 . (Отдаленным аналогом этой ситуации, по-видимому, являются скейлинговые свойства двумерной модели Гайзенберга, где, как известно, в перенормировках Полякова также возникает режим сильной связи на конечном (экспоненциально большом) масштабе, и это явление возникает из-за наличия в системе нелинейных локализованных состояний инстантонного типа [18].)

В разделе 4.3 мы обсудим физические следствия полученных решений РГ с НРС. В частности будет показано, что из-за отсутствия фиксированных точек на масштабах $R \gg u^{-1/\alpha}$, где беспорядок уже является существенным (или на соответствующих температурных масштабах $\tau \ll u^{1/\alpha}$), не должно существовать простого скейлингового поведения корреляционных функций и других термодинамических величин. Более того, обнаруженное сильное нарушение репличной симметрии в структуре масштабного поведения двухточечных корреляционных функций указывает на то, что в непосредственной близости к точке перехода, по-видимому, возни-

кает какой-то совершенно новый тип критического поведения спин-стекольной природы.

Остающиеся проблемы, связанные с явлениями НРС вблизи точки фазового перехода, мы рассмотрим в разделе 4.4. В частности мы обсудим возможную взаимосвязь эффектов НРС и так называемой фазы Гриффица, которая существует в конечном температурном интервале выше T_c [21].

4.2. Нарушение репличной симметрии в теории ренормгруппы

Рассмотрим p -компонентный ферромагнетик со слабым беспорядком, который вблизи критической точки описывается гамильтонианом Гинзбурга–Ландау (3.21). В рамках стандартного метода реплик после интегрирования по флуктуациям температуры $\delta\tau(x)$ мы имеем следующий репличный гамильтониан (см. (3.26), (3.27))

$$H_n = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\nabla \phi_i^a(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\phi_i^a(x)]^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^p \sum_{a,b=1}^n g_{ab} [\phi_i^a(x)]^2 [\phi_j^b(x)]^2 \right\}. \quad (4.11)$$

Следуя обычной схеме ренормгруппы в системах с размерностью $D = 4 - \epsilon$ (раздел 3.3) для матрицы взаимодействия g_{ab} получаем (однопетлевые) уравнения РГ (см. (3.9))

$$\frac{dg_{ab}}{d\xi} = \epsilon g_{ab} - \frac{1}{8\pi^2} \left[4g_{ab}^2 + 2(g_{aa} + g_{bb})g_{ab} + p \sum_{c=1}^n g_{ac}g_{cb} \right]. \quad (4.12)$$

Для упрощения формул удобно переопределить $g_{ab} \rightarrow 8\pi^2 g_{ab}$ и $g_{a \neq b} \rightarrow -g_{a \neq b}$ (таким образом, недиагональные элементы матрицы g_{ab} будут положительно определены). Обозначив диагональные элементы $\tilde{g} \equiv g_{aa}$, получаем

$$\frac{dg_{ab}}{d\xi} = \epsilon g_{ab} - (4 + 2p)\tilde{g}g_{ab} + 4g_{ab}^2 + p \sum_{c \neq a,b}^n g_{ac}g_{cb} \quad (a \neq b), \quad (4.13)$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\xi} = \epsilon \tilde{g} - (8 + p)\tilde{g}^2 - p \sum_{c \neq 1}^n g_{1c}^2. \quad (4.14)$$

Если здесь взять матрицу g_{ab} в реплично-симметричном виде (4.5), то мы немедленно получим обычные уравнения РГ (3.31) для параметров $\tilde{g}$ и u , и, соответственно, получим известные фиксированные точки и критические индексы, рассматривавшиеся в разделе 3.3. Теперь мы предположим, что в уравнениях (4.13), (4.14) матрица имеет структуру с НРС Паризи общего вида.

В соответствие со стандартной техникой алгебры Паризи [9, 11] в пределе $n \rightarrow 0$ матрица g_{ab} параметризуется в терминах ее диагональных элементов $\tilde{g}$ и недиагональной функции $g(x)$, которая определена на интервале $0 < x < 1$: $g_{ab} \rightarrow (\tilde{g}, g(x))$. Для дальнейшего рассмотрения нам достаточно будет знать, что любые операции с матрицами такого типа выполняются с помощью следующих простых правил [12, 19]:

$$g_{ab}^k \rightarrow (\tilde{g}^k; g^k(x)), \quad (4.15)$$

$$(\tilde{g}^2)_{ab} \equiv \sum_{c=1}^n g_{ac}g_{cb} \rightarrow (\tilde{c}; c(x)), \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \tilde{g}^2 - \int_0^1 dx g^2(x), \\ c(x) &= 2 \left[\tilde{g} - \int_0^1 dy g(y) \right] g(x) - \int_0^x dy [g(x) - g(y)]^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Реплично-симметричная ситуация соответствует специальному случаю, когда $g(x) = \text{const}$, не зависящая от x .

Используя эти правила, вместо (4.13), (4.14) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} g(x) &= [\epsilon - (4 + 2p)\tilde{g}]g(x) + 4g^2(x) - \\ &- 2pg(x) \int_0^1 dy g(y) - p \int_0^x dy [g(x) - g(y)]^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{g} = \epsilon \tilde{g} - (8 + p)\tilde{g}^2 + p\overline{g^2}, \quad (4.19)$$

где мы обозначили

$$\overline{g^2} \equiv \int_0^1 dx g^2(x).$$

Таким образом, теперь мы имеем дело с масштабной эволюцией не отдельных параметров гамильтониана, а функции.

Обычно, при изучении критических явлений, принято прежде всего искать устойчивые фиксированные точки ренормгруппы. Из уравнения (4.18) с $dg(x)/d\xi = 0$ легко вычислить, какой должна быть функция $g(x)$ в фиксированной точке (если таковая вообще существует). Дифференцируя уравнение (4.18) по x два раза, после несложных вычислений находим, что единственным решением является $g'(x) = 0$. Это означает, что либо функция $g(x)$ является константой (что возвращает нас в уже изученную реплично-симметричную ситуацию), либо функция $g(x)$ имеет ступенчатую структуру. Интересно отметить в этой связи, что структура рассматриваемого уравнения на фиксированную точку полностью аналогична уравнению седловой точки для функции Паризи $q(x)$ вблизи T_c в поттсовских спиновых стеклах [20], где решением является одноступенчатая функция (так называемый случай нарушения репличной симметрии на один шаг). В данном случае численное решение "эволюционного" уравнения РГ (4.18) убедительно показывает, что всякий раз, когда затравочная функция $g(x; \xi = 0) \equiv g_0(x)$ имеет многоступенчатую структуру, в процессе эволюции она быстро превращается в одноступенчатую функцию, координата ступеньки которой совпадает с самой правой ступенькой затравочной функции. Поэтому в качестве кандидата на фиксированную точку рассмотрим функцию с одной ступенькой

$$g(x) = \begin{cases} g_0, & 0 \leq x < x_0, \\ g_1, & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (4.20)$$

где координата ступеньки $0 \leq x_0 \leq 1$ остается произвольным параметром. Это связано с тем, что матрицы Пари́зи с нарушением репличной симметрии на один шаг (соответствующие одноступенчатым функциям) образуют собственную подалгебру, т.е. координата ступеньки инвариантна по отношению к любым матричным преобразованиям. В данном случае это проявляется в том, что координата x_0 не эволюционирует с изменением масштаба ξ и остается такой же, как и в затравочной функции. Поэтому величина параметра x_0 в возможной фиксированной точке (4.20) определяется только затравочной функцией $g_0(x)$, которая в свою очередь должна быть получена из (нерешенной) задачи суммирования по локальным минимумам энергии исходного гамильтониана.

Используя анзац (4.20), из (4.18), (4.19) легко получить следующие три уравнения фиксированной точки на три параметра g_1, g_0 и $\tilde{g}$

$$\begin{aligned} (4 - 2px_0)g_0^2 - 2p(1 - x_0)g_1g_0 - (4 + 2p)\tilde{g}g_0 + \epsilon g_0 &= 0, \\ -px_0g_0^2 + (4 - 2p + px_0)g_1^2 - (4 + 2p)\tilde{g}g_1 + \epsilon g_1 &= 0, \\ -px_0g_0^2 - p(1 - x_0)g_1^2 + (8 + p)\tilde{g}^2 - \epsilon\tilde{g} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Эти уравнения имеют несколько нетривиальных решений:

1) Реплично-симметричная фиксированная точка, соответствующая чистой системе (см. (3.36))

$$g_0 = g_1 = 0; \quad \tilde{g} = \frac{1}{8+p} \epsilon. \quad (4.22)$$

Эта фиксированная точка (в соответствии с критерием Харриса) устойчива для числа компонент $p > 4$, и она становится неустойчивой при $p < 4$.

2) Реплично-симметричная фиксированная точка, соответствующая системе с беспорядком (рассматривавшаяся в разделе 3.3, уравнение (3.37))

$$g_0 = g_1 = \epsilon \frac{4-p}{16(p-1)}; \quad \tilde{g} = \epsilon \frac{p}{16(p-1)} \quad (p > 1). \quad (4.23)$$

Традиционно считалось, что именно эта фиксированная точка описывает критическое поведение системы со слабым беспорядком. Известно, что в соответствии с критерием Харриса эта фиксированная точка устойчива (по отношению к реплично-симметричным модам!) при $p < 4$. Можно показать, однако, что по отношению к модам с НРС эта фиксированная точка *всегда неустойчива* [16]. Несложные (хотя и довольно громоздкие) вычисления дают следующий результат для трех собственных значений соответствующих линеаризованных уравнений РГ (в пространстве с НРС на один шаг) вблизи фиксированной точки (4.23)

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{(4-p)}{8(p-1)}, \quad \lambda_3 = +\frac{(4-p)}{8(p-1)}.$$

Таким образом, одно из собственных значений всегда положительно. Поэтому в случае, когда беспорядок становится существенным для критического поведения (при $p < 4$, когда неустойчивой является также и фикси-

рованная точка чистой системы (4.22)), нарушение репличной симметрии в матрице взаимодействий должно стать доминирующим фактором на больших масштабах.

3) Фиксированная точка с НРС на один шаг [16]

$$\begin{aligned} g_0 &= 0; \quad g_1 = \epsilon \frac{4-p}{16(p-1) - px_0(8+p)}, \\ \tilde{g} &= \epsilon \frac{p(1-x_0)}{16(p-1) - px_0(8+p)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Анализ устойчивости (в пространстве с НРС на один шаг) показывает, что эта фиксированная точка устойчива при

$$\begin{aligned} 1 < p < 4, \\ 0 < x_0 < x_c(p) \equiv \frac{16(p-1)}{p(8+p)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

В частности $x_c(p=2) = 4/5$; $x_c(p=3) = 32/33$ и $x_c(p=4) = 1$. Используя результат (4.24), легко вычислить все соответствующие критические индексы, которые теперь становятся *неуниверсальными*, поскольку их значения зависят от затравочного параметра x_0 (подробнее это обстоятельство мы обсудим в разделе 4.3).

Заметим, что кроме перечисленных выше трех фиксированных точек существует еще несколько нетривиальных решений уравнений (4.21), однако можно убедиться, что все остальные фиксированные точки либо всегда неустойчивы, либо нефизичны.

Однако, если параметр x_0 затравочной функции $g(x; \xi=0) \equiv g_0(x)$ (или в более общем случае, координата самой правой ступеньки затравочной функции) находится вне "интервала стабильности", т.е. $x_c(p) < x_0 < 1$, то в рассматриваемых уравнениях РГ (4.18), (4.19) *устойчивых фиксированных точек не существует*. Аналогичная ситуация возникает и в случае непрерывной затравочной функции $g_0(x)$ общего вида. Более того, согласно (4.25), не существует никаких устойчивых фиксированных точек в наиболее интересном изинговском случае $p=1$, какова бы ни была затравочная функция $g_0(x)$.

Принципиальное отличие от реплично-симметричной ситуации состоит в том, что теперь, если учесть двухпетлевое приближение РГ, фиксированных точек с параметрами порядка $\sqrt{\epsilon}$ не возникает. Нетрудно проверить, что если в рассматриваемых уравнениях РГ учесть следующий порядок g^3 , то значения параметров взаимодействия в возникающих при этом фиксированных точках формально будут порядка единицы, а это указывает на то, что возникает режим так называемой *сильной связи*, и в этой ситуации требуется учитывать все порядки ренормгруппы.

Тем не менее анализируя масштабную эволюцию перенормируемых параметров в терминах имеющихся однопетлевых уравнений, некоторую информацию о физических явлениях, скрывающихся за подобной неустойчивостью, получить можно. Масштабная эволюция параметров гамильтониана будет адекватно описывать свойства системы до тех пор, пока эти параметры остаются малыми, т.е. пока мы не достигнем некоторого критического масштаба ξ_* , за которым начинается режим сильной связи.

Качественное поведение перенормированной функции $g(x; \xi)$ можно анализировать как аналитически, так и численно. Этот анализ выглядит довольно громоздко, и здесь мы его опускаем (с деталями можно ознакомиться в работе [17]). Можно показать, что при $p < 4$ в случае непрерывной затравочной функции общего вида $g_0(x)$ перенормированная функция $g(x; \xi)$ стремится к нулю везде вне определенного, зависящего от масштаба, интервала $0 \leq x < [1 - \Delta(\xi)]$, а внутри малого интервала $\Delta(\xi)$ вблизи $x = 1$ величина функции $g(x; \xi)$ растет

$$g(x; \xi) \sim \begin{cases} a \frac{u}{1 - u\xi}, & (1 - x) \ll \Delta(\xi), \\ 0, & (1 - x) \gg \Delta(\xi), \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\tilde{g}(\xi) \sim u \ln \frac{1}{1 - u\xi}, \quad (4.27)$$

где

$$\Delta(\xi) \simeq (1 - u\xi). \quad (4.28)$$

Здесь a — некоторая неуниверсальная положительная константа порядка единицы, а критический масштаб ξ_* определяется из условия, что значения перенормированной функции становятся порядка единицы $(1 - u\xi_*) \sim u$, или $\xi_* \sim 1/u$. Соответственно, для пространственного масштаба, на котором система входит в режим сильной связи, получаем оценку

$$R_* \sim \exp \frac{1}{u}. \quad (4.29)$$

Заметим, что этот масштаб много больше обычного кроссоверного масштаба порядка $u^{-\alpha/\nu}$ (где α и ν — критические индексы теплоемкости и корреляционной длины), на котором беспорядок становится существенным для критического поведения.

Согласно результату (4.26)–(4.28) можно получить простую оценку для величины узкого интервала вблизи $x = 1$, где функция $g(x; \xi)$ становится немалой $\Delta(\xi) \simeq (1 - u\xi) \rightarrow u \ll 1$ при $\xi \rightarrow \xi_*$. Аналитические вычисления показывают, что при этом величина интеграла

$$\bar{g}(\xi) \equiv \int_0^1 g(x; \xi)$$

расходится по более медленному логарифмическому закону при $\xi \rightarrow \xi_*$

$$\bar{g}(\xi) \sim u \ln \frac{1}{1 - u\xi}. \quad (4.30)$$

Качественно аналогичное асимптотическое поведение перенормированной функции $g(x; \xi)$ получается и в случае, когда затравочная функция $g_0(x)$ имеет ступенчатую структуру (4.20), в которой координата ступеньки x_0 находится вне "интервала устойчивости" (4.25) (или для любого x_0 в изинговском случае $p = 1$):

$$g(x; \xi) \sim \begin{cases} \frac{g_1(0)}{1 - (4 - 2p + px_0)g_1(0)\xi}, & x_0 < x < 1, \\ 0, & 0 \leq x < x_0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Здесь $g_1(0) \equiv g_1(\xi = 0) \sim u$, а коэффициент $(4 - 2p + px_0)$ всегда положителен. В этом случае система также входит в режим сильной связи на масштабе $\xi \sim 1/u$.

Заметим, что приведенные выше асимптотические режимы не зависят явным образом от ϵ . В действительности, роль параметра $\epsilon > 0$ состоит в том, чтобы "вытолкнуть" ренормгрупповые траектории из тривиальной гауссовой фиксированной точки $g = 0$; $\tilde{g} = 0$. Таким образом, параметр ϵ , так же как и величины затравочных параметров $g_0(x)$, $\tilde{g}_0$, определяют масштаб, на котором решения РГ уравнений входят в асимптотический расходящийся режим. В случае $\epsilon < 0$ (при размерности выше 4) гауссова фиксированная точка является устойчивой, однако асимптотика сильной связи здесь по-прежнему существует, только теперь она отделена от тривиальной фиксированной точки конечным (зависящим от ϵ) барьером. Поэтому, хотя *бесконечно слабый* беспорядок является несущественным для критического поведения при размерности выше 4, тем не менее, достаточно сильный беспорядок (который больше некоторой, зависящей от ϵ , величины) должен снова сваливать ренормгрупповые траектории в режим сильной связи.

4.3. Скейлинговые свойства и нарушение репличной симметрии

4.3.1. Пространственные и температурные масштабы. Перенормировка массового члена

$$\tau(\xi) \sum_{a=1}^n \phi_a^2$$

описывается следующим уравнением РГ (3.33)

$$\frac{d}{d\xi} \ln \tau = 2 - \frac{1}{8\pi^2} \left[(2 + p)\tilde{g} + p \sum_{a \neq 1}^n g_{1a} \right]. \quad (4.32)$$

Переопределяя (как в разделе 4.2) $g_{ab} \rightarrow 8\pi^2 g_{ab}$ и $g_{a \neq b} \rightarrow -g_{a \neq b}$, в представлении алгебры Паризи получаем:

$$\frac{d}{d\xi} \ln \tau = 2 - \left[(2 + p)\tilde{g}(\xi) + p \int_0^1 dx g(x; \xi) \right] \quad (4.33)$$

или

$$\tau(\xi) = \tau_0 \exp \left\{ 2\xi - \int_0^\xi d\eta [(2 + p)\tilde{g}(\eta) + p\bar{g}(\eta)] \right\}, \quad (4.34)$$

где $\tilde{g}(\eta)$ и $\bar{g}(\eta) \equiv \int_0^1 dx g(x; \eta)$ — это решения уравнений РГ, рассмотренные в предыдущем разделе.

Чтобы яснее понять, к чему приводит НРС и режим сильной связи, рассмотрим сначала, что происходит в обычной реплично-симметричной ситуации. В этом случае перенормированные параметры $\tilde{g}(\xi)$ и $g(\xi)$ входят в фиксированную точку $\tilde{g}_*$ и g_* (где их значения порядка ϵ) и тогда для масштабной зависимости перенормированной массы $\tau(\xi)$, согласно (4.34) мы получаем

$$\tau(\xi) = \tau_0 \exp\{\Delta_\tau \xi\}, \quad (4.35)$$

где

$$\Delta_\tau = 2 - [(2+p)\tilde{g}_* + pg_*]. \quad (4.36)$$

На масштабе ξ_c величина $\tau(\xi_c)$ становится порядка единицы, и система выходит из скейлингового режима. Поскольку $\xi = \ln R$, где R — пространственный масштаб, это определяет зависимость корреляционной длины R_c от температуры τ_0 . Согласно (4.35) имеем

$$R_c(\tau_0) \sim \tau_0^{-\nu}, \quad (4.37)$$

где $\nu = 1/\Delta_\tau$ — это критический индекс корреляционной длины.

В действительности, если затравочная величина параметра, описывающего беспорядок $g(\xi=0) \equiv u$, меньше затравочной величины параметра взаимодействия чистой системы $\tilde{g}(\xi=0) \equiv g_0$, то ситуация выглядит несколько сложнее. В этом случае РГ эволюция сначала приводит перенормированный параметр $\tilde{g}(\xi)$ почти в фиксированную точку чистой системы $\tilde{g}_*^{(pure)}$, как будто беспорядка в системе не существует. Далее, поскольку эта фиксированная точка неустойчива по отношению к введению беспорядка, на определенном масштабе ξ_u РГ траектории выходят из фиксированной точки чистой системы и приходят в устойчивую (в реплично-симметричном подпространстве!) фиксированную точку системы с беспорядком $(\tilde{g}_*, g_*)$. При этом можно показать, что $\xi_u \sim (\nu/\alpha) \ln(1/u)$ [8], что соответствует пространственному масштабу $R_u \sim u^{-\nu/\alpha} \gg 1$.

Если вернуться теперь к масштабному поведению массового параметра $\tau(\xi)$, (4.35), то мы увидим, что если величина затравочной температуры τ_0 такова, что $\tau(\xi)$ становится порядка единицы до того, как достигается кроссоверный масштаб ξ_u , то для скейлинга корреляционной длины (и других термодинамических величин) мы получим тот же результат, что и в чистой системе $R_c(\tau_0) \sim \tau_0^{-\nu(pure)}$. Однако это поведение будет наблюдаться только на масштабах $R_c \ll R_u$, что автоматически накладывает ограничение на температурный масштаб $\tau_0 \gg u^{1/\alpha} \equiv \tau_u$. Другими словами, при температурах не слишком близких к T_c , таких, что $\tau_u \ll \tau_0 \ll 1$, наличие слабого беспорядка будет несущественным для критического поведения.

С другой стороны, при $\tau_0 \ll \tau_u$ (в непосредственной близости к T_c) ренормгрупповые траектории параметров $\tilde{g}(\xi)$ и $g(\xi)$ успевают (после кроссовера) войти в новую (универсальную) "неупорядоченную" фиксированную точку $(\tilde{g}_*, g_*)$, и поэтому, согласно (4.36), (4.37), скейлинг корреляционной длины (и других термодинамических величин) будет определяться новым универсальным критическим индексом ν , соответствующим фиксированной точке $(\tilde{g}_*, g_*)$ (см. (3.39)) системы с беспорядком.

Рассмотрим теперь, что происходит, когда возникает нарушение репличной симметрии. Так же, как и в реплично-симметричном случае, если величина беспорядка u мала, то в температурном интервале $\tau_u \ll \tau_0 \ll 1$ критические свойства системы будут по-прежнему определяться фиксированной точкой чистой системы. Однако при $\tau_0 \ll \tau_u$ ситуация меняется. Если ренормгрупповые траектории приходят в устойчивую фиксированную точку с одноступенчатым НРС (см. (4.24)) (в случае $1 < p < 4$), тогда в соответствии со стандартными скейлинговыми соотношениями для критического индекса

корреляционной длины мы находим:

$$\nu(x_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\epsilon} \frac{3p(1-x_0)}{16(p-1) - px_0(p+8)}. \quad (4.38)$$

Поэтому в зависимости от величины затравочного параметра x_0 мы получаем целый спектр значений критического индекса ν . Таким образом, первое существенное отличие от традиционных результатов, рассмотренных в разделе 3.3, состоит в том, что теперь критическое поведение становится *неуниверсальным*, поскольку значения критических индексов зависят от конкретных статистических свойств беспорядка. Однако этот результат является далеко не единственным следствием НРС. Более радикальные последствия будут наблюдаться в скейлинговых свойствах пространственных корреляционных функций (см. ниже).

В изинговском случае $p=1$, а также в системах с $1 < p < 4$ с НРС общего вида в затравочной функции $g_0(x)$, последствия неустойчивости по отношению к нарушению репличной симметрии оказываются более драматичными. Здесь на масштабах $\xi \gg \xi_u$ (но $\xi \ll \xi_* \sim 1/u$), согласно асимптотическим решениям (4.26), (4.31), параметры $\tilde{g}(\xi)$ и $g(x; \xi)$ не входят ни в какую фиксированную точку и продолжают свою эволюцию (в сторону расходимости) при увеличении масштаба ξ . В этом случае, согласно (4.34), корреляционная длина (определяемая условием, что величина перенормированного параметра $\tau(\xi)$ становится порядка единицы) будет определяться из значительно более нетривиального уравнения

$$2 \ln R_c - \int_0^{\ln R_c} d\eta [(2+p)\tilde{g}(\eta) + p\tilde{g}(\eta)] = \ln \frac{1}{\tau_0}. \quad (4.39)$$

Таким образом, когда температура становится достаточно близкой к T_c , при $\tau_0 \ll \tau_u$, *обычного скейлингового поведения корреляционной длины наблюдаться не будет*.

Наконец, в непосредственной близости к температуре перехода мы достигаем масштаба $\xi_* \equiv \ln R_* \sim 1/u$, на котором ренормгруппа входит в режим сильной связи (перенормированные параметры $\tilde{g}(\xi)$ и $g(x; \xi)$ перестают быть малыми), тогда как перенормированный массовый параметр $\tau(\xi)$ остается все еще малым. Очевидно, что соответствующий этому кроссоверу температурный масштаб имеет вид

$$\tau_* \sim \exp\left(-\frac{\text{const}}{u}\right). \quad (4.40)$$

Таким образом, в непосредственной близости к T_c при $\tau \ll \tau_*$ возникает ситуация, когда в пределе больших масштабов параметры асимптотического гамильтониана (с нулевой массой) становятся немалыми, и анализировать свойства системы в терминах простой ренормгруппы больше нельзя. Тем не менее структура асимптотического гамильтониана позволяет предположить, что при $\tau \ll \tau_*$ вблизи T_c поведение системы должно проявлять сильные спин-стекольные свойства. Это предположение связано с тем, что наиболее расходящимся параметром взаимодействия является функция $g(x; \xi)$, которая описывает замороженный беспорядок.

В каком-то смысле на качественном уровне проблема при этом сводится к исходной задаче об эффектах, вызываемых замороженным беспорядком в критической точке, однако теперь эффективный беспорядок в системе является *сильным*. Тем не менее представляется маловероятным, чтобы состояние системы в этой области описывалось настоящим термодинамическим спин-стекольным параметром порядка $Q_{ab} = \langle \phi_a \phi_b \rangle$. В противном случае это будет означать, что в системе происходит настоящий термодинамический фазовый переход в спин-стекольное состояние при некоторой конечной температуре, тогда как мы наблюдаем лишь *кроссовер*, при котором происходит смена критических режимов.

Представляется более реалистичным ожидать, что на масштабах $\sim \xi_*$ ренормгрупповые траектории, в конечном счете, приходят в некоторую фиксированную точку, которая характеризуется конечной величиной параметров взаимодействия и сильным НРС. В этом случае спин-стекольный характер поведения системы вблизи T_c будет характеризоваться какими-то крайне нетривиальными критическими свойствами, в которых явным образом должны будут проявляться эффекты нарушения репличной симметрии.

4.3.2. Корреляционные функции. Рассмотрим скейлинговые свойства связной корреляционной функции так называемого спин-стекольного типа

$$K(R) = \frac{\langle \langle \phi(0)\phi(R) \rangle - \langle \phi(0) \rangle \langle \phi(R) \rangle \rangle^2}{\langle \langle \phi(0)\phi(R) \rangle \rangle^2} \equiv \quad (4.41)$$

Нетрудно понять, что в репличном формализме эта корреляционная функция может быть представлена в виде

$$K(R) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{a \neq b}^n K_{ab}(R), \quad (4.42)$$

где

$$K_{ab}(R) = \langle \langle \phi_a(0)\phi_b(0)\phi_a(R)\phi_b(R) \rangle \rangle. \quad (4.43)$$

В терминах стандартной ренормгрупповой техники масштабное поведение репличной корреляционной функции $K_{ab}(R)$ может быть представлено следующим образом

$$K_{ab}(R) \sim (G_0(R))^2 (Z_{ab}(R))^2, \quad (4.44)$$

где

$$G_0(R) = R^{-(D-2)} \quad (4.45)$$

— корреляционная функция свободных полей, и в однопетлевом приближении масштабное поведение массового объекта $Z_{ab}(R)$ (с $a \neq b$) описывается следующим ренормгрупповым уравнением

$$\frac{d}{d\xi} \ln Z_{ab}(\xi) = 2g_{ab}(\xi). \quad (4.46)$$

Здесь $g_{a \neq b}(\xi) > 0$ дается решением соответствующих РГ уравнений (4.13), (4.14) $\xi = \ln R$ и $Z_{ab}(0) \equiv 1$.

Таким образом, для корреляционной функции (4.44) получаем следующий результат

$$K_{ab}(R) \sim [G_0(R)]^2 \exp \left\{ 4 \int_0^{\ln R} d\xi g_{ab}(\xi) \right\}. \quad (4.47)$$

Соответственно, в представлении алгебры Паризи $g_{a \neq b}(\xi) \rightarrow g(x; \xi)$ и $K_{a \neq b}(R) \rightarrow K(x; R)$, имеем

$$K(x; R) \sim [G_0(R)]^2 \exp \left\{ 4 \int_0^{\ln R} d\xi g(x; \xi) \right\}. \quad (4.48)$$

Чтобы лучше понять эффекты НРС, рассмотрим сначала, что происходило бы в обычном реплично-симметричном случае (при $p < 4$). Здесь перенормированные параметры $g_{a \neq b}(\xi) \equiv u(\xi)$ приходят в реплично-симметричную фиксированную точку

$$u_* = \epsilon \frac{4-p}{16(p-1)},$$

и согласно уравнениям (4.42), (4.47) мы находим простое скейлинговое поведение

$$K_{rs}(R) \sim R^{-2(D-2)+\theta}, \quad (4.49)$$

которое описывается универсальным критическим индексом

$$\theta = \epsilon \frac{4-p}{4(p-1)}. \quad (4.50)$$

В случае нарушения репличной симметрии на один шаг (см. (4.24)), ситуация становится значительно более сложной. Теперь мы находим, что корреляционная функция $K(x; R)$ также имеет структуру НРС на один шаг:

$$K(x; R) \sim \begin{cases} K_0(R); & 0 \leq x < x_0, \\ K_1(R); & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (4.51)$$

где (в первом порядке по ϵ)

$$K_0(R) \sim R^{-2(D-2)} = G_0^2(R), \\ K_1(R) \sim R^{-2(D-2)+\theta_{\text{lrbs}}} \quad (4.52)$$

с *неуниверсальным* критическим индексом θ_{lrbs} , который явным образом зависит от затравочного параметра ступеньки x_0

$$\theta_{\text{lrbs}} = \epsilon \frac{4(4-p)}{16(p-1) - px_0(8+p)}. \quad (4.53)$$

Поскольку критический индекс θ_{lrbs} положителен, главный вклад в "наблюдаемую" корреляционную функцию $K(R) = \langle \langle \phi(0)\phi(R) \rangle \rangle^2$ (см. (4.42)) дает величина $K_1(R)$

$$K(R) \sim (1-x_0)K_1(R) + x_0K_0(R) \sim R^{-2(D-2)+\theta_{\text{lrbs}}}. \quad (4.54)$$

Однако отличие ситуации с НРС на один шаг от реплично-симметричного случая состоит далеко не только в том, что критический индекс θ корреляционной функции становится неуниверсальным. Согласно общей

идеологии теории спиновых стекол [11], тот факт, что величина $K_{ab}(R)$ проявляет явную зависимость от репличных индексов (a, b) (или то, что функция $K(x; R)$ зависит от репличного параметра x) указывает на то, что в различных измерениях корреляционной функции для одной и той же реализации беспорядка должны будут, вообще говоря, получаться различные результаты $K_0(R)$ или $K_1(R)$, с вероятностями, зависящими от величины параметра x_0 .

Разумеется, в обычных экспериментах фигурируют корреляционные функции, усредненные по пространству. В частности, в случае рассмотренной выше двухточечной корреляционной функции, измеряемая величина получается пространственным интегрированием по двум координатам точек с фиксированным расстоянием R между ними. Понятно, что результат, получаемый таким образом, эквивалентен просто величине $K(R)$ (см. (4.54)), которая вычисляется усреднением по всем реализациям беспорядка, и при этом, естественно, две различные скейлинговые зависимости $K_0(R)$ и $K_1(R)$ обнаружить не удастся.

Тем не менее при несколько иной схеме измерений качественное отличие от реплично-симметричной ситуации можно было бы заметить. В теории спиновых стекол считается, что НРС можно интерпретировать как факторизацию фазового пространства в виде иерархии "долин", или локальных минимумов энергии, разделенных макроскопическими барьерами. Хотя в рассматриваемой здесь системе локальные минимумы (существование которых проявляется в виде НРС) макроскопическими барьерами не разделяются, тем не менее, наблюдаемое явление было бы естественно также интерпретировать как эффективную факторизацию пространства состояний в виде иерархии долин, но разделенных большими конечными барьерами. Поэтому традиционные измерения наблюдаемых величин в "термодинамическом равновесии" могут в действительности соответствовать термализации в одной отдельно взятой долине, а вовсе не истинному термодинамическому равновесию.

Для проверки правильности приведенных выше рассуждений можно ввести в рассмотрение традиционные для спин-стекольной теории величины, которые описывают перекрытия различных метастабильных состояний. Рассмотрим для примера усредненную по пространству корреляционную функцию для двух различных реализаций беспорядка

$$K_{ij}(R) \equiv \frac{1}{V} \int d^D r \langle \phi(r) \phi(r+R) \rangle_i \langle \phi(r) \phi(r+R) \rangle_j, \quad (4.55)$$

где индексы i и j нумеруют реализации беспорядка, и предполагается, что каждое измеряемое термодинамическое среднее соответствует одной долине фазового пространства, а не истинному термодинамическому среднему.

Если в системе реализуется реплично-симметричная ситуация, т.е. существует только один глобальный минимум свободной энергии, тогда для любых пар реализаций должен получаться один и тот же результат (4.49). С другой стороны, если реализуется сценарий с НРС на один шаг, то, согласно общим представлениям теории спиновых стекол [11], для величины $K_{ij}(R)$ в различных парах реализаций беспорядка будут получаться различные результаты, и после получения статисти-

стики по различным парам реализаций можно будет обнаружить, что результат $K_0(R)$ должен получаться с вероятностью x_0 , а результат $K_1(R)$ — с вероятностью $(1 - x_0)$.

Рассмотрим, наконец, что должно происходить, если реализуется нарушение репличной симметрии общего вида. Согласно качественному поведению асимптотического решения (4.26), (4.27), на масштабах $\xi \gg \xi_u \sim (v/\alpha) \ln(1/u)$ перенормированная функция $g(x; \xi)$ не приходит ни к какой фиксированной точке. Поэтому на масштабах $R \gg R_u \sim u^{-v/\alpha} \gg 1$, где беспорядок становится существенным, не будет никакого обычного скейлингового поведения корреляционной функции $K(R)$. Вблизи кроссоверного масштаба $\xi_* \sim 1/u$, на котором происходит переход в режим сильной связи, качественное поведение асимптотического решения $g(x; \xi)$ приведено в уравнении (4.26). Поэтому здесь, при $R \leq R_* \sim \exp(1/u)$, согласно (4.48), для корреляционной функции $K(x; R)$ получаем

$$K(x; R) \sim \begin{cases} R^{-2(D-2)} (1 - u \ln R)^{-4a} \equiv K_1(R); & (1-x) \ll \Delta(R), \\ R^{-2(D-2)} = G_0^2(R) \equiv K_0; & (1-x) \gg \Delta(R), \end{cases} \quad (4.56)$$

где $\Delta(R) = (1 - u \ln R) \rightarrow u \ll 1$ при $R \rightarrow R_*$.

На самом масштабе R_* имеем $(1 - u \ln R_*) \sim u$, и поэтому, согласно (4.56), структура функции $K(x; R)$ должна быть близкой к НРС на один шаг

$$K(x; R_*) \sim \begin{cases} u^{-4a} \exp\left\{-\frac{2(D-2)}{u}\right\} \equiv K_1^*; & (1-x) \ll u, \\ \exp\left\{-\frac{2(D-2)}{u}\right\} \equiv K_0^*; & (1-x) \gg u. \end{cases} \quad (4.57)$$

Согласно приведенному выше рассуждению о наблюдаемых свойствах корреляционных функций в случае НРС на один шаг, результат (4.57) на качественном уровне также может быть измерен в терминах корреляционной функции $K_{ij}(R)$ (4.55) для различных пар реализаций беспорядка. В рассматриваемом случае для величины $K_{ij}(R)$ должен получаться результат K_1 с малой вероятностью u , и результат K_0 — с вероятностью $(1 - u)$. Хотя обе величины K_1^* и K_0^* являются экспоненциально малыми, их отношение $K_1^*/K_0^* \sim u^{-4a}$ должно быть большим.

Наконец, на масштабах $R \gg R_*$ система входит в режим сильной связи, и поэтому никакой информации о поведении корреляционных функций в рамках обычной ренормгруппы конечного порядка получить невозможно.

4.3.3. Теплоемкость. Как известно (см. раздел 1), сингулярная часть теплоемкости вычисляется следующим образом

$$C \sim \int d^D R [\overline{\langle \phi^2(0) \phi^2(R) \rangle} - \langle \phi^2(0) \rangle \langle \phi^2(R) \rangle]. \quad (4.58)$$

Для связной корреляционной функции

$$W(R) \equiv \overline{\langle \phi^2(0) \phi^2(R) \rangle} - \langle \phi^2(0) \rangle \langle \phi^2(R) \rangle \quad (4.59)$$

в рамках стандартной процедуры ренормгруппы получаем

$$W(R) = (G_0(R))^2 m^2(R), \quad (4.60)$$

$G_0(R) = R^{-(D-2)}$ — корреляционная функция свободного поля, а масштабная зависимость массового объекта $m(R)$ определяется из (однопетлевого) ренормгруппового уравнения (4.33)

$$\frac{d}{d\xi} \ln m(\xi) = - \left[(2+p) \tilde{g}(\xi) - p \sum_{a \neq 1}^n g_{a1}(\xi) \right]. \quad (4.61)$$

Здесь, как обычно, $\xi = \ln R$, а перенормированные параметры взаимодействия $\tilde{g}(\xi)$ и $g_{a \neq b}(\xi)$ определяются из уравнений (4.13), (4.14). В представлении алгебры Паризи $g_{a \neq b}(\xi) \rightarrow g(x; \xi)$ получаем

$$m(R) = \exp \left\{ -(2+p) \int_0^{\ln R} d\xi \tilde{g}(\xi) - p \int_0^{\ln R} d\xi \int_0^1 dx g(x; \xi) \right\}. \quad (4.62)$$

В результате, после простых преобразований, для сингулярной части теплоемкости (4.58) находим следующий общий результат:

$$C \sim \int_0^{\xi_{\max}} d\xi \exp \left\{ \epsilon \xi - 2(2+p) \int_0^{\xi} d\eta \tilde{g}(\eta) - 2p \int_0^{\xi} d\eta \bar{g}(\eta) \right\}, \quad (4.63)$$

где $\bar{g}(\eta) \equiv \int_0^1 dx g(x; \eta)$. Инфракрасная обрезка $\xi_{\max}$ в уравнении (4.63) — это масштаб, на котором система выходит из скейлингового режима.

Обычно, $\xi_{\max}$ — это масштаб, на котором перенормированная масса $\tau(\xi)$ (см. (4.34)), становится порядка единицы, и поэтому, если имеет место обычная скейлинговая ситуация, то $\xi_{\max} \sim \ln(1/\tau_0)$.

Как обычно, рассмотрим сначала, что происходит, когда репличная симметрия не нарушается. При этом на масштабах $\xi \gg \xi_u \sim \ln(1/u)$ (которые соответствуют температурам $\tau_0 \ll \tau_u \sim u^{v/\alpha}$) перенормированные параметры $\tilde{g}(\eta)$ и $g(\xi)$ приходят в универсальную фиксированную точку $\tilde{g}_* = \epsilon[p/16(p-1)]$; $g_* = \epsilon[4-p/16(p-1)]$ (см. (4.23)) и поэтому согласно (4.63) для сингулярной части теплоемкости получаем

$$C(\tau_0) \sim \int_0^{\ln(1/\tau_0)} d\xi \exp \{ \xi [\epsilon - 2(2+p)\tilde{g}_* - 2pg_*] \} \sim \tau_0^{\epsilon(4-p)/4(p-1)}. \quad (4.64)$$

Поэтому в системе с беспорядком, если реализуется реплично-симметричная ситуация, вблизи T_c поведение теплоемкости должно описываться универсальным критическим индексом $\alpha = -\epsilon(4-p)/4(p-1)$ (см. (3.40)).

Совершенно аналогичным образом легко вычислить, что в случае, если реализуется НРС на один шаг (4.24) (при $1 < p < 4$), критический индекс теплоемкости становится неуниверсальным, поскольку теперь он будет зависеть от затравочного значения параметра

ступеньки x_0 [16]

$$\alpha(x_0) = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{(4-p)(4-px_0)}{16(p-1) - px_0(p+8)}. \quad (4.65)$$

Как и критический индекс корреляционной длины, критический индекс теплоемкости теперь явным образом зависит от величины параметра x_0 , и поэтому возникает целый спектр его значений

$$-\infty < \alpha(x_0) < -\epsilon \frac{(4-p)}{8(p-1)}. \quad (4.66)$$

Верхний предел для $\alpha(x_0)$ достигается в реплично-симметричном пределе $x_0 \rightarrow 0$ и совпадает с обычным (универсальным) результатом (3.41). С другой стороны, при приближении x_0 к "порогу устойчивости" $x_c(p)$ фиксированной точки с НРС на один шаг, формально критический индекс теплоемкости стремится к минус бесконечности.

В изинговской системе $p=1$, а также в случае нарушения репличной симметрии общего вида (при $1 < p < 4$) ситуация радикально меняется. Теперь при температурах $\tau_* \ll \tau_0 \ll u^{v/\alpha}$ (которые соответствуют масштабам $\xi_u \ll \xi \ll \xi_*$) ренормгрупповая эволюция не приводит ни к каким фиксированным точкам и поэтому, согласно (4.64), сингулярная часть теплоемкости не имеет больше простого скейлингового вида и становится некоторой сложной функцией приведенной температуры τ_0 , которую невозможно представить в терминах одного или конечного числа критических индексов.

Наконец, в "спин-стекольной" области в непосредственной близости T_c , где перенормированные параметры взаимодействия $\tilde{g}$ и $\bar{g}$ становятся немалыми, интеграл по ξ в уравнении (4.63) становится сходящимся, и поэтому результат интегрирования перестает зависеть от инфракрасной температурной обрезки $\xi_{\max}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что в этом случае величина, которая должна была быть сингулярной по температуре частью теплоемкости, "сглаживается" в температурном интервале $\sim \tau_*$ вокруг T_c , т.е. теплоемкость оказывается не сингулярной в точке фазового перехода.

4.4. Нерешенные проблемы

Итак, согласно результатам, полученным в разделе 4, мы приходим к выводу, что спонтанное нарушение репличной симметрии, могущее возникнуть из-за взаимодействия флуктуаций с конфигурациями локальных минимумов энергии, драматическим образом меняет поведение ренормгруппы и критические свойства систем с замороженным беспорядком. В векторных спиновых системах с числом компонент $p < 4$ традиционные ренормгрупповые потоки в размерности $D = 4 - \epsilon$ оказываются неустойчивыми по отношению к введению взаимодействий, нарушающих репличную симметрию. В случае нарушения репличной симметрии общего вида в ренормгруппе не существует никаких устойчивых фиксированных точек, малых по ϵ , и на конечном масштабе $R_* \sim \exp(1/u)$ ренормгрупповые потоки приводят систему в режим сильной связи, когда перенормированные параметры взаимодействия перестают быть малыми. В отличие от систем с $1 < p < 4$, в которых, в принципе, существуют устойчивые фиксированные точки порядка ϵ , имеющие структуру нарушения репличной симметрии на один шаг (см. (4.24)), в изинговских

системах никаких устойчивых фиксированных точек не существует, и при любых затравочных взаимодействиях с НРС ренормгруппа всегда приводит к сильной связи.

В системах со слабым беспорядком существует другая проблема, которая может оказаться связанной с эффектами НРС, рассмотренными в этой главе. Эта проблема о физических свойствах так называемой фазы Гриффица [21], которая, как полагают, существует в конечном температурном интервале выше T_c . Многочисленные эксперименты в различных системах с беспорядком [22], а также численное моделирование 3D модели Изинга с примесными связями [23] убедительно показывают, что в температурном интервале $T_c < T < T_0$ (в высокотемпературной фазе) временные корреляции убывают как $\sim \exp\{-(t/\tau)^4\}$, а не по обычному экспоненциальному закону релаксации $\sim \exp\{-t/\tau\}$, как это должно быть в обычной парамагнетике. Более того, утверждается, что параметр λ является монотонной функцией температуры: он равен некоторому конечному значению меньше единицы при $T = T_c$ и монотонно увеличивается до значения $\lambda = 1$ при $T = T_0$. При этом температура T_0 совпадает с температурой фазового перехода в соответствующей системе без примесей.

Это физическое явление ясно указывает на существование многочисленных метастабильных состояний, разделенных конечными барьерами, которые по всей видимости образуют некоторый непрерывный спектр, что, в свою очередь, по-видимому, имеет прямое отношение к общей идее о том, что критические явления в системах с беспорядком должны описываться в терминах бесконечной иерархии корреляционных длин и критических индексов [24].

С другой стороны, если в рассмотренных здесь системах действительно происходит спонтанное нарушение репличной симметрии во взаимодействиях четвертого порядка, то это означает, что система находится в некоторой фазе, отличающейся по симметрии от обычной парамагнитной фазы. Поэтому должна существовать некоторая конечная температура T_{rsb} , при которой происходит подобное изменение симметрии. В действительности, если вернуться к исходным рассуждениям в начале этой главы, то нетрудно понять, что предполагаемое нарушение репличной симметрии есть свойство статистики конфигураций локальных минимумов самих по себе, а то, что мы наблюдаем НРС во взаимодействии флуктуаций есть лишь просто следствие. Кроме того, ясно, что при достаточно большом τ никакого НРС быть не должно. Поэтому можно было бы на время забыть о флуктуациях и попытаться решить отдельную проблему суммирования по конфигурациям локальных минимумов при произвольной величине τ с тем, чтобы найти значение τ_c , при котором происходит спонтанное нарушение репличной симметрии. Разумеется, эта проблема невероятно сложна, однако оценку для величины τ_c (предполагая, что при $\tau = 0$ НРС имеет место) получить несложно. Качественное рассмотрение этой проблемы показывает (подробнее см. в [16]), что НРС может происходить, лишь когда характерная величина взаимодействия между "островами" (где локальная температура ниже T_c) перестает быть малой. Такие острова — это пространственные области, где $\delta\tau(r) > \tau$. Поскольку случайная функция $\delta\tau(r)$ распределена по Гауссу, то среднее расстояние между "островами" должно быть порядка $\exp[+\tau^2/u]$, и поэтому такие "острова" стано-

вятся достаточно удаленными при $\tau > \sqrt{u}$. С другой стороны, взаимодействие между "островами" экспоненциально мало по разделяющему их расстоянию. Поэтому при $\tau > \sqrt{u}$ они становятся слабо взаимодействующими, и, соответственно, никакого нарушения репличной симметрии быть не должно.

Заметим теперь, что сдвиг температуры перехода T_c в системе с беспорядком по отношению к T_c в соответствующей чистой системе также порядка $\sqrt{u}$, а с другой стороны, как уже упоминалось выше, фаза Гриффица наблюдается как раз в температурном интервале между T_c в системе с беспорядком и T_c чистой системы. На основании этих простых качественных рассуждений можно было бы высказать естественное предположение, что предполагаемый переход в состояние с НРС в статистике конфигураций минимумов гамильтониана с беспорядком как раз и соответствует переходу в фазу Гриффица.

Другая ключевая проблема, остающаяся нерешенной, состоит в следующем: можно ли обнаруженные явления НРС и переход в режим сильной связи в ренормгруппе интерпретировать как установление своего рода спин-стекольной фазы вблизи T_c ? Поскольку наиболее расходящимся перенормированным параметром взаимодействия является репличная функция $g(x; \xi)$, которая описывает величину беспорядка, то естественно предполагать, что в температурном интервале $\tau \ll \tau_* \sim \exp(-1/u)$ вблизи T_c свойства системы должны быть спин-стекольного типа.

Следует подчеркнуть, однако, что в рассмотренной здесь проблеме мы наблюдаем лишь *кроссоверную* температуру τ_* , при которой происходит просто изменение критического режима, и поэтому, едва ли эту температуру можно интерпретировать как точку какого-либо термодинамического фазового перехода. Если благодаря эффектам НРС в системе в самом деле возникает какой-то настоящий термодинамический (спин-стекольный) параметр порядка, то тогда он должен существовать во всей температурной области, где имеется НРС.

Истинное спин-стекольное состояние (в традиционном смысле) характеризуется ненулевым параметром порядка $Q_{ab}(x) = \langle \phi_a(x) \phi_b(x) \rangle$; $a \neq b$, и, по крайней мере, в модели спинового стекла с бесконечным радиусом взаимодействия параметр Q_{ab} имеет непрерывную иерархическую структуру с НРС [11]. Однако в проблеме, рассмотренной в этом разделе, мы имели дело лишь с НРС в матрице взаимодействия g_{ab} флуктуирующих полей, причем часть элементов этой матрицы становились немалыми на конечном масштабе. Поэтому представляется более реалистичным интерпретировать обнаруженное явление сильной связи, как некий совершенно новый тип критического поведения, который характеризуется главным образом сильными спин-стекольными явлениями в скейлинговых свойствах корреляционных функций, а не в свойствах основного состояния.

5. Двумерная модель Изинга с примесями

5.1. Особенности двумерной системы

В теории фазовых переходов двумерная модель Изинга играет особую роль, поскольку это наиболее простая нетривиальная решеточная модель, для которой найдено точное решение [25]. Поэтому естественно

возникает вопрос о влиянии слабого беспорядка на критическое поведение в этой конкретной модели. С точки зрения критерия Харриса (раздел 3.1) двумерная модель Изинга представляет особый случай, так как в этой системе критический индекс теплоемкости (как мы увидим далее) равен нулю. Однако на интуитивном уровне, зная, что теплоемкость в двумерной модели Изинга логарифмически расходится в точке перехода и помня, как проявляет себя слабый беспорядок в четырехмерном векторном ферромагнетике (раздел 3.3) (где теплоемкость также имеет логарифмическую сингулярность), можно ожидать, что наличие беспорядка должно быть существенным для критического поведения.

Действительно, точное решение задачи о критическом поведении теплоемкости в двумерной модели Изинга с малой концентрацией примесей $c \ll 1$ [26], которое будет рассмотрено в этом разделе, приводит к следующему результату для сингулярной части теплоемкости

$$C(\tau) \sim \begin{cases} \ln \frac{1}{\tau}, & \tau^* \ll |\tau| \ll 1, \\ \frac{1}{c} \ln \left(\ln \frac{1}{\tau} \right), & \tau \ll \tau^*, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $\tau^* \sim \exp(-\text{const}/c)$ — это температурный масштаб, на котором происходит кроссовер от чистого критического режима к примесному.

Таким образом, в двумерной модели Изинга, так же как и в четырехмерном векторном ферромагнетике с числом компонент $p < 4$, примеси являются "релевантными переменными". Однако в отличие от векторного ферромагнетика, теплоемкость в модели Изинга с примесями остается расходящейся в точке перехода, хотя под влиянием беспорядка характер расходимости становится слабее. Другим существенным отличием двумерной модели Изинга является то, что спин-стекольные эффекты нарушения репличной симметрии (рассмотренные в разделе 4) здесь оказываются несущественными для критического поведения.

В этом разделе мы начнем рассмотрение с точных решеточных формулировок, однако в дальнейшем упор будет делаться на асимптотические выражения в непрерывном пределе, поскольку именно степени свободы, соответствующие большим масштабам, вносят главный вклад в критические явления вблизи точки перехода. Хорошо известно, что в критической области в непрерывном пределе двумерная модель Изинга эффективно описывается теорией свободного фермионного поля [27]. В разделе 5.2 мы приведем простой вывод этого факта, пользуясь техникой так называемых грасмановых переменных. Здесь мы не будем пользоваться традиционным языком операторов или методом трансферматрицы, поскольку подобные представления, если можно так выразиться, не достаточно "изотропны" для дальнейшего рассмотрения модели с примесями. Получаемая таким образом асимптотическая теория оказывается достаточно простой, и в результате главную сингулярность теплоемкости можно вычислить точно (раздел 5.3).

Некоторые численные результаты для критического поведения теплоемкости в двумерной модели Изинга с примесями будут рассмотрены в разделе 5.4. Общая структура фазовой диаграммы этой модели будет проанализирована в разделе 5.5.

5.2. Фермионное решение

Статистическая сумма двумерной ферромагнитной модели Изинга на простой квадратной решетке имеет вид

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left(\beta \sum_{x,\mu} \sigma_x \sigma_{x+\mu} \right), \quad (5.2)$$

где $\{\sigma_x = \pm 1\}$ — изинговские спины, расположенные в узлах решетки, x — дискретные координаты узлов, а $\mu = 1, 2$ — базисные единичные векторы решетки. Эту статистическую сумму можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} \prod_{x,\mu} \exp \{ \beta \sigma_x \sigma_{x+\mu} \} = \\ &= \sum_{\sigma} \prod_{x,\mu} (\cosh \beta + \sigma_x \sigma_{x+\mu} \sinh \beta) = \\ &= (\cosh \beta)^V \sum_{\sigma} \prod_{x,\mu} (1 + \sigma_x \sigma_{x+\mu} \lambda), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где V обозначает полное число решеточных связей, и $\lambda \equiv \tanh \beta$. Раскрывая в (5.3) произведение по связям решетки и суммируя по конфигурациям изинговских спинов σ , получаем следующее выражение для статсуммы (высокотемпературное разложение)

$$Z = (\cosh \beta)^V \sum_{\mathcal{P}} (\lambda)^{L_{\mathcal{P}}}. \quad (5.4)$$

Здесь суммирование идет по всем возможным конфигурациям замкнутых путей $\mathcal{P}$, проведенным по связям квадратной решетки (рис. 9), а $L_{\mathcal{P}}$ — это полная длина путей в данной конфигурации $\mathcal{P}$.

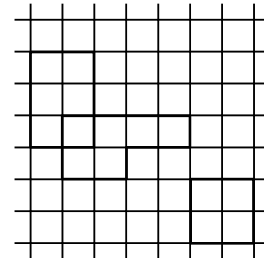


Рис. 9. Примеры замкнутых путей на квадратной решетке, которые дают вклад в высокотемпературное разложение статсуммы двумерной модели Изинга

Суммирование в (5.4) может быть выполнено точно, и оно составляет классическое точное решение двумерной модели Изинга, найденное Шерманом и Вдовиченко [28]. Детали этого решения описаны в учебниках [29] и здесь мы его рассматривать не будем.

Рассмотрим альтернативное представление статистической суммы в терминах так называемых грасмановых переменных (подробное рассмотрение этой новой математики можно найти в [30]). Грасмановы переменные были впервые использованы для двумерной модели Изинга Хурстом и Грином [31], и затем этот метод был развит в ряде других публикаций [32] (см. также [26]). Формализм грасмановых переменных (хотя на первый взгляд он и представляется несколько громоздким) вблизи точки перехода позволяет естественным образом

в явном виде разделить сугубо решеточные степени свободы (несущественные для критических явлений) и степени свободы, соответствующие большим масштабам, которые определяют характер критического поведения. Именно поэтому он представляется наиболее естественным для рассмотрения модели с замороженным беспорядком.

Рассмотрим четырехкомпонентные грассмановы переменные $\{\psi^\alpha(x)\}$, заданные в узлах простой квадратной решетки $\{x\}$, где индекс $\alpha = 1, 2, 3, 4$ определяет четыре направления решетки (при этом, по определению, $3 \equiv -1$ и $4 \equiv -2$). Все $\{\psi^\alpha(x)\}$ и их дифференциалы $\{d\psi^\alpha(x)\}$, по определению, являются антикоммутирующими переменными

$$\begin{aligned}\psi^\alpha(x)\psi^\beta(y) &= -\psi^\beta(y)\psi^\alpha(x), \\ [\psi^\alpha(x)]^2 &= 0, \\ d\psi^\alpha(x)d\psi^\beta(y) &= -d\psi^\beta(y)d\psi^\alpha(x), \\ d\psi^\alpha(x)\psi^\beta(y) &= -\psi^\beta(y)d\psi^\alpha(x).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Правила интегрирования задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\int d\psi^\alpha(x) &= 0, \\ \int d\psi^\alpha(x)\psi^\alpha(x) &= -\int \psi^\alpha(x)d\psi^\alpha(x) = 1.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Рассмотрим теперь следующую статистическую сумму, определенную как интеграл по всем грассмановым переменным двумерной решетки

$$Z = \int D\psi \exp(A[\psi]). \quad (5.7)$$

Здесь мера интегрирования $D\psi$ и действие $A[\psi]$ задаются следующим образом:

$$D\psi = \prod_x [-d\psi^1(x)d\psi^2(x)d\psi^3(x)d\psi^4(x)], \quad (5.8)$$

$$A[\psi] = -\frac{1}{2} \sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x) + \frac{1}{2} \lambda \sum_{x,\alpha} \bar{\psi}(x+\alpha)\hat{p}_\alpha\psi(x). \quad (5.9)$$

Здесь через $\bar{\psi}(x)$ обозначены "сопряженные" переменные

$$\bar{\psi}^\alpha = \psi^\gamma (\hat{C}^{-1})^{\gamma\alpha}, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \hat{C}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Векторная матрица $\hat{p}$ в (5.9) задается следующим образом

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.12)\end{aligned}$$

В явном виде действие $A[\psi]$ в (5.9) имеет вид

$$\begin{aligned}A[\psi] &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_x \psi(x)\hat{C}^{-1}\psi(x) + \frac{1}{2} \lambda \sum_{x,\alpha} \psi(x+\alpha)\hat{C}^{-1}\hat{p}_\alpha\psi(x) \equiv \\ &\equiv \sum_x [\psi^3(x)\psi^1(x) + \psi^4(x)\psi^2(x) + \psi^1(x)\psi^2(x) + \\ &\quad + \psi^3(x)\psi^4(x) + \psi^2(x)\psi^3(x) + \psi^1(x)\psi^4(x)] + \\ &\quad + \lambda \sum_x [\psi^3(x+1)\psi^1(x) + \psi^4(x+2)\psi^2(x)].\end{aligned}\quad (5.13)$$

Путем прямых вычислений, используя правила (5.5) и (5.6), нетрудно убедиться, что интегрирование в (5.7) с мерой интегрирования (5.8) воспроизводит высокотемпературное разложение статистической суммы двумерной модели Изинга (5.4) с $\lambda = \tanh \beta$.

Рассмотрим теперь функцию Грина

$$G^{\alpha\beta}(x, x') = Z^{-1} \int D\psi \exp(A[\psi]) \psi^\alpha(x) \bar{\psi}^\beta(x'). \quad (5.14)$$

Простые (хотя и довольно громоздкие) вычисления показывают, что так определенная функция Грина подчиняется следующему естественному решеточному уравнению перехода на один шаг

$$G^{\alpha\beta}(x, x') = \lambda \sum_\gamma \hat{A}^{\alpha\gamma} G^{\gamma\beta}(x - \gamma, x') + \delta_{x, x'} \delta^{\alpha\beta}, \quad (5.15)$$

где $\hat{A} \equiv \sum_\alpha \hat{p}_\alpha$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Поскольку функция Грина зависит лишь от разности аргументов, то в фурье-представлении решение уравнения (5.15) может быть представлено в следующем простом виде

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = (\hat{1} - \lambda \hat{A}(\mathbf{k}))^{-1}, \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{A}(\mathbf{k}) &= \sum_\alpha \exp\{-i\mathbf{k}\alpha\}\hat{p}_\alpha = \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-ik_1) & \exp(-ik_2) & 0 & -\exp(ik_2) \\ \exp(-ik_1) & \exp(-ik_2) & \exp(ik_1) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_2) & \exp(ik_1) & \exp(ik_2) \\ -\exp(-ik_1) & 0 & \exp(ik_1) & \exp(ik_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.18)$$

Из решения (5.17) очевидно, что если хотя бы одно из собственных значений матрицы $\lambda \hat{A}(\mathbf{k})$ станет единицей, то в теории возникнет сингулярность. Чтобы обнаружить точку сингулярности, рассмотрим сначала случай нулевого импульса $\mathbf{k} = 0$ (что соответствует бесконечным пространственным масштабам). Из определения грассмановых переменных очевидно, что четырехзнач-

ные индексы функции Грина $G^{2\beta}$ соответствуют четырем возможным направлениям квадратной решетки. Поэтому представляется естественным произвести своего рода "симметризацию" по пространственным направлениям с помощью преобразования Фурье по угловым степеням свободы. Действительно, легко убедиться, что матрица $\hat{A}(0)$ диагонализуется в следующем представлении

$$\psi_{\pm 1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right) \\ \exp\left(\pm i \frac{\pi}{2}\right) \\ \exp\left(\pm i \frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \quad \psi_{\pm 3/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(\pm i \frac{3\pi}{4}\right) \\ \exp\left(\pm i \frac{\pi}{2}\right) \\ \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Матрица преобразования от исходного представления к такому *спинорному* представлению углового момента с базисными векторами (5.19) имеет вид

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ E & \bar{E} & E^3 & \bar{E}^3 \\ E^2 & \bar{E}^2 & E^6 & \bar{E}^6 \\ E^3 & \bar{E}^3 & E^9 & \bar{E}^9 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

$$E = \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right), \quad \bar{E} = \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right).$$

В этом представлении получаем

$$\lambda \hat{A}'(0) = \lambda \hat{U}^{-1} \hat{A}(0) \hat{U} = \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Мы видим, что сингулярность в (5.17) (при $\mathbf{k} \rightarrow 0$) возникает, когда одно из собственных значений матрицы $\lambda \hat{A}'$ становится единицей. Таким образом, из (5.21) мы легко находим критическую точку двумерной модели Изинга:

$$\lambda_c \equiv \tanh \beta_c = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \quad (5.22)$$

Другим важным следствием введенного выше спинорного представления является то, что для критических флуктуаций вблизи критической точки должны быть существенными только состояния $\psi_{\pm 1/2}$ (именно им соответствуют два собственных значения, создающие сингулярность в критической точке). Действительно, как мы увидим ниже, при $\lambda \rightarrow \lambda_c$ корреляционный радиус для состояний $\psi_{\pm 1/2}$ стремится к бесконечности, тогда как корреляции состояний $\psi_{\pm 3/2}$ остаются ограниченными на размерах решетки.

Теперь, чтобы описать крупномасштабные флуктуации, которые создают сингулярности в термодинамических функциях, произведем разложение в (5.17) вблизи критической точки $\lambda = \lambda_c$. Используя явное выражение (5.18) и оставляя только линейные члены по $|\mathbf{k}|$ и $(\lambda - \lambda_c)/\lambda_c$, после простых (хотя и несколько громозд-

ких) вычислений получим

$$\hat{G}(\mathbf{k}) \simeq \frac{2\lambda_c^2}{\Delta} \begin{pmatrix} \tau - ik_1 & \frac{\tau - ik_1 - ik_2}{\sqrt{2}} & -ik_2 & -\frac{\tau - ik_1 + ik_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tau - ik_1 - ik_2}{\sqrt{2}} & \tau - ik_2 & \frac{\tau + ik_1 - ik_2}{\sqrt{2}} & ik_1 \\ -ik_2 & \frac{\tau + ik_1 - ik_2}{\sqrt{2}} & \tau + ik_1 & \frac{\tau + ik_1 + ik_2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\tau - ik_1 + ik_2}{\sqrt{2}} & ik_1 & \frac{\tau + ik_1 + ik_2}{\sqrt{2}} & \tau + ik_2 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Здесь

$$\Delta = \det[\hat{1} - \lambda \hat{A}(\mathbf{k})] \simeq 2\lambda_c^2(\tau^2 + \mathbf{k}^2) \quad (5.24)$$

и

$$\tau \equiv 2 \frac{(\lambda - \lambda_c)}{\lambda_c}. \quad (5.25)$$

В спинорном представлении (5.19) асимптотическое выражение для функции Грина (5.23) становится предельно компактным

$$\hat{G}_{\text{sp}}(\mathbf{k}) = \hat{U}^{-1} \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{U} \simeq \frac{2}{\tau^2 + \mathbf{k}^2} \begin{pmatrix} \tau & ik_1 - k_2 & 0 & 0 \\ ik_1 + k_2 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Здесь нулевые компоненты соответствуют членам порядка $\sim \mathbf{k}^2, \tau^2$. Легко видеть, что ненулевой блок этой матрицы может быть представлен следующим образом:

$$\hat{S}(\mathbf{k}) = 2 \frac{\tau - i\hat{k}}{\tau^2 + \mathbf{k}^2}, \quad (5.27)$$

где

$$\hat{k} = k_1 \hat{\gamma}_1 + k_2 \hat{\gamma}_2; \quad (5.28)$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Очевидно, что результат (5.27) представляет собой функцию Грина двумерной теории (вещественных) свободных фермионных полей, которая описывается лагранжианом:

$$A_{\text{sp}}[\psi] = -\frac{1}{4} \int d^2x [\bar{\psi} \hat{\partial} \psi + \tau \bar{\psi} \psi], \quad (5.30)$$

где $\bar{\psi} = \psi \hat{\gamma}_5$ и $\hat{\gamma}_5 = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2$.

Используя представление (5.30), можно теперь легко вывести известную логарифмическую сингулярность теплоемкости двумерной модели Изинга в критической точке

$$\begin{aligned} Z &\simeq \int D\psi \exp(A_{\text{sp}}[\psi]) \simeq \sqrt{\det(\tau + \hat{\partial})}; \\ F &\simeq -\ln Z \simeq -\text{Tr} \ln(\tau + \hat{\partial}) \simeq \\ &\simeq -\int d^2k \ln(\tau^2 + \mathbf{k}^2) \sim -\tau^2 \ln \frac{1}{|\tau|}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Поэтому

$$C \sim -\frac{d^2}{d\tau^2} F(\tau) \sim \ln \frac{1}{|\tau|}. \quad (5.32)$$

5.3. Критическое поведение в модели с примесями

Рассмотрим теперь модель с примесными связями. В этом разделе мы покажем, как вычисляется критическое поведение теплоемкости вблизи точки перехода.

Статистическая сумма двумерной модели Изинга с примесными связями имеет вид

$$Z(\beta) = \sum_{\sigma} \exp \left\{ \beta \sum_{x,\mu} J_{x\mu} \sigma_x \sigma_{x+\mu} \right\}. \quad (5.33)$$

Здесь константы связи $J_{x\mu}$ на решеточных связях (x, μ) принимают свое регулярное значение J с вероятностью $(1-c)$, и с вероятностью c они равны некоторому примесному значению $J' \neq J$. Малым параметром теории является величина $u \equiv [\bar{J}^2 - (J')^2] = c(1-c)(J-J')^2$. Поэтому возможны два предельных случая: либо разность $(J-J')$ является произвольной, но концентрация примесных связей мала, и тогда $u \sim c \ll 1$; либо концентрация примесных связей является произвольной, но разность между примесной и регулярной связью является малой, и тогда $u \sim (J-J')^2 \ll 1$.

В представлении грассмановых переменных статистическая сумма модели с примесными связями (5.33) может быть записана следующим образом:

$$Z(\beta) = \int D\psi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \lambda_{x\mu} \bar{\psi}(x+\mu) \hat{p}_\mu \psi(x) \right\}, \quad (5.34)$$

где

$$\lambda_{x\mu} = \begin{cases} \lambda = \tanh(\beta J) & \text{с вероятностью } (1-c), \\ \lambda' = \tanh(\beta J') & \text{с вероятностью } c. \end{cases} \quad (5.35)$$

Точно так же, как и в чистой модели, раскладывая в ряд по степеням второго члена в (5.34), легко проверить, что статистическая сумма может быть представлена в виде суммы по конфигурациям замкнутых петель, где каждая конфигурация входит с весом

$$\prod_P \lambda_{x\mu} \Phi(P) \quad (5.36)$$

и $\Phi(P)$ — это упорядоченное произведение матриц $\{\hat{p}\}$ вдоль пути P

$$\Phi(P) = \prod_P \hat{p}. \quad (5.37)$$

Точно такое же представление для статсуммы получается для высокотемпературного разложения (5.33).

Производя теперь усреднение по беспорядку и переходя к непрерывному пределу, можно в конечном счете вывести фермионное представление модели в критической области (см. [26]). Здесь, однако, мы рассмотрим более интуитивный и значительно более упрощенный подход, который, тем не менее, приводит к тем же результатам, что и точные вычисления. Этот подход основан на естественном предположении, что в непрерывном пределе в представлении свободного фермионного поля исходный беспорядок в спиновых взаимодействиях должен выражаться в виде пространственных флуктуаций эффективной локальной температуры τ массового члена в лагранжиане (5.30). Поэтому исходной точкой дальнейшего рассмотрения примесной

модели Изинга будет предположение, что в непрерывном пределе она описывается следующим спинорным лагранжианом

$$A_{\text{imp}}[\psi; \delta\tau(x)] = -\frac{1}{4} \int d^2x \left\{ \bar{\psi} \hat{\partial} \psi + [\tau + \delta\tau(x)] \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (5.38)$$

При этом предполагается, что случайная функция $\delta\tau(x)$ описывается простым гауссовым распределением

$$P[\delta\tau(x)] = \prod_x \left\{ \frac{1}{\sqrt{8\pi u}} \exp \left[-\frac{[\delta\tau(x)]^2}{8u} \right] \right\}, \quad (5.39)$$

где характерная величина беспорядка мала $u \ll 1$.

Теперь, согласно стандартной процедуре вычисления самоусредняемой свободной энергии, в репличном представлении (раздел 3.2) имеем

$$F \equiv \overline{F[\delta\tau(x)]} = -\frac{1}{\beta} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln(Z_n), \quad (5.40)$$

где

$$\begin{aligned} Z_n &\equiv \overline{Z^n} = \\ &= \int D\delta\tau(x) \int D\psi^a P[\delta\tau(x)] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int d^2x \sum_{a=1}^n \left\{ \bar{\psi}^a \hat{\partial} \psi^a + [\tau + \delta\tau(x)] \bar{\psi}^a \psi^a \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

— репличная статистическая сумма, и индекс $a = 1, 2, \dots, n$ нумерует реплики. После простого гауссова интегрирования по $\delta\tau(x)$ получаем

$$Z_n = \int D\psi^a \exp(A_n[\psi]), \quad (5.42)$$

где

$$\begin{aligned} A_n[\psi] &= - \int d^2x \left[\frac{1}{4} \sum_{a=1}^n \bar{\psi}^a (\hat{\partial} + \tau) \psi^a - \frac{1}{4} u \times \right. \\ &\times \left. \sum_{a,b=1}^n \bar{\psi}^a \psi^a \bar{\psi}^b \psi^b \right]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Заметим, что точные пертурбативные вычисления для исходной решеточной модели [26] после перехода к непрерывному пределу приводят к тому же самому результату для эффективного лагранжиана (5.43) с параметром

$$u = c \frac{[(\lambda'_c - \lambda_c)/\lambda_c]^2}{[1 + 1/2\sqrt{2}(\lambda'_c - \lambda_c)]^2}, \quad (5.44)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \tanh \beta_c J = \sqrt{2} - 1, \\ \lambda'_c &= \tanh \beta_c J'. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Полученная теория спинорного поля с четырехфермионным взаимодействием (5.43) является перенормируемой в двух измерениях точно так же, как теория

скалярного поля ϕ^4 является перенормируемой в четырех измерениях (раздел 2.6). Действительно, после масштабного преобразования (раздел 2.5)

$$x \rightarrow \lambda x \quad (\lambda > 1) \quad (5.46)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int d^D x \bar{\psi}(x) \hat{\partial} \psi(x) &\rightarrow \lambda^{D-1} \int d^D x \bar{\psi}(\lambda x) \hat{\partial} \psi(\lambda x), \\ u \int d^D x [\bar{\psi}(x) \psi(x)] [\bar{\psi}(x) \psi(x)] &\rightarrow \\ \rightarrow \lambda^D u \int d^D x [\bar{\psi}(\lambda x) \psi(\lambda x)] [\bar{\psi}(\lambda x) \psi(\lambda x)]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Чтобы оставить градиентный член лагранжиана неизменным, требуется произвести переопределение полей:

$$\psi(\lambda x) \rightarrow \lambda^{-\Delta_\psi} \psi(x), \quad (5.48)$$

где

$$\Delta_\psi = \frac{D-1}{2}. \quad (5.49)$$

Масштабная размерность Δ_ψ определяет критическую размерность корреляционной функции

$$G(x) = \langle \bar{\psi}(0) \psi(x) \rangle \sim |x|^{-2\Delta_\psi} \Big|_{D=2} = |x|^{-1}. \quad (5.50)$$

Для того чтобы после этих преобразований лагранжиан (5.43) остался неизменным, требуется произвести переопределение параметра взаимодействия u :

$$u \rightarrow \lambda^{-\Delta_u} u, \quad (5.51)$$

где

$$\Delta_u = 2 - D. \quad (5.52)$$

Таким образом, в двумерном случае масштабная размерность Δ_u четырехфермионного взаимодействия равна нулю точно так же, как в четырехмерном случае равна нулю масштабная размерность взаимодействия ϕ^4 в теории скалярного поля.

Как мы увидим ниже, ренормгрупповые уравнения приводят к нулевой асимптотике для параметра взаимодействия u и массы τ . В этом случае главные сингулярности термодинамических функций и, в частности, теплоемкости, могут быть вычислены точно в рамках ренормгрупповой процедуры, которая в этом случае представляет собой компактный способ суммирования наиболее расходящихся "паркетных" диаграмм (см. также раздел 2.6).

Произведем перенормировку параметра взаимодействия u и массы τ . В диаграммном представлении член взаимодействия $u(\bar{\psi}^a(x)\psi^a(x))(\bar{\psi}^b(x)\psi^b(x))$ и массовый член $\tau[\bar{\psi}^a(x)\psi^a(x)]$ показаны на рис. 10.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая система описывается в терминах *вещественных* фермионов, и хотя мы используем (просто для удобства) обозначение сопряженных полей $\bar{\psi}$, в действительности они не являются независимыми переменными: $\bar{\psi} = \psi^\dagger$. По этой причине фермионные линии в диаграммном представлении являются "ненаправленными". На самом деле четырехфермионное взаимодействие (см. рис.10) можно

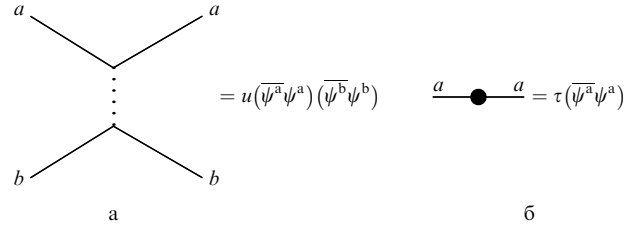


Рис. 10. Диаграммное представление члена взаимодействия $u[\bar{\psi}^a(x)\psi^a(x)][\bar{\psi}^b(x)\psi^b(x)]$ и массы $\tau[\bar{\psi}^a(x)\psi^a(x)]$

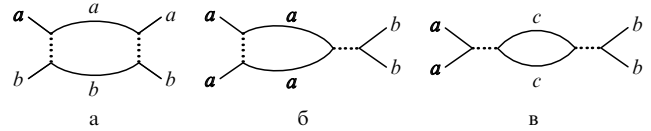


Рис. 11. Диаграммы, которые дают вклад в перенормировку члена взаимодействия $u[\bar{\psi}^a(x)\psi^a(x)][\bar{\psi}^b(x)\psi^b(x)]$



Рис. 12. Диаграммы, которые дают вклад в перенормировку массового члена $\tau[\bar{\psi}^a(x)\psi^a(x)]$

представить в терминах лишь одного двухкомпонентного фермионного (антикоммутирующего) поля $u\psi_1^a\psi_2^a\psi_1^b\psi_2^b$. Отсюда следует, что диагональные по репликам ($a = b$) члены взаимодействия тождественно равны нулю. Поэтому, поступая аналогично перенормировочным вычислениям, подробно рассмотренным в разделе 3.3, легко проверить, что перенормировка параметра взаимодействия u дается лишь одной диаграммой, показанной на рис. 11в, а две другие диаграммы (рис. 11а и рис. 11б) тождественно равны нулю. По тем же причинам перенормировка массового члена дается только диаграммой, показанной на рис. 12б, а диаграмма на рис. 12а тождественно равна нулю.

Внутренние линии на диаграммах на рис. 11 и рис. 12 представляют собой безмассовые функции Грина свободных фермионов (см. (5.27) и (5.28))

$$\hat{S}_{ab} = -i \frac{\hat{k}}{\mathbf{k}^2} \delta_{ab}. \quad (5.53)$$

Учитывая соответствующие комбинаторные факторы, находим, что при РГ преобразованиях, зависящие от масштаба параметры $u(\lambda)$ и $\tau(\lambda)$, изменяются следующим образом:

$$u^{(R)}(\lambda) = u + 2(n-2)u^2 \int_{\lambda k_0 < |\mathbf{k}| < k_0} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \hat{S}^2(\mathbf{k}), \quad (5.54)$$

$$\tau^{(R)}(\lambda) = \tau + 2(n-1)u\tau \int_{\lambda k_0 < |\mathbf{k}| < k_0} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \hat{S}^2(\mathbf{k}). \quad (5.55)$$

Используя (5.55), в результате простого интегрирования получаем соответствующие уравнения ренормгруппы

(в пределе $n \rightarrow 0$)

$$\frac{d}{d\xi} u(\xi) = -\frac{2}{\pi} u^2(\xi), \quad (5.56)$$

$$\frac{d}{d\xi} \ln \tau(\xi) = -\frac{1}{\pi} u(\xi), \quad (5.57)$$

где, как обычно, $\xi \equiv \ln(1/\lambda)$. Решение этих уравнений не представляет труда

$$u(\xi) = \frac{u}{1 + (2u/\pi)\xi}, \quad (5.58)$$

$$\tau(\xi) = \frac{\tau}{[1 + (2u/\pi)\xi]^{1/2}}, \quad (5.59)$$

где $u \equiv u(\xi = 0)$ и $\tau \equiv \tau(\xi = 0)$. Таким образом, в асимптотическом пределе больших масштабов при $\xi \rightarrow \infty$ имеем нулевую асимптотику

$$u(\xi) \sim \frac{1}{\xi} \rightarrow 0, \quad \tau(\xi) \sim \frac{1}{\sqrt{\xi}} \rightarrow 0. \quad (5.60)$$

В этом случае критическое поведение теплоемкости может быть вычислено точно ренормгрупповыми методами. Стандартным способом (см. раздел 3.3) для сингулярной части теплоемкости получаем

$$\begin{aligned} C(\tau) &\simeq -\frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}| > |\tau|} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \hat{S}^2(k) \left[\frac{\tau(k)}{\tau} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\xi < \ln(1/|\tau|)} d\xi \left[\frac{\tau(\xi)}{\tau} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Здесь "масса" $\tau(\xi)$ зависит от масштаба согласно (5.59)

$$\left[\frac{\tau(\xi)}{\tau} \right]^2 = \left(1 + \frac{2u}{\pi} \xi \right)^{-1}. \quad (5.62)$$

Простые вычисления приводят к результату

$$C(\tau) \simeq \frac{1}{8u} \ln \left[1 + \frac{2u}{\pi} \ln \frac{1}{|\tau|} \right]. \quad (5.63)$$

Отсюда мы видим, что при температурах не слишком близких к точке перехода ($\tau_u \ll \tau \ll 1$), где

$$\tau_u \sim \exp\left(-\frac{\pi}{2u}\right), \quad (5.64)$$

теплоемкость ведет себя согласно хорошо известному логарифмическому закону, как в чистой модели $C(\tau) \sim \ln(1/|\tau|)$. Однако в непосредственной близости к точке перехода при $|\tau| \ll \tau_u$ теплоемкость переходит на другой (универсальный) критический режим

$$C(\tau) \sim \frac{1}{u} \ln \ln \frac{1}{|\tau|}. \quad (5.65)$$

Как мы видим, в примесном режиме теплоемкость остается расходящейся, хотя эта расходимость становится слабее, чем в чистой системе.

Отметим, что критический индекс двухточечной корреляционной функции в двумерной модели Изинга в

примесном критическом режиме остается тем же самым, что и в чистой системе [33]:

$$\overline{\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle} \sim |x|^{-1/4}. \quad (5.66)$$

Этот результат с достаточной степенью надежности подтверждается и численным моделированием [36–38].

В завершение этого раздела стоит подчеркнуть, что спин-стекольные эффекты нарушения репличной симметрии (рассматривавшиеся в разделе 4) в двумерной модели Изинга оказываются несущественными. Соответствующие вычисления, хотя и не представляют особенно большого труда, тем не менее выглядят достаточно громоздко, чтобы (имея в виду негативный характер результата) воспроизводить их в рамках данного обзора. Любопытно отметить, однако, что в двумерной примесной модели Поттса с числом компонент $q > 2$ традиционная ренормгруппа оказывается неустойчивой по отношению к взаимодействиям, нарушающим репличную симметрию, причем, в отличие от ситуации в модели ϕ^4 , где ренормгруппа выходит на сильную связь, в модели Поттса ренормгрупповые траектории сходятся в нетривиальную устойчивую фиксированную точку с непрерывным нарушением репличной симметрии [34].

5.4. Численное моделирование

В течение последних лет с помощью специализированных компьютеров [35] были произведены интенсивные численные исследования критического поведения двумерной модели Изинга с примесными связями [36–38]. Рассматривались модели на простой квадратной решетке размера $L \times L$ с гамильтонианом

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (5.67)$$

где ферромагнитные константы связи J_{ij} между спинами σ_i и σ_j на соседних узлах являются независимыми случайными величинами, принимающими два значения J и J' с вероятностями $1 - u$ и u соответственно.

Поскольку, согласно общим теоретическим представлениям, критическое поведение должно быть универсальным и не зависящим от концентрации примесей, в численных экспериментах рассматривалась ситуация, когда параметр u был не мал. Согласно общей теории, рассмотренной в предыдущем разделе, концентрация u определяет лишь температурный интервал $\tau_*(u)$ вблизи T_c , или соответственный пространственный масштаб $L_*(u) \sim \exp\{\text{const}/u\}$ (см. (5.64)), на котором происходит кроссовер, в новый критический режим. При малых концентрациях кроссоверный масштаб L_* является экспоненциально большим и поэтому он оказывается недостижимым в численных экспериментах для систем конечного размера. С другой стороны, поскольку оба значения константы связи J и J' берутся ферромагнитными, то даже при конечных концентрациях примесей ферромагнитное основное состояние (и, соответственно, ферромагнитный фазовый переход) не разрушается, а в то же время кроссоверная длина L_* должна быть не большой.

Здесь мы рассмотрим только одну серию численных экспериментов [37], которая достаточно убедительно подтверждает теоретические результаты для критиче-

ского поведения теплоемкости. Рассматривается модель с концентрацией примесных связей $u = 1/2$. В этом специальном случае модель (5.67) оказывается самодуальной, и поэтому ее критическая температура может быть вычислена точно из уравнения [39]

$$\tanh(\beta_c J) = \exp(-2\beta_c J'). \quad (5.68)$$

При моделировании по Монте-Карло использовался кластерный алгоритм Сведсена и Ванга [40], с помощью которого удается преодолеть проблему критического замедления релаксации. На каждом шаге Монте-Карло спиновая конфигурация факторизуется на кластеры, которые конструируются стохастическим образом путем соединения соседних спинов одинакового знака с вероятностью $[1 - \exp(-2\beta J_{ij})]$. Затем каждый кластер переворачивается с вероятностью $1/2$. При этом в критической точке на больших решетках релаксация к термодинамическому равновесию происходит намного быстрее, чем в обычной односпиновой динамике.

Технически оказывается намного удобнее вычислять максимальное значение теплоемкости как функцию размера системы, чем непосредственную зависимость теплоемкости от температуры τ . Поскольку температурный и пространственный масштабы находятся во взаимно однозначном соответствии (в двумерной модели Изинга $R_c(\tau) \sim \tau^{-1}$), очевидно, что минимальное возможное значение τ , при котором конечную систему размера L еще можно считать бесконечной, можно оценить как $\tau_{\min} \sim L^{-1}$. Поэтому максимальная величина теплоемкости, критическое поведение которой в термодинамическом пределе происходит по закону $C(\tau)$, должна быть порядка $C(L^{-1})$. Тогда, согласно (5.63), зависимость максимального значения теплоемкости от размера решетки в примесной модели Изинга должна иметь вид

$$C(L) = C_0 + C_1 \ln(1 + b \ln L). \quad (5.69)$$

Здесь C_0 и C_1 — это некоторые константы, и $b = 1/\ln L_*$, где L_* — это примесная кроссоверная длина.

Общая схема численного моделирования состоит в следующем. Сначала вычисляется средняя энергия

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{L^2} \left(\sum_{(i,j)} J_{ij} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \right), \quad (5.70)$$

где, как обычно, $\langle \dots \rangle$ обозначает термодинамическое (по Монте-Карло) среднее. Затем теплоемкость вычисляется из величины флуктуаций энергии

$$C(L) = L^2 (\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2), \quad (5.71)$$

где черта сверху обозначает усреднение по реализациям замороженного беспорядка.

Моделирование проводилось для нескольких значений отношения констант связи $r = J'/J = 1/10, 1/4, 1/2$ и 1, а максимальный размер решетки достигал величины 600×600 .

На рис. 13 приведены данные для максимального значения теплоемкости как функции логарифма размера L при $r = 1/10, 1/4, 1/2$ и 1. Для большей ясности, чтобы графики совмещались, масштаб вдоль вертикальной оси выбран по-разному для различных значений r .

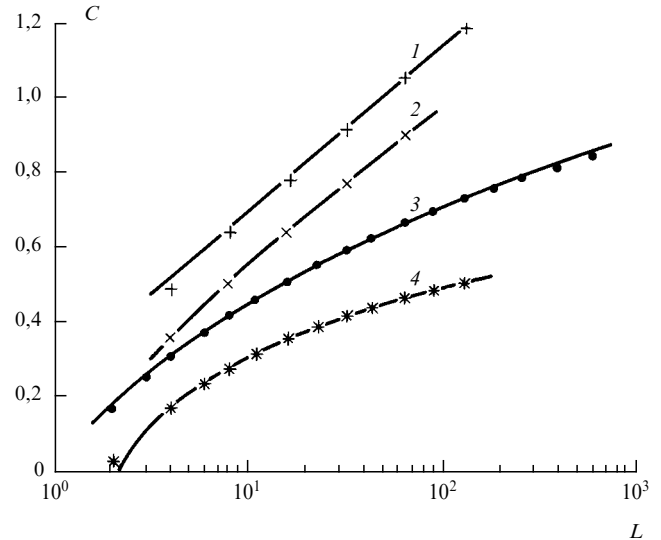


Рис. 13. Зависимость максимальной величины теплоемкости C от логарифма размера системы L в критической точке. Кривые обозначены следующим образом: (1) точный асимптотический результат для чистой системы, $r = 1$; (2) $r = 1/2$, с параметрами $C_0 = 0,048$, $C_1 = 15,7$, $b = 0,085$; (3) $r = 1/4$, с параметрами $C_0 = 0,048$, $C_1 = 2,04$, $b = 0,35$; (4) $r = 1/10$, с параметрами $C_0 = -0,28$, $C_1 = 0,224$, $b = 8,8$

Заметим, что в чистой системе ($r = 1$) отклонения от точного асимптотического поведения остаются малыми вплоть до $L \geq 16$ в полном соответствии с известными аналитическими результатами для поправок к скейлингу [41].

В случае $r = 1/2$ вплоть до размеров $L \leq 128$ поведение теплоемкости вполне соответствует режиму чистой модели Изинга: $C \sim \ln L$. При $r = 1/4$ и $r = 1/10$ появляются сильные отклонения от простого логарифмического поведения, и это указывает на то, что на больших размерах L происходит кроссовер к новому критическому режиму.

На рис. 14 те же самые данные приведены в двойном логарифмическом масштабе $\ln \ln L$. Видно, что при $r = 1$

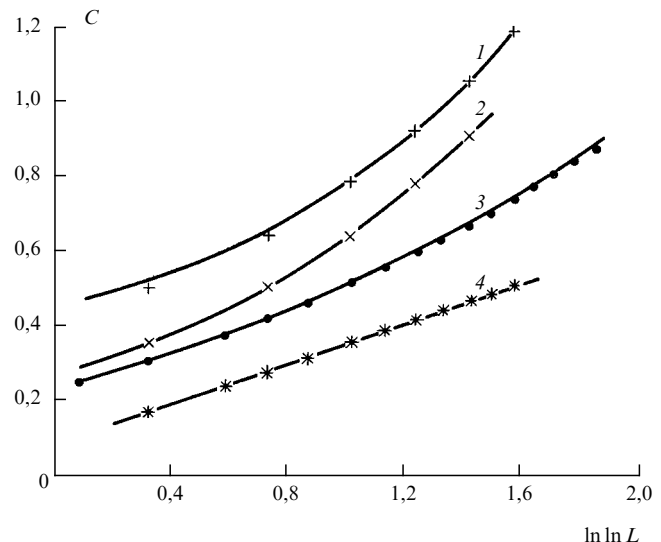


Рис. 14. Те же самые данные, что и на рис. 13, отложенные в масштабе $\ln \ln L$

и $1/2$, имеются сильные отклонения вверх от простого линейного закона. С другой стороны данные для $r = 1/4$ приближаются к линейному закону уже на умеренных размерах L . И, наконец, при $r = 1/10$ данные практически в точности ложатся на прямую линию, уже начиная с малых размеров $L \geq 4$. Сравнивая полученные данные с результатом (5.69), можно найти значения кроссоверной длины: $L_* = 16 \pm 4$ при $r = 1/4$, и $L_* = 2 \pm 1$ при $r = 1/10$. Тем самым, это подтверждает ожидаемую тенденцию, что с уменьшением r (т.е. с увеличением беспорядка) величина кроссоверного масштаба, при котором наступает примесный критический режим, уменьшается.

Наконец, на рис. 15 приведена зависимость теплоемкости от величины $\ln(1 + b \ln L)$ для системы с $r = 1/4$. Как мы видим, эта зависимость почти идеально ложится на прямую линию на всех размерах L .

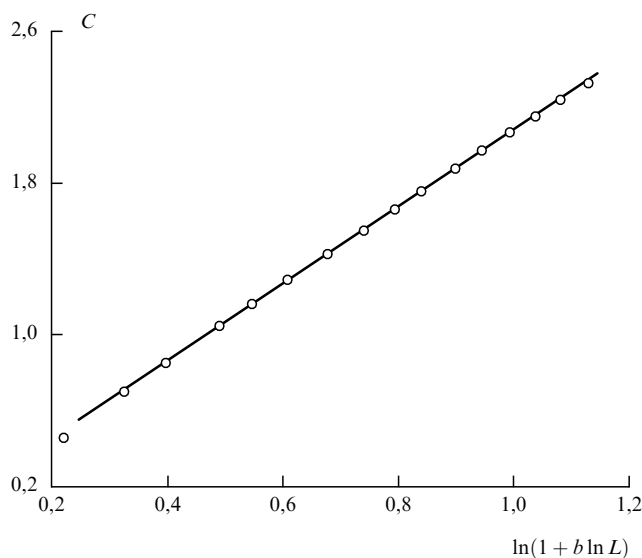


Рис. 15. Те же самые данные, что и на рис. 13, отложенные в масштабе $\ln(1 + b \ln L)$ с $b = 0,35$ для случая $r = 1/4$

Таким образом, в соответствии с предсказаниями ренормгрупповой теории (раздел 4.3), результаты численного моделирования достаточно убедительно демонстрируют возникновение в сингулярной части теплоемкости нового примесного универсального критического режима, который с хорошей точностью укладывается в ожидаемый двойной логарифмический закон.

5.5. Общая структура фазовой диаграммы

Рассмотрим общую структуру фазовой диаграммы модели Изинга с примесями. Очевидно, что в ферромагнитной системе с антиферромагнитными или разорванными примесными связями при увеличении концентрации примесей температура ферромагнитного фазового перехода $T_c(u)$ будет уменьшаться. Затем при некоторой конечной концентрации u_c ферромагнитное основное состояние будет полностью разрушено, и соответственно, температура перехода станет равной нулю $T_c(u_c) = 0$. Из этих общих рассуждений ясно, что качественная фазовая диаграмма такой системы должна выглядеть, как показано на рис. 16 (подробнее см., например, в [42], [43]). Справа от линии фазового перехода $T_c(u)$ система должна находиться либо в парамагнитном состоянии (при достаточно высоких температу-

рах), либо в состоянии спинового стекла [44]. Последняя возможность зависит от размерности системы: например, в двумерном случае состояние спинового стекла, по всей видимости, неустойчиво при любой ненулевой температуре [45].

Формально, те критические явления, которые рассматривались в разделе 5.3, соответствуют пределу малых концентраций, т.е. они описывают свойства системы вблизи фазового перехода в левой верхней части линии $T_c(u)$ на рис. 16. Тем не менее, поскольку примесный критический режим оказался универсальным и не зависящим от концентрации примесей (а также от величины примесных связей), представляется разумным предполагать, что критические явления вблизи линии перехода $T_c(u)$ находятся в том же самом классе универсальности и при конечных концентрациях. От концентрации должна зависеть лишь величина температурного интервала $\tau_*(u)$ вокруг $T_c(u)$, где наблюдается примесный критический режим. Согласно аналитической теории, рассмотренной в разделе 5.3, величина этого интервала экспоненциально быстро стремится к нулю при $u \rightarrow 0$: $\tau_*(u) \sim \exp\{-\text{const}/u\} \rightarrow 0$. Формально, при конечных концентрациях этот температурный интервал становится порядка единицы, и, значит, во всей критической области вблизи $T_c(u)$ должен наблюдаться лишь примесный критический режим.

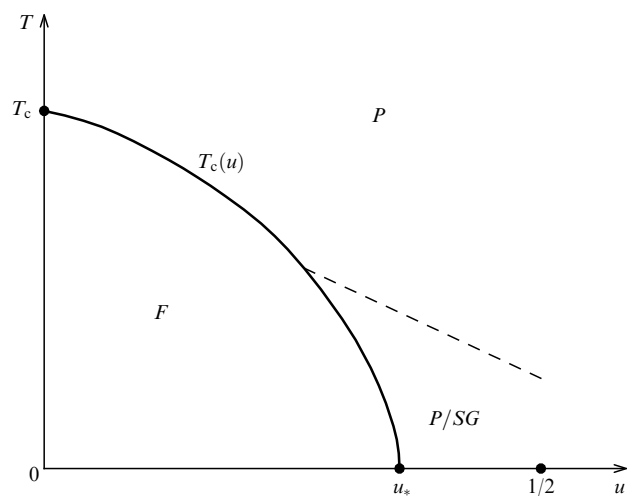


Рис. 16. Наивная фазовая диаграмма ферромагнитной модели Изинга с разорванными или антиферромагнитными примесными связями

С другой стороны, имеются веские аргументы полагать, что фазовый переход в правой нижней части линии $T_c(u)$ (вблизи критической концентрации $u = u_c$, $T \ll 1$) принадлежит совершенно иному классу универсальности [42]. Например, понятно, что в ферромагнетике с разорванными примесными связями фазовый переход по концентрации разорванных связей в точке $u = u_c$ при $T \ll 1$ должен быть типа перколяционного перехода, который не имеет ничего общего с температурным ферромагнитным переходом. Это означает, что на линии $T_c(u)$ должна существовать особая точка (T^*, u^*) , которая разделяет два различных критических режима.

В действительности, оказывается, что на фазовой диаграмме существует целая особая линия, так называе-

мая линия Нишимори $T_N(u)$ [46], которая пересекает линию фазовых переходов $T_c(u)$ в точке (T^*, c^*) (рис. 17). На линии Нишимори никакого фазового перехода не происходит. Формально эта линия является особой только в том смысле, что везде на $T_N(u)$ свободная энергия системы (в любой размерности) является аналитической функцией температуры и концентрации примесей. Более того, свободная энергия и некоторые другие термодинамические характеристики на линии Нишимори могут быть вычислены явным образом для произвольных значений T и u и в произвольной размерности. Поэтому фазовая диаграмма рассматриваемой системы оказывается несколько более нетривиальной, чем та, что показана на рис. 16. Рассмотрим теперь, как вычисляется линия Нишимори и к каким физическим следствиям приводит ее существование.

Рассмотрим изинговский магнетик с гамильтонианом

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (5.72)$$

заданный на решетке с произвольной структурой. Для простоты будем считать, что ферромагнитные спин-спиновые связи J_{ij} равны 1, а примесные связи являются антиферромагнитными, и их величина равна -1 . При этом статистика спиновых взаимодействий задается простым дискретным распределением

$$P[J_{ij}] = \prod_{\langle i,j \rangle} [(1-u) \delta(J_{ij} - 1) + u \delta(J_{ij} + 1)], \quad (5.73)$$

где u — концентрация примесных связей.

Легко понять, что статистическое усреднение по реализациям взаимодействий J_{ij}

$$\overline{(\dots)} = \sum_{J_{ij}=\pm 1} \prod_{\langle i,j \rangle} [(1-u) \delta(J_{ij} - 1) + u \delta(J_{ij} + 1)] (\dots) \quad (5.74)$$

можно представить следующим образом:

$$\overline{(\dots)} = \sum_{J_{ij}=\pm 1} (2 \cosh \tilde{\beta}(u))^{-N_b} \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \right] (\dots), \quad (5.75)$$

где N_b — полное число решеточных связей, а примесный параметр $\tilde{\beta}(u)$ определяется из уравнения

$$\exp[-2\tilde{\beta}(u)] = \frac{u}{1-u}. \quad (5.76)$$

При заданных температуре T и концентрации u средняя энергия системы определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E(u, T) &= \overline{\langle H \rangle} = \\ &= - [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{-N_b} \sum_{J_{ij}=\pm 1} \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \right] \times \\ &\times \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \left(\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)}{\sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Заметим теперь, что рассматриваемая система инвариантна по отношению к локальному калибровочному преобразованию

$$\begin{aligned} \sigma_i &\rightarrow \sigma_i s_i, \\ J_{ij} &\rightarrow J_{ij} s_i s_j, \end{aligned} \quad (5.78)$$

где конфигурация решеточных параметров $s_i = \pm 1$ является произвольной. Используя эту калибровочную инвариантность, можно сделать следующий вычислительный трюк. Произведем калибровочное преобразование (5.78) в выражении (5.77) (которое должно оставить величину E без изменения), и затем "усредним" полученное выражение по всем конфигурациям параметров s_i

$$\begin{aligned} E(c, T) &= - [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{-N_b} 2^{-N} \times \\ &\times \sum_{J_{ij}=\pm 1} \left\{ \sum_{s=\pm 1} \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j \right] \right\} \times \\ &\times \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \left(\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)}{\sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Легко видеть, что выражение

$$\left\{ \sum_{s=\pm 1} \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j \right] \right\} \equiv Z[\tilde{\beta}(u), J_{ij}] \quad (5.80)$$

в (5.79) является статистической суммой исходной системы при температуре $\tilde{\beta}(u)$. Поэтому, если $\tilde{\beta}(u) = \beta$, то статистическая сумма (при температуре β) в знаменателе выражения (5.79) сокращается статистической суммой (5.80) в числителе. Очевидно, что в этом случае средняя энергия E (так же, как и свободная энергия) может быть легко вычислена в явном виде

$$\begin{aligned} E(c, T) &= - [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{-N_b} 2^{-N} \sum_{J_{ij}=\pm 1} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) \times \\ &\times \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) = - [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{N_b} 2^{-N} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{J_{ij}=\pm 1} \sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) \right] = \\ &= -N_b \tanh \beta(u) = -N_b [1 - 2u(T)]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Мы видим, что найденная внутренняя энергия системы (так же, как и свободная энергия) является аналитической при любых значениях температуры и концентрации. Это происходит на линии Нишимори $T_N(u)$, которая задается простым уравнением $\tilde{\beta}(u) = \beta$

$$T_N(u) = \frac{2}{\ln[(1-u)/u]}. \quad (5.82)$$

Качественно поведение этой линии показано на рис. 17. Она начинается с нулевой концентрации (чистая система) при $T = 0$, а при $u \rightarrow 1/2$ (полностью неупорядоченная система), $T_N \rightarrow \infty$.

Понятно, что линия Нишимори должна пересекать линию фазовых переходов $T_c(u)$, и это создает весьма нетривиальную ситуацию, поскольку на линии фазового перехода (по определению) термодинамические функции

должны быть неаналитическими (подробное обсуждение этой проблемы см. в [46]). В настоящее время принято считать, что точка (T_*, u_*) является мультикритической точкой, где сходятся вместе ферромагнитная, парамагнитная и спин-стекольная фазы [47].

Для изинговских систем рассматриваемого типа можно точно доказать еще один важный факт. А именно, оказывается, что при $u > u_*$ (где u_* — это точка, в которой линия Нишимори пересекает границу между парамагнитным и упорядоченным состоянием $T_c(u)$ (см. рис. 17)) и при любых температурах ферромагнитное состояние в системе существовать не может [46]. (Это в частности означает, что структура наивной фазовой диаграммы на рис. 16 не вполне правильна.) Чтобы доказать этот факт, рассмотрим обычную двухточечную корреляционную функцию

$$G(x) = \overline{\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle}_\beta, \quad (5.83)$$

где $\langle \dots \rangle_\beta$ обозначает термодинамическое усреднение при данной температуре β . Применяя калибровочное преобразование (5.78) и "усредняя" по всем конфигурациям произвольных калибровочных параметров s_i , получаем

$$\begin{aligned} G(x) &= [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{-N_b} \sum_{J_{ij}=\pm 1} \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \right] \times \\ &\times \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} (\sigma_0 \sigma_x) \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)}{\sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)} = \\ &= [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{-N_b} 2^{-N} \times \\ &\times \sum_{J_{ij}=\pm 1} \sum_{s=\pm 1} (s_0 s_x) \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j \right] \times \\ &\times \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} (\sigma_0 \sigma_x) \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)}{\sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left(\beta \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)} = \\ &= [2 \cosh \tilde{\beta}(u)]^{-N_b} 2^{-N} \times \\ &\times \sum_{s'=\pm 1} \sum_{J_{ij}=\pm 1} \exp \left[\tilde{\beta}(u) \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s'_i s'_j \right] \times \\ &\times \langle (s_0 s_x) \rangle_{\tilde{\beta}(u)} \langle (\sigma_0 \sigma_x) \rangle_\beta = \overline{\langle s_0 s_x \rangle}_{\tilde{\beta}(u)} \overline{\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle}_\beta. \quad (5.84) \end{aligned}$$

Поскольку абсолютная величина любой изинговской корреляционной функции не более единицы, из (5.84) находим, что абсолютная величина корреляционной функции (5.83) удовлетворяет следующему неравенству

$$|G(x)| = |\overline{\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle}_\beta| \leq |\overline{\langle s_0 s_x \rangle}_{\tilde{\beta}(u)}}|. \quad (5.85)$$

Таким образом, абсолютная величина усредненной двухточечной корреляционной функции, вычисленной при температуре T и концентрации примесей u , не превосходит среднего значения абсолютной величины корреляционной функции, вычисленной на линии Нишимори при той же концентрации. Заметим теперь, что если соответствующая точка на линии Нишимори находится в парамагнитной фазе, то в пределе $|x| \rightarrow \infty$ рассматриваемая двухточечная корреляционная функция обра-

щается в нуль, и это имеет место при всех концентрациях $u > u_*$. С другой стороны, в пределе $|x| \rightarrow \infty$ корреляционная функция $G(x)$ становится равной квадрату ферромагнитной намагниченности: $G(|x| \rightarrow \infty) = m^2(T, u)$. Таким образом, эти простые рассуждения доказывают, что $m(T, u) \equiv 0$ при всех $u > u_*$.

По всей видимости, линия, уходящая вниз из точки (T_*, u_*) и разделяющая ферромагнитную и неферромагнитную (спин-стекольную) фазы должна быть вертикальной к оси концентрации, как это показано на рис. 17 [46], хотя исключить возможность существования явления ризнтренса (когда эта линия загибается влево от u_*), вообще говоря, нельзя.

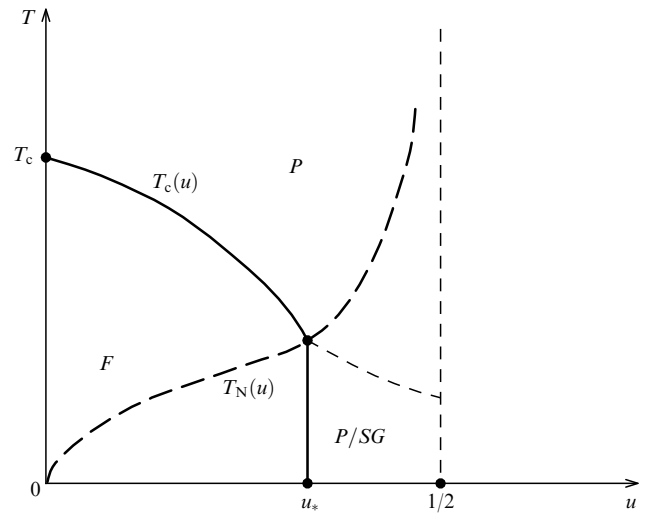


Рис. 17. Фазовая диаграмма Изинговского ферромагнетика с антиферромагнитными примесными связями с учетом линии Нишимори $T_N(u)$

6. Изинговские системы со случайными магнитными полями

6.1. Модель

В предыдущих разделах мы рассматривали спиновые системы, в которых беспорядок присутствовал в виде случайных по пространству флуктуаций спиновых взаимодействий. Существует другой класс неупорядоченных статистических моделей, в которых беспорядок присутствует в виде случайных магнитных полей. Благодаря тому, что магнитное поле нарушает симметрию по отношению к изменению знаков спинов, статистические свойства таких систем существенно отличаются от магнетиков со случайными спиновыми взаимодействиями.

В упрощенном виде изинговские спиновые системы со случайными магнитными полями описываются следующим гамильтонианом

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle}^N \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i, \quad (6.1)$$

где изинговские спины $\{\sigma_i = \pm 1\}$ расположены в узлах некоторой D -мерной решетки с ферромагнитными взаимодействиями между ближайшими соседями, а случайные магнитные поля $\{h_i\}$ описываются симметричным

гауссовым распределением

$$P[h_i] = \prod_i^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi h_0^2}} \exp\left(-\frac{h_i^2}{2h_0^2}\right) \right], \quad h_0 \ll 1. \quad (6.2)$$

Наиболее изученными экспериментальными реализациями систем такого типа являются разбавленные антиферромагнетики в *однородном* магнитном поле [48]. То, что они на качественном уровне соответствуют ферромагнетикам со *случайными* полями, можно понять следующим образом. Обычный антиферромагнетик в основном состоянии может быть представлен в виде двух подрешеток А и В, намагниченности которых равны по величине и противоположны по знаку. Разбавленность означает, что некоторые узлы случайным образом устранены из решетки. В нулевом магнитном поле разбавленность не нарушает симметрию между двумя основными состояниями $\sigma_A = -\sigma_B = \pm 1$. Однако, если включить внешнее магнитное поле h , то благодаря отсутствующему изолированному спину, скажем, в решетке А между двумя основными состояниями $\sigma_A = -\sigma_B = +1$ и $\sigma_A = -\sigma_B = -1$ возникает разность энергии, равная $2h$.

Другим примером экспериментальной реализации являются адсорбированные монослои с двумя эквивалентными основными состояниями на подложке с примесями [49]. В таких системах, если один из узлов решетки подложки занят примесью, то это препятствует дополнительному занятию этого узла атомами монослоя, что эффективно проявляется как локальное внешнее поле, нарушающее симметрию.

К числу других реализаций относятся бинарные жидкости в пористой среде [50] и разбавленные фрастрированные антиферромагнетики [51].

6.2. Общий подход

Несмотря на интенсивные теоретические и экспериментальные усилия в течение последних двадцати лет (см., например, [52]) в настоящее время существует совсем немного надежно установленных фактов о поведении изинговских магнетиков со случайными полями.

Согласно простым физическим рассуждениям Имри и Ма [53], так называемая нижняя критическая размерность (размерность, выше которой ферромагнитное основное состояние устойчиво при конечных температурах) в изинговских магнетиках со слабыми случайными полями должна быть равна двум. (Заметим в этой связи, что для обычной ферромагнитной модели Изинга нижняя критическая размерность равна 1.) Действительно, если на фоне упорядоченного ферромагнитного состояния мы перевернем знаки спинов в некоторой области пространства Ω с линейным размером L , то возникнет два эффекта: во-первых, возможен выигрыш в энергии E_h благодаря взаимодействиям со случайным полем, и, во-вторых, проигрыш в энергии E_f благодаря созданию доменной стенки. Величину энергии взаимодействия со случайным полем можно оценить следующим образом:

$$E_h \sim \left[\left(\sum_{i \in \Omega} h_i \right)^2 \right]^{1/2} = \left(\sum_{i,j \in \Omega} h_i h_j \right) \sim h_0 L^{D/2}. \quad (6.3)$$

Энергия доменной стенки пропорциональна площади границы области Ω

$$E_f \sim L^{(D-1)}. \quad (6.4)$$

Эти оценки показывают, что в размерности ниже 2 при сколь угодно малой величине поля h_0 на достаточно больших размерах L эти две энергии становятся одного порядка, и поэтому ферромагнитное состояние будет разрушаться. С другой стороны, если размерность выше 2, то энергия, необходимая для создания доменной стенки E_f всегда больше E_h , и поэтому упорядоченное состояние должно быть устойчивым. Этот вывод, полученный первоначально путем приведенных выше простых оценок, позднее был доказан точно [54].

С другой стороны, пертурбативные вычисления в окрестности точки фазового перехода показывают, что в результате суммирования главных инфракрасных расходимостей происходит странное явление сдвига эффективной размерности системы. А именно, оказывается, что критические индексы системы со случайными полями в размерности D совпадают с критическими индексами аналогичной системы без случайных полей в размерности $D - 2$ [55]. Тем самым, этот результат указывает на то, что нижняя критическая размерность модели Изинга со случайными полями должна быть 3, а не 2, в противоречие с обсуждавшимся выше точным утверждением.

В действительности, процедура суммирования главных крупномасштабных расходимостей может давать правильные результаты только в том случае, когда гамильтониан системы со случайными полями имеет лишь один минимум. В этом случае, используя формализм суперсимметричных полей, факт сдвига эффективной размерности на два можно доказать точно [56]. Однако, на самом деле, при температурах достаточно близких к критической точке, а также и во всей низкотемпературной области, существуют такие магнитные поля, при которых свободная энергия имеет множество минимумов (это явление аналогично ситуации, рассматривавшейся в разделе 4). По этой причине пертурбативные результаты, полученные как суммированием главных инфракрасных расходимостей, так и с помощью суперсимметричных вычислений, являются необоснованными. Это, впрочем, не удивительно, поскольку, в частности, пертурбативный подход полностью игнорирует существование сингулярностей Гриффита [21].

Недавно было обнаружено, что наличие множества локальных минимумов энергии в изинговских системах со случайными полями в репличном подходе проявляется в виде нетривиальных локализованных решений инстантонного типа (имеющих конечный пространственный размер и конечную энергию), которые нарушают репличную симметрию [57].

6.3. Эффекты Гриффита в низкотемпературной области

В этом разделе с помощью простых физических рассуждений мы продемонстрируем, каким образом в низкотемпературной (упорядоченной) фазе модели Изинга размерности $D < 3$ в области температур $h_0^2 \ll T \ll 1$ возникают сингулярности Гриффита термодинамических функций [58]. Будет показано, что они возникают благодаря непертурбативным возбуждениям, которые проявляются в виде перевернутых (на фоне ферромагнитного состояния) больших спиновых кластеров с характерными размерами порядка $\sim \sqrt{T}/h_0$, являющихся *локальными* минимумами энергии.

Если размерность системы выше двух, то в низкотемпературной области основным состоянием модели Изинга со случайными полями должно быть ферромагнитное состояние. При этом термодинамическими возбуждениями являются спиновые кластеры с намагниченностью, противоположной общему ферромагнитному упорядочению. Если размер такого кластера большой, то в непрерывном пределе энергию подобного термодинамического возбуждения можно оценить следующим образом:

$$E(L) \simeq L^{D-1} - V(L), \quad (6.5)$$

где

$$V(L) = \int_{|x|<L} d^D x h(x). \quad (6.6)$$

По определению, статистическое распределение (плотность вероятности) для случайной функции $V(L)$ (которая представляет собой энергию спинового кластера размера L в случайном поле $h(x)$) имеет вид

$$P[V(L)] = \int Dh(x) \exp \left[-\frac{1}{2h_0^2} \int d^D x h^2(x) \right] \times \prod_L \left\{ \delta \left[\int_{|x|<L} d^D x h(x) - V(L) \right] \right\} \quad (6.7)$$

(как обычно, все несущественные предэкспоненциальные множители мы опускаем). Дальнейшие вычисления будет удобнее проводить в терминах случайной замороженной функции $V(L)$, а не $h(x)$. Оказывается, что статистическое распределение $P[V(L)]$ (6.7) легко вычислить в явном виде (для простоты, в приведенных ниже вычислениях параметр L берется сначала дискретным)

$$\begin{aligned} P[V(L)] &= \left[\prod_x \int_{-\infty}^{+\infty} dh(x) \right] \left[\prod_i \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2h_0^2} \int d^D x h^2(x) + \right. \\ &+ i \sum_i \xi_i \left[\int_{|x|<L_i} d^D x h(x) - V(L_i) \right] \left. \right\} = \\ &= \left[\prod_i \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i \right] \exp \left[-i \sum_i \xi_i V(L_i) \right] \times \\ &\times \left[\prod_x \int_{-\infty}^{+\infty} dh(x) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2h_0^2} \int d^D x h^2(x) + \right. \\ &+ i \sum_{i=1}^{\infty} \int_{L_i < |x| < L_{i+1}} d^D x h(x) \left[\sum_{j=i}^{\infty} \xi_j \right] \left. \right\} = \\ &= \left[\prod_i \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i \right] \exp \left\{ -i \sum_i \xi_i V(L_i) - \right. \\ &- \frac{1}{2} h_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(L_{i+1}^D - L_i^D \right) \left(\sum_{j=i}^{\infty} \xi_j \right)^2 \left. \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2h_0^2} \sum_i \frac{[V(L_{i+1}) - V(L_i)]^2}{L_{i+1}^D - L_i^D} \right\}. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Переходя снова к непрерывному L , получаем

$$P[V(L)] \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{2h_0^2} \int dL \frac{1}{L^{D-1}} \left[\frac{dV(L)}{dL} \right]^2 \right\}. \quad (6.9)$$

Поскольку вероятность переворотов больших спиновых кластеров экспоненциально мала, их вклады в статистическую сумму можно считать независимыми (предполагается, что такие кластеры, в среднем, находятся очень далеко друг от друга и поэтому не взаимодействуют). Тогда вклад в полную свободную энергию таких термодинамических возбуждений можно получить статистическим усреднением свободной энергии одного изолированного кластера

$$\Delta F = -T \left[\prod_L \int dV(L) \right] P[V(L)] \times \times \log \left\{ 1 + \int_1^{\infty} dL \exp \left\{ \beta [V(L) - L^{D-1}] \right\} \right\}. \quad (6.10)$$

Здесь выражение под логарифмом представляет собой статистическую сумму отдельного перевернутого кластера, которая получается интегрированием по всем его размерам (фактор "1" представляет собой вклад упорядоченного состояния, т.е. состояния без перевернутого кластера).

Идея дальнейших вычислений состоит в следующем. Поскольку в размерности $D > 2$ энергия $E(L) = L^{D-1} - V(L)$ является в среднем растущей функцией L , разумно предположить, что локальные минимумы этой функции (если таковые имеются) хорошо разделены, а значение энергии в таких минимумах, в среднем, растет с ростом L . В связи с этим, естественно ожидать, что для данной реализации функции $V(L)$ при низких температурах главный вклад при интегрировании по размерам кластеров в (6.10) возникает лишь от *одного* самого глубокого минимума функции $L^{D-1} - V(L)$. Опять же, благодаря тому, что энергия $E(L) = L^{D-1} - V(L)$ является в среднем растущей функцией L , для того чтобы где-нибудь на размерах больших некоторой заданной величины L существовал минимум, достаточно выполнения условия

$$\frac{dV(L)}{dL} > (D-1)L^{D-2}. \quad (6.11)$$

Используя эти предположения, вклад в свободную энергию (6.10) от перевернутых спиновых кластеров большого размера можно оценить следующим образом:

$$\Delta F \simeq -T \int_1^{\infty} dL \int_{-\infty}^{+\infty} dV P_L(V) P \left[\frac{dV(L)}{dL} > (D-1)L^{D-2} \right] \times \times \log \left\{ 1 + \exp [\beta (V - L^{D-1})] \right\}, \quad (6.12)$$

где $P_L(V)$ — это вероятность того, что на заданном размере L энергия взаимодействия кластера со случайным полем равна V , а $P[dV(L)/dL > (D-1)L^{D-2}]$ — это вероятность выполнения условия (6.11) на участке единичной длины на заданном размере L .

Согласно определению (6.6) $V^2(L) \simeq h_0^2 L^D$. Очевидно, что на больших размерах L функция распределения

$P_L(V)$ должна быть гауссовой, поэтому

$$P_L(V) \simeq \exp\left\{-\frac{V^2}{2h_0^2 L^D}\right\}. \quad (6.13)$$

Нетрудно проверить, что этот результат можно также получить прямым функциональным интегрированием общей функции распределения $P[V(L)]$ (6.9) по всем "траекториям" $V(L)$ с фиксированным значением $V(L) = V$ на заданной длине L .

Вероятность $P[dV(L)/dL > (D-1)L^{D-2}]$ тоже можно получить интегрированием функции распределения $P[V(L)]$ по всем функциям $V(L)$ с условием $dV(L)/dL > (D-1)L^{D-2}$ на заданной длине L . Понятно, однако, что с экспоненциальной точностью результат такого интегрирования можно просто оценить из формулы (6.9), где для производной $dV(L)/dL$ нужно взять ее минимальное значение на заданной длине L , которое согласно (6.11) равно $(D-1)L^{D-2}$

$$P\left[\frac{dV(L)}{dL} > (D-1)L^{D-2}\right] \simeq \exp\left\{-\frac{1}{2h_0^2 L^{D-1}} \times \right. \\ \left. \times [(D-1)L^{D-2}]^2\right\} = \exp\left\{-\frac{(D-1)^2 L^{D-3}}{2h_0^2}\right\}. \quad (6.14)$$

Отметим теперь важное свойство функции $E(L)$, которое следует из (6.13), (6.14): хотя в размерности $D > 2$ величина энергии $E(L)$ растет с размером L , вероятность найти локальный минимум этой функции в размерности $D < 3$ также растет с L . Как мы увидим далее, именно конкуренция этих двух эффектов и приводит к появлению в свободной энергии нетривиального вклада типа сингулярности Гриффита.

В пределе низких температур $T \ll 1$ вклад в свободную энергию (6.12) можно разделить на две части

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2, \\ \Delta F_1 \simeq -T \int_1^\infty dL \int_{V > L^{D-1}} dV \exp\left\{-\frac{V^2}{2h_0^2 L^D} - \frac{(D-1)^2 L^{D-3}}{2h_0^2}\right\} \times \\ \times \log\left\{1 + \exp[\beta(V - L^{D-1})]\right\}, \\ \Delta F_2 \simeq -T \int_1^\infty dL \int_{V < L^{D-1}} dV \exp\left\{-\frac{V^2}{2h_0^2 L^D} - \frac{(D-1)^2 L^{D-3}}{2h_0^2}\right\} \times \\ \times \log\left\{1 + \exp[\beta(V - L^{D-1})]\right\}. \quad (6.15)$$

Первая часть — это вклад минимумов, в которых энергия перевернутых кластеров отрицательна (т.е. это такие конфигурации, которые приводят к *выигрышу* энергии по сравнению с ферромагнитным упорядочением). Здесь при интегрировании по V главный вклад возникает на пределе интегрирования $V = L^{D-1}$, и с экспоненциальной точностью мы получаем

$$\Delta F_1 \sim -T \int_1^\infty dL \exp\left\{-\frac{L^{D-2}}{2h_0^2} - \frac{(D-1)^2 L^{D-3}}{2h_0^2}\right\}. \quad (6.16)$$

Отсюда видно, что в размерности $D > 2$ главный вклад в величину ΔF_1 возникает на размерах $L \sim 1$, и в результате мы возвращаемся к уже известному выводу Имри и Ма [53] о том, что в рассматриваемой системе переворотами

больших спиновых кластеров нельзя достичь выигрыша в энергии по сравнению с упорядоченным ферромагнитным состоянием.

Второй вклад в (6.15) происходит от локальных минимумов с положительной энергией. Понятно, что такие состояния могут давать вклад только как термодинамические возбуждения при ненулевой температуре. В пределе низких температур, $\beta \gg 1$, имеем

$$\log\left\{1 + \exp[\beta(V - L^{D-1})]\right\} \simeq \exp[-\beta(L^{D-1} - V)], \quad (6.17)$$

где $L^{D-1} > V$. Поэтому величину ΔF_2 можно оценить следующим образом:

$$\Delta F_2 \simeq -T \int_1^\infty dL \int_{-\infty}^{L^{D-1}} dV \times \\ \times \exp\left\{-\frac{V^2}{2h_0^2 L^D} - \frac{(D-1)^2 L^{D-3}}{2h_0^2} + \beta V - \beta L^{D-1}\right\}. \quad (6.18)$$

Главный вклад в этот интеграл также происходит от "тривиальной" области параметров $L \sim 1$ и $V \sim \beta h_0^2$, которая соответствует "элементарным возбуждениям" на размерах порядка решеточной длины.

Однако в размерности $D < 3$ при не слишком низких температурах — $\beta h_0^2 \ll 1$ — существует и другой вклад в этот интеграл, который возникает в окрестности нетривиальной седловой точки

$$V_* = (\beta h_0^2) L_*^D, \\ L_* = \left[\frac{(D-1)(3-D)}{2\beta h_0^2}\right]^{1/2} \gg 1, \quad (6.19)$$

которая отделена от "тривиальной" области $L \sim 1$; $V \sim \beta h_0^2$ большим энергетическим барьером. Заметим, что условие интегрирования $V_* \ll L_*^{D-1}$ в (6.18), согласно результату (6.19), может быть удовлетворено только при не слишком низких температурах: $\beta h_0^2 \ll 1$. Легко вычислить, что вклад в свободную энергию от интегрирования в окрестности седловой точки (6.19) имеет вид, характерный для сингулярностей Гриффита:

$$\Delta F_2 \sim \exp\left\{-\frac{\text{const}}{2h_0^2} (\beta h_0^2)^{(3-D)/2}\right\}, \quad (6.20)$$

где

$$\text{const} = \frac{1}{2} (D+1)(D-1)^{(D-1)/2} \left(\frac{2}{3-D}\right)^{(3-D)/2}. \quad (6.21)$$

Результат (6.20) показывает, что кроме обычных пертурбативных термодинамических возбуждений на фоне упорядоченного состояния в термодинамику рассматриваемых систем дают также вклад и существенно непертурбативные степени свободы, связанные с переворотами спиновых кластеров большого размера, которые соответствуют *локальным* минимумам энергии. Этот вклад имеет характерную для сингулярностей Гриффита экспоненциальную неаналитичность. В низкотемпературной области $h_0^2 \ll T \ll 1$ характерный размер таких спиновых кластеров $L_* \sim \sqrt{T}/h_0 \gg 1$.

Рассмотренное явление, хотя и производит лишь экспоненциально малый вклад в термодинамические функции, может оказаться чрезвычайно важным для

динамических релаксационных процессов. Легко видеть, что локальные минимумы энергии, соответствующие рассмотренным выше большим спиновым кластерам с намагниченностью, противоположной упорядоченному состоянию, отделены от основного состояния большим энергетическим барьером, и это может вызвать значительное замедление релаксационных процессов [59]. В частности, кластеры (6.19) с характерным размером $L_*(T) \sim \sqrt{T}/h_0 \gg 1$ отделены от основного состояния энергетическим барьером порядка $V_* \sim (\beta h_0^2)^{-(D-2)/2} \gg 1$ и при низких температурах это соответствует экспоненциально большому характерному времени релаксации

$$\tau(T) \sim \exp\left\{\beta(\beta h_0^2)^{-(D-2)/2}\right\} \gg 1. \quad (6.22)$$

Однако для правильного описания асимптотического поведения релаксации к основному состоянию, нужно знать *спектр* времен релаксации (или энергетических барьеров), а это требует более тщательного изучения проблемы, которое пока еще не сделано.

К сожалению, результаты, полученные в этом разделе, непосредственно не применимы для систем с размерностью $D = 3$, которая оказывается маргинальной для рассмотренного явления (в размерностях $D > 3$ подобные эффекты отсутствуют). Как мы видели, в случае, когда размерность системы в точности равна 3, использовавшиеся простые оценки (с экспоненциальной точностью) для энергии и вероятностей переворотов больших спиновых кластеров (в частности, оценка (6.14)) не работают, и требуются более аккуратные вычисления, которые также пока не сделаны.

С другой стороны, представляется вполне разумным ожидать, что в случае размерности $D = 2$, полученные результаты остаются правильными, несмотря на то, что в двумерных системах дальний порядок неустойчив. Дело в том, что в этом случае корреляционная длина, на которой происходит разрушение дальнего порядка, является экспоненциально большой по параметру $1/h_0$, в то время как характерный масштаб спиновых кластеров, которые производят сингулярности Гриффита, пропорционален лишь степени параметра $1/h_0$. Поэтому на тех масштабах, где возникают рассмотренные эффекты Гриффита, состояние системы все еще остается эффективно упорядоченным.

6.4. Фазовый переход

Природа фазового перехода в модели Изинга со случайными полями все еще остается мистической загадкой. Практически единственным надежно установленным фактом является то, что верхняя критическая размерность для этого фазового перехода (размерность, выше которой критические явления описываются теорией среднего поля) равна 6, в отличие от чистых систем, где она равна 4. Убедиться в этом несложно.

Вблизи точки перехода модель Изинга со случайными полями описывается обычным гамильтонианом Гинзбурга–Ландау

$$H = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau \phi^2(x) - h(x) \phi(x) + \frac{1}{4} g \phi^4(x) \right\}, \quad (6.23)$$

где замороженные случайные поля $h(x)$ описываются симметричным гауссовым распределением со средним

квадратом, равным h_0^2 . Конфигурации поля $\phi(x)$, соответствующие минимумам энергии, определяются соответствующим седловым уравнением

$$-\Delta \phi(x) + \tau \phi(x) + g \phi^3(x) = h(x). \quad (6.24)$$

В чистой системе ($h(x) = 0$) при изучении фазового перехода в терминах обычной ренормгрупповой теории строится теория возмущений по крупномасштабным флуктуациям на фоне однородного решения уравнения (6.24): $\phi_0 = \sqrt{|\tau|/g}$, $\tau < 0$ или $\phi_0 = 0$, $\tau > 0$ (см. раздел 2.6). Очевидно, однако, что при наличии случайных полей $h(x)$ решения этого уравнения становятся неоднородными и могут существенно зависеть от конкретной реализации замороженных полей. Рассмотрим, при каких условиях влияние случайных полей на основное состояние становится доминирующим.

Рассмотрим некоторую пространственную область Ω_L , которая характеризуется большим линейным размером $L \gg 1$. Для данной реализации случайных полей усредненную по такой области величину внешнего поля можно определить следующим образом:

$$h(\Omega_L) = \frac{1}{L^D} \int_{x \in \Omega_L} d^D x h(x). \quad (6.25)$$

Соответственно, для характерной (усредненной по реализациям) величины поля $h(\Omega_L)$ имеем

$$\begin{aligned} h_L &= \left[\overline{h^2(\Omega_L)} \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{L^D} \left[\int_{x, x' \in \Omega_L} d^D x d^D x' \overline{h(x)h(x')} \right]^{1/2} = \frac{h_0}{L^{D/2}}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Среднее значение параметра порядка $\phi(\Omega_L)$ в данной области Ω_L можно оценить из уравнения

$$\tau \phi + g \phi^3 = h(\Omega_L). \quad (6.27)$$

Легко видеть, что решение этого уравнения имеет вид

$$\phi(\Omega_L) \simeq \phi_0 + \frac{h(\Omega_L)}{2|\tau|}; \quad h(\Omega_L) \ll |\tau|^{3/2}, \quad (6.28)$$

$$\phi(\Omega_L) \simeq \left[\frac{h(\Omega_L)}{g} \right]^{1/3}; \quad h(\Omega_L) \gg |\tau|^{3/2}. \quad (6.29)$$

В первом случае внешние поля можно рассматривать лишь как малые возмущения, однако во втором случайное поле полностью определяет величину параметра порядка, и решение уравнения (6.27) перестает зависеть от температурного параметра τ . Оценим теперь, вплоть до каких характерных размеров кластеров случайные поля могут доминировать. Согласно (6.26) из условия $h(\Omega_L) \gg |\tau|^{3/2}$ (при котором реализуется решение (6.29)) получаем

$$L \ll \frac{h_0^{2/D}}{|\tau|^{3/D}}. \quad (6.30)$$

С другой стороны, оценка параметра порядка в терминах седлового уравнения (6.27) может быть правильной только на масштабах много больших размера флуктуа-

ционной области, который определяется корреляционной длиной $R_c \sim |\tau|^{-\nu}$. Отсюда получаем нижнюю оценку

$$L \gg |\tau|^{-\nu}. \quad (6.31)$$

Поэтому ситуация, когда случайные поля доминируют, может реализоваться только в области параметров, задаваемой условием

$$|\tau|^{-\nu} \ll \frac{h_0^{2/D}}{|\tau|^{3/D}} \quad (6.32)$$

или

$$|\tau|^{3-\nu D} \ll h_0^2. \quad (6.33)$$

Такая область температур в окрестности T_c существует только при условии

$$\nu D < 3. \quad (6.34)$$

И в этом случае в температурном интервале вблизи T_c

$$\tau_*(h_0) \sim h_0^{2/(3-\nu D)} \quad (6.35)$$

конфигурации параметра порядка определяются главным образом случайными полями, а не температурным параметром τ . Соответственно, вне этого интервала при $\tau \gg \tau_*$ внешние поля могут рассматриваться как малое возмущение.

Как известно, в теории среднего поля (которая правильно описывает фазовый переход в чистых системах с размерностями выше 4) критический индекс корреляционной длины $\nu = 1/2$. Таким образом, согласно (6.34), нетривиальный температурный интервал τ_* существует только в размерностях $D < 6$. Соответственно, в размерностях $D > 6$ фазовый переход описывается обычной теорией среднего поля, а случайные поля проявляются лишь в виде малых поправок.

Что происходит в непосредственной близости к критической точке при $\tau \ll \tau_*(h_0)$ в размерностях $D < 6$ неизвестно. К настоящему времени было выведено единственное конкретное утверждение, согласно которому критическое поведение D -мерной модели Изинга со случайными полями совпадает с критическим поведением соответствующей $(D-2)$ -мерной чистой системы [55], однако и это утверждение оказалось не правильным по причинам, которые вкратце обсуждались в разделе 6.2.

Вернемся в этой связи к седловому уравнению (6.24), которое определяет конфигурации минимумов энергии. Существуют веские указания как теоретические [57], [58], [60], так и численные [61] на то, что достаточно близко к критической точке решение этого уравнения становится не единственным, и возникает макроскопически много локальных минимумов энергии. Более того, согласно последним численным исследованиям [61], существует совершенно определенная температура T_* выше T_c такая, что при $T > T_*$ решение седлового уравнения (6.24) является единственным (и, тем самым, эта область соответствует обычной парамагнитной фазе), а при $T < T_*$ появляется множество решений. При этом дальний порядок устанавливается лишь при $T < T_c$. Естественно, все эти решения определяются конкретной реализацией случайного поля, и в этой ситуации право-

мерность использования традиционного ренормгруппового подхода становится весьма сомнительной.

В этой связи представляется весьма вероятным, что здесь мы снова можем обнаружить совершенно новый тип критического поведения спин-стекольной природы, аналогично тому, что обсуждалось в разделе 4. Так же, как и в спиновых стеклах [9, 11], здесь мы имеем макроскопическое число зависящих от беспорядка локальных минимумов энергии. Однако в отличие от спиновых стекол здесь, по всей видимости, эти локальные минимумы разделены *конечными* энергетическими барьерами. Поэтому, едва ли можно ожидать, что в окрестности T_c существует истинная спин-стекольная фаза в традиционном смысле. Тем не менее в настоящее время принято считать, что высокотемпературная парамагнитная фаза должна быть отделена от низкотемпературной упорядоченной фазы некоторым конечным температурным интервалом, в котором устанавливается что-то вроде "стекольного" критического поведения [62, 63].

В этой связи можно привести еще одно простое физическое рассуждение. Легко понять, что множественность глобальных решений соответствующих локальным минимумам возникает из-за того, что потенциал

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \tau \phi^2 + \frac{1}{4} g \phi^4 - h \phi(x) \quad (6.36)$$

при определенных значениях параметров τ и h имеет два минимума. Нетрудно проверить, что это происходит, во-первых, только при $\tau < 0$, и, во-вторых, при не слишком больших значениях поля

$$h < h_c(\tau) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{|\tau|^3}{g}}. \quad (6.37)$$

Поэтому при $\tau < 0$, когда в системе появляется глобальное решение, соответствующее ферромагнитному состоянию, плотность пространственных областей, где выполняется условие (6.37) и именно благодаря которым возникает множественность глобальных решений, можно оценить следующим образом

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_0}} \int_{-h_c}^{+h_c} dh \exp\left(-\frac{h^2}{2h_0^2}\right). \quad (6.38)$$

Учитывая (6.37), получаем

$$\rho \sim \begin{cases} \frac{1}{h_0} \sqrt{\frac{|\tau|^3}{g}} \ll 1, & |\tau| \ll (gh_0^2)^{1/3}, \\ 1 - \exp\left(-\frac{|\tau|^3}{2gh_0^2}\right) \sim 1, & |\tau| \gg (gh_0^2)^{1/3}. \end{cases} \quad (6.39)$$

В последнем случае расстояние между такими областями становятся порядка единицы, поэтому здесь они должны стать сильно взаимодействующими, и соответственно, следует ожидать, что глобальным минимумом должно стать ферромагнитное состояние. Действительно, из исходного гамильтониана (6.23) для энергии ферромагнитного состояния $\phi_f = \sqrt{|\tau|/g}$ находим $E_f = -\tau^2/4g$. С другой стороны, простая оценка характерной энергии неупорядоченного состояния, определяемого случайным полем, $\phi(x) \simeq [h(x)/g]^{1/3}$, дает $E_h \sim -(h_0^4/g)^{1/3}$.

Отсюда мы видим, что ферромагнитное состояние становится глобальным минимумом только при $|\tau| \leq \tau_h \sim (gh_0^2)^{1/3}$.

Согласно этим простым рассуждениям, сценарий происходящего при понижении температуры выглядит следующим образом. Выше точки $\tau = 0$ (неупорядоченное) состояние, соответствующее минимуму энергии, является единственным. Сразу ниже точки $\tau = 0$ в системе появляется множество неупорядоченных локальных минимумов энергии, и одновременно появляется ферромагнитное состояние, которое, однако, по энергии находится выше типичных неупорядоченных состояний. Поэтому точка $\tau = 0$ должна соответствовать обсуждавшейся выше температуре T_* , а не точке ферромагнитного перехода T_c . При понижении температуры до величины порядка $(gh_0^2)^{1/3}$ взаимодействие между локальными минимумами становится не малым, и это обстоятельство может привести к нетривиальным спин-стекольным эффектам, обсуждавшимся в разделе 4. Одновременно, примерно при температуре того же порядка ферромагнитное состояние становится глобальным минимумом энергии, и поэтому где-то в этой же области при $T_c \sim T_* - (gh_0^2)^{1/3}$ должен происходить ферромагнитный фазовый переход. В низкотемпературной области эффект случайных полей проявляется в виде множества локальных минимумов энергии, находящихся выше ферромагнитного состояния и связанных с переворотами больших спиновых кластеров на фоне ферромагнитного состояния, которые приводят к сингулярностям Гриффита в термодинамических функциях (рассмотренных в разделе 6.3) и аномально медленным процессам релаксации.

В ситуации, когда доминирующим физическим эффектом становится множественность локальных минимумов энергии, наиболее развитой техникой, которая позволяет проводить реальные вычисления и которая позволяет наиболее ясно понять физику происходящего, является формализм теории нарушения репличной симметрии (НРС) (см. раздел 4). Возможность существования эффектов НРС в изинговских системах со случайными полями обсуждается уже давно [63, 64]. Сравнительно недавно было построено интересное обобщение формализма теории НРС для статистики случайных многомерных поверхностей [12], которые в определенной степени моделируют ситуацию в модели Изинга со случайными полями. Имеется также точное доказательство, что в m -компонентных спиновых системах со случайными полями в пределе $m \gg 1$ реплично-симметричное решение в точке фазового перехода является неустойчивым по отношению к НРС [13]. Более того, последние исследования, проводившиеся в терминах стандартного формализма преобразований Лежандра и общих скейлинговых соотношений, показывают, что в D -мерной модели Изинга со случайными полями при размерности $D < 6$ в конечном температурном интервале вокруг точки перехода T_c должен устанавливаться совершенно новый тип критического поведения, который проявляется в виде НРС в скейлинговых свойствах спиновых корреляционных функций [65].

7. Заключение

В этом довольно обширном обзоре рассмотрены эффекты, производимые слабым замороженным беспорядком в статистических спиновых системах. Идея

состояла в том, чтобы на качественном уровне продемонстрировать выработанные в этой области основные физические идеи и подходы. Именно по этой причине рассмотрение было ограничено простейшими статистическими моделями, и большая часть имеющихся теоретических и экспериментальных исследований просто не рассматривалась.

Ключевая проблема, так и остающаяся нерешенной, состоит в том, можно ли обнаруженные явления нарушения репличной симметрии и переход в режим сильной связи в ренормгруппе интерпретировать как установление своего рода спин-стекольной фазы в узком температурном интервале вблизи T_c . Известно, что нарушение репличной симметрии в спиновых стеклах описывает ситуацию, когда в пространстве состояний происходит факторизация в виде (ультраметричной) иерархии "долин", или локальных минимумов энергии, разделенных макроскопическими барьерами. Хотя в рассмотренных здесь системах, возникающие вблизи T_c многочисленные минимумы энергии вовсе не обязательно должны быть разделены макроскопическими барьерами, представляется естественным интерпретировать обнаруженные явления нарушения репличной симметрии как факторизацию фазового пространства на иерархию долин, разделенных *конечными* барьерами. Поскольку единственным пространственным масштабом, который существует в критической области, является корреляционная длина, то характерная величина таких барьеров должна быть пропорциональной $R_c^D(\tau)$ (т.е. барьеры становятся бесконечными только в точке фазового перехода). В такой ситуации можно ожидать, что кроме обычного критического замедления (которое соответствует релаксационным процессам в одной долине), в системе должно существовать значительно большее (экспоненциально большее) характерное время релаксации, необходимое для преодоления барьеров, разделяющих долины. Если это предположение правильно, то обычные измерения термодинамических величин, при которых якобы достигается термодинамическое равновесие, могут в действительности соответствовать термализации лишь в отдельной долине, а вовсе не истинному термодинамическому равновесию. Тогда в окрестности точки перехода в различных измерениях (например, корреляционных функций), проводимых на одном и том же образце, аналогично тому, как это происходит в спиновых стеклах, будут получаться различные результаты, как будто в каждом измерении система оказывается эффективно "пойманной" в отдельной долине.

Так или иначе, но обнаруженное физическое явление ясно указывает на существование многочисленных метастабильных состояний, которые по всей видимости образуют некоторый непрерывный спектр, что, в свою очередь, по-видимому, имеет прямое отношение к общей идее о том, что критические явления в системах с беспорядком могут описываться в терминах бесконечной иерархии корреляционных длин и критических индексов. К сожалению, при нынешнем состоянии дел в рассматриваемой области пока довольно трудно с определенностью сказать, каким должен быть систематический подход к решению рассмотренных проблем.

Прошло уже много времени с тех пор, как после Л.Д. Ландау и К.Г. Вильсона теория фазовых переходов второго рода превратилась в солидную и уважаемую науку. В настоящее время принято считать, что в

этой области едва ли можно ожидать новых ярких качественных прорывов, и все, что остается — это печальное в своей предопределенности, все более точное вычисление критических индексов.

В каком-то смысле теория критических явлений в системах со слабым замороженным беспорядком, хотя и не столь убедительно, но тоже претендовала получить аналогичный завершённый статус. Не получилось. Последние теоретические и экспериментальные данные в этой области убедительно показывают, что наблюдаемые явления выходят далеко за рамки обычных представлений флуктуационной теории фазовых переходов. В действительности, это и есть основная причина, по которой был написан данный обзор.

Работа над этой публикацией была частично поддержана грантом INTAS N 1010-CT93-0027, грантом МНФ N M5R000 и грантом РФФИ N 93-02-2081.

Список литературы

1. Parisi G *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, 1988)
2. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов* (М.: Наука, 1982)
3. Вильсон К Когут Дж *Ренормализационная группа и ϵ -разложение* (М.: Мир, 1975)
4. Ларкин А И, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **56** 2087 (1969); Aharony A, *Phys. Rev.* **B13** 2092 (1976)
5. McCoy M B *Phys. Rev. B* **2** 2795 (1970); Балагуров Б Я, Вакс В Г *ЖЭТФ* **65** 1600 (1973)
6. Harris A B *J. Phys. C* **7** 1671 (1974)
7. Domb C *J. Phys. C* **5** 1399 (1972); Watson P G *J. Phys. C* **3** L25 (1970)
8. Harris A B, Lubensky T C *Phys. Rev. Lett.* **33** 1540 (1974); Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **68** 1960 (1975); Grinstein G, Luther A *Phys. Rev. B* **13** 1329 (1976)
9. Доценко Вик. С *УФН* **163** 455 (1993)
10. Penney R W, Coolen T, Sherrington D J. *Phys. A* **26** 3681 (1993); Dotsenko Vik, Franz S, Mezard M *J. Phys. A* **27** 2351 (1994)
11. Mezard M, Parisi G, Virasoro M *Spin-Glass Theory and Beyond* (Singapore: World Scientific 1987)
12. Mezard M, Parisi G *J. Phys. I* **1** 809 (1991)
13. Mezard M, Young A P *Europhys. Lett.* **18** 653 (1992)
14. Korshunov S *Phys. Rev. B* **48** 3969 (1993)
15. Le Doussal P, Giamarchi T *Phys. Rev. Lett.* **74** 606 (1995)
16. Dotsenko Vik S, Harris B, Sherrington D, Stinchcombe R Preprint cond-mat@babbage.sissa.it Ref:9412106 (1994) (submitted to *J. Phys. A: Math. Gen.*)
17. Dotsenko Vik S, Feldman D E Preprint cond-mat@babbage.sissa.it Ref:9502061 (1995) (submitted to *J. Phys. A: Math. Gen.*)
18. Polyakov A M *Gauge Fields and Strings* (Harwood Academic 1987)
19. Dotsenko Vik S *Introduction to the Theory of Spin-Glasses and Neural Networks* (Singapore: World Scientific 1994)
20. Gross D, Kanter I, Sompolinsky H *Phys. Rev. Lett.* **55** 304 (1985)
21. Griffiths R *Phys. Rev. Lett.* **23** 17 (1969); Bray A J *Phys. Rev. Lett.* **59** 586 (1987)
22. Tholence J L *Physica B* **126** 157 (1984); Souletie J, Tholence J L *Phys. Rev. B* **32** 516 (1985); Vincent E, Hammann J, Alba M *Solid State Com.* **58** 57 (1986); Svedlindh P, Lundgren L, Nordbland P, Chen H S *Europhys. Lett.* **3** 243 (1987)
23. Ogielski A T *Phys. Rev. B* **32** 7384 (1985)
24. Ludwig A W W *Nucl. Phys. B* **330** 639 (1990)
25. Onsager L *Phys. Rev.* **65** 177 (1944)
26. Dotsenko Vik S, Dotsenko VI S *Adv. Phys.* **32** 129 (1983); Доценко Вик С, Доценко Вл С *Письма ЖЭТФ* **33** 40 (1981); Dotsenko Vik S, Dotsenko VI S *J. Phys. C* **15** 495 (1982)
27. Schultz T D, Mattis D C, Lieb E H *Rev. Mod. Phys.* **36** 856 (1964)
28. Sherman S *Math. Phys. J* **1** 202 (1960); Вдовиченко Н В *ЖЭТФ* **47** 715 (1964); *ЖЭТФ* **48** 526 (1965)
29. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Наука, 1976)
30. Berezin F A *The Method of Second Quantization* (New York: Academic Press 1966)
31. Hurst C A, Green H S *J. Chem. Phys.* **33** 1059 (1960)
32. Березин Ф А *Усп. мат. наук* **24** 3 (1969); Попов В Н *Функциональные интегралы в квантовой теории поля и статистической теории* (М.: Атомиздат, 1976); Fradkin E, Srednicki M, Susskind L *Phys. Rev. D* **21** 2885 (1980)
33. Шалаев Н Б *ФТТ* **26** 1811 (1983); Shankar R *Phys. Rev. Lett.* **58** 2466 (1984); Ludwig A W W *Phys. Rev. Lett.* **61** 2388 (1988); Shankar R *Phys. Rev. Lett.* **61** 2390 (1988)
34. Dotsenko Vik S, Dotsenko VI S, Picco M, Pujol P Preprint hep-th@babbage.sissa.it Ref:9502134 (1995)
35. Талапов А Л, Андрейченко В Б, Доценко Вл С, Зельке В, Шур Л Н *Письма ЖЭТФ* **51** 161 (1990); Andreichenko V B, Dotsenko VI S, Shchur L N, Talapov A L *Int. J. Mod. Phys. C* **2** 805 (1991); Talapov A L, Andreichenko V B, Dotsenko VI S, Shchur L N *Int. J. Mod. Phys. C* **4** 787 (1993)
36. Andreichenko V B, Dotsenko VI S, Selke W, Wang J-S *Nucl. Phys. B* **344** 531 (1990); Wang J-S, Selke W, Dotsenko VI S, Andreichenko V B *Europhys. Lett.* **11** 301 (1990)
37. Wang J-S, Selke W, Dotsenko VI S, Andreichenko V B *Physica A* **164** 221 (1990)
38. Talapov A L, Shchur L N Preprint hep-th@babbage.sissa.it Ref:9404001 (1994); Talapov A L, Shchur L N Preprint hep-th@babbage.sissa.it Ref:9405003 (1994)
39. Fish R J. *Stat. Phys.* **18** 111 (1978); Derrida B, Southeren B W, Stauffer D J. *de Physique (France)* **48** 335 (1987)
40. Swendsen R H, Wang J-S *Phys. Rev. Lett.* **58** 86 (1987)
41. Ferdinand A E, Fisher M E *Phys. Rev.* **185** 832 (1969)
42. Jayaprakash C, Riedel E J, Wortis M *Phys. Rev. B* **18** 2244 (1978); Jeomans J M, Stinchcombe R B *J. Phys. C* **12** 347 (1979); Cing W Y, Huber D L *Phys. Rev. B* **13** 2962 (1976); Tsallis C, Levy S V F *J. Phys. C* **13** 465 (1980)
43. Stinchcombe R B *Phase transitions and critical phenomena* **7** (Eds C Domb, J L Lebowitz) (Academic Press, 1983)
44. Binder K, Young A P *Rev. Mod. Phys.* **58** 801 (1986)
45. McMillan *Phys. Rev. B* **28** 5216 (1983); McMillan W L *Phys. Rev. B* **29** 4026 (1983); McMillan W L *Phys. Rev. B* **30** 476 (1984)
46. Nishimori H *Prog. Theor. Phys.* **66** 1169 (1981); Nishimori H *Prog. Theor. Phys.* **76** 305 (1986); Ozeki Y, Nishimori H *J. Phys. Soc. Japan* **56** 3265 (1987)
47. Le Doussal P, Harris A B *Phys. Rev. B* **40** 9249 (1989); Ozeki Y, Nishimori H *J. Phys. Soc. Japan* **56** 1568 (1987); Ueno Y, Ozeki Y *J. Phys. Soc. Japan* **64** 227 (1991); Singh R R P *Phys. Rev. Lett.* **67** 899 (1991)
48. Belanger D P *Phase Transitions* **11** 53 (1988)
49. Villain J J. *de Physique* **43** 808 (1982)
50. de Gennes P G *J. Phys. Chem.* **88** 6449 (1984)
51. Fernandez J F *Europhys. Lett.* **5** 129 (1985)
52. Nattermann T, Villain J *Phase Transitions* **11** 5 (1988)
53. Imry Y, Ma S-K *Phys. Rev. Lett.* **35** 1399 (1975)
54. Imbrie J *Phys. Rev. Lett.* **53** 1747 (1984)
55. Young A P *J. Phys. C* **10** L257 (1977); Aharony A, Imry Y, Ma S-K *Phys. Rev. Lett.* **37** 1364 (1976)
56. Parisi G, Sourlas N *Phys. Rev. Lett.* **43** 774 (1979); Parisi G *Quantum Field Theory and Quantum Statistics* (Bristol: Adam Hilger, 1987)
57. Parisi G, Dotsenko Vik S *J. Phys. A* **25** 3143 (1992)
58. Dotsenko Vik S *J. Phys. A* **27** 3397 (1994)
59. Villain V *Phys. Rev. Lett.* **52** 1543 (1984); Grinstein G, Fernandez J *Phys. Rev.* **29** 6389 (1984); Nowak U, Usadel K D *Phys. Rev. B* **43** 851 (1991)
60. Parisi G *Proceedings of Les Houches 1982, Session XXXIX* (Eds J B Zuber, R Stora) (Amsterdam: 1984); Villain J J. *Physique* **46** 1843 (1985)
61. Guagnelli M, Marinari E, Parisi G *J. Phys. A* **26** 5675 (1993)
62. Yoshizawa H, Belanger D *Phys. Rev. B* **30** 5220 (1984); Ro C, Grest G, Soukoulis C, Levin K *Phys. Rev. B* **31** 1682 (1985)
63. de Almeida J R L, Bruijsma R *Phys. Rev. B* **35** 7267 (1987)
64. Shapir Y *J. Phys. C* **17** L809 (1984)
65. de Dominicis C, Orland H Temesvari T Preprint Saclay 94/134 (1994)

CRITICAL PHENOMENA AND QUENCHED DISORDER**Vik. S. Dotsenko***L.D. Landau Institute of Theoretical Physics, RAS,**Vorob'evskoe shosse 2, Moscow 117940, Russia**Fax (7-095) 938-2077,**E-mail: dotsen@itp.ac.ru**Laboratoire de Physique Theorique, Ecole Normale Supérieure**24, rue Lhomond, 75231 Paris, Cedex 05, France**Tel. (33-1) 47 07 71 46, Fax (33-1) 43 36 76 66*

Theoretical ideas for deriving singularities of thermodynamical functions at the second-order phase transitions in spin systems with weak quenched disorder are considered. In particular, p -component vector magnets and the two-dimensional Ising model with disorder in spin-spin interactions are studied. Generalization of the traditional renormalization-group scheme which takes into account non-perturbative spin-glass degrees of freedom is proposed. Low-temperature properties and the phase transition in the Ising systems with quenched random fields are also considered.

PACS numbers: 05.70.Fh, **05.50.+q**, 05.70.jk

Bibliography — 65 references

*Received in English 20 September 1994; translation into Russian
received 26 January 1995, revised translation 16 March 1995*