

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Фракталы в волновых процессах

В.В. Зосимов, Л.М. Лямшев

*Обзор основных результатов по проявлениям фрактальных структур в волновых процессах. Рассмотрены упругие свойства фрактальных материалов, а также дисперсия, плотность распределения и вид волновых функций фракталов — локализованных упругих колебаний фрактальных материалов. Приводятся примеры их применения для объяснения свойств аморфных твердых тел. Рассматриваются результаты экспериментальных исследований фракталов и упругих свойств фрактальных материалов. Анализируются особенности рассеяния и излучения волн фрактальными структурами. Описаны основные методы анализа случайных сигналов, выявляющие различные присущие сигналам фрактальные структуры. Приведен ряд результатов по фрактальным свойствам волновых полей.*

PACS numbers: 47.35. + i, 47.52. + j, 47.53. + n, 61.43.Nv

## Содержание

1. Введение (361).
2. Фрактальные структуры в физике (364).
  - 2.1. Структуры вещества. 2.2. Структуры процессов. 2.3. Модели фрактальных структур в физике.
3. Волны во фрактальных структурах. Фрактоны (372).
  - 3.1. Колебания и диффузия на фракталах. 3.2. Фрактоны на регулярных фракталах. Локализация. 3.3. Упругие свойства фрактальных материалов. 3.4. Собственные колебания фрактальных материалов. 3.5. Экспериментальные исследования фракталов. 3.6. Численные исследования фракталов. 3.7. Нелинейные взаимодействия фононов с фрактонами и теплопроводность аморфных тел. 3.8. Флуктуации упругих свойств в однородном фрактале.
4. Излучение и рассеяние волн фрактальными структурами (387).
  - 4.1. Рассеяние волн фрактальными поверхностями. 4.2. Однократное рассеяние на фракталах и преобразование Фурье фракталов. 4.3. Многократное рассеяние на фракталах. 4.4. Излучение волн фрактальными объектами.
5. Фрактальные структуры в волновых полях (391).
  - 5.1. Мультифракталы и анализ сигналов. 5.2. Фрактальные структуры лучей. 5.3. Супердиффузия волн. 5.4. Динамический хаос в нелинейных волновых полях. 5.5. Фрактальные структуры в ветровых волнах на морской поверхности. 5.6. Фрактальный анализ сигналов в сейсмике.
6. Заключение (399).

## Список литературы (400).

В.В. Зосимов. НИИ Прикладной акустики  
141980 Дубна-1, п/я 36, Московская обл., Россия  
Тел. (09621) 4-55-77, E-mail: root@niipa.cntc.dubna.su  
Л.М. Лямшев. Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН  
117036 Москва, ул. Шверника 4, Россия  
Тел. (095) 126-90-14, E-mail: lyamshev@wpd.jpi.msk.su

Статья поступила 4 марта 1994 г.

## 1. Введение

Прогресс в физике и ее приложениях во многом определяется решением проблем, относящихся к установлению связи между микроскопической структурой и макроскопическим поведением сложных систем. К числу таких проблем прежде всего принадлежат задачи статистической теории вещества, физики неупорядоченных сред, теории турбулентности и диффузии.

Несмотря на значительные усилия многие из этих задач лишь отчасти решаются методами традиционной статистической физики. Полный успех при таком подходе достигается только в предположении абсолютного хаоса при описании сред и процессов (идеальный газ и классическая теория броуновского движения) либо полной их упорядоченности (теория кристаллических твердых тел). За пределами возможностей последовательной статистической теории во многом оказалось микроскопическое описание неупорядоченных сред и процессов, в которых отсутствует как кристаллическая упорядоченность, так и полный хаос.

Причины этого достаточно глубоки. Одна из них в том, что успех статистического описания основан на существовании сокращенного набора макроскопических переменных, для которых выполняется условие макроскопической причинности [1]. Это означает, что переменные сокращенного набора связаны между собой динамическими соотношениями и для определения их изменений в различных процессах не нужно всякий раз проводить усреднение по микроскопической динамике.

Вопрос об условиях, при которых выполняется макроскопическая причинность, не имеет полного ответа. Ясно, однако, что масштабы изменения, удовлетворяющих этому условию макроскопических переменных, должны значительно превышать масштабы коррелирующих микроскопических переменных. Именно это условие не выполняется в неупорядоченных средах и процессах с коррелированной в широком диапазоне

масштабов микроскопической структурой. Наиболее выразительный пример такой ситуации — вещество вблизи точки фазового перехода второго рода. В аморфных твердых телах имеется средний порядок в расположении молекул, охватывающий макроскопические участки в тысячи молекул [2]. К процессам такого рода относится гидродинамическая турбулентность, в которой корреляция флуктуаций скорости охватывает весь диапазон масштабов течения.

Тем не менее природа устроена так, что микроскопическая структура многих неупорядоченных объектов обладает свойством масштабной инвариантности (скейлинга). Проблема описания неупорядоченных сред решается тогда введением макроскопических величин, зависящих от масштаба усреднения. Масштабная инвариантность позволяет строить теорию таких сред с помощью методов ренормгруппы [3]. Этот подход, по-видимому, универсален, но связан с большими вычислительными сложностями. Развитые Мандельбротом в книгах [4–6] математическое понятие фрактала<sup>1</sup> и его приложения к описанию форм различных объектов дают возможность построить модели широкого класса нетривиальных случайных масштабно-инвариантных структур. В применении этих моделей заключается новый подход к описанию неупорядоченных структур в физике.

Фрактальные модели не всегда поддаются аналитическому исследованию, но могут быть построены по простым правилам с возможностью несложной компьютерной реализации. Закономерности сложных неупорядоченных процессов изучают в компьютерном эксперименте с такими моделями. Отметим, что такой подход значительно отличается от традиционных методов теоретической физики. Очевидно, что это отличие не сводится к разнице между численным решением дифференциальных уравнений и их аналитическим исследованием.

По этим причинам, в частности, в последние 10–15 лет растут популярность и успех применения фрактальных моделей в физике. Фрактальные модели не только широко применяются к описанию вполне исследованных ранее процессов и структур (случайные блуждания, линейные полимерные молекулы) и, в этом смысле, не являются необходимыми, но и позволяют продвинуться в исследовании объектов, ранее не поддававшихся пониманию и количественному описанию.

В математике фрактал представляет собой множество точек в метрическом пространстве, для которого невозможно определить какую-либо из традиционных мер с целой размерностью — длину, площадь или объем (их размерности — соответственно первая степень, квадрат и куб длины). Измерение, например, длины фрактальной кривой может дать бесконечный результат, а заметраемой ею площади — нулевой. Задача измерения таких множеств решается введением мер Хаусдорфа с любой (в том числе нецелой) размерностью. Наибольшая размерность меры Хаусдорфа, дающая при измерении множества ненулевой результат, называется размерностью Хаусдорфа–Безиковича (РХБ)<sup>2</sup> этого множества.

Первоначально Мандельброт определил фрактал как масштабно-инвариантный, т.е. самоподобный, объект, РХБ которого превышает топологическую размерность (1 — для линии, 2 — для поверхности и т.д.). Позднее были рассмотрены самоаффинные фракталы, для которых можно определить различные, отличающиеся по величине размерности [7]. Фракталы в физике описываются не только посредством РХБ; имеется ряд других размерностей, легко поддающихся экспериментальному определению и дающих разностороннее описание свойств объекта [7–9].

Успех в применении фрактальных моделей в физике обусловлен прежде всего тем, что фрактальные формы присущи огромному числу процессов и структур. Это не случайный факт. Дело в том, что многие модели образования и роста неупорядоченных объектов различной природы сводятся в конечном счете к моделям перколяционного перехода [10] и ограниченной диффузией агрегации (ОДА) [11]. В первом случае образуется фрактальный перколяционный кластер, во втором — фрактальный агрегат. Модели же многих неупорядоченных процессов опираются на различные варианты случайного блуждания [9] или динамического хаоса [12, 13], также обладающих фрактальными свойствами. По сути, Мандельброт открыл математическое выражение для чрезвычайно общей закономерности, касающейся геометрических свойств физического мира.

К настоящему времени существует обширная обзорная литература по фракталам и их применениям. Ряд обзоров и книг вышли и на русском языке. Для первоначального изучения предмета можно рекомендовать обзор [8], один из первых в отечественной литературе, и весьма содержательную книгу [9]. Очень полезна книга [14], написанная акустиком, известным специалистом по акустике речи и применению компьютеров в акустике. Общие свойства фракталов и методы их компьютерного моделирования подробно рассматриваются в книге [15]. Подробное введение в теорию фракталов и примеры ее конкретных применений в физике содержат обзоры и книги [10, 11, 16–23]. Краткое описание различных моделей фрактальных структур в физике дано во втором разделе настоящего обзора.

Цель предлагаемого обзора — последовательное описание результатов, относящихся к исследованию волновых процессов во фрактальных структурах, с одной стороны, и фрактальных структур, присущих волновым полям различной природы, с другой.

Волновые процессы во фрактальных структурах можно условно разделить на два типа. Это, во-первых, распространение волн во фрактальных структурах, когда фрактал является средой распространения. И, во-вторых, рассеяние и излучение волн фрактальными структурами, когда волны распространяются в однородной среде с погруженными в нее фрактальными неоднородностями.

Фрактальные свойства самих волновых полей и сигналов могут появляться в различных ситуациях, которые также можно разделить на два класса. В однородных или регулярно неоднородных средах фрактальные свойства волновых полей появляются вследствие нелинейных взаимодействий волн или нелинейной динамики лучей. В статистических волновых задачах фрактальность обусловлена диффузионными или кинетическими процессами.

<sup>1</sup> Слово "фрактал" (fractal) — придуманное Мандельбротом соединение двух слов: fraction — дробь и fracture — излом. Фрактал — изломанный объект с дробной размерностью.

<sup>2</sup> А. Безикович доказал существование такой размерности. Точное определение РХБ приведено во втором разделе обзора.

Исследования волновых явлений во фрактальных материалах берут начало с работы [24] и основаны на введенном Александером и Орбахом в 1982 г. [25] понятии фрактон — локализованных колебательных состояний на фракталах, сменяющих обычные фоновые состояния при частотах, превышающих некоторую частоту перехода (кроссовера). Плотность распределения фрактон по частотам имеет в силу масштабной инвариантности степенной вид. Показатель степени определяется так называемой фрактонной (спектральной) размерностью, которая в случае фрактон выполняет роль размерности пространства в низкочастотной асимптотике плотности состояний. Развитие идей работы [24] привело к построению замкнутой микроскопической теории температурных зависимостей теплопроводности, скорости и поглощения звука в аморфных твердых телах [26–28].

Предложенные в [26] принципы теории тепловых свойств аморфных тел оказались применимыми не только к фрактальным материалам, но и к любым материалам с локализованными в некотором диапазоне масштабов колебательными состояниями [29]. Тем не менее именно изучение колебаний фрактальных структур привело к пониманию механизмов, определяющих тепловые свойства таких сред.

Теория фрактон, экспериментальные и численные исследования фрактон в реальных и модельных фрактальных структурах рассматриваются в третьем разделе обзора. Изложение ориентировано на описание упругих колебаний в реальных материалах, поэтому значительное место отводится теории упругих свойств фрактальных материалов. Фрактонные свойства, первоначально исследованные для материалов, имеющих фрактальную структуру в малых, не превышающих нескольких микрометров масштабах, могут проявиться в естественных и искусственных фрактальных структурах на существенно больших масштабах, и поэтому содержание этой части обзора не следует рассматривать только как описание фрактальных моделей колебательных свойств аморфных тел. В этой области имеются и другие (нефрактальные) подходы [2, 30–32], анализ которых остался за рамками обзора.

Для фрактальных материалов теория фрактон исчерпывающе решает проблему определения спектра механических колебаний и условий локализации волн. Структура спектра колебаний фракталов определяется масштабами, ограничивающими диапазон проявления фрактальных свойств материала, и значением спектральной размерности. На больших масштабах колебания имеют обычный фоновый спектр. В пределах масштабов фрактальной структуры колебания представляют собой локализованные состояния — фрактоны — со степенной плотностью распределения по частотам, определяемой спектральной размерностью. На меньших масштабах спектр колебаний определяется свойствами составляющих структуру частиц. При конкретных применениях теории фрактон проблема заключается в определении значения спектральной размерности. Первоначальная гипотеза Александера и Орбаха об универсальности значения  $4/3$  для спектральной размерности не подтвердилась дальнейшими исследованиями. Оказалось, что значение спектральной размерности зависит от деталей структуры и природы действующих между ее элементами сил. В обзоре рассматриваются основные

модели упругих свойств фракталов, которые имеют разные области применения и дают разные значения спектральной размерности.

Что касается детального изучения формы волновой функции фрактон, то здесь пока нет большого разнообразия подходов. Как правило, применяют модель суперлокализованной волновой функции. Рассмотрение же результатов численного определения форм волновых функций фрактон показывает, что их структура значительно сложнее, и исследования в этой области должны, по-видимому, развиваться.

В четвертом разделе обзора рассматриваются излучение и рассеяние волн фракталами. В одной из первых работ на эту тему [33] рассматривалось рассеяние волн случайной фрактальной поверхностью. Такая поверхность не дифференцируема и, в отличие от рассеяния гладкой поверхностью, угловое распределение интенсивности рассеянного поля не определяется распределением наклонов поверхности, а имеет степенной вид с показателем степени, определяемым фрактальной размерностью поверхности. Такой же вид угловой зависимости рассеяния имеет место при малоугловом рассеянии света, рентгеновских лучей или нейтронов реальными материалами с фрактальной структурой. Измерение угловой зависимости рассеяния — практически единственный метод определения фрактальной размерности реальных материалов. Связь показателя угловой зависимости с фрактальной размерностью неоднозначна и зависит от принятой модели структуры. Речь может идти о пористых материалах с развитой внутренней фрактальной поверхностью [34] или о материалах, имеющих структуру фрактального агрегата [35].

В указанных выше случаях реализуется режим однократного рассеяния. В случае многократного рассеяния фрактальная структура рассеивателя проявляется более ярко. Дело в том, что коррелированность фрактальных структур в широком диапазоне масштабов приводит при многократном рассеянии к возникновению спектра аналогичных фрактонам коллективных возбуждений рассеивателей [36, 37]. Это существенно меняет картину рассеяния на фракталах по сравнению со случаем независимо распределенных в пространстве рассеивателей. В случае резонансных рассеивателей существенно меняется форма резонансной кривой поглощения — поглощение медленнее спадает при отстройке от резонанса. Коэффициент поглощения и сечение рассеяния волн фрактальной структурой в расчете на одну частицу растут. А при достаточно малой фрактальной размерности рост сечения рассеяния настолько велик, что можно говорить о переходе видимость–невидимость [37]. Математически задача о коллективных состояниях возбуждения рассеивателей и задача о фрактонах близки. В случае рассеивателей структуру спектра возбуждений также определяет некий показатель, называемый в [36] оптической спектральной размерностью.

При излучении волн фрактальными структурами особенности возникают уже в простейшем случае независимых излучателей с фрактальным расположением в пространстве. Суть дела — в необычной зависимости интенсивности излучения фрактальной структуры от расстояния. Это обстоятельство привлекалось, в частности, для объяснения известного парадокса Ольберса о светимости ночного неба [38]. Более тонкие проявления фрактальности излучателя связаны с уже упомянутыми

эффектами коллективных возбуждений и ведут к увеличению эффективности теплового излучения фрактальных структур в расчете на одну частицу [39]. Другая сторона дела — это флуктуации излучения фрактальных структур. Здесь также проявляются корреляции в широком диапазоне масштабов, что приводит к существенному изменению свойств шума, выражающемуся в изменении его интенсивности и корреляционных свойств. В сейсмологии, где фрактальные модели структур пород и разрушения имеют широкое применение, свойства флуктуаций уровня сейсмоакустической эмиссии, по-видимому, можно использовать для предсказания землетрясений [40].

В пятом разделе обзора речь идет о фрактальных структурах в волновых полях. Структура волнового поля имеет выделенный масштаб — длину волны. Фрактальная структура, предполагающая масштабную инвариантность, может проявиться здесь либо на масштабах, превышающих длину волны, либо при наличии самоподобного спектра волн, например стационарных спектров волновой турбулентности. Каких-либо общих представлений (типа теории фрактонов) в этой области нет. Но отдельные проблемы здесь связаны с глубокой теорией.

Это прежде всего фрактальные структуры, связанные с нелинейной динамикой. Сюда относятся пространственный динамический хаос при нелинейном взаимодействии волн [17] и фрактальная динамика лучей в неоднородных средах [41]. Этим темам посвящены недавно опубликованные обзоры [17, 41] и поэтому мы останавливаемся на них весьма кратко. Обсуждаются лишь некоторые работы по условиям проявления эффектов фрактальной динамики лучей в реальном океане и некоторые примеры систем взаимодействующих волн с конечномерной хаотической динамикой.

Другой класс задач, связанных с проявлением фрактальных свойств, — это статистические задачи распространения волн. В этой области фрактальные представления не использовались при получении оригинальных результатов. Однако они могут вводиться и давать новый взгляд на явления в силу масштабной инвариантности свойств процессов, например переноса возбуждения в резонансной среде [42, 43] или траектории волновых пучков в неоднородной среде [44]. В этих случаях имеет место аномальная диффузия, траектории которой обладают нетривиальными фрактальными свойствами.

В пятом разделе подробно обсуждаются фрактальные формы морских волн. Морская поверхность (наряду с гористой местностью, деревьями и береговой линией) может служить одним из примеров фрактальных форм, доступных обыденному наблюдению. Ее фрактальные свойства существенно связаны с нелинейной динамикой волн на воде. В спектре ветрового волнения имеется самоподобный интервал, характеризующийся потоком действия от коротких волн к длинным. Фрактальная форма морской поверхности в конечном счете связана с наличием этого самоподобного интервала [45]. Имеются и менее очевидные проявления фрактальных структур в ветровых волнах. Это фрактальные свойства на масштабах, существенно превышающих длины волн [46, 47]. Теоретического объяснения таких структур еще нет.

Существенное место в пятом разделе мы отводим мультифрактальному анализу. Эта тема, конечно, уже доступна по многим обзорам и книгам [9, 17, 22, 48, 49].

Наша цель — обратить внимание на полезность этого подхода и при анализе волновых процессов. Примерами такого применения мультифрактального анализа могут служить недавняя работа по крупномасштабной структуре турбулентных пульсаций давления [50] и работа [51] по структуре волновых функций фрактонов на перколяционном кластере.

Разнообразные фрактальные подходы к анализу сигналов развиваются сейчас в сейсмике. Масштабная инвариантность присуща многим сейсмическим явлениям, что связано с масштабной инвариантностью свойствами процессов разрушения вообще. Эта тема в целом требует отдельного обзора. В нашем обзоре мы рассмотрим фрактальные свойства сигналов сейсмоакустической эмиссии и возможность их использования для предсказания землетрясений [52].

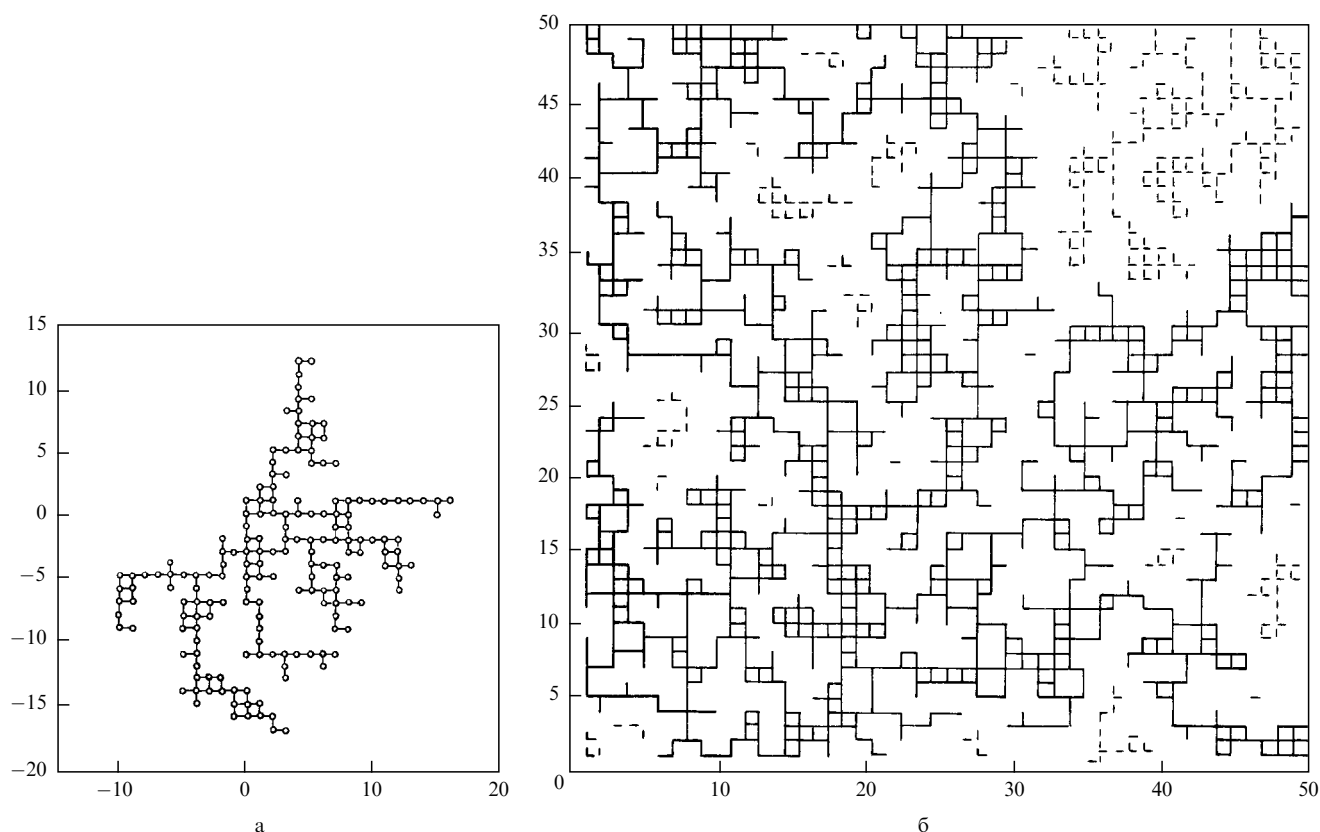
Некоторые темы нашей работы нашли уже отражение в обзорной литературе. Упругие свойства и колебания фрактальных кластеров, а также рассеяние на фракталах рассматриваются в ряде статей сборника трудов [21], специального выпуска журнала *Physica D* [53] и в обзоре [10]. Излучение света фрактальными структурами рассматривается в [38]. Фрактальные структуры в лучевой динамике подробно исследуются в уже упомянутом обзоре [41]. Пространственный хаос в нелинейной динамике волн анализируется в рамках общего подхода в [17]. Довольно емкий и последовательный обзор работ по излучению акустических волн фрактальными структурами и фрактальной обработке акустических сигналов в сейсмике содержится в [52]. Ряд вопросов применения фракталов в акустике рассматривается в [23, 54].

## 2. Фрактальные структуры в физике

Фрактальные формы, доступные для обыденного наблюдения, удивительно широко распространены в природе. Примеры из классики фракталов (береговая линия, гористый рельеф, дерево) [3–6] — традиционная тема популярной литературы. Менее известные примеры — поверхность излома металла [55] и поверхность волнующейся воды [45]. Наиболее же содержательные с точки зрения физики примеры фрактальных форм выявляются только с использованием специальных средств наблюдений и анализа данных. Сюда относятся фрактальные структуры вещества, фрактальные структуры случайных процессов и полей. В последнем случае фрактальный анализ применяется не к формам физических тел, а к геометрическим объектам, возникающим в процессе исследований, — графикам процессов и распределению величин в пространстве, множествам особых точек, траекториям движения.

### 2.1. Структуры вещества

Не будет большим преувеличением сказать, что если вещество не находится в газообразном или кристаллическом состоянии, то оно имеет в некотором диапазоне масштабов фрактальную структуру. Первое наблюдение фрактальной структуры вещества относится к агрегатам, образующимся в воздухе из микроскопических частиц твердой фазы [56]. Частицы в этой работе получались при испарении железа, цинка или двуокиси кремния с поверхности нити накала и последующей конденсации паров при охлаждении в окружающем газе. Средний размер частиц при этом составлял 35 Å. Диффундируя в воздухе,



**Рис. 1.** (а) Пример фрактального кластера, полученного при компьютерном моделировании процесса ограниченной диффузией агрегации (ОДА) на плоскости. В кластере 200 частиц. (б) Соединяющий кластер в перколяции на квадратной решетке размера  $50 \times 50$ . Задача узлов, концентрация  $p = 0,6$ , критическая концентрация для задачи узлов  $p = 0,5927$ . Штриховыми линиями обозначены кластеры, не вошедшие в соединяющий. Видно, что их размеры меняются от размеров одной связи до размеров порядка размера всей решетки. Точнее, наибольший размер конечного кластера — это наибольший размер пустот в соединяющем кластере, который в свою очередь равен масштабу  $\xi$  (см. (15)). В соответствии с (15) масштаб  $\xi$  увеличивается до бесконечности вблизи порога протекания, а на решетке конечных размеров  $L$  достигает размеров решетки

частицы слипались в агрегаты, которые затем оседали на специальную подложку. Фрактальные свойства этих агрегатов были определены прямым анализом электронных фотографий. Позднее была установлена фрактальная структура коллоидных агрегатов, образующихся при слипании частиц в коллоидных растворах [35], а также фрактальные свойства полимеров [57].

Наглядно фрактальная структура вещества проявляется в необычных свойствах распределения массы в пространстве. Масса  $M$  фрактального агрегата размера  $R$  зависит от размера как

$$M = m_0 \left( \frac{R}{a_0} \right)^D, \quad (1)$$

где  $D$  — массовая фрактальная размерность, меньшая размерности пространства  $d$ ,  $m_0$  и  $a_0$  — масса и размер составляющих агрегат частиц. Плотность вещества  $\rho$  также зависит от размера:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R}{a_0} \right)^{D-d}, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  — плотность составляющих агрегат частиц. При плотной упаковке частиц массовая размерность равна размерности пространства  $D = d$ , и плотность постоянна. Фрактальные агрегаты имеют нерегулярную

структуру (рис. 1), но с дальними корреляциями в расположении частиц. Чисто случайное размещение частиц при  $R \gg a_0$  и плотности (2) не дало бы связанного агрегата.

Согласно общепринятому определению фракталов к ним относятся множества точек, размерность Хаусдорфа–Безиковича (РХБ) которых не совпадает с их топологической размерностью. Точное определение РХБ следующее. Покроем множество счетной совокупностью множеств  $A_i$ , таких, что их диаметр  $\text{diam } A_i$  — наибольшее расстояние между двумя точками — не превышает некоторого числа  $\varepsilon$ . Определим число  $m_\varepsilon^p$  как точную нижнюю грань сумм  $\sum_i (\text{diam } A_i)^p$  по всевозможным покрытиям. Пусть  $m_p$  — точная верхняя грань  $m_\varepsilon^p$  для всех  $\varepsilon > 0$ . Тогда, по определению, РХБ — это точная верхняя грань таких  $p$ , для которых  $m_p > 0$ . Это определение применимо для множеств в любых метрических пространствах, так как требует только задания расстояния между точками. Практически используемые в физике определения фрактальных размерностей относятся к объектам в евклидовом пространстве  $R^d$ . Фрактальная размерность структуры может измеряться разными способами. Кроме уже упомянутой массовой размерности, можно указать определение клеточной размерности — это показатель степени в зависимости числа покрывающих фрактал клеток (кубов) от их размера. Пусть фрактал покрыт клетками размера  $\varepsilon$ . Составим

сумму по такому покрытию, аналогичную сумме в определении РХБ. Получаем

$$\sum \varepsilon^p \sim \varepsilon^{-D} \varepsilon^p,$$

где  $D$  — клеточная размерность. Если  $p > D$ , то сумма стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При  $p = D$  получаем конечное значение суммы. При  $p < D$  сумма бесконечна;  $p = D$  — наибольшее значение  $p$ , при котором сумма больше нуля. Приведенное рассуждение устанавливает связь между РХБ и клеточной размерностью и служит основой оценок РХБ в физических измерениях.

Следует отметить, что собственно определение хаусдорфовой размерности, требующее предельного перехода к бесконечно малым объемам, невозможно использовать в физических измерениях. Предельный переход здесь заменяется измерением наклона прямых, определяющих указанные показатели — массовую и клеточную размерности. Поэтому содержательное для физики определение фрактала включает свойство самоподобия. В математике хаусдорфова размерность может быть определена и для не самоподобных множеств. Для реальных объектов самоподобие имеет, естественно, статистический смысл — при преобразовании подобия сохраняются статистические характеристики структуры фрактала.

В регулярных фракталах (широко известные примеры — ковер Серпинского, кривая Кох) фрагмент некоторого размера составлен из некоторого числа подобных ему фрагментов меньшего размера. Размерность самоподобия — показатель степени в зависимости числа подобных структурных элементов, составляющих больший элемент, от отношения их размеров. С одной стороны, для случайных фракталов очевидным аналогом размерности самоподобия является массовая размерность. С другой стороны, число покрывающих фрактал клеток некоторого размера равно числу структурных элементов того же размера. Поэтому и клеточная размерность равна размерности самоподобия. В итоге приходим к выводу, что для самоподобных фракталов все введенные размерности одинаковы. Для самоаффинных фракталов (преобразующихся в себя при аффинном преобразовании, т.е. при растяжении с разными коэффициентами по осям) разные размерности могут различаться [7].

Одно из ярких проявлений фрактальной структуры вещества — это существование твердого состояния с чрезвычайно низкой плотностью. В некоторых условиях фрактальные агрегаты могут связываться между собой, образуя гели и аэрогели [11]. В этих случаях реализуется типичная ситуация — фрактальные свойства структуры проявляются в диапазоне масштабов, ограниченных снизу размером частиц  $a_0$ , образующих агрегат, а сверху — размером исходных фрактальных кластеров  $\xi$ . Такие структуры называют однородными фракталами. Типичные размеры частиц —  $a_0 = 1\text{--}10$  нм, размеры агрегатов —  $10\text{--}1000$  нм. Фрактальная размерность зависит от режима образования агрегатов и, как правило, лежит в диапазоне  $D = 2\text{--}2,9$ . Плотность такого материала определяется, очевидно, следующим выражением:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{\xi}{a_0} \right)^{D-d}. \quad (3)$$

Видно, что при достаточно большой величине  $\xi$  и  $D < d$  плотность материала может быть значительно меньше плотности составляющих его частиц. Такие материалы образуются также при спекании металлических порошков.

Другой класс материалов со структурой однородного фрактала — аморфные полимеры. Здесь фрактальные свойства проявляются на масштабах, превышающих размеры молекул мономеров, и ограничены сверху масштабом порядка нескольких десятков ангстрем. Форму фрактальной кривой имеет уже отдельная линейная полимерная молекула, подверженная случайным смещениям звеньев. Разветвленные же полимерные молекулы образуют фрактальные сетки типа тех, что составляют фрактальные агрегаты в гелях из макроскопических частиц.

Практически, для реальных фрактальных материалов доступна измерению корреляционная функция плотности  $C(\mathbf{R}) \sim \langle \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \rho(\mathbf{r}) \rangle$  — усредненная по всем частицам и по направлениям вероятность найти другую частицу на расстоянии  $R$  от данной. Ясно, что для фрактальных материалов

$$C(\mathbf{R}) \sim R^{D-d}. \quad (4)$$

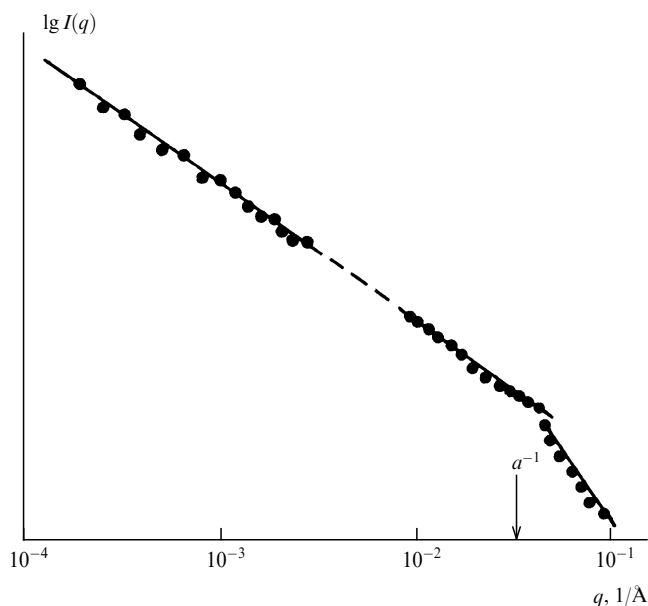
Основной метод измерения корреляционной функции плотности заключается в измерении угловой зависимости рассеяния волн с подходящей длиной волны. Почти все известные фрактальные структуры проявляются на масштабах, не превышающих одного микрометра. Поэтому для измерений подходят достаточно короткие волны за пределами видимого диапазона. Как правило, применяют рентгеновское излучение либо рассеяние нейтронов. Выражение для корреляции плотности сразу приводит к следующему выражению для угловой зависимости интенсивности рассеяния:

$$I(q) \sim q^{-D}, \quad (5)$$

где волновой вектор рассеяния равен по модулю  $q = 2k \sin(\theta/2)$ . На рис. 2 показаны результаты измерений угловой зависимости рассеяния света и рентгеновских лучей для фрактальной структуры, образовавшейся из частиц  $\text{SiO}_2$  в коллоидном растворе [35]. По этим данным значение фрактальной размерности системы  $D = 2,12$ .

Интерпретация данных о рассеянии, тем не менее, неоднозначна и зависит от дополнительных предположений о структуре вещества. Нужно различать вещества со структурой массового фрактала типа описанных агрегатов и пористые вещества с фрактальными внутренними поверхностями. Связь показателя степени угловой зависимости рассеяния и фрактальных размерностей в этих случаях разная [58] (подробнее об этом см. в разделе 4). Степенной вид угловой зависимости имеет место также и в случае степенного распределения пор или частиц по размерам.

Зависимость плотности вещества от объема делает невозможным применение модели сплошной среды, в которой плотность определяется однозначно для физически бесконечно малых объемов. Это же относится ко многим другим величинам, принятым для описания сред в моделях сплошной среды, — упругим модулям, электропроводности и т.п. Поэтому фрактальные



**Рис. 2.** Угловая зависимость (зависимость от волнового числа рассеяния  $q$ ) интенсивности рассеяния света (для волновых чисел в диапазоне  $0,0001\text{--}0,001\text{ 1/Å}$ ) и рентгеновских лучей (для волновых чисел  $0,01\text{--}0,1\text{ 1/Å}$ ) на коллоидных агрегатах  $\text{SiO}_2$  [35]. Весь диапазон волновых чисел перекрывается при рассеянии на двух образцах, полученных в растворах с различным составом растворителя. Кроссовер от рассеяния на фрактальной структуре с размерностью  $D = 2,12$  к рассеянию на частицах с гладкими поверхностями ( $I \sim q^{-4}$ ) происходит при волновом числе рассеяния  $1/a$ , где  $a = 27\text{ Å}$  — размер частиц

модели структур вещества подтверждаются не только данными рассеяния, но и совокупностью данных о масштабной зависимости таких величин. Свойства фрактальных агрегатов хорошо объясняются довольно простой моделью агрегации — ограниченной диффузией агрегацией (ОДА), предложенной в 1981 г. [59]. Образование гелей и полимеров описывается моделью перколяционного перехода (см. разделы 2.3.2, 2.3.3). Именно применение простых моделей образования и роста структур, дающих структуры с подходящими фрактальными размерностями, позволило получить количественное описание различных свойств реальных фрактальных материалов.

Фрактальные агрегаты из микроскопических частиц имеют, вероятно, прямое отношение к свойствам одного из самых загадочных объектов макроскопического мира — шаровой молнии [60–62]. Наиболее адекватная на сегодня модель шаровой молнии — это, по-видимому, модель фрактального клубка, представляющего собой агрегат из фрактальных нитей [62]. Фрактальные нити образуются из нанометровых частиц вещества в сильном электрическом поле, дающем выделенное направление в пространстве, и поэтому отличаются от агрегатов, образующихся в изотропных условиях. В отсутствие поля — это сильно неравновесная система, обладающая в силу фрактальных свойств большим удельным запасом поверхностной энергии, которая может выделяться в процессе теплового взрыва [62, 63].

Фрактальные свойства модельных структур непосредственно связаны со способом их построения. В этом смысле удивительны результаты работы [64], где методом быстрого замораживания экспериментально исследо-

дуется геометрическая структура эмульсионной смеси двух жидкостей, полученной просто путем их интенсивного перемешивания. Установлено, что в определенном диапазоне масштабов распределение капелек дисперсной фазы фрактально. Масштаб фрактального поведения зависит от объемной доли дисперсной фазы. Эта зависимость хорошо объясняется, если предположить, что капельки дисперсной фазы образуют перколяционный кластер. Интересно, что эта структура, по-видимому, сохраняется при случайном движении капелек.

Известное в статистической физике свойство масштабной инвариантности флуктуаций параметра порядка при фазовых переходах второго рода также может быть сформулировано в терминах фрактальной структуры. Тем не менее последовательный статистический подход к проблеме не нуждается в привлечении фрактальных представлений. По-видимому, связь фрактальности и структуры флуктуаций выяснена совсем недавно [65].

## 2.2. Структуры процессов

Фрактальные подходы к анализу процессов весьма разнообразны в том смысле, что фрактальному анализу могут подвергаться различные, связанные с процессом геометрические объекты. Как фрактал в ряде случаев можно рассматривать график связанной с процессом величины. Фрактальным может быть, например, множество точек пересечения величиной определенного уровня. Квадрат амплитуды процесса можно рассматривать как плотность точек на временной оси, имеющую фрактальную структуру. Вообще говоря, плотности различных, описывающих процесс величин могут иметь фрактальное распределение во времени и пространстве.

Один из наиболее содержательных на сегодня подходов к фрактальному анализу процессов опирается на предположение о том, что процесс порождается динамической системой конечной размерности с хаотическим поведением. Траектория такой системы в фазовом пространстве представляет собой фрактальное множество, называемое странным аттрактором. Анализ процесса, порожденного такой системой, основан на применении алгоритма Такенса [66], позволяющего восстановить траекторию системы в фазовом пространстве по временной зависимости одной связанной с системой величины. Анализ процессов, порожденных конечномерной хаотической динамикой, его теоретические и практические стороны подробно описаны в обширной учебной и обзорной литературе (см., например, [16, 20]); мы остановимся на этом коротко.

По алгоритму Такенса точку в фазовом пространстве определяет последовательность отсчетов процесса в  $n$  моментов времени, разделенных фиксированным интервалом. Траектория в фазовом пространстве образуется при движении точки начального отсчета вдоль оси времени. Алгоритм восстановления нетрудно понять, вспомнив, что, например, для процесса, порожденного системой, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, координаты в фазовом пространстве задаются набором из амплитуд процесса и их производных до  $(n - 1)$ -го порядка. В случае дискретных временных отсчетов набор из амплитуд и  $(n - 1)$ -х производных связан с набором  $n$  последовательных отсчетов амплитуды простым невырожденным линейным преобразованием.

Определение фрактальной размерности восстановленной по алгоритму Такенса траектории в фазовом пространстве позволяет судить о характеристиках источника процесса. Во-первых, можно оценить размерность динамической системы. Если число  $n$  последовательных отсчетов меньше некоторой величины, то измеренная фрактальная размерность равна  $n$ . При больших  $n$  размерность перестает меняться с ростом  $n$ . Это заведомо произойдет при  $n$ , превышающем  $2d + 1$ , где  $d$  — истинная размерность траектории. Построив зависимость фрактальной размерности от числа  $n$ , получаем нижнюю оценку размерности динамической системы. Дробное значение фрактальной размерности указывает на наличие странного аттрактора в ее фазовом пространстве.

В волновых процессах фрактальные свойства могут, очевидно, проявиться, если излучающая система управляется хаотической динамикой. Амплитуду волны можно рассматривать как одну из динамических переменных и применять к ее временной или пространственной изменчивости фрактальный анализ по описанным алгоритмам. В качестве примеров динамических систем с хаотической динамикой, излучающих волны (звук), укажем на кавитационные пузырьки, возбуждаемые мощным звуком в воде [67, 68], и электродинамический громкоговоритель в нелинейном режиме [69].

Следует отметить, что одно лишь измерение фрактальной размерности траектории в восстановленном по Такенсу фазовом пространстве, строго говоря, не позволяет сделать однозначный вывод о конечномерности порождающей процесс системы. Дело в том, что постоянство фрактальной размерности траектории при превышении числом отсчетов  $n$  некоторого порога имеет место и для чисто хаотических процессов со степенным спектром мощности [70]. Для отделения этого случая либо должно быть заранее известно, что сигнал порождается конечномерной динамической системой, либо нужны дополнительные измерения, например показателей Ляпунова [16], которые дают характеристику скорости расхождения траекторий, вышедших из близких точек в фазовом пространстве. Конечность показателей Ляпунова указывает на динамическое происхождение траекторий. Для чисто случайных сигналов эти показатели бесконечны. Первоначально в известных работах [12, 13] фрактальные свойства фазовой траектории однозначно связывались с наличием набора положительных показателей Ляпунова (гипотеза Каплана–Йорки). Результаты работы [70] показывают, что эта связь не всегда выполняется.

Более общие возможности фрактального анализа реализуются при анализе случайных процессов нединамического происхождения. Традиционный подход к анализу случайных процессов опирается на измерение корреляционных функций или, что эквивалентно, спектров мощности (взаимных спектров). Теоретическая база этого подхода — корреляционная теория случайных процессов — основана на строгой математике. Корреляционные измерения дают оценку вторых моментов одно- и двухточечных распределений вероятностей. Исчерпывающе описываются своими вторыми моментами только гауссовы процессы. За пределами гауссовых процессов полное статистическое описание требует оценки распределений вероятностей либо, если они существуют, моментов более высокого порядка. При этом объем

измерений резко увеличивается. Учет третьих моментов требует оценки трехточечных корреляций (биспектров), четвертых — четырехточечных (триспектров) и т.д. Очевидно, что с ростом порядка учитываемых моментов сомнительным становится само упрощение описания случайных процессов за счет использования средних величин. При этом высокие моменты не всегда имеют такой ясный физический смысл, как функции корреляции или спектры мощности. В этой области важны оценки небольшого числа величин, которым можно придать определенный смысл. К таким величинам относятся фрактальные размерности различных, связанных с сигналом, геометрических объектов. Этот подход, конечно, не универсален, но оказывается применимым к широкому классу процессов, обладающих в некотором диапазоне параметров свойством масштабной инвариантности. Более того, в практически важных случаях, когда процесс представляет собой сумму малых вкладов и вероятностное распределение процесса является предельным распределением сумм случайных величин, дисперсия и даже первый момент процесса могут просто не существовать. В этом смысле гауссовы процессы являются частным случаем, для которого только и существует конечная дисперсия.

Фрактальный анализ применяют и к гауссовым процессам. Уже простейший из случайных процессов — процесс броуновского движения, — моделируемый нормальным процессом с независимыми приращениями (винеровский процесс), обладает фрактальными свойствами. Этот процесс преобразуется сам в себя при одновременном изменении масштаба времени в  $b$  раз и пространственного масштаба в  $b^{1/2}$  раз. Фрактальная размерность графика винеровского процесса  $D = 3/2$ , траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве имеет размерность  $D = 2$ . Мандельброт впервые указал на широкий класс гауссовых процессов, обладающих фрактальными свойствами. Они имеют следующую зависимость дисперсий приращений процесса от интервала времени:

$$\langle (X(0) - X(t))^2 \rangle \sim t^{2H}, \quad (6)$$

где  $H \neq 1/2$  и лежит в интервале  $0 < H < 1$ . Задолго до появления фракталов процессы, обладающие свойством (6), обнаружил Херст при изучении годовых вариаций стоков рек (см., например, [9]). Он установил, что для различных рек показатель  $H$  одинаков и равен 0,73. Показатель  $H$  принято называть показателем Херста. Гауссовы процессы с дисперсией приращений (6) называют процессами обобщенного броуновского движения.

Локальная размерность графика процесса (6)  $D = 2 - H$ , а фрактальная размерность траектории движения в пространстве размерности  $N$ , координаты которого описываются независимыми процессами (6), дается выражением

$$D = \min(N, 1/H). \quad (7)$$

Это и есть случай, когда траектория в фазовом пространстве имеет конечную размерность для бесконечномерной системы.

Для динамической системы с хаотическим поведением фрактальные свойства траектории в фазовом пространстве не связаны со свойствами масштабной инвариантности самого сигнала. Локально самоподоб-



ные области аттрактора могут включать отсчеты, далеко разнесенные по оси времени. В этом ключевое отличие динамического хаоса от истинно случайных сигналов. Для истинно случайного процесса фрактальные свойства траектории проявляются в том случае, когда для процесса характерны самоподобные свойства. Как правило, при этом существуют малый внутренний масштаб  $t_0$  и большой внешний масштаб  $T$ . В интервале  $t_0 < t < T$  проявляются скейлинговые свойства приращений процесса на интервале времени  $\tau$ :

$$\langle (X(t+\tau) - X(t))^2 \rangle \sim \tau^\beta. \quad (8)$$

К таким процессам заведомо относятся случайные блуждания (с устойчивым законом распределения) на масштабах времени и расстояния, превышающих время и размер единичного шага блуждания. Имеется большое разнообразие таких процессов с показателем  $\beta$ , отличным от значения  $\beta = 1$  и даже превышающим 2 (эти процессы называют процессами аномальной диффузии). Одна из первых волновых задач, где проявляется аномальная диффузия, рассмотрена в работах [43, 44]. Речь идет о переносе возбуждения в резонансной среде с однородно уширенной линией. Распределение вероятности поглощения испущенного возбужденным атомом фотона другим атомом не имеет конечной дисперсии. Соответственно не имеет дисперсии и расстояние свободного пробега фотона. В пределе больших расстояний получается случайное блуждание с устойчивым законом распределения, подчиняющееся уравнению (8) с  $\beta > 1$ .

Различные фрактальные структуры присущи гидродинамической турбулентности. Прежде всего речь идет о структуре поля диссипации энергии. Сильная перемежаемость поля диссипации энергии фактически приводит к тому, что эта диссипация сосредоточена в ничтожной доле объема, занятого турбулентным движением. Оказалось, что корреляционная функция плотности диссипации имеет степенной вид [71, 72], и диссипация, следовательно, сосредоточена на фрактальном множестве [73]. Размерность этого множества 2,6–2,8. Позднее более точные измерения показали, что поле диссипации энергии не может описываться одной фрактальной размерностью, а представляет собой мультифрактал [48] (подробнее о мультифракталах см. раздел 5 обзора). Такую же структуру имеет концентрация примеси в турбулентном потоке [74]. Фрактальную форму имеют поверхности, разделяющие турбулентную и нетурбулентную области течения [75], а также траектории частиц в случайном потоке [76]. Крупномасштабная, за пределами инерционного интервала, структура турбулентных течений в океане и атмосфере тоже, по-видимому, обладает фрактальными свойствами [18].

### 2.3. Модели фрактальных структур в физике

Следует иметь в виду, что фрактальная структура вещества практически не поддается теоретическому исследованию стандартными методами статистической физики. Исключение составляют, пожалуй, только фракталы в моделях случайных блужданий и в структуре полимерных цепочек (теория Флори; см., например, [21]). Для теоретического исследования фрактальных структур применяют модели, которые часто реализуют на компьютере. В этом смысле фрактальное описание структур дополнительно по отношению к обычным

статистическим методам. С другой стороны, как правило, не известны и сколько-нибудь продвинутые статистические характеристики фрактальных структур. Хотя эта проблема, в принципе, решается введением ряда размерностей Реньи или, что почти то же самое, описанием структур в терминах мультифракталов. К числу наиболее популярных моделей фрактальной структуры вещества в физике относятся модель перколяционного кластера, модель кластера, образующегося в результате ограниченной диффузией агрегации, случайные блуждания без пересечений. Для описания фрактальных свойств сигналов и полей применяют модели случайных блужданий — обобщенное броуновское движение, "полет Леви", приводящий к процессам с фрактальным временем и к супердиффузионным процессам.

**2.3.1. Случайные блуждания.** Случайное блуждание — математическая модель процесса смещения частицы под действием случайных сил. Это, пожалуй, наиболее простая и развитая модель в статистической физике, приводящая к фрактальным структурам. Графики зависимости смещения частицы от времени и ее траектории являются фрактальными кривыми.

Основные применения модели случайных блужданий относятся к анализу фрактальных свойств случайных сигналов и волн. Имеются применения случайных блужданий и к описанию фрактальных форм материальных тел. Это прежде всего описание случайных рельефов поверхности и форм длинных полимерных молекул. В последнем случае большой успех в описании экспериментальных данных имеет модель случайного блуждания без самопересечений.

Наиболее широко применяемый класс моделей случайных процессов, обнаруживающих фрактальное поведение, связан с классической винеровской моделью броуновского движения. Эта модель описывает процесс, все свойства которого выводятся из двух постулатов: приращение процесса в течение определенного интервала времени имеет нормальное распределение вероятностей с нулевым средним и приращения на неперекрывающихся интервалах времени статистически независимы. Тогда средний квадрат смещения  $x$  за время  $t$  имеет вид

$$\langle x^2 \rangle = K_D t, \quad (9)$$

где  $K_D$  — коэффициент диффузии. Из всех процессов с независимыми смещениями только для такого процесса траектория непрерывна с вероятностью единица. В то же время траектория и график винеровского процесса нигде не дифференцируемы. Из выражения (9) следуют самоподобие процесса и упомянутые выше фрактальные свойства.

Обобщения винеровского процесса, приводящие к другим фрактальным процессам, состоят либо в отказе от условия независимости приращений на непересекающихся интервалах времени, либо в отказе от нормальности их распределения. В первом случае получаем процессы с памятью, например так называемое обобщенное броуновское движение и блуждание без самопересечений. Во втором случае приходим к "полету Леви" и супердиффузионным процессам.

Нормальное распределение приращений в предположении, что приращение процесса на интервале времени  $t$

подчиняется условию (6), где показатель  $H$  не равен  $1/2$ , приводит к случайным блужданиям с памятью.

Простая модель, проявляющая такое поведение, не выводит за пределы гауссовых процессов — это модель обобщенного броуновского движения  $X_H(t)$ , получающаяся в результате линейного преобразования винеровского процесса  $X_{1/2}(t)$  вида [9]

$$X_H(t) - X_H(0) = \int_{-\infty}^t K(t-t') dX_{1/2}(t'), \quad (10)$$

где ядро имеет степенную зависимость от интервала  $t - t'$ :

$$K(t-t') \sim (t-t')^{H-1/2} \quad (11)$$

(с тем условием, что приняты меры для сходимости интеграла (10), например ограничением нижнего предела). Видно, что в зависимости от величины  $H$  вклад в обобщенный броуновский процесс удаленных по времени участков исходного процесса увеличен либо уменьшен. В предположении  $X_H(0) = 0$  из (6) немедленно следует для долговременной корреляции процесса [9]

$$\frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1. \quad (12)$$

При  $H = 1/2$  (винеровский процесс) корреляция отсутствует; при  $H > 1/2$  корреляция положительна; при  $H < 1/2$  корреляция отрицательна. Таким образом, суть обобщения — в отказе от предположения о независимости приращений на непересекающихся интервалах; процесс обладает памятью. При  $H > 1/2$  процесс персистентный; при  $H < 1/2$  — антиперсистентный<sup>3</sup>.

Свойство памяти для обобщенного броуновского процесса имеет другую полезную формулировку [77]. В [77] рассматривается корреляция сумм значений сигнала на двух интервалах из последовательности смежных интервалов времени в зависимости от числа разделяющих интервалов. При  $H < 1/2$  корреляция мала уже для смежных интервалов, а при  $H > 1/2$  корреляция для смежных интервалов равна  $r_1 = 2^{2H-1} - 1$  и медленно спадает по степенному закону с ростом числа разделяющих интервалов. Важно, что это свойство не зависит от интервала суммирования. Такое поведение сумм означает, что возможна ситуация, когда за конечное время измерения вообще невозможно получить достоверные данные о средних характеристиках процесса; в таком случае определение показателя  $H$  — необходимый элемент измерения статистических свойств процесса.

Случайные блуждания без самопересечений сохраняют свойство (6) с  $H < 1$ , но не являются гауссовыми. Такие процессы, очевидно, обладают памятью более сложной структуры, чем в (10), и их приращения не являются независимыми. Фрактальные же свойства их такие же, как у обобщенного броуновского движения. Фрактальная размерность траектории  $1/H$ , размерность графика  $2 - H$ . Числовые значения для  $H$  зависят от размерности пространства  $d$ , где разворачивается процесс. Для  $d < 4$   $H = 3/(d+2)$ , а фрактальная размер-

ность траектории соответственно  $D = (d+2)/3$ . Наиболее содержательная физическая интерпретация такого процесса — случайно расположенная в среде длинная полимерная молекула. Первоначально зависимость размера молекулы от числа звеньев при учете их отталкивания (отсутствия пересечений) была получена Флори (см. [21]) методами статистической физики путем минимизации свободной энергии, включающей энергию взаимодействия звеньев. Подход с точки зрения блужданий без самопересечений воспроизводит этот же результат. Это один из немногих примеров, когда статистическая физика явно приводит к фрактальной структуре.

Процессы аномальной диффузии с приращениями, подчиняющимися (8) с  $\beta > 1$  (супердиффузионные процессы), не могут быть описаны гауссовой моделью (10). Такие процессы формально подчиняются уравнению диффузии с зависящим от смещения коэффициентом диффузии, но это приводит к гладким нефрактальным траекториям. С другой стороны, наблюдения, например, турбулентной диффузии указывают на фрактальный характер траекторий частиц [76]. Это противоречит традиционному диффузионному описанию. В работе [76] численно рассматривается модель движения частицы в течении с фрактальной функцией тока, что приводит к фрактальности траектории частицы. Другой подход к моделям процессов аномальной диффузии развит в [78] и опирается на теорию процессов со стационарными независимыми, но негауссовыми приращениями.

Среди процессов с независимыми приращениями винеровский процесс занимает, как было уже сказано, выделенное положение. Его график (и траектория) с вероятностью 1 непрерывен, что выполняется тогда и только тогда, когда процесс нормален [79]. Отказ от нормальности приращений обязательно приводит к разрывным траекториям. Процессы с негауссовыми приращениями имеют, тем не менее, полезные приложения. Вообще говоря, обычное предположение о гауссовости исследуемых процессов основано на применении центральной предельной теоремы. Случайный процесс считается суммой вкладов многих случайных слагаемых; тогда из центральной предельной теоремы следует гауссовость процесса. Однако это верно, когда случайные слагаемые имеют распределения с конечной дисперсией.

Если это не так, то результирующий процесс может и не быть гауссовым. Общий класс предельных распределений (т.е. распределений сумм большого числа независимых случайных слагаемых), обладающих самоподобными свойствами, — это устойчивые по Леви распределения [79]. Такие распределения обладают следующим свойством подобия:

$$t^{1/\alpha} X_1 + s^{1/\alpha} X_2 \stackrel{d}{=} (t+s)^{1/\alpha} X, \quad (13)$$

где  $X, X_1, X_2$  — независимые величины с одинаковым устойчивым распределением,  $t, s$  — любые положительные числа, знак  $\stackrel{d}{=}$  означает, что случайные величины имеют одинаковые распределения.

Показатель  $\alpha$  заключен в пределах  $0 < \alpha \leq 2$ . При  $\alpha = 2$  приходим к обычному гауссову процессу с конечной дисперсией; тогда свойство (13) выражает закон сложения дисперсий и эквивалентно (9). При  $\alpha < 2$  получаем величину с бесконечной дисперсией; суще-

<sup>3</sup> Персистентный — от английского persistent — упорный, настойчивый.

ствуют только моменты порядка меньше  $\alpha$ . Случайное блуждание с независимыми смещениями, распределения которых устойчивы по Леви с показателем  $\alpha < 2$ , называют "полетом Леви" [78, 80]. В силу бесконечности дисперсии смещения измерение этой величины за конечный интервал времени хотя и даст результат, но он может быть любым (аналог — сумма расходящегося ряда при перестановке его членов) и не дает характеристики процесса. В этой ситуации исключительную роль приобретают измерения фрактальной размерности. Траекторию полета Леви можно представить как набор точек поворота, соединенных прямолинейными скачками. В двумерном фазовом пространстве траектория частицы, координаты которой описываются устойчивыми процессами с показателем  $\alpha$ , имеет фрактальную размерность точек поворота  $\alpha < 2$ . В случае  $\alpha = 2$  приходим к обычному броуновскому процессу, в котором все точки являются точками поворота, поскольку процесс непрерывный, а производной нигде нет.

Полет Леви может дать модель процессов аномальной диффузии с конечными дисперсиями приращений за данный интервал времени; фрактальные свойства траекторий этих процессов совпадают со свойствами траекторий полета Леви [78, 80]. Например, предположим, что процесс образован из независимых скачков на величину, распределенную по Леви, которые происходят за время, определяемое величиной скачка и растущее вместе с ним; тогда дисперсия приращения за заданный интервал времени становится конечной [78], траектория в фазовом пространстве сохраняет свой вид и появляется новый фрактальный объект — временные точки разрыва производной процесса. Получаем пример процесса с фрактальным временем [80]. Для процессов такого типа показатель в (8) может превышать единицу.

**2.3.2. Перколяционные кластеры.** Перколяция (просачивание, протекание, фильтрация) — термин, принятый сейчас в физике для обозначения определенного класса явлений, изучение которых составляет предмет теории протекания.

По сути теория протекания является математической теорией, относящейся к области стохастической геометрии. Базовыми задачами теории протекания являются решеточные задачи связей и узлов. Рассмотрим некоторую правильную (периодическую с определенной симметрией) пространственную или плоскую решетку узлов, каждый из которых соединен связями с ближайшими соседними узлами. Типичная физическая модель — соединенные в решетку электрические сопротивления [81]. Когда все сопротивления целы, каждый узел электрически связан с бесконечным числом других узлов — решетка имеет конечную проводимость. Пусть определенная доля (концентрация)  $1 - p$  случайно расположенных связей разорвана, тогда, если доля целых связей  $p$  мала, то равна нулю проводимость решетки или, другими словами, равна нулю вероятность узлу быть соединенным с бесконечным числом узлов, т.е. принадлежать бесконечному кластеру. Эта вероятность будет равна нулю, пока доля целых связей  $1 - p$  не достигнет некоторого порогового значения  $p_c$ , называемого порогом протекания (перколяции). При  $p > p_c$  имеется ненулевая вероятность узлу принадлежать бесконечному кластеру (соответственно проводимость решетки становится конечной). Задача определения порогового числа

целых связей — это задача связей. В задаче узлов все связи считаются целыми, но "испорчены" узлы — определенная доля случайно расположенных узлов перекрыта (связи, соединенные с этими узлами, не соединены между собой). В задаче узлов порог протекания иной, чем в задаче связей. Порог протекания зависит также от размерности решетки, числа ближайших соседей или более общо — структуры элементарной ячейки решетки.

Тем не менее оказывается, что имеется удивительная универсальность поведения различных величин вблизи порога протекания. Во-первых, доля узлов  $p_\infty$ , принадлежащих бесконечному кластеру, выше порога протекания универсальным образом зависит от разности концентрации целых связей (узлов) и пороговой концентрации:

$$p_\infty \sim (p - p_c)^\beta, \quad (14)$$

или, вводя величину  $\tau = (p - p_c)/p_c$ , пишем  $p_\infty \sim \tau^\beta$ . Показатель  $\beta$  не зависит от структуры решетки, а определяется только размерностью пространства. Для двумерных решеток  $\beta = 5/36$ , для трехмерных  $\beta = 0,4$ .

Оказывается, что бесконечный кластер выше порога протекания имеет фрактальную структуру на масштабах, не превышающих некоторый масштаб  $\xi$ . Масштаб  $\xi$  универсальным образом зависит от превышения концентрации  $p$  целых связей (узлов) порогового значения  $p_c$ :

$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}, \quad (15)$$

где показатель  $\nu$  так же, как и  $\beta$ , зависит только от размерности решетки:  $\nu = 4/3$  для двумерной решетки и  $\nu = 0,88$  для трехмерной. Выражение (15) имеет смысл и для концентраций ниже пороговой; тогда  $\xi$  — это характерный размер конечных кластеров. Точно на пороге протекания масштаб  $\xi$  бесконечен, и концентрация связей (узлов), принадлежащих бесконечному кластеру, равна нулю. Другими словами, плотность бесконечного кластера равна нулю, как и должно быть для фрактальных кластеров в соответствии с формулой (2). Выше порога протекания масштаб  $\xi$  конечен, и плотность бесконечного кластера определяется плотностью на масштабе  $\xi$ , составляющих бесконечный кластер фрактальных фрагментов:

$$\rho \sim \xi^{D-d}, \quad (16)$$

где  $D$  — фрактальная размерность кластера на масштабах, меньших  $\xi$ . С другой стороны, выражая из (15)  $\tau$  через  $\xi$  и подставляя в (14), получаем

$$\rho \sim p_\infty \sim \xi^{-\beta/\nu},$$

а, сопоставляя последнее выражение с (16), находим выражение для фрактальной размерности кластера  $D$  через универсальные показатели  $\nu$  и  $\beta$ :

$$D = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (17)$$

Фрактальная размерность, следовательно, также определяется только размерностью решетки и равна 1,89 для двумерных и 2,54 для трехмерных решеток. Пример компьютерной модели перколяционного кластера, полученного в задаче узлов на квадратной решетке, показан на рис. 16.

Применения модели перколяционного кластера для описания фрактальных структур вещества весьма разнообразны. Первое такое применение указал де Жен [82].

Де Жен предложил простую решеточную модель полимеризации в растворе. Рассмотрим случайно расположенные в узлах некоторой решетки мономеры. Между мономерами в соседних узлах происходит реакция и образуется связь. Образование полимера в точности аналогично перколяционному переходу в задаче узлов и происходит, когда концентрация мономеров достигает некоторого порогового значения. Мономеры, не вступившие в связь в процессе приготовления полимера, вымываются. Образующаяся полимерная молекула имеет, следовательно, фрактальную структуру. Эта модель определила развитие решеточных моделей свойств фрактальных материалов.

Модель перколяционного кластера весьма универсальна. Дело в том, что перколяционный кластер обязательно возникает в случайном расположении частиц с достаточно высокой концентрацией. Но доля частиц, входящих в него, определяется выражением (14) и вблизи пороговой концентрации не велика. Чисто фрактальная структура возникает, если удалить не вошедшие в кластер частицы. Другое проявление перколяционного перехода в перколяционной ситуации — это перколяция в градиенте концентрации. В диффузионном фронте концентрация диффундирующего агента меняется от нуля вдали от источника до единицы вблизи него. В каком-то месте фронта концентрация равна пороговой концентрации протекания. Вблизи этого места диффундирующее вещество образует фрактальные кластеры [83].

**2.3.3. Фрактальные агрегаты.** Агрегация — другой механизм образования фрактальных структур вещества. Здесь все участвующие в процессе частицы входят во фрактальный кластер.

Реальные фрактальные агрегаты получаются в результате слипания твердых частиц, которые могут образоваться при некоторых условиях в растворах или парах ряда веществ. Наиболее яркие примеры — это образование гелей в растворах двуокиси кремния и образование частиц сажи в пламени [11].

Простейшая модель роста фрактального агрегата — модель ограниченной диффузией агрегации [59] — состоит в следующем. Пусть в некотором объеме помещен затравочный кластер (это может быть и одна частица) и в этот объем запускаются по одной частицы, движущиеся по случайным броуновским траекториям; столкнувшись с кластером, частицы прилипают к нему — кластер растет. Пример кластера, выращенного таким образом на плоскости при компьютерном моделировании, показан на рис. 1а.

В другой модели — модели кластер-кластерной агрегации — в объеме сразу находится множество диффундирующих частиц, которые, слипаясь, образуют множество кластеров; последние, также диффундируя, сцепляются между собой. Вообще, существует множество моделей агрегации, отличающихся законом движения, вероятностью прилипания, радиусом захвата. Обзор этих моделей можно найти, например, в [11, 84]. Общим для всех моделей обстоятельством является то, что образующиеся кластеры представляют собой фракталы — статистически самоподобные агрегаты с нецелой

фрактальной размерностью. Масса  $M(R)$  фрактального агрегата в объеме радиуса  $R$  дается выражением (1).

Модели агрегации классифицируют по двум признакам: по виду траекторий участвующих в агрегации частиц и по количеству участвующих в процессе кластеров [11].

По первому признаку различают агрегацию при прямолинейном движении частиц и при случайных блужданиях. Можно также ввести множество траекторий с разными фрактальными размерностями в диапазоне 1–2. Прямолинейной траектории отвечает размерность 1, броуновской траектории — размерность 2.

По второму признаку есть два крайних случая: агрегация частица-кластер и кластер-кластерная агрегация. В первом случае вблизи одиночного растущего кластера движется частица, прилипающая к нему при столкновении. Во втором случае в объеме движется много кластеров, которые, сталкиваясь, образуют кластеры большего размера.

Помимо указанных различий разной для всех видов процессов может быть вероятность прилипания при столкновении. В моделях агрегации нет, в отличие от перколяции, универсальных значений размерности. Фрактальные размерности кластеров сильно различаются для разных типов агрегации. В случае агрегации частица-кластер с прямолинейным движением частиц результирующий кластер вообще не фрактальный: в двух- и трехмерном пространствах фрактальные размерности — 2 и 3. Наименьшие фрактальные размерности получаются при кластер-кластерной агрегации с броуновским движением кластеров: 1,44 — в двумерном случае и 1,77 — в трехмерном [11].

### 3. Волны во фрактальных структурах. Фрактоны

В случае реальных материалов с фрактальной структурой дисперсионные соотношения и выражения для плотности упругих колебательных состояний во фрактонной области следуют из масштабных зависимостей упругих модулей и плотности материала. Первоначальные исследования фрактонной области спектра и многие современные численные результаты опираются на анализ модельного уравнения для колебаний на фрактальной решетке узлов.

Простое модельное уравнение для амплитуды волны на узлах фрактальной сетки имеет вид

$$\alpha \ddot{u}_i = \sum_j K_{ij}(u_j - u_i), \quad (18)$$

где  $K_{ij} = 1$ , если связь между узлами сетки цела, и  $K_{ij} = 0$  в противном случае,  $\alpha$  — некоторая размерная постоянная, имеющая смысл обратного квадрата резонансной частоты единичной связи. На уравнении (18) основано значительное число исследований волн во фрактальных кластерах (в рамках решеточных моделей).

В одномерном случае (18) соответствует известному уравнению для продольных колебаний цепочки

$$\alpha \ddot{u}_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1},$$

где правая часть представляет собой конечно-разностное выражение для лапласиана. В двух- и трехмерном случаях скалярное уравнение (18) не может, конечно,

описывать колебания решетки для общей модели сил упругости. Ниже будет рассмотрена модель изотропных сил упругости, в рамках которой уравнение (18) описывает упругие колебания для декартовых компонент смещений узлов.

Физический смысл уравнению (18) в двумерном случае можно придать, считая, что в узлах решетки расположены массы  $m$ , а каждая связь представляет собой натянутую пружину (струну) длиной  $l_0$  и натяжением  $T$ . Если  $u_i$  — нормальное к плоскости смещение масс, то (18) описывает поперечные колебания, а постоянная равна  $\alpha = l_0 m / T$ . Когда все связи целы — это реальная ситуация; для фрактальных же кластеров, очевидно, нет. Тем не менее модель (18) широко используется для изучения структуры колебательных состояний фракталов и дает, по-видимому, качественно верные результаты.

### 3.1. Колебания и диффузия на фракталах

Первые результаты, характеризующие спектры собственных колебаний фракталов, получены Александром и Орбахом в 1982 г. [24]. Работа [24] опирается на аналогию между уравнением (18) упругих колебаний фракталов и уравнением случайных блужданий на фракталах и на то обстоятельство, что диффузия на фрактале подчиняется свойству (8) с показателем  $\beta < 1$ .

Пусть  $p_i(t)$  — вероятность найти совершающую случайные блуждания частицу в узле  $i$  в момент времени  $t$ ;  $V_{ij}$  — вероятность перехода с узла  $i$  на  $j$  в единицу времени ( $V = \text{const}$ , если связь цела, и  $V = 0$  в обратном случае). Тогда для  $p_i(t)$  получаем следующее уравнение:

$$\dot{p}_i = \sum_j V_{ij}(p_j - p_i). \quad (19)$$

Собственные значения и собственные векторы действующих на  $p_i$  и  $u_i$  операторов в правых частях уравнений (18) и (19) совпадают. В случае колебаний собственные значения соответствуют квадратам частот колебательных состояний фрактала. Распределение собственных значений дает распределение колебательных состояний по частотам, а указанная аналогия с диффузией позволяет найти это распределение, не решая самой задачи на собственные значения. Этот прием давно известен не только в связи с фракталами [85].

Выражая решение уравнения (19) для блуждания, начинающегося на  $i$ -м узле (при начальном условии  $p_k(0) = \delta_{ik}$ ), через собственные числа  $\lambda_n$  и собственные векторы  $\varphi^n = (\varphi_1^n \dots \varphi_i^n \dots)$  оператора в его правой части, представим вероятность оказаться через время  $t$  в начальном узле в следующем виде:

$$p_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t) a_n^i \varphi_i^n = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t) (\varphi_i^n)^2, \quad (20)$$

где  $a_n^i = \sum_k \delta_{ik} \varphi_k^n = \varphi_i^n$  — коэффициенты разложения начального условия по собственным векторам. С другой стороны, известно (см. например, [10]), что при блуждании на фрактале среднее смещение от начального узла  $r \sim t^{1/(2+\Theta)}$ , где  $\Theta > 0$  — показатель аномальной диффузии (в случае обычной решетки  $\Theta = 0$ , и имеем обычное  $r \sim t^{1/2}$ ). Во фрактальном кластере радиуса  $r$  содержится  $\sim r^D$  узлов кластера. Для любого  $r$  через достаточно большое время  $t$  вероятности нахождения частицы в

любом узле на расстоянии  $r$  от начального станут одинаковыми и, следовательно,

$$p_{ii}(t) \sim r^{-D} \sim t^{-D/(2+\Theta)}. \quad (21)$$

Суммируя же (20) по всем узлам кластера и сравнивая с (21), получаем ( $\varphi^n$  нормированы)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t) \sim N t^{-D/(2+\Theta)}. \quad (22)$$

Пользуясь одной из тауберовых теорем [79], из (22) немедленно получаем для плотности распределения собственных чисел при  $\lambda \rightarrow 0$ :  $v(\lambda) \sim \lambda^{D/(2+\Theta)-1}$ .

Для колебаний  $\lambda = \omega^2$  и  $d\lambda = 2\omega d\omega$ ; тогда плотность распределения колебательных мод по частотам

$$v(\omega) \sim \omega^{2D/(2+\Theta)-1}. \quad (23)$$

Александр и Орбах определили фрактонную размерность, равную

$$d_f = \frac{2D}{2+\Theta}. \quad (24)$$

Фрактонная размерность играет роль размерности пространства в низкочастотной асимптотике плотности колебательных состояний. Действительно, для плотности обычных фононных состояний на  $d$ -мерной регулярной решетке из (24) получаем известное равенство ( $\Theta = 0$ )

$$d_f = d.$$

В случае реальных фрактальных материалов имеется максимальный масштаб  $\xi$ , ограничивающий область фрактального поведения. На масштабах, превышающих  $\xi$ , и, следовательно, на низких частотах, не превышающих некоторую частоту кроссовера  $\omega_c(\xi)$ , имеет место обычный фононный спектр. На более высоких частотах происходит переход (кроссовер) к фрактонному спектру. Учитывая, что число мод колебаний должно равняться числу частиц, составляющих материал, можно написать следующие выражения для плотности состояний  $v_{ph}$  фононного и  $v_{fr}$  фрактонного спектров в единице объема [24]:

$$v_{ph} = N_F d \frac{\omega^{d-1}}{\omega_c^d}, \quad (25)$$

$$v_{fr}(\omega) = N_F d_f N_{at} \frac{\omega^{d_f-1}}{\omega_d^{d_f}} = N_F d_f \frac{\omega^{d_f-1}}{\omega_c^{d_f}}, \quad (26)$$

где  $N_F = (1/\xi)^d$  — число фрактальных фрагментов в единице объема, участвующих в колебаниях фононного спектра как жесткие частицы, не деформируясь,  $\omega_c$  — частота кроссовера,  $N_{at} = (\xi/a)^D$  — число атомов (частиц) размера  $a$  во фрактальном фрагменте размера  $\xi$ ,  $\omega_d = (\xi/a)^{D/d_f} \omega_c$  — по определению, фрактонная дебаевская частота. Последнее равенство в (26) очевидным образом следует из выражений для  $N_{at}$  и  $\omega_d$ .

Как и обычная дебаевская частота для фононного спектра, фрактонная дебаевская частота в качестве предела интегрирования обеспечивает нормировку числа колебаний на число частиц. Интегрируя плотности (25) и (26) в пределах  $(0, \omega_c)$  и  $(\omega_c, \omega_d)$  соответственно, получаем для полного числа фононных состояний  $N_{ph} = N_F$ , а для фрактонных  $N_{fr} = N_F(N_{at} - 1)$ . Число же

всех колебательных состояний  $N = N_{ph} + N_{fr} = N_F N_{at}$ , т.е. равно полному числу атомов, как и должно быть. Следует обратить внимание на тот факт, что согласно (25), (26) на частоте кроссовера  $\omega_c$  плотность фононных состояний превышает плотность фрактонных состояний:

$$v_{ph} = N_F d > v_{fr} = N_F d_f,$$

ввиду того, что  $d > d_f$ . Это может приводить к появлению пика в плотности состояний вблизи частоты кроссовера, как показано на рис. 3. Наличие такого пика не всегда подтверждается экспериментально, его нет и в численных расчетах плотности состояний по уравнению (18). Однако анализ экспериментальных данных по температурной зависимости теплоемкости аэрогелей [86] показал, что пик должен присутствовать.

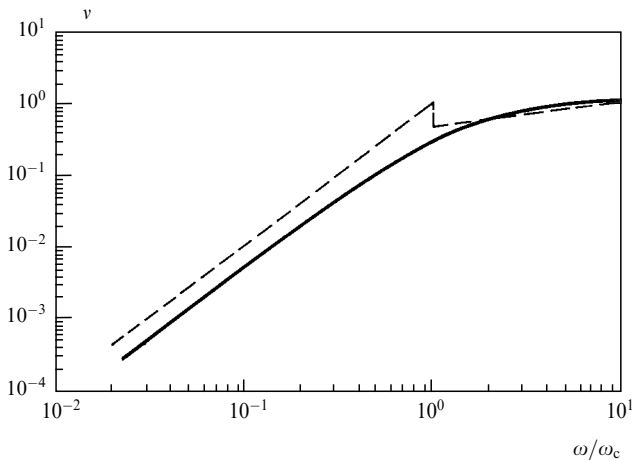


Рис. 3. Плотность колебательных состояний, вычисленная по формулам (25), (26) (штриховая кривая) и по формуле, аппроксимирующей переход плавной кривой (сплошная кривая). Плотность дана в произвольных единицах, но полное число состояний одинаково для обеих кривых. Частоты нормированы на частоту кроссовера

Отсутствие пика означает, что переход от фононной плотности (25) к фрактонной (26) плавный и занимает некоторую область частот. Часто используется аппроксимация перехода вида

$$v(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_c^2 + \omega^2)^{(3-d_f)/2}}.$$

Примерный вид плотности состояний по этой формуле и по формулам (25), (26), скачком сменяющих друг друга на частоте кроссовера, показан на рис. 3. По всей видимости, для разных материалов реализуются обе возможности.

### 3.2. Фрактоны на регулярных фракталах.

#### Локализация

Дальнейший прогресс в понимании свойств собственных состояний уравнения (18) на фракталах связан с исследованием решений этого уравнения на регулярном фрактале — треугольном "ковре Серпинского" (рис. 4) [87, 88]. Авторами работ [87, 88] применена так называемая процедура децимации<sup>4</sup>, дающая возможность аналити-

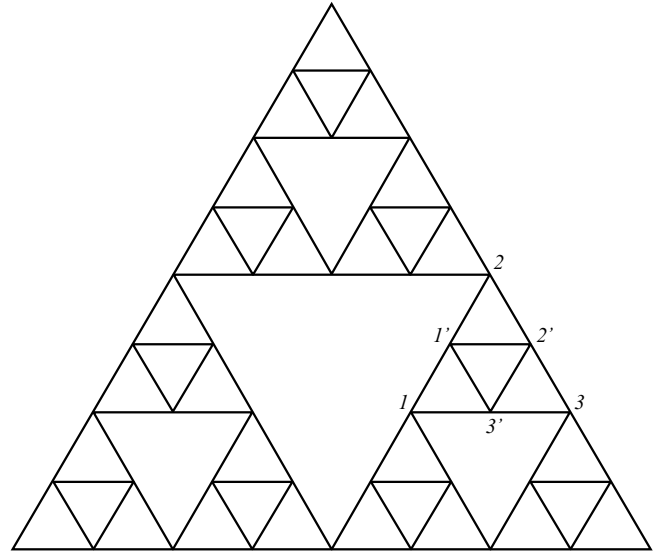


Рис. 4. Треугольный "ковер Серпинского". Цифрами отмечены узлы, участвующие в процедуре децимации, описываемой в разделе 3.2

чески найти решения уравнения (18) в случае самоподобных фрактальных решеток.

Рассмотрим уравнение (18) для колебаний некоторой частоты  $\omega$ :

$$\alpha \omega^2 u_i = \sum_j K_{ij}(u_i - u_j). \quad (27)$$

Пусть  $u'_i$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — амплитуды колебаний в узлах 1, 2, 3,  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ , отмеченных на рис. 4. Пользуясь частью уравнений (27), амплитуды  $u'_{1',2',3'}$  можно выразить через амплитуды  $u_{1,2,3}$ . Подставив ответ в остальные уравнения (27), получим систему уравнений, содержащую только амплитуды  $u_{1,2,3}$ , но с перенормированным значением частоты  $\alpha \omega'^2 = 5\alpha \omega^2 - \alpha^2 \omega^4$ . В силу самоподобия уравнения для амплитуд  $u_{1,2,3}$  описывают колебания на точно такой же решетке, что и исходная. Для аналога ковра Серпинского в пространстве  $d$ -измерений (такая фигура составлена из  $d$ -мерных тетраэдров) можно получить общее выражение для перенормированной частоты

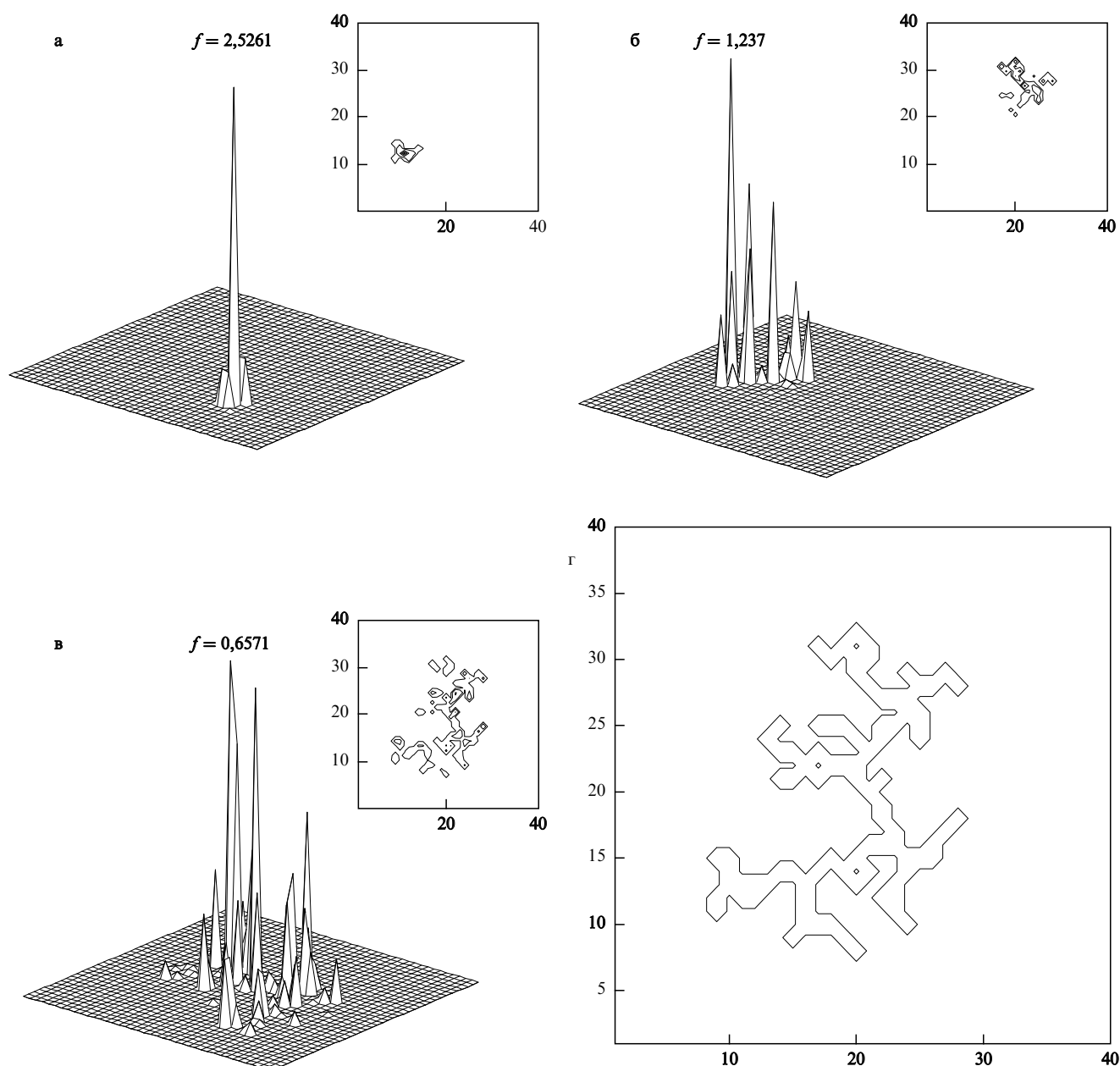
$$\alpha \omega'^2 = (d+3)\alpha \omega^2 - \alpha^2 \omega^4. \quad (28)$$

Очевидно, процедуру децимации можно повторить, перейдя к еще большему масштабу. В итоге получаем следующее: если существует собственное колебание с частотой  $\omega$ , то имеется и собственное колебание с частотой  $\omega'$ . При этом количество участвующих в колебании элементов кластера изменяется в  $d+1$  раз, и для спектральной размерности получаем следующее выражение [88]:

$$d_f = \frac{2 \ln(d+1)}{\ln(d+3)}. \quad (29)$$

Структура спектра, определяемая уравнением перенормировки (28), сама по себе весьма сложна и обладает скейлинговыми свойствами на оси частот. Спектр состоит из  $\delta$ -образных пиков, образующих на оси частот сложную самоподобную структуру [87]. Выражение (29) выполняется только для усредненной по полосам частот плотности состояний.

<sup>4</sup> Децимация — в Древнем Риме наказание каждого десятого солдата из отряда, проявившего трусость в сражении.



**Рис. 5.** (а, б) Формы собственных функций уравнения (27) для кластера, показанного на рис. 5г. На трехмерном графике — квадрат модуля амплитуды. Справа сверху — линии уровня собственной функции на кластере, которые можно сопоставить с контурами кластера. Случаи а–в соответствуют разным собственным частотам колебаний: (а) 2,5261, (б) 1,237, (в) 0,6571. (г) Контурный использованный для расчетов собственных колебаний кластера, полученного при компьютерном моделировании ОДА на плоскости

Анализ структуры собственных мод уравнения (27) на ковре Серпинского, проведенный в [88], показал, что все собственные состояния локализованы. Существует два класса локализованных состояний. Это молекулярные состояния, в которых участвует строго ограниченное небольшое число структурных элементов, и состояния, амплитуды которых отличны от нуля на всех масштабах, но длина локализации достаточно хорошо определена. Доля состояний первого типа для  $d$ -мерного ковра Серпинского —  $d/(d+1)$ , доля состояний второго типа —  $1/(d+1)$ .

Качественно такая ситуация имеет место и для нерегулярных фракталов. На рис. 5–7 показаны результаты численного определения собственных мод на фрактальном кластере, полученном при компьютерном моде-

лировании процесса ОДА. На рис. 5а–в представлены формы собственных колебаний для разных частот. Видно, что с уменьшением частоты растет размер области локализации колебаний. Тем не менее имеется большой разброс размеров локализации для близких частот. Состояния на рис. 6, имеющие близкие частоты, сильно различаются размером области локализации и, по-видимому, относятся к указанным выше двум классам состояний. На наличие двух классов состояний в численно определенных собственных колебаниях перколяционного кластера указано также в работе [89]. На рис. 7 показаны относящиеся к приведенному примеру функция распределения собственных колебаний кластера по частотам и соответствующая плотность распределения. Изрезанность и нерегулярность плотности харак-

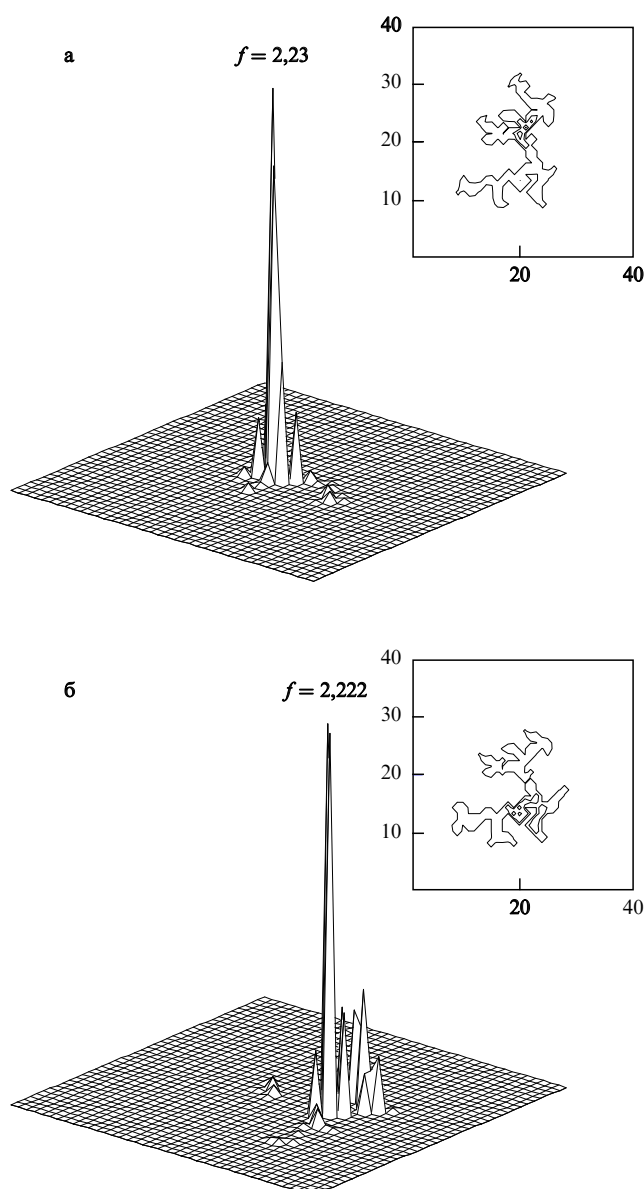


Рис. 6. То же, что и на рис. 5. Показаны "молекулярное" (а) и "протяженное" (б) колебательные состояния для очень близких частот. Справа сверху указано положение их центров на кластере

терны для любой конкретной реализации кластера, а выражение (24) относится, разумеется, к усредненной плотности.

### 3.3. Упругие свойства фрактальных материалов

В общем случае упругие колебания фрактальных кластеров не описываются уравнением (18). Однако свойства фрактонной области спектра, определяемые спектральной размерностью, сохраняются. Сама же фрактонная размерность уже не дается выражением (24), а получается из различных моделей упругих свойств фракталов. Упругие свойства фракталов важны сами по себе и их теория является хорошим примером макроскопического описания масштабнoinвариантных неупорядоченных сред.

**3.3.1. Масштабная зависимость упругих модулей.** Принципиальное отличие упругого поведения фрактальных материалов от поведения, описываемого теорией упру-

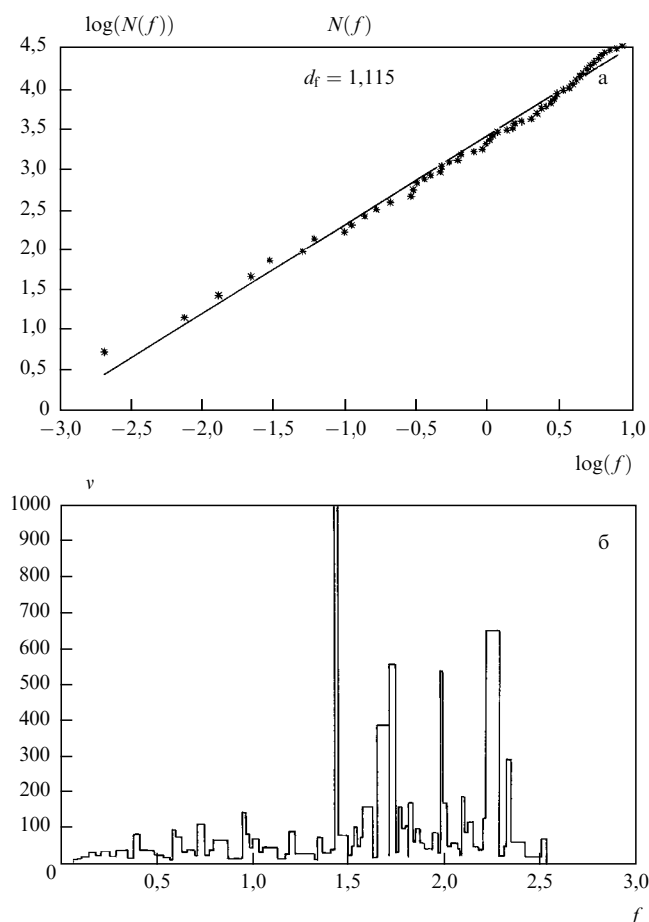


Рис. 7. Функция распределения собственных колебаний кластера рис. 5г по частотам (а) и соответствующая плотность распределения собственных состояний (б)

гости сплошных сред, заключается в зависимости упругих модулей от масштаба деформации. Измерения упругих модулей, проведенные с фрагментами фрактальной структуры разного размера, дадут разные результаты. В такой общей формулировке, однако, это присуще не только собственно фракталам, но и широкому классу естественных и искусственных материалов и конструкций с иерархической структурой [90]. Такой структурой обладают композитные материалы в природе и технике, ажурные металлические конструкции (Эйфелева башня) или природные конструкции типа пчелиных сот. Иерархическая структура в целом, например композитный материал, составлена из элементов меньшего масштаба (например, слоев), которые в свою очередь могут состоять из более мелких структур (волокон), и т.д. Различные уровни иерархии могут таким образом иметь разную структуру (волокна, слой), а число уровней может быть не очень большим (для Эйфелевой башни — три).

Фрактальные материалы отличаются от общего случая подобием структур уровней разных масштабов в некотором диапазоне масштабов. Фрагменты материала с размерами из этого диапазона масштабов составлены по определенному закону из фрагментов меньшего масштаба, которые в свою очередь по тому же закону составлены из еще более мелких фрагментов, и т.д. Конечно, для реальных материалов самоподобие следует понимать в статистическом смысле — статистиче-



ские характеристики расположения элементов одного масштаба во фрагменте большего масштаба не зависят от абсолютных значений масштабов, а определяются только их отношением.

Пусть  $E(l)$  — упругий модуль для фрагмента фрактальной структуры размера  $l$  во фрактальном диапазоне масштабов. В силу самоподобия структуры отношение упругих модулей для разных масштабов  $l, l'$  определяется только отношением масштабов

$$\frac{E(l)}{E(l')} = f\left(\frac{l}{l'}\right). \quad (30)$$

Для трех различных масштабов  $l, l', l''$  выполняются равенства  $E(l)/E(l') = f(l/l')$ ,  $E(l')/E(l'') = f(l'/l'')$ ,  $E(l)/E(l'') = f(l/l'')$ , откуда следует, что функция отношения масштабов  $f(x)$  должна удовлетворять следующему функциональному уравнению:  $f(xy) = f(x)f(y)$ , общее решение которого имеет вид  $f(x) = x^{-\zeta}$ , где  $\zeta$  — произвольное число. Отсюда для масштабной зависимости упругого модуля  $E$  получаем следующее выражение:

$$E(\lambda l) = \lambda^{-\zeta} E(l), \quad (31)$$

если масштабы  $\lambda l$  и  $l$  принадлежат интервалу самоподобия. Масштабная зависимость упругих свойств фрактала определяется показателем  $\zeta$ , который часто называют геометрическим показателем упругости. Показатель  $\zeta$  определяет масштабную зависимость упругого модуля — отношение относительной деформации к напряжению. Жесткость же фрагмента материала — отношение силы к смещению — также имеет масштабную зависимость вида (31), но с другим показателем  $\zeta_E$ . Нетрудно установить связь между показателями  $\zeta$  и  $\zeta_E$  для фрактала, расположенного (вложенного) в пространстве некоторой размерности  $d$ . Рассмотрим жесткость  $d$ -мерного кубика, составленного из кубиков в два раза меньшего размера. При неизменном напряжении сила увеличивается пропорционально площади боковых граней в  $2^{d-1}$  раза, а смещение — пропорционально размеру в два раза. Следовательно, жесткость увеличивается в  $2^{d-2}$  раза. Тогда очевидно

$$\zeta_E = \zeta - d + 2$$

(в двумерном случае показатели  $\zeta$  и  $\zeta_E$  равны).

Показатели  $\zeta$  и  $\zeta_E$  определяются конкретной структурой фрактального материала и характером сил, действующих между его элементами. Они могут различаться даже для материалов, имеющих одинаковые фрактальные размерности.

Степенная зависимость упругости от размеров для полимерных цепочек давно известна. Это так называемая энтропийная упругость, которая не является результатом взаимодействия между звеньями цепочки. В силу фрактальной структуры полимерной цепочки предыдущие рассуждения применимы и в этом случае. Дальше мы не будем касаться энтропийной упругости, а рассмотрим упругость фрактальных сеток, обусловленную заданной упругостью связей. (О современном состоянии теории энтропийной упругости полимерных сеток см., например, [91, 92].)

Реальные материалы с фрактальной структурой состоят из сцепленных между собой фрактальных агрегатов размера  $\xi$ . Масштаб  $\xi$  зависит от режима образования материала и природы составляющих его частиц (см. раздел 2).

Упругие свойства материалов на масштабах, превышающих  $\xi$ , описываются в приближении сплошной среды, а соответствующие упругие модули определяются упругими модулями составляющих фрактальных агрегатов при максимальном размере  $\xi$ .

Компьютерные модели образования фрактальных структур определили развитие решеточных моделей упругих свойств фракталов [93, 94]. В решеточных моделях рассматривается периодическая решетка узлов определенной симметрии (квадратная, кубическая, треугольная и т.п.). Фрактальный кластер получается как перколяционный кластер — бесконечный кластер теории протекания на такой решетке (см. раздел 2, рис. 16). Связям между входящими в кластер соседними узлами приписывают определенные упругие свойства. Результаты теории протекания при таком подходе позволяют довольно просто получить характеристики упругого поведения фрактальных кластеров. Полученные результаты применяют не только для перколяционных кластеров, но и для фрактальных кластеров другой природы, когда совпадают, например, их фрактальные размерности. Следует иметь в виду при этом, что фрактальные кластеры одной размерности могут иметь несовпадающие другие характеристики, такие, как разветвленность — число ближайших соседей в кластере, что, как будет видно, существенно влияет на упругие свойства.

Если предположить, что упругие силы в кластере действуют только между соседними узлами и линейно зависят от их относительного смещения, то потенциальная энергия деформированного кластера будет выражаться в виде некоторой квадратичной комбинации компонент смещений всех пар соседних узлов. В работе [93], где впервые изучались упругие свойства фракталов, использовался следующий частный случай такого выражения для потенциальной энергии:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} [\alpha(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)_{\parallel}^2 + \beta(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)_{\perp}^2], \quad (32)$$

где  $\mathbf{u}_i$  — вектор смещения  $i$ -го узла решетки,  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые постоянные, знаки  $\parallel$  и  $\perp$  обозначают компоненты смещения вдоль и поперек невозмущенного направления связи между узлами;  $K_{ij} = 1$ , если между узлами  $i$  и  $j$  имеется связь, и  $K_{ij} = 0$  в противном случае.

При  $\alpha \neq 0$  и  $\beta = 0$  выражение (32) приводит к модели центральных сил; если  $\alpha = \beta$ , получаем изотропную модель, используемую в теории упругости кристаллических твердых тел (так называемое борновское приближение).

Условие минимума энергии (32) дает систему уравнений для определения смещений. Внешнее воздействие на систему учитывается в граничных условиях. Решая эту систему, можно определить упругие постоянные кластера.

В случае перколяционного кластера для определения введенного в предыдущем разделе геометрического показателя  $\zeta$  достаточно определить зависимость упругих свойств от относительной концентрации целых связей  $p$  вблизи пороговой концентрации  $p_c$  (по сути, относительная концентрация  $p$  — вероятность того, что связь является целой). Ясно, что при  $p < p_c$  упругие постоянные равны нулю. Для модели (32) в случае  $\alpha = \beta = 1/2$  упругие постоянные при  $p > p_c$  описываются

скейлинговым законом вида (см. раздел 2):

$$E(p) \sim (p - p_c)^T. \quad (33)$$

Показатель  $T$  однозначно определяет геометрический показатель  $\zeta$ . Действительно, рассмотрим перколяционный кластер выше порога протекания — однородный фрактал — размера  $L > \xi$ , где  $\xi$  — введенный выше размер, ограничивающий область фрактального поведения. Жесткость кластера размера  $L$  следующим образом выражается через жесткость кластера размера  $\xi$  (см. вывод связи между показателями  $\zeta$  и  $\zeta_E$ ):

$$K(L) = K(\xi) \left( \frac{L}{\xi} \right)^{d-2}. \quad (34)$$

С другой стороны,  $K(L) = \tau^T$ , где  $\tau = p - p_c$ , а поскольку размер  $\xi$  выражается через  $\tau$  в виде  $\xi = \tau^v$ , где  $v$  — критический показатель для  $\zeta$ , то получаем

$$K(\xi) = \xi^{d-2} \xi^{-T/v} = \xi^{-T/v+d-2} = \xi^{-\zeta_E}. \quad (35)$$

Из (34) и (35) следует соотношение между  $\zeta$  и  $T$ :

$$\zeta_E = \frac{T}{v} + 2 - d; \quad \zeta = \zeta_E + d - 2 = \frac{T}{v}. \quad (36)$$

Для изотропной модели уравнения равновесия (минимума энергии (32)) одинаковы для всех декартовых компонент смещений и для каждой компоненты совпадают с системой уравнений Кирхгофа для электрических токов в сетке, если под компонентами смещений понимать потенциалы узлов, а электрические сопротивления связей считать одинаковыми [82]. Известно, что для сопротивления случайной сетки сопротивлений вблизи порога перколяции выполняется скейлинговый закон:  $R \sim (p - p_c)^{-t}$ , где  $t$  — критический показатель. Поэтому  $T = t$ . Для двух- и трехмерных сеток  $t$  равно 1,29 и 1,7 соответственно,  $v = 4/3$  и 0,88, а  $\zeta_E = 0,97$  и 0,93.

Модель изотропных сил мало реалистична и не подтверждается данными экспериментов по прямому измерению упругих модулей для многих реальных фрактальных материалов. С другой стороны, рассмотренные ниже данные о спектральной размерности, получаемые в экспериментах по рассеянию нейтронов, указывают на применимость в ряде случаев этой модели.

Более реалистичная, казалось бы, модель центральных сил приводит в случае перколяционного кластера к нарушению упругой связности — жесткость бесконечного кластера вблизи порога протекания оказывается равной нулю [93]. Ненулевая упругость появляется при значениях  $p = p_l$ , где значение  $p_l > p_c$ , т.е. выше пороговой концентрации. Однако и в этом случае зависимость упругих модулей от концентрации целых связей имеет вид, аналогичный (30), с заменой  $p_c$  на  $p_l$  [93]:

$$E(p) \sim (p - p_l)^{T'}, \quad (37)$$

где  $T' = 2,4$  для двумерного случая и  $T' = 4,4$  для трехмерного. Для треугольной плоской решетки  $p_l = 0,58$  ( $p_c = 0,3473$ ), для кубической гранецентрированной решетки  $p_l = 0,42$  ( $p_c = 0,119$ ). Для простой же кубической решетки (37) вообще не имеет смысла, здесь  $p_l = 1$ . Качественно модель центральных сил соответствует решетке шарнирно связанных пружин, и нулевая упругость на пороге перколяции означает, что деформация

перколяционного кластера возможна за счет одних лишь относительных поворотов связей без изменения их длины.

К выполнению условия упругой связности приводит учет упругости при изменении углов между связями (так называемая Bond-bending-модель). Такая модель предложена в работе [94]. Выражение для потенциальной энергии в этой модели имеет вид

$$U = G \sum_i \delta\varphi_{ijk}^2 + \frac{Q}{a^2} \sum_{ij} \delta u_{ij\parallel}^2, \quad (38)$$

где  $\delta\varphi_{ijk}$  — изменение угла между связями  $ji, ki$  с общим узлом  $i$ ;  $\delta u_{ij\parallel}$  — разность смещений узлов  $i$  и  $j$  в направлении, параллельном связи  $(i, j)$ ;  $G, Q$  — упругие постоянные;  $a$  — постоянная решетки. В случае извилистой цепочки связей без петель с большим числом звеньев  $N$  вклад центральных сил (второго слагаемого в (38)) становится пренебрежимо малым, и жесткость цепочки описывается полученным в [94], простым выражением

$$K = \frac{G}{NS_{\perp}^2}. \quad (39)$$

Здесь  $S_{\perp}$  — радиус гирации цепочки в направлении, перпендикулярном действующей на нее силе, — определяется выражением

$$S_{\perp}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_N - R_{i-1})_{\perp}^2,$$

где  $(R_N - R_{i-1})_{\perp}$  — проекция радиуса-вектора, соединяющего начало  $i$ -го и конец последнего звена цепочки, на направление, перпендикулярное силе.

Переход от упругих свойств одномерной цепочки к упругим свойствам фрактального кластера в работе [94] основан на интуитивно ясном предположении, что податливость кластера определяется лишь вкладом недублированных путей по связям. Для перколяционных кластеров на решетках в [94] показано, что  $T = 3,6$  и  $T = 3,55$  соответственно для двумерных и трехмерных решеток. Используя (36), получаем для  $\zeta_E$  соответственно значения 2,75 и 3,13.

Один из первых экспериментов по измерению упругости фрактальных материалов в широком диапазоне масштабов выполнен авторами работы [95]. Объектом исследования в [95] были материалы, полученные при спекании субмикронного серебряного порошка. Материалы получались с разными объемными долями  $f$  порошка в диапазоне от 0,06 до 0,291. Измерялись их упругость  $E$  и электропроводность  $\sigma$ , для которых получены соответственно следующие скейлинговые зависимости:

$$\sigma \sim (f - f_c)^t, \quad E \sim (f - f_c)^T,$$

где  $f_c \approx 0,062$  — критическая объемная доля. Показатели  $t = 2,15 \pm 0,25$  и  $T = 3,8 \pm 0,5$  сильно различаются, что указывает на неприменимость модели изотропных сил. С другой стороны, равенство порогов показывает несоответствие результатов и модели центральных сил. Числовое же значение величины  $T$  находится в хорошем согласии с моделью [94].

В работах [96, 97] упругие свойства двумерных перколяционных кластеров исследованы на простой физической модели — металлической пластине с отвер-

стями. При этом в работе [96] используется случайное расположение отверстий в узлах периодической квадратной решетки и полностью случайное их расположение (континуальная перколяция). Показатели  $T$  скейлинговой зависимости жесткости пластин от концентрации различаются в этих случаях. Для решеточной перколяции  $T = 3,5$  в согласии с предсказанием [94], для континуальной перколяции этот показатель больше  $T = 5$ . Близкое значение показателя  $T = 4,95$  получено и в работе [97], где отверстия также располагались полностью случайно. Значение показателя  $T$  для континуальной перколяции может быть теоретически обосновано на базе модели (38) [98]. В работе [99] упругость проволоочной сетки со случайно разорванными связями измерялась путем определения резонансной частоты торсионных колебаний свернутого из нее цилиндра. В отличие от существенно ограниченных по числу узлов моделей перколяции, использованных в [96, 97], в этой системе число связей достигало нескольких тысяч. Полученное в [99] значение показателя  $T = 3,6 \pm 0,2$  очень хорошо согласуется с предсказаниями [94].

Таким образом, в определенном смысле эти модели могут дать количественное описание упругих свойств перколяционных фрактальных кластеров и служить основой для определения параметров упругих колебаний по меньшей мере для систем, близких к экспериментально исследованным.

Для аэрогелей нет возможности прямо применить результаты рассмотрения упругих свойств фракталов в перколяционных моделях. Роль зависимости упругих свойств от превышения пороговой концентрации играет в этом случае их зависимость от плотности аэрогеля. Аэрогели образуются в результате агрегации субмикронных частиц твердой фазы, выпадающих при определенных условиях в растворах некоторых веществ ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{SiO}_2$ ). В процессе агрегации получают фрактальные кластеры, плотность  $\rho$  которых связана с размером кластера  $r$  как (см. раздел 2)

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{D-3}, \quad (40)$$

где  $D$  — фрактальная размерность кластера (для известных аэрогелей  $D = 1,7-2,2$ ), а  $\rho_0$  и  $r_0$  — плотность и радиус составляющих кластер частиц. При достижении некоторого зависящего от условий роста размера  $R$  кластеры соприкасаются и связываются между собой, образуя аэрогель плотностью  $\rho \sim R^{D-3}$ . Типичные значения размеров кластеров в аэрогелях лежат в диапазоне десятков и сотен нанометров, а плотность аэрогелей составляет от единиц до десятков граммов на литр [100]. Таким образом, аэрогель плотностью  $\rho$  состоит из кластеров размера

$$R = r_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/(D-3)},$$

а его модуль Юнга, следовательно, имеет вид

$$E(\rho) = E_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\zeta/(D-3)} = E_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta, \quad \beta = \frac{\zeta}{D-3}. \quad (41)$$

В работе [100] приводятся экспериментальные данные о зависимости модуля Юнга для аэрогелей от плотности.

По этим данным  $E_0 = 10^{6,58 \pm 0,18}$  Н/м,  $\beta = 2,8 \pm 0,2$ ,  $\rho_0 = 0,13$  г/см. Подставляя в (41) значения  $\zeta$ , полученные в решеточных моделях, и значение фрактальной размерности, измеренное для аэрогелей ( $D = 1,77$ ), будем иметь в изотропной модели ( $\zeta = 1,93$ )  $\beta = 1,57$ , а для модели одномерных цепочек с энергией (38) ( $\zeta = 4,13$ )  $\beta = 3,35$ . Последнее значение ближе к экспериментальному, однако нет возможности утверждать, что теория [77] дает точные количественные характеристики упругого поведения аэрогелей.

Очевидно, что скорость звука в аэрогеле также имеет степенную зависимость от плотности:

$$c(\rho) \sim \left( \frac{E(\rho)}{\rho} \right)^{1/2} \sim \rho^{\beta/2-1}. \quad (42)$$

На рис. 8 представлены некоторые экспериментальные данные о плотностной зависимости скорости звука в аэрогелях [100, 101].

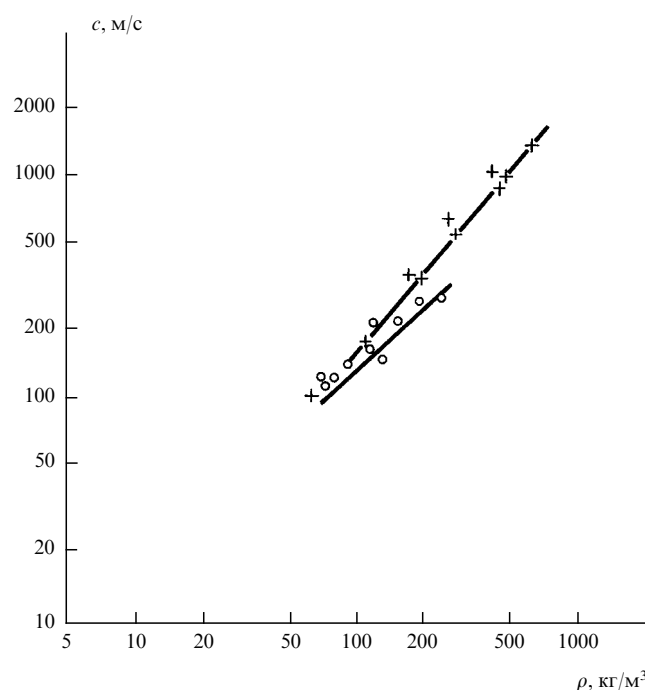


Рис. 8. Зависимость скорости звука в аэрогеле от его плотности по данным работ [83] —  $\circ$ , [84] —  $+$ . Наклоны прямых лежат в диапазоне 0,8–1,3

Рассмотренные модели упругости перколяционных кластеров имеют очевидное обобщение. Разорванным связям можно приписывать ненулевое значение упругости, отличное от упругости целых связей. В пределе можно рассматривать решетку, в которой целые связи абсолютно жесткие. Подробное численное исследование упругих свойств перколяционных кластеров в рамках таких моделей и сравнение результатов с экспериментальными данными содержатся в недавней работе [102]. По данным этой работы физические гели (гели, составленные из твердых макроскопических частичек) хорошо описываются моделью Уэбмана–Кантора [94], в то время как химические гели (полимеры) лучше описываются моделью центральных сил. В то же время, как мы увидим, эксперименты по определению скейлинга

колебательного спектра фрактальных материалов методами рассеяния нейтронов дают, как правило, значение показателя  $\zeta$ , отличающееся от предсказаний всех рассмотренных выше моделей.

Важно заметить, что описанная теория упругости может служить основой работ по созданию искусственных материалов с необычными колебательными свойствами.

**3.3.2. Нелинейно-упругие свойства фрактальных кластеров.** Нелинейно-упругие свойства фракталов изучены мало, если речь не идет об интенсивно развивающихся исследованиях фрактальных свойств разрушения [103–105]. Нелинейные свойства при слабых деформациях важны прежде всего для исследования нелинейно-волновых эффектов во фрактальных материалах. Следует отметить, что нелинейно-волновые эффекты во фракталах определяются не только нелинейной упругостью связей, но и структурой фракталов. Дело в том, что пространственное распределение амплитуды колебаний фракталов весьма неоднородно. Поэтому локально квадрат амплитуды колебаний может значительно превышать квадрат средней амплитуды, используемый для оценок нелинейных эффектов в гомогенных моделях неоднородной среды [106]. Структурный фактор влияет и на статическую нелинейную упругость фракталов.

Простейший подход к изучению нелинейно-упругих свойств фракталов в рамках решеточных моделей может быть основан на введении в выражения (32) или (38) членов с более высокими степенями  $\delta u$ ,  $\delta \varphi$ . Для случая центральных сил (без учета  $\delta \varphi$ ) этот подход реализован недавно в работе [107] при моделировании перколяции на плоской треугольной решетке. Как показано в [107], для модулей упругости второго и третьего порядков также выполняется степенная зависимость вида (37) со значениями показателя  $T' \approx 3,3 \pm 0,7$  для модуля второго порядка и  $T' \approx 4,3 \pm 1$  для модуля третьего порядка.

Нелинейно-упругие свойства фрактальных кластеров могут проявиться и без нелинейности связей. Это чисто геометрическая нелинейность, аналогичная герцевской нелинейности контактов твердых тел. В работе [108] геометрическая нелинейность анализируется для модели с упругой энергией, описываемой выражением (38) в предположении об определяющем вкладе недублированных цепочек связей. Геометрическую нелинейность в этом случае легко понять на следующем примере. Пусть пружина большого радиуса  $R$  свита не из проволоки, а из пружины меньшего радиуса  $r$ . Тогда большая пружина имеет малую жесткость, но, растянув ее в прямую, получим жесткость, определяемую пружиной меньшего радиуса, т.е. жесткость, зависящую от деформации. В случайных фрактальных цепочках связей имеется непрерывный диапазон масштабов "витков", что приводит к степенной зависимости жесткости от натяжения.

В [108] получено следующее выражение для зависимости жесткости фрактальной цепочки  $K$  от натяжения  $F$ , превышающего некоторый порог  $\tilde{F}$ :

$$K(F) \sim F^{(D+2)/(D+1)}, \quad (43)$$

где  $D$  — фрактальная размерность решетки. Порог  $\tilde{F}$  зависит от размеров кластера как

$$\tilde{F} \sim l^{-(D+1)}.$$

Если речь идет о перколяционном кластере, масштаб  $\xi$  фрактального поведения которого уменьшается с удалением от пороговой концентрации  $p_c$ :

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} = \tau^{-\nu},$$

то пороговое натяжение очевидно растет, а нелинейность при заданном натяжении падает. Полученная в [107] немонотонная зависимость относительного нелинейного модуля второго порядка от концентрации целых связей при значительном превышении пороговой концентрации качественно также соответствует такому поведению нелинейности.

Нелинейно-упругие свойства аэрогелей экспериментально исследованы в работе [101]. Здесь также применима приведенная аналогия с пружиной. Оказалось, что такая модель верна не только для растяжения, но и для сжатия — недеформированный аэрогель имеет большую жесткость, чем подвергнутый сжатию.

### 3.4. Собственные колебания фрактальных материалов

Дисперсионные свойства колебательных состояний фрактальных материалов вытекают из выражения (31) для масштабной зависимости упругих модулей и из степенного соотношения между размером и массой фрагмента фрактального кластера. Рассмотрим фрагмент фрактального кластера размера  $l$ . Его жесткость  $K(l)$  — отношение силы к смещению — преобразуется при изменении масштаба аналогично (31):

$$K(\lambda l) = \lambda^{-\zeta_E} K(l). \quad (44)$$

Масса кластера по определению фрактальной размерности  $D$  ведет себя так:

$$M(\lambda l) = \lambda^D M(l). \quad (45)$$

Для наименьшей частоты собственных колебаний кластера его можно рассматривать как сосредоточенные массу и упругость. Тогда из (44) и (45) получаем масштабную зависимость частоты колебаний в виде

$$\omega(\lambda l) = \lambda^{-(\zeta_E + D)/2} \omega(l). \quad (46)$$

Ясно, что аналогично ведут себя частоты колебаний кластера с характерным масштабом (длиной волны)  $l$ , меньшим размера кластера. Грубо говоря, закон дисперсии для колебаний на фракталах имеет вид

$$\omega(k) \sim k^{(\zeta_E + D)/2}, \quad k \sim \frac{1}{l}, \quad (47)$$

что существенно отличает колебания фракталов от колебаний сплошных упругих сред. Действительно, для обычных сред масштабная зависимость упругих модулей отсутствует —  $\zeta_E = -d + 2$ , фрактальная размерность равна размерности пространства:  $D = d$ , и из (47) получаем известное выражение для дисперсии акустических фононов  $\omega(k) \sim k$ . Плотность  $v_{ph}$  распределения фононных мод по частотам ниже дебаевской частоты в случае сплошной среды определяется размерностью пространства  $d$  обычным образом:  $v_{ph} \sim \omega^{d-1}$ .

В случае фрактальных материалов ситуация иная. Пусть  $N(\omega)$  — число колебательных состояний с частотами, меньшими некоторой частоты  $\omega$ . В силу соотно-

шения (46) можно считать, что фрагменты кластера с размерами

$$l \sim \omega^{-2/(\zeta_E + D)} \quad (48)$$

участвуют в таких колебаниях не деформируясь, а смещаясь как целое. Тогда число мод колебаний с частотами, меньшими  $\omega$ , равно числу таких фрагментов в кластере  $N_F$ , а последнее очевидно описывается соотношением

$$N_F \sim l^{-D}. \quad (49)$$

Выражение (49) — не что иное, как определение клеточной фрактальной размерности. Из (48), (49) получаем

$$N(\omega) \sim \omega^{2D/(\zeta_E + D)}. \quad (50)$$

Плотность же состояний

$$\nu(\omega) \sim \omega^{2D/(\zeta_E + D) - 1} = \omega^{d_f - 1}, \quad (51)$$

где  $d_f = 2D/(\zeta_E + D)$  — спектральная, или фрактонная, размерность.

Заметим, что сравнение (51) и (24) дает очевидную связь между показателем аномальной диффузии и геометрическим показателем для упругих модулей. Однако эта связь относится только к изотропной модели сил упругости. В общем случае такая связь отсутствует. В литературе часто встречается определение фрактонной размерности именно через характеристики случайных блужданий, и следует иметь в виду, что такая размерность не всегда связана с реальными колебательными состояниями фракталов.

Из соотношения (51) видно, что  $d_f$  полностью определяется показателем  $\zeta_E$  и фрактальной размерностью кластера. Это соотношение присуще всем моделям упругого поведения фракталов, однако разные числовые значения  $d_f$  могут характеризовать качественно разное поведение. Действительно, при  $d_f < 1$  плотность состояний расходится. Это означает [108], что если размер кластера достаточно велик (частота низшей моды мала), кластер становится неустойчивым по отношению к термическим флуктуациям, в то время как при  $d_f > 1$  плотность состояний стремится к нулю, как и в случае обычных материалов. Приведенные в [94, 108] значения показателя  $\zeta_E$  (полученные на основе модели (38)) соответствуют значениям фрактонной размерности, меньшим единицы. В этом случае реализуется ситуация, когда плотность колебательных состояний расходится в области низких частот.

Сейчас можно считать доказанным, что все собственные колебательные состояния фрактального материала во фрактонной области спектра локализованы. Это соответствует общему эффекту сильной или, как часто говорят, андерсеновской локализации волн в неоднородных средах с тем замечанием, что неоднородности, обусловленные фрактальной структурой, имеют широкий диапазон масштабов и коррелированы на больших расстояниях. Это обстоятельство, казалось бы, делает задачу об определении условий локализации и спектра локализованных состояний на фракталах значительно сложнее и без того непростой задачи о локализации в среде с некоррелированными неоднородностями.

Однако присущее фракталам свойство самоподобия позволило, как мы видели, легко продвинуться в решении этой задачи.

Простое поведение, определяемое частотой кроссовера и спектральной размерностью, свойственно упругим волнам не только во фрактальных решетках, но и в неоднородных сплошных телах, включающих перемешанные участки с разными упругими свойствами. Такая ситуация реализуется, например, в твердых телах, испытывающих перколяционные фазовые переходы [109]. При этом фрактальная структура появляется в связанных кластерах участков среды с одинаковой упругостью. В работе [110] исследован фрактонный спектр в искусственном продольно неоднородном волноводе для волн Лэмба, в котором неоднородности имеют фрактальное распределение.

Вообще, в случайно неоднородной среде вид локализованных волновых функций при сильной локализации определяется тремя масштабами — длиной волны, длиной свободного пробега волны при рассеянии на неоднородностях и собственно масштабом локализации. В силу масштабной инвариантности фракталов для фрактонных волновых функций все эти масштабы одинаковы и сводятся к одному, частотная зависимость которого описывается выражением (47) [111]. Для формы волновой функции в [111] предлагается модель суперлокализованной волновой функции  $\psi$  вида

$$|\psi(r)| \sim l^{-D/2} \exp\left[-\left(\frac{r}{l}\right)^{d_s}\right], \quad (52)$$

где  $l$  — зависящая от частоты длина локализации,  $D$  — фрактальная размерность, а  $d_s$  называется суперлокализационным показателем. Зависимость длины локализации от частоты определяется выражением (47). Учитывая (51), получаем

$$l \sim \omega^{-d_f/D}. \quad (53)$$

Закон спада волновой функции вида (52) следует из предположения об обычной экспоненциальной зависимости волновой функции от внутренней длины  $l_{in}$  на фрактале; для одномерных цепочек связей показатель  $d_s$  связан с показателем аномальной диффузии следующим образом:

$$d_s = 2 + \Theta = \frac{2D}{d_f},$$

где  $d_f$  — фрактонная размерность, определяемая из аналогии колебаний и диффузии на фракталах. Ясно, что в общем случае последнее выражение не выполняется. Однако модель (52) фрактонных волновых функций широко используется для параметризации результатов экспериментальных и численных исследований локализованных состояний на фракталах.

### 3.5. Экспериментальные исследования фрактонных

Таким образом, самоподобие фрактальных кластеров и компьютерные модели позволили решить вопрос о локализации волн в неоднородной среде с фрактальной структурой неоднородностей. Условием локализации является превышение частотой волны некоторого порога — частоты кроссовера, определяемой макси-

мальным размером составляющих среду фрактальных агрегатов и скоростью волн с большими длинами. Плотность локализованных состояний является степенной функцией частоты с показателем, определяемым фрактонной размерностью. Пространственный масштаб локализации также степенным образом зависит от частоты с показателем, равным отношению спектральной размерности к массовой фрактальной размерности.

Задачей экспериментальных исследований является проверка этих утверждений для реальных материалов. Первые экспериментальные свидетельства существования в реальных материалах фрактонного участка спектра колебаний, содержащего локализованные состояния, получены в [24] путем анализа данных о температурной зависимости теплоемкости и теплопроводности неупорядоченных твердых тел. Речь идет об интервале температур от единиц до нескольких десятков градусов Кельвина и колебаниях с частотами  $10^9 - 10^{12}$  Гц.

Что касается теплоемкости, то ее температурный рост прямо определяется частотной зависимостью плотности колебательных состояний. Проведенный в [24] анализ данных о теплоемкости эпоксидной резины показал, что плотность состояний пропорциональна  $\omega^2$  для частот, соответствующих диапазону  $\hbar\omega/k_B < 8$  К (это обычная фононная плотность состояний), и пропорциональна  $\omega$  для диапазона  $8 \text{ К} < \hbar\omega/k_B < 50 \text{ К}$  (это соответствует фрактонному спектру с фрактонной размерностью  $d_f = 2$ ). Оценка соответствующего максимального масштаба фрактальных кластеров дает значение  $\xi = 30 \text{ \AA}$ . В [24] этот масштаб ассоциируется с расстоянием между связями, образуемыми отвердителем между исходными молекулами эпоксидной смолы. Повышение концентрации отвердителя должно приводить к снижению масштаба и повышению частоты кроссовера, что хорошо подтверждается в эксперименте.

Теплопроводность диэлектрических твердых тел, как известно, обусловлена переносом теплоты потоком фононов и определяется теплоемкостью фононного газа и длиной свободного пробега фонона. Длина свободного пробега ограничивается нелинейным взаимодействием фононов. В кристаллическом твердом теле при температурах ниже нескольких десятков кельвинов теплопроводность растет благодаря росту теплоемкости фононного газа, достигает максимума, а затем быстро падает вследствие возбуждения высокочастотных фононов и снижения длины свободного пробега, что обусловлено увеличением нелинейного рассеяния на высокочастотных фононах. В неупорядоченных твердых телах температурная зависимость теплопроводности резко отличается от описанной. После роста при температурах в несколько кельвинов теплопроводность "выходит" на плато, где практически не меняется до температур в несколько десятков кельвинов. Затем теплопроводность снова растет. В качестве примера на рис. 9 приведены температурные зависимости теплопроводности в кристаллическом кварце и кварцевом стекле [112].

Наличие плато, как нетрудно понять, обусловлено тем, что в этой области температур теплоемкость растет вследствие вступления локализованных мод фрактонного участка спектра [24]. Таким образом, в [24] показано, что данные о теплопроводности и теплоемкости аморфных твердых тел можно объяснить, предполагая наличие фрактонного участка спектра колебаний и

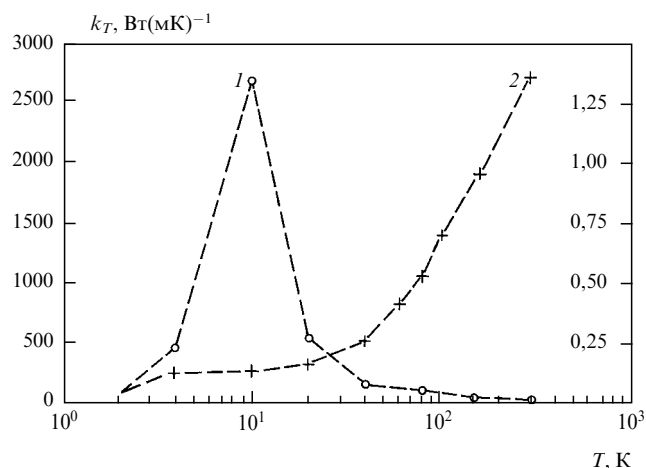


Рис. 9. Температурные зависимости теплопроводности для кристаллического кварца (кривая 1) и кварцевого стекла (кривая 2). Кривые построены по табличным данным справочника [112]. Экспериментальные точки обозначены знаками  $\circ$  и  $+$ . Теплопроводность стекла значительно ниже, чем кристалла, поэтому кривые нанесены в разных масштабах. Левая шкала по вертикальной оси — для кристалла, правая — для стекла

локализованность фрактонов. Нужно сразу сказать, что это не единственное возможное объяснение. Что касается полимеров и гелей, то их фрактальная структура бесспорна, и привлечение теории фрактонов для анализа их тепловых свойств вполне естественно. Структурные же исследования стекол не показывают наличия фрактальных свойств. Для объяснения тепловых свойств стекол предлагались разные модели [30]. Сейчас можно считать установленным [2, 113], что и в стеклах имеется область спектра колебаний, содержащая локализованные колебания с масштабами порядка десяти межатомных расстояний. Появление такой области обусловлено наличием среднего порядка в структуре стекла. В этом смысле фрактонная модель колебательных спектров относится к частной, использующей фрактальный подход, модели структуры среднего порядка в аморфных телах.

Непосредственные измерения формы и плотности распределения по частотам колебательных состояний во фрактальной структуре выполнены совсем недавно [110] и относятся к искусственной одномерной фрактальной структуре. Структура представляет собой отрезок одномерного волновода для волн Лэмба, составленный из чередующихся вдоль направления распространения волн слоев керамики и резины. Центры слоев резины расположены вдоль прямой как точки самоподобного фрактального множества — канторовой пыли (рис. 10). Это множество имеет фрактальную размерность 0,63 и получается следующим образом. Отрезок делится на три равные части и средняя часть удаляется; с оставшимися частями повторяется та же операция. Бесконечное число шагов дает фрактальное множество точек, самоподобное на всех масштабах, меньших исходной длины отрезка. В эксперименте использовалась структура, получающаяся при четырехкратном применении описанной процедуры. В итоге самоподобие имеет место на масштабах, превышающих  $3^{-4}$  длины исходного отрезка. Толщина слоев резины в [110] была меньше этого размера и выбиралась так, чтобы времена распространения в наименьших слоях резины и керамики были одинаковыми.

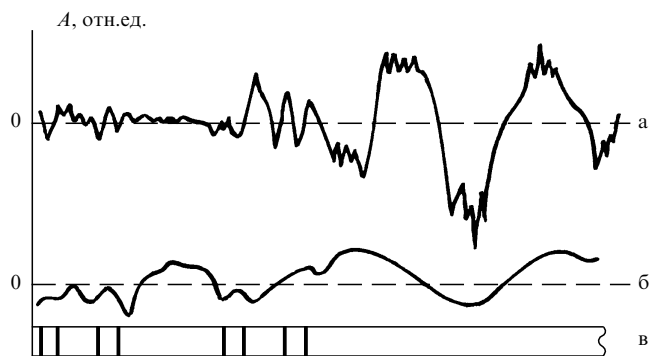


Рис. 10. Формы волновых функций состояний фрактонного (а) и фононного (б) участков спектра собственных колебаний отрезка одномерного волновода с фрактальным распределением неоднородностей [110]. Моды колебаний симметричны; показаны амплитуды на половине образца. Волновод керамический с резиновыми включениями. (в) Распределение включений вдоль волновода (черные полоски)

Измерения в [110] проводились в диапазоне частот 10 кГц–5 МГц. Формы колебаний измерялись по нормальным смещениям поверхности волновода с помощью лазерного виброметра. На рис. 11 показаны расчетное и измеренное интегральное распределение собственных колебаний по частотам. На рис. 10 показаны измеренные формы колебаний, соответствующие фонonному и фрактонному участкам спектра. На низких частотах возбуждались обычные распространяющиеся моды; при частоте 200 кГц наблюдался резкий переход к фрактонному поведению. Колебания на этом участке спектра локализовались, а измеренное значение спектральной размерности составило  $d_f = 0,67$ . Затем при большей частоте (около 1,5 МГц) наблюдался обратный переход к фононной плотности состояний, а на частоте около 2 МГц плотность состояний опять соответствовала спектральной размерности 0,67. Наличие двух частот кроссовера связано с тем, что искусственная неслучайная фрактальная структура самоподобна не при любом коэффициенте масштабного преобразования, а только при наборе дискретных значений коэффициента.

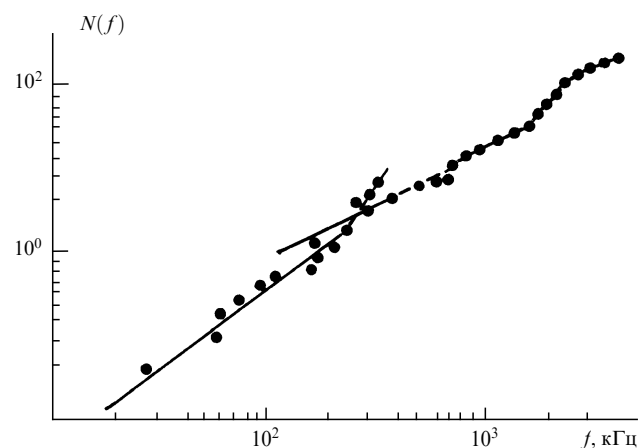


Рис. 11. Интегральное распределение собственных колебаний волновода (см. рис. 10) по частотам [110]. Точки — экспериментальные значения, сплошные линии — результаты расчетов

Первое, относящееся к реальным материалам экспериментальное наблюдение кроссовера от фононного спектра к фрактонному, описано, по-видимому, в работе [114]. В этой работе изучалось распространение ультразвука с частотами в диапазоне 1–20 МГц в образцах, полученных спеканием медного порошка. Использовались порошки с размером частиц от 0,5 до 10 мкм, а объемная доля частиц в образцах варьировалась от 0,3 до 0,6. Измерение частотной зависимости затухания ультразвука при его распространении в образцах показало резкое увеличение затухания при некоторой зависящей от объемной доли порошка  $f_c$  частоте  $\omega_c$ . При этом длина затухания на частоте перехода (кроссовера) удовлетворяла скейлинговому соотношению

$$l \sim (f - f_c)^{-\nu},$$

где показатель  $\nu = 0,88$ , как и для длины корреляции в перколяционном кластере,  $f_c$  — критическая объемная доля в модели перколяции через объемную решетку контактирующих сфер [81]. Скорость ультразвука также показала скейлинговую зависимость от объемной доли:

$$v \sim (f - f_c)^{T/2},$$

где показатель  $T = 3,6$ , что хорошо соответствует модели Уэбмана [94] для упругих свойств фракталов.

В материалах типа гелей и полимеров максимальный масштаб  $\xi$ , ограничивающий область фрактального поведения, не превышает длины световой волны видимого диапазона. Поэтому основными методами исследования фрактонных спектров являются измерения спектров комбинационного рассеяния света (КРС) и спектров неупругого некогерентного рассеяния нейтронов (ННРН).

В случае ННРН спектр рассеянных нейтронов, полученный, например, по "времяпролетному" методу или методом "нейтронного спинного эха", дает непосредственную информацию о плотности колебательных состояний. Имея длину волны порядка межатомных расстояний, нейтроны независимо рассеиваются на ядрах. Дифференциальное сечение рассеяния нейтронов в единичный телесный угол и в единичный интервал энергий  $d\sigma$  и плотность колебательных состояний  $\nu(\omega)$  связаны следующим соотношением:

$$d\sigma = \frac{\sigma_{\text{inc}}}{4\pi} \frac{k'}{k} \frac{N}{4M} q^2 \exp\left(-\frac{1}{3} q^2 \langle u^2 \rangle\right) \frac{\nu(\omega)}{\omega} n(\omega), \quad (54)$$

где  $\sigma_{\text{inc}}$  — сечение некогерентного рассеяния нейтронов на ядрах,  $k$  и  $k'$  — волновые векторы падающих и рассеянных нейтронов,  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  — вектор рассеяния,  $N$  и  $M$  — число и масса рассеивающих ядер,  $\langle u^2 \rangle$  — среднеквадратичное колебательное смещение ядер,  $n(\omega)$  — бозевский фактор:

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T)} - 1.$$

Выражение (54) получается в предположении линейности и малых по сравнению с длиной волны нейтронов амплитуд колебаний ядер.

По меньшей мере скейлинговые свойства спектра колебаний могут быть установлены согласно (54) с

минимальным количеством априорных предположений о механизме рассеяния.

Для КРС ситуация сложнее. Свет рассеивается на флуктуациях поляризуемости, и существенную роль играет его интерференция. Хотя выполняется формула, аналогичная (54):

$$I(\omega) \sim C(\omega) n(\omega) v(\omega),$$

частотная зависимость фактора  $C(\omega)$  существенно определяется формой волновых функций колебательного возбуждения и механизмом комбинационного рассеяния. По всей видимости, для фрактальных материалов эта зависимость имеет скейлинговый характер, однако точных результатов нет, и проблема остается предметом исследований [115].

Вообще, главный результат экспериментальных исследований колебательных спектров аморфных материалов в том, что в противоречии с представлением о полностью хаотическом расположении молекул спектры обнаруживают особенности на частотах, соответствующих масштабам колебаний порядка нескольких межмолекулярных расстояний. Эти особенности объясняются локализацией колебаний; причем это ведет к перераспределению плотности состояний в область низких частот. Для аморфных материалов с нефрактальной структурой ближнего порядка это выражается в появлении так называемого бозонного пика в плотности колебательных состояний [2, 31, 113, 116]. Бозонный пик соответствует распределению масштабов локализации вблизи некоторого среднего масштаба. Такие локализованные состояния не имеют самоподобной структуры и проявляются в стеклах и молекулярных аморфиках.

Для материалов, имеющих структуру "массовых фракталов", масштабы локализации совпадают с интервалом самоподобия структуры. Здесь бозонный пик сменяется интервалом со степенным видом плотности состояний с показателем, определяемым спектральной размерностью. (Имеются, однако, эксперименты, указывающие на такую структуру в стеклах [117] и в аморфной фазе жидких кристаллов (МББА) [31].)

Первые исследования структуры колебательных состояний фрактальных материалов относятся к гелям на основе  $\text{SiO}_2$  [118, 119]. В [118] изучается непосредственно спектр комбинационного рассеяния для фрактонного диапазона частот 600–5400 ГГц. Исследуется плотный ( $1,7 \text{ г/см}^3$ ) гель, имеющий, по-видимому, характер полимера, а не составленный из макроскопических частиц. Получена степенная форма спектра рассеяния:

$$I(\omega) \sim \omega^\mu.$$

Частотная зависимость фактора  $C(\omega)$  определяется в [118] на основе предположения о некогерентном сложении волн, рассеянных в каждой точке среды. Для рассеяния со сдвигом частоты  $\omega$  интенсивности рассеянных волн суммируются по объему  $I(\omega) = \omega^{-\tilde{d}/D}$ , занятую суперлокализованной волновой функцией фрактона. В итоге для фактора  $C(\omega)$  получено  $C(\omega) \sim \omega^\alpha$ , где показатель степени  $\alpha = 2\tilde{d}d_f/D - \tilde{d}$ . Это выражение, скорее всего, неверно — для каждого фрактона суммирование по объему нужно проводить для амплитуды рассеяния, а затем суммировать интенсивности света, рассеянного разными фрактонами [120]. Тогда, если принять суперлокализованную форму (52) для волновой функции фрактона, получим для показателя

$\alpha = 2\tilde{d}d_f/D - 1$  [120]. Поэтому полученные в [118] оценки спектральной размерности сомнительны<sup>5</sup>. Тем не менее скейлинговый участок спектра рассеяния установлен в [101] на интервале частот почти в декаду.

В работе [119] исследовались спектры рассеяния Мандельштама–Бриллюэна в аэрогелях плотностью от 103 до 407  $\text{кг/м}^3$ . Зависимость частотного сдвига рассеянного света от угла рассеяния дает дисперсионное соотношение для фононов. Экспериментальные данные в [119] хорошо описываются формулой

$$\omega = \frac{2v_l}{\pi l} \sin \frac{\pi k l}{2},$$

где длина  $l$  и скорость звука  $v_l$  связаны с плотностью  $\rho$  геля скейлинговыми соотношениями

$$l \sim \rho^{-z}, \quad v_l \sim \rho^x$$

с показателями  $z \approx 1,57$ ,  $x = 1,397$ . Этот результат можно интерпретировать на основе представления локализации колебаний с масштабами, меньшими  $l$ . Независимо измеренная фрактальная размерность аэрогелей  $D = 2,364$  дает для  $z$  значение, совпадающее с измеренным, а использование соотношений типа (41) и (51) позволило авторам [119] определить значение спектральной размерности —  $d_f = 1,252$ . Значение показателя  $\zeta_E$  при этом оказывается равным  $\zeta_E = 2,41$  — промежуточное между моделью изотропных сил и моделью [94] значение.

Более прямые исследования фрактонной области колебательного спектра проводились разными методами применительно к аэрогелям и полимерам в работах [120–126]. В работах [121, 122, 125, 126] используется ННРН, в работе [123] — КРС, в работах [120, 124] используются обе методики совместно. Во всех работах явно получен степенной участок плотности колебательных состояний шириной около декады, показатель степени которого отличается (меньше) от показателя фононной плотности; также наблюдается переход (кроссовер) от одного поведения к другому на некоторой частоте. В работах [120, 121, 125] изучаются фрактоны в полимерах; здесь частота кроссовера порядка 100 ГГц и соответствует масштабу  $\xi \approx 20\text{--}30 \text{ \AA}$ . В других работах объектом исследования был аэрогель  $\text{SiO}_2$ , наблюдалась частота кроссовера от одного до десяти гигагерц, что соответствует масштабу  $\xi \approx 100\text{--}1000 \text{ \AA}$ . В случае аэрогелей верхняя частота фрактонной области определяется размерами составляющих агрегат частиц и равна примерно первому продольному резонансу упругих колебаний кварцевых частиц этого размера.

Таким образом, структура спектра колебаний фрактальных материалов качественно подтверждается в экспериментах по рассеянию света и ННРН. Полученные методом ННРН в различных работах значения спектральной размерности и соответствующие значения показателя  $\zeta_E$  сведены в таблицу. Видно, что, как правило, эти результаты не показывают количественного соответствия какой-либо модели упругих свойств фракталов. Эти различия возникают по нескольким

<sup>5</sup> Использование некогерентного сложения в [118] привело к совпадению вычисленной по экспериментальным данным спектральной размерности со значением  $4/3$ , соответствующим популярной тогда гипотезе об универсальности спектральной размерности.



Таблица. Результаты экспериментального исследования фрактонных

| Объект                                            | Метод                | $D$               | Диапазон частот, Гц                     | $\omega_c$ , ГГц                        | $\xi$ , нм            | $\omega^{**}$ , ГГц | $d_f$                    | $\xi_E$                      | Источник |
|---------------------------------------------------|----------------------|-------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------|---------------------|--------------------------|------------------------------|----------|
| Дымовые частицы $\text{SiO}_2$                    | ННРН<br>время–пролет | 2,5               | $2,4 \cdot 10^{10} - 2,4 \cdot 10^{12}$ | 48                                      | 30 (4 нм-частицы)     | 480                 | 1,8<br>2,1               | 0,27<br>–0,11                | [122]    |
| Эпоксидная резина                                 | ННРН                 | —                 | $3 \cdot 10^{11} - 1,9 \cdot 10^{12}$   | 600                                     | 2                     | —                   | 1,5                      | —                            | [121]    |
| Аэрогель $\text{SiO}_2$                           | ННРН<br>время–пролет | 2,4<br>2,2        | $< 10^9 - 2,5 \cdot 10^{11}$            | 1<br>10<br>0,8<br>3                     | 11<br>7               | 250                 | 1,3<br>2,1<br>0,9<br>1,7 | 1,29<br>–0,1<br>2,68<br>0,51 | [124]    |
| $\text{SiO}_2$ в разных химических структурах     | ННРН<br>спиновое эхо | 2,4<br>2,9<br>2,5 | $10^{11} - 10^{13}$                     | 600<br>240<br>1300                      | 0,16*<br>0,15<br>0,19 | —<br>—<br>—         | 1,54<br>1,7<br>1,22      | 0,72<br>0,51<br>1,6          | [125]    |
| Аэрогель $\text{SiO}_2$                           | ННРН                 | 2,2<br>1,9<br>2,2 | $> 2 \cdot 10^{10}$                     | $5,0 \pm 1,2$<br>$10,7 \pm 2$<br>$> 17$ | 0,12*<br>0,16<br>0,25 | —<br>—<br>—         | 1,45<br>1,69<br>—        | 0,83<br>0,35                 | [126]    |
| ПММА<br>пленочный<br>массивный<br>дейтерированный | ННРН                 | 2–2,2             | $2,4 \cdot 10^{11} - 2,4 \cdot 10^{12}$ | $\sim 480$                              | 3                     | 2400                | 1,8<br>—<br>1,65         | 0,23<br>—<br>0,45            | [120]    |

\* Указаны значения плотности (г/см<sup>3</sup>).

\*\* Верхняя граница скейлингового участка фрактонной плотности.

причинам. Во-первых, согласно [122] можно предполагать неприменимость выражения (54) для сечения ННРН вследствие значительной ангармоничности колебаний фрактонной области. Различные значения спектральной размерности (см. таблицу) получены в этой работе для разных температур:  $d_f = 1,8$  при температуре 136 К,  $d_f = 2,1$  при 265 К. Авторы [124] не отмечают температурной зависимости спектральной размерности, но указывают на ее зависимость от волнового вектора рассеяния  $q$ . Анализируя данные, полученные с сильно различающимися векторами рассеяния, авторы [124] приходят к выводу, что в аэрогеле присутствуют колебания, управляемые упругими силами разного типа. На низких частотах, где наблюдаются меньшие значения спектральной размерности и большие амплитуды колебательных смещений, основной вклад в спектр ННРН дают колебания с упругими силами, описываемыми моделью Уэбмана [94]. На высоких частотах, где смещения меньше и значения спектральной размерности больше, основной вклад вносят колебания с центральными силами упругости. В целом спектр ННРН должен описываться суммой вкладов вида (54) с разными среднеквадратичными смещениями и видом плотности состояний. Отметим также, что согласно данным [124] произведения волновых векторов рассеяния и смещений оказываются не очень малыми (несколько десятых), и, строго говоря, формула (54) не может выполняться, так как в ней не учтены члены второго порядка по колебательным смещениям ядер.

В итоге данные о фрактонном спектре, полученные методом ННРН, дают лишь качественное подтверждение теории упругости фрактальных материалов, что, как было показано, относится и к методу КРС.

### 3.6. Численные исследования фрактонных

В численных исследованиях, как правило, рассматривается уравнение вида (18) на перколяционном кластере [51, 89, 127–130]. Следует отметить, что, несмотря на простую структуру уравнения (18), его численное исследование

представляет собой непростую задачу. Дело в том, что для изучения свойств фрактонных на случайных фрактальных сетках, в особенности их плотности состояний, необходимо рассматривать достаточно большое число узлов решетки. Размерность же задачи на собственные значения равна числу частиц. Даже для современных компьютеров задача на собственные значения с размерностью в несколько десятков тысяч весьма сложна. Поэтому, как правило, используется обходной путь [128–129], хотя имеются работы с прямой диагонализацией матрицы оператора в уравнении (18) [130, 51].

Численные исследования подтверждают кроссовер от фононного к фрактонному спектру. Степенная форма плотности состояний проверена в диапазоне частот по меньшей мере в две декады, а значение спектральной размерности равно  $4/3$ , как и предсказано в [25] для уравнения (18) на перколяционном кластере. Локализация состояний фрактонного спектра в виде (52) также получается и в численных исследованиях; однако конкретные значения суперлокализационного показателя различаются в разных работах. Так, в работе [127] получено высокое значение суперлокализационного показателя  $d_s = 2,3$ , а в работах [128, 129] суперлокализация вообще отсутствует — здесь  $d_s = 1$ . Дело, по-видимому, в том, что на случайных фракталах амплитуда локализованных волновых функций распределена весьма неоднородно и случайно в пределах радиуса локализации (см. рис. 5 и 6); поэтому примененные в [128–130] разные способы оценки ее среднего распределения в пространстве могут дать разные результаты. Форма (52) для волновой функции имеет, по-видимому, смысл некоторой усредненной величины. Некоторую ясность в этот вопрос вносит работа [51], в которой исследуется именно пространственная перемежаемость амплитуды волновой функции. В [51] показано, что квадрат амплитуды волновой функции фрактон на перколяционном кластере имеет мультифрактальное распределение. Таким образом, оценка моментов разного порядка может давать разные значения суперлока-

лизационного показателя. В [72] установлено также наличие молекулярных состояний на перколяционных кластерах, как и на регулярных фракталах (см. раздел 3.2).

### 3.7. Нелинейные взаимодействия фононов с фрактонами и теплопроводность аморфных тел

Как уже упоминалось, температурная зависимость теплопроводности аморфных твердых тел резко отличается от зависимости, присущей кристаллам. Различия заключаются в наличии плато протяженностью в несколько десятков кельвинов и росте теплопроводности выше плато с увеличением температуры (см. рис. 9). Область температур плато как раз соответствует возбуждению участка спектра локализованных колебаний. Это относится и к фрактальным материалам, и к стеклам.

Приведенные ниже рассуждения не относятся исключительно к фрактонному спектру колебаний, а подходят и для объяснения температурной зависимости теплопроводности любых аморфных материалов [29]. Однако именно теория фрактонов привела к пониманию механизмов теплопроводности в аморфных телах.

Наличие плато легко объясняется, если принять во внимание, что локализованные состояния (далее фрактон), во-первых, не участвуют сами в переносе тепла, а во-вторых, эффективно ограничивают длину свободного пробега фононов. Дело в том, что в силу локализации колебаний возможность проявления процессов нелинейного взаимодействия фрактонов с фононами не ограничивается условиями пространственного синхронизма. Фонон рассеивается на фрактоне, как на компактном рассеивателе. В квадратичном приближении возможны два типа процессов [26]: процессы с участием двух фононов и одного фрактона — два фонона рожают фрактон с суммарной частотой — и процессы с участием двух фрактонов — фонон поглощается фрактоном, изменяя его частоту (рис. 12). Оба процесса ограничивают длину свободного пробега фонона, а второй тип процесса обеспечивает рост теплопроводности выше плато. В [26] предложен следующий механизм роста теплопроводности. За счет взаимодействия с фононами по второму механизму происходит диффузия энергии по различным локализованным состояниям, сопровождающаяся и ее пространственным переносом. Возбуждение при росте температуры все большего числа фрактонов приводит к росту теплопроводности выше плато. В работе [27] проведен тщательный расчет температурной зависимости теплопроводности с учетом взаимодействий фрактонов с фононами. Вычисление матричных элементов указанных взаимодействий проведено в [27] с

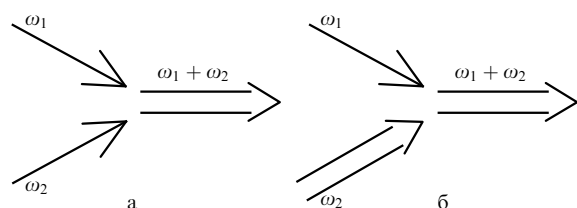


Рис. 12. Диаграммы процессов нелинейного взаимодействия фононов ( $\rightarrow$ ) с фрактонными состояниями ( $\Rightarrow$ ). (а) Два фонона рожают фрактон на суммарной частоте. (б) Фонон поглощается фрактоном, рождая фрактон на суммарной частоте [26]

выражением для волновой функции фрактона вида (52). Результаты расчетов выражены через непосредственно измеряемые величины и находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. В конечном счете, как показано в [29], для объяснения экспериментальных зависимостей нет необходимости использовать конкретные выражения для волновой функции локализованных состояний и их спектральной плотности. Достаточно предполагать локализованность колебаний с частотой выше некоторой частоты кроссовера.

Особенности нелинейного взаимодействия фрактонов с фононами могут иметь различные проявления, не связанные с тепловыми свойствами аморфных тел. Отсутствие требования пространственного синхронизма само по себе необычно для традиционной нелинейной акустики и может открыть интересные возможности для ее приложений. Примером работы в этом направлении может служить работа [131], в которой изучается нелинейное взаимодействие фрактонов с фононами в системе, исследованной в [110] (см. раздел 3.5). В работе [131] экспериментально установлено, что порог параметрической генерации в такой системе в 5–7 раз ниже, чем в однородном и периодически неоднородном волноводе. Исходная частота лежала во фрактонной области, а параметрически возбуждалась мода колебаний в фононной области спектра. Волновые функции, участвующих во взаимодействии мод, показаны на рис. 10. Анализ, проведенный в [131], показал, что снижение порога параметрической генерации во фрактальной системе объясняется наличием вблизи половинной частоты мод с большими по сравнению со случаями однородного и периодически неоднородного волновода интегралами перекрытия волновых функций взаимодействующих мод.

### 3.8. Флуктуации упругих свойств в однородном фрактале

Как показано выше, в материалах, представляющих собой однородные фракталы, упругие модули и соответственно скорости распространения упругих волн на больших масштабах определяются масштабозависимыми упругими модулями фрактальных кластеров, составляющих материал. Ясно, что в силу случайного характера образования кластеров их размеры и, следовательно, упругие параметры материала должны испытывать случайные флуктуации в пространстве. Нам не известны сколько-нибудь исчерпывающие исследования флуктуаций размеров кластеров в гелях. Для перколяционных же кластеров вблизи порога протекания известно [9], что имеет место так называемое свойство суперлакуарности. Число узлов  $S$  кластера размера  $L$  дается выражением

$$S \sim L^D,$$

а его дисперсия имеет вид  $\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \sim L^{2D}$ , т.е. относительные флуктуации вблизи точки перехода не убывают с ростом размеров кластеров.

Это свойство играет важную роль в сейсмоакустике. Известна модель, в которой рост напряжения в породах, приводящий к землетрясению, полагается аналогичным перколяционному переходу. При повышении концентрации отдельных очагов консолидации пород образуются кластеры все больших размеров, и в конце концов происходит перколяционный переход, приводящий к

росту масштабов очага напряжения [52]. В работе [132] исследуются флуктуации скорости звука в неоднородных средах с такого рода перколяционным переходом. Используется модель квазиодномерных цепочек и показано, что флуктуации скорости звука  $c$  имеют критическое поведение, неограниченно возрастаая вблизи точки перехода:

$$\frac{\langle \delta c^2 \rangle}{\langle c \rangle^2} \sim (p - p_c)^{-x}.$$

Показатель  $x$  выражается через размерность решетки  $d$  и критический индекс  $\nu$  перехода следующим образом:

$$x = d\nu - 1.$$

В целом вопрос о флуктуациях упругих свойств фрактальных материалов изучен мало, и мы затрудняемся указать еще какие-нибудь работы на эту тему.

#### 4. Излучение и рассеяние волн фрактальными структурами

Рассмотренные в предыдущем разделе свойства фрактальной области спектра упругих колебаний относятся либо к малым (в несколько десятков ангстрем) масштабам в реальных материалах, либо к искусственным фрактальным структурам. Особенности же излучения или рассеяния волн фрактальными объектами могут проявиться в естественных условиях и в макроскопической области масштабов. Фрактальную структуру имеют, например, распределение завихренности и примеси в турбулентном потоке [18, 74], морская поверхность [45], фронт просачивающейся сквозь случайную пористую среду жидкости [83], области концентрации напряжений в геологических породах [52]. Фрактальные свойства частиц сажи сильно влияют на поглощение и рассеяние света в атмосфере. Одна и та же масса частиц дает небольшое рассеяние и поглощение в плотном кластере и значительно большие сечения рассеяния и поглощения во фрактальном кластере [133]. Наиболее яркие проявления фрактальной структуры при рассеянии волн имеют место в случае многократного рассеяния [36, 37], однако некоторые особенности появляются уже в условиях однократного рассеяния.

##### 4.1. Рассеяние волн фрактальными поверхностями

Угловое распределение интенсивности волн, рассеянных крупномасштабной гладкой неровной поверхностью, определяется распределением уклонов поверхности. Фрактальная поверхность недифференцируема и не имеет определенных уклонов. Кроме того, фрактальность предполагает существование неровностей всех масштабов, включая и масштабы, большие длины рассеиваемой волны. Таким образом, для определения рассеянного поля оказываются неприменимыми ни приближение касательной плоскости, ни метод малых возмущений. Достаточно обоснованное общее решение задачи не известно. В первой работе на эту тему [33] использовалось приближение фазового экрана, т.е. вместо решения задачи о рассеянии на неровной поверхности  $h(x)$  рассматривалась дифракция волны, прошедшей тонкий фазовый экран с распределением оптической толщины  $kh(x)$ .

Во френелевском приближении, применимость которого подтверждается результатом расчета, выражение для амплитуды волны  $\psi$  на расстоянии  $z$  от фазового экрана имеет вид

$$\psi(x, z) = \exp \left[ i \left( kz - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^{1/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [2h(x')z - (x - x')^2] \right\}. \quad (55)$$

Здесь  $k$  — волновое число,  $x$  — координата вдоль поверхности.

В работе [33] рассмотрена поверхность с одномерными неровностями, имеющая структуру гауссова фрактала — графика обобщенного броуновского движения — со структурной функцией вида (6). В силу того, что такая поверхность не самоподобна, а самоаффинна, можно ввести некоторый характерный масштаб, определяемый следующим образом:

$$\langle (h(x+L) - h(x))^2 \rangle = L^2. \quad (56)$$

Грубо говоря, масштаб  $L$  (называемый иногда топотезой) — это расстояние, на котором наклоны поверхности  $(\Delta h / \Delta x)$  близки к единичным. В терминах топотезы структурную функцию (6) можно переписать в виде

$$\langle (h(\xi+x) - h(\xi))^2 \rangle = L^{2(1-H)} x^{2H}. \quad (57)$$

Из выражения (57) видно, что при  $L < x$  наклоны меньше единицы ( $0 < H < 1$ ), а при  $L > x$  — больше.

Гауссовость распределения  $h(x)$  позволяет просто вычислить корреляционную функцию амплитуды [33]:

$$R(x) = \langle \psi(\xi, z) \psi^*(x + \xi, z) \rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} k^2 L^{2(1-H)} |x|^{2H} \right]. \quad (58)$$

Угловое распределение интенсивности волны определяется преобразованием Фурье корреляционной функции (58):

$$I(\sin \theta) = \int R(x) \exp(ikx) dx = \frac{1}{k} \int dx' \exp \left[ -\frac{1}{2} (kL)^{2(1-H)} x'^{2H} - ix' \sin \theta \right], \quad (59)$$

где  $\kappa = k \sin \theta$ . Последнее равенство в (59) получено в результате замены  $x' = kx$ . Отметим, что формально угловое распределение интенсивности как функция  $\sin \theta$  совпадает с плотностью устойчивого по Леви распределения с параметром  $\alpha = 2H$  [79] (см. раздел 2.3.1). При больших углах распределение (59) спадает с ростом угла как  $(\sin \theta)^{-2H-1}$ ; при малых углах интенсивность приблизительно постоянна. Показатель степени в угловой зависимости можно выразить через фрактальную размерность поверхности:  $-2H - 1 = 2D - 5$ . Значение угла, разделяющего эти предельные случаи, нетрудно определить из (59). Оно дается очевидным условием

$$(kL)^{-(1-H)/H} \sin \theta \sim 1. \quad (60)$$

Условию (60) можно дать простую интерпретацию. Так как показатель  $H$  не превышает единицы, то угол, ограничивающий участок постоянства углового распределения, растет с ростом  $kL$ , т.е. с уменьшением длины волны по отношению к топотезе. Такое поведение соответствует вытекающему из (57) увеличению наклонов поверхности при уменьшении масштаба рассмотрения поверхности, что в случае рассеяния соответствует уменьшению длины падающей волны.

Фрактальная поверхность занимает промежуточное положение между обычной гладкой поверхностью и объемным распределением массы. Поэтому возможен другой, опирающийся на теорию объемного рассеяния волн подход к определению характеристик рассеяния на фрактальной поверхности [34]. Простейший вариант такого подхода будет рассмотрен в следующем разделе.

#### 4.2. Однократное рассеяние на фракталах и преобразование Фурье фракталов

Угловая зависимость интенсивности однократного рассеяния на неоднородностях показателя преломления определяется известным выражением

$$I(q) \sim \int \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}') dV, \quad (61)$$

где вектор рассеяния  $|\mathbf{q}|$  определяется углом рассеяния  $\theta$  и длиной падающей волны  $\lambda$ :

$$|\mathbf{q}| = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2},$$

а корреляционная функция флуктуаций квадрата показателя преломления пропорциональна функции корреляции плотности кластера:

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle \sim \langle \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle,$$

которая в случае фрактального кластера непосредственно определяется его фрактальной размерностью  $D$ :

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle \sim |r'|^{D-d}, \quad (62)$$

где  $d$  — размерность пространства вложения. Из (61) и (62) получаем для угловой зависимости интенсивности рассеяния

$$I(q) \sim q^{-D}; \quad (63)$$

$I(q)$  — это интенсивность рассеяния в единичный телесный угол под углом  $\theta$  к направлению падающей волны.

Для реальных фракталов, естественно, соотношение (62) выполняется в ограниченном диапазоне масштабов  $a_0 < r' < \xi$ , и соответственно (63) выполняется для  $1/\xi < q < 1/a_0$ . Более точно угловая зависимость  $I(q)$  выражается как произведение формфактора  $F(q)$  и структурного фактора  $S(q)$ :  $I = FS$  [134]. Формфактор соответствует угловой зависимости интенсивности при рассеянии на единичном элементе — частице, из которых состоит фрактальный кластер. Формфактор обращается в нуль при  $q \rightarrow 1/a_0$ . Структурный же фактор как раз и имеет вид  $S(q) \sim q^{-D}$ . При  $q \ll 1/a_0$  формфактор приблизительно постоянен, и для интенсивности рассеяния получаем выражение (63).

Вообще говоря, угловая зависимость, характеризующаяся выражением (63), не является исключительным свойством рассеяния на фрактальных объектах. Такую

угловую зависимость могут давать случайно и независимо расположенные в точках  $r_i$  особенности диэлектрической проницаемости вида [135]:

$$\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \varepsilon_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^\alpha. \quad (64)$$

Угловая зависимость интенсивности рассеяния от каждого такого рассеивателя имеет вид

$$I_i(q) \sim q^{-2(\alpha+d)},$$

и такой же будет огибающая угловой зависимости интенсивности рассеяния случайно расположенной совокупности рассеивателей. Ясно, что такая совокупность не обязана быть фрактальной хотя бы потому, что при пуассоновском законе распределения по пространству имеется нарушающий масштабную инвариантность масштаб, определяемый средним расстоянием между рассеивателями. Угловая зависимость рассеяния от каждой конкретной реализации совокупности рассеивателей изрезана вследствие случайной интерференции полей отдельных рассеивателей. Это относится и к случаю рассеивателей вида (64), и к случаю рассеяния на фракталах. Различия в этих случаях должны обнаруживаться именно в тонкой структуре реализаций угловых зависимостей. Исчерпывающая формулировка указанных различий неизвестна. В работе [134] исследуется преобразование Фурье регулярных фракталов. Показано, что тонкая структура угловой зависимости масштабно инвариантна относительно растяжений по оси  $q$ . Другими словами, угловая зависимость подчиняется соотношению

$$S(\gamma q) = \gamma^{-D} S(q),$$

а (63) выполняется для усредненной в некоторых интервалах значений  $q$  угловой зависимости  $\langle S(q) \rangle \sim q^{-D}$ . Для реализаций же случайных фракталов масштабная инвариантность тонкой структуры имеет, очевидно, статистический смысл.

Подчеркнем, что для совокупности рассеивателей вида (64) степенной вид (63) угловой зависимости интенсивности рассеяния имеет место для каждого рассеивателя в отдельности. При рассеянии же на фракталах зависимость (63) получается в результате интерференции полей, рассеянных на частицах, составляющих кластер, независимо от вида угловой зависимости рассеяния на отдельной частице. Это указывает на определяющую роль корреляции положения рассеивателей, входящих во фрактальный кластер. Корреляция особенно сильно сказывается на характеристиках многократного рассеяния на фракталах, которые рассмотрим в следующем разделе.

Другой случай рассеяния на нефрактальном объекте с угловой зависимостью интенсивности (63) имеет место, когда рассеивающий объект содержит поры или частицы со степенным распределением по размерам [136]. Если распределение  $P(r)$  пор или частиц по размерам в диапазоне масштабов, сравнимых с длиной рассеиваемой волны, имеет вид  $P(r) \sim r^{-\gamma}$ , то угловая зависимость интенсивности  $I$  также описывается степенным законом  $I(q) = q^{-x}$  с показателем  $x = 7 - \gamma$ .

Другая, чем в (63), связь показателя угловой зависимости с фрактальной размерностью при рассеянии на фрактальном объекте получается, когда рассеиватель

имеет фрактальную поверхность. В отличие от рассмотренного в разделе 4.1 случая предположим, что поверхность разделяет тела с близкими показателями преломления. Тогда для определения угловой зависимости рассеяния можно применить выражения (61), (62), однако связь корреляционной функции плотности с фрактальной структурой будет иная, чем в случае массового фрактала.

Определим среднюю вероятность найти занятый объем на расстоянии  $r$  от занятой точки для тела с фрактальной поверхностью размерности  $D$ . Она складывается из не зависящей от расстояния части для точек, удаленных на большее, чем  $r$ , расстояние от поверхности, и зависящей от расстояния части для точек вблизи поверхности. Объем, занятый последними, можно оценить объемом  $V_s$  покрытия поверхности кубами размера  $r$ . По определению фрактальной размерности получаем  $V_s = N_0 r^{3-D}$ , где  $N_0$  — некоторая постоянная. Пусть  $p(r, x)$  — вероятность найти частицу на расстоянии  $r$  от частицы, расположенной на расстоянии  $x < r$  от поверхности; усреднение этой вероятности по  $r$  дает следующее выражение для искомой корреляции [34]:

$$C(r) = \frac{V - V_s}{V} + \frac{V_s}{V} \frac{1}{r} \int_0^r p(r, x) dx. \quad (65)$$

В силу самоподобия поверхности среднее от  $p(r, x)$  не должно зависеть от  $r$ , поэтому получаем

$$C(r) = 1 - \text{const} \cdot r^{3-D}.$$

Подстановка этого выражения в (61) дает угловую зависимость интенсивности рассеяния в виде  $I(q) = q^{-(6-D)}$ .

Так как фрактальная размерность поверхности лежит в диапазоне 2–3, то показатель угловой зависимости лежит в диапазоне 3–4, который не перекрывается с диапазоном 0–3 показателя для массовых фракталов. Таким образом, эти случаи легко различить в эксперименте.

#### 4.3. Многократное рассеяние на фракталах

Особенности многократного рассеяния на фракталах обусловлены медленным спаданием корреляции плотности частиц, а теоретический анализ его опирается на свойство самоподобия. Фрактальные эффекты в многократном рассеянии проявляются уже при рассеянии на фрактальных кластерах с размерами меньше длины волны [36]. Это обусловлено влиянием корреляции положений частиц в кластере на поля, наведенные на отдельных частицах при перерассеянии падающей волны другими частицами кластера.

Пусть на совокупность рассеивателей, расположенных в компактной по отношению к длине волны области пространства, падает волна с амплитудой  $\varphi^0$ . Тогда для совокупности откликов отдельных рассеивателей  $x_i$  (в зависимости от природы волн и рассеивателей это могут быть дипольные моменты, амплитуда колебаний объема для монополей и т.п.) можно написать следующую систему уравнений, учитывающую взаимодействие рассеивателей:

$$x_i = \chi_0 \varphi_i^0 + \chi_0 \sum_{j \neq i} f(\mathbf{r}_{ij}) x_j, \quad (66)$$

где  $\chi_0$  — зависящий от частоты коэффициент отклика рассеивателя на внешнее поле,  $f(\mathbf{r}_{ij})$  — функция радиуса-вектора  $\mathbf{r}_{ij}$ , соединяющего  $i$ -й и  $j$ -й рассеиватели. Эта функция определяет поле, наведенное одним рассеивателем на другом ( $f \sim 1/r_{ij}$  для монополей, в случае диполей  $x_i$  — векторы, а  $f$  — тензорная функция  $\sim 1/r_{ij}^3$ ). Уравнение (66) можно записать в матричном виде  $\mathbf{x} = \chi_0 \varphi^0 + \chi_0 \mathbf{W} \mathbf{x}$ . Для компактного кластера матрица  $\mathbf{W}$  — действительная симметричная матрица, которая диагонализуются ортогональным преобразованием вида

$$\mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{U}^T = \text{diag}(w_n), \quad \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{1}.$$

Тогда решение уравнения (66) представляется в форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^T \text{diag} \left( \frac{1}{z - w_n} \right) \mathbf{U} \varphi^0, \quad (67)$$

или

$$x_i = \sum_{n,j} u_i^n u_j^n (z - w_n)^{-1} \varphi_j^0,$$

где  $u_i^n$  — компоненты собственных векторов, соответствующих собственным значениям  $w_n$ ,  $z = \Delta + i\delta = \chi_0^{-1}$  — величина, обратная отклику отдельного рассеивателя. Для резонансного рассеивателя величина  $\Delta$  соответствует отстройке от частоты резонанса, а  $\delta$  — обратной добротности резонанса. Вдали от резонанса отдельной частицы ( $\Delta \gg \delta$ ) из (67) получаем следующее выражение для мнимой части среднего отклика (поляризуемости) частицы в кластере:

$$\text{Im} \chi(\Delta) \sim \left\langle \frac{1}{N} \sum_n u_i^n u_j^n \delta(\Delta - w_n) \right\rangle. \quad (68)$$

Это означает, что частотная зависимость отклика определяется распределением собственных значений матрицы  $\mathbf{W}$ . Ввиду того, что функции  $f(\mathbf{r})$  быстро спадают с ростом расстояния, структура матрицы  $\mathbf{W}$  для фрактального кластера близка к структуре матрицы оператора из уравнения (18) для упругих колебаний. Распределение собственных значений этого оператора имеет степенной вид, определяемый спектральной размерностью. Можно предположить, что аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемом случае. Это действительно так. В работе [36], где исследуется поляризуемость и поглощение фрактального кластера, составленного из мономеров с диполь-дипольным взаимодействием на оптических частотах, получены степенной вид распределения собственных чисел  $v(\omega)$  и пропорциональной ему мнимой части отклика кластера от относительной расстройки  $\Delta$  частоты падающей волны от частоты резонанса отдельной частицы

$$\text{Im} \chi(\Delta) = \frac{\pi}{3} v(\Delta) \sim \Delta^{d_0-1}, \quad (69)$$

где  $d_0$  — некоторый аналог спектральной размерности, называемый в [36] оптической спектральной размерностью. Значение  $d_0$  определено в [36] численно и для разных типов фракталов лежит в диапазоне 0,3–0,6. Другими словами, частотная зависимость отклика частицы в кластере резко отличается от резонансной кривой отдельной частицы — поглощение падающей

волны имеет большое значение и вдали от резонанса, где оно медленно падает по степенному закону с ростом расстройки частоты. Собственные векторы  $u^n$  тогда соответствуют коллективным возбужденным состояниям частиц в кластере — аналогам фрактон. Их пространственный размер степенным образом зависит от отстройки  $l \sim \Delta^\alpha$ . Однако показатель степени  $\alpha$  связан с оптической спектральной размерностью иначе, чем показатель в дисперсионном соотношении для фрактон (53). В [36] получено следующее соотношение:  $\alpha = d_0 - 1/(3 - D)$ .

Наиболее интересное следствие особенностей многократного рассеяния на фрактальном кластере — это установленное в [36] усиление локальных флуктуаций поля. Из (67) и (69) можно получить следующее выражение для усиления среднего по частицам кластера квадрата поля:

$$G = \frac{\langle |\varphi_i|^2 \rangle}{|\varphi^0|^2} \sim \frac{1}{\delta} |\Delta|^{d_0+1}. \quad (70)$$

Для больших относительных расстройек — это большая величина, что может приводить к существенному увеличению нелинейных эффектов при взаимодействии падающей волны с кластером. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными результатами по фотомодификации<sup>6</sup> фрактальных кластеров при значениях интенсивности падающего света ниже пороговой; тогда наличие эффекта обусловлено усилением локальных флуктуаций поля. Ясно, что это усиление — общеволевой эффект, который должен иметь важные проявления в нелинейных взаимодействиях волн различной природы.

Аналогия коллективных возбуждений частиц при многократном рассеянии волн на компактном фрактальном кластере обусловлена пренебрежением в уравнении (66) фазовыми набегам при учете полей, действующих на частицу со стороны других частиц. Если же учитывать фазы, то матрица  $\mathbf{W}$  становится комплексной и, более того, несамосопряженной, что значительно усложняет задачу. В работе [37] с применением диаграммной техники, развитой в [137], рассмотрено многократное рассеяние света фрактальным кластером из металлических частиц с дипольным поверхностным резонансом. Рассеяние рассматривается с учетом фазовых набегов. Расчет учитывает коррелированность положений частиц в кластере, что повышает вероятность конструктивной интерференции рассеянных по разным каналам волн и возникновение того же эффекта сильных локальных флуктуаций поля. В [37] показано, что имеется критическая фрактальная размерность кластера  $3/2$ , такая, что для кластеров меньшей размерности имеет место гигантское возрастание сечения рассеяния. Этот эффект в [37] назван фазовым переходом видимость–невидимость. Качественная интерпретация такого резкого перехода в [37] не дана. Ясно, что с падением фрактальной размерности растет корреляция положений частиц; однако этот рост достаточно плавный. Уяснить появление перехода при фрактальной размерности  $D = 3/2$  можно, по-видимому, из следующих соображений. В кластере размера  $r$  содержится  $r^D$  частиц, которым соответствует  $\sim r^{2D}$

парно соединяющих их радиусов-векторов. Отложенные из одной точки эти векторы занимают область размера  $\sim r$ . При  $D > 3/2$  число радиусов-векторов растет быстрее, чем куб размера, и можно считать, они занимают всю область. При  $D < 3/2$  ситуация качественно меняется. Теперь с ростом  $r$  число векторов растет медленнее объема, и они занимают при больших  $r$  нулевой объем. Если рассматривать теперь многократное рассеяние как блуждание луча с частицы на частицу, то случаю  $D < 3/2$  соответствует резкое ограничение возможных шагов блуждания (возможные шаги занимают множество меры нуль). Это, видимо, и приводит к резкому росту вероятности конструктивной интерференции лучей, прошедших разные пути.

В работе [133] задача о рассеянии на фрактальных частицах решается с учетом многократного рассеяния, но в приближении самосогласованного поля. Фрактальность учитывается степенным изменением плотности при увеличении расстояния от центра агрегата. Уже это приближение показывает рост фактора усиления рассеяния при уменьшении фрактальной размерности.

#### 4.4. Излучение волн фрактальными объектами

Фрактальные эффекты в излучении могут иметь место уже в случае совокупности независимых точечных излучателей с фрактальным распределением в пространстве. Действительно, рассмотрим вклад в интенсивность излучения от сферы радиуса  $R$  с центром в точке наблюдения. В случае фрактального распределения с размерностью  $D$  на сфере число таких источников описывается выражением

$$N \sim R^D; \quad (71)$$

каждый источник дает вклад в суммарную интенсивность, пропорциональный  $1/R^2$ , поэтому для суммарной интенсивности получаем

$$I \sim R^{D-2}. \quad (72)$$

При равномерном распределении источников  $D = 2$ , и суммарная интенсивность не зависит от расстояния; при фрактальном распределении  $D < 2$ , и интенсивность падает с расстоянием.

Выражение (72) с предположением о фрактальном распределении звезд и галактик привлекается, в частности, к решению известного парадокса Ольберса о светимости ночного неба [39]. Если считать Вселенную бесконечной, то интегрирование (72) по расстояниям дает бесконечный результат — в этом суть парадокса. Распределение же по сферам с достаточно малой фрактальной размерностью приводит к конечному результату даже при бесконечных размерах Вселенной.

Отметим, что по современным данным распределение галактик на масштабах до 100 Мпк фрактально с массовой фрактальной размерностью  $D = 1,2$  [138]. Такому распределению соответствуют распределения по сферам с размерностью  $D_s = D - 1$ . Получаем следующую зависимость суммарной интенсивности от расстояния:  $I \sim R^{-1,8}$ , а интеграл от нее по расстояниям —  $\int I dR \sim R^{-0,8}$ . Таким образом, предположение о роли фрактальности в светимости ночного неба не лишено оснований.

Фрактальные эффекты в излучении волн имеют и другие стороны. В работе [38] рассматривается тепловое излучение фрактальных агрегатов. Наличие локализо-

<sup>6</sup> Фотомодификация кластеров из малых металлических частиц сводится к выжиганию некоторых частиц за счет нагрева при поглощении падающей волны.

ванных коллективных состояний, рассмотренных в предыдущем разделе, приводит к аномально высокому поглощению в расчете на одну частицу агрегата, и, следовательно, к аномально высокому тепловому излучению на единицу массы агрегата.

В [38] этот результат получен из более простых соображений; предполагается, что граничные условия для излучаемых волн на поверхности кластера совпадают с условиями для сплошной частицы, тогда ее тепловое излучение такое же, как у кластера, но число частиц в кластере меньше в  $(r/r_0)^{3-D}$  раз, где  $r$ ,  $r_0$  — размеры кластера и составляющих его частиц,  $D$  — фрактальная размерность. Излучение кластера в расчете на одну частицу выше.

Другие проявления фрактальных структур в излучении связаны с флуктуациями излучения фрактальных систем. В применении к сейсмике такие эффекты рассматриваются в [40, 52], где речь идет о флуктуациях акустической эмиссии в процессах перестройки структуры пород. Одна из моделей, рассматриваемая в [40], связана с перколяционной моделью диффузионного фронта. В диффузионном фронте концентрация диффундирующего агента меняется от нуля вдали от источника до единицы вблизи него. В каком-то месте фронта концентрация равна пороговой концентрации протекания. Вблизи этого места диффундирующее вещество образует фрактальные кластеры [83]. В результате этого изменения связанного объема, занятого диффундирующим агентом, происходят не за счет движения отдельных частиц, а за счет присоединения к фронту и отсоединения от него целых кластеров с широким диапазоном размеров. Возникает так называемый геометрический шум, общие характеристики которого исследованы в [83].

Важно отметить, что это универсальный эффект, не требующий специальных условий образования фрактальных объектов. Он обусловлен только наличием диффузии и может проявиться при излучении волн различной природы. Так, в [139] рассматриваются флуктуации давления при просачивании тяжелой жидкости через случайную пористую среду. Просачивание имеет диффузионную природу, и поэтому реализуются условия для возникновения фрактального геометрического шума.

## 5. Фрактальные структуры в волновых полях

В этой области нет развитых общих подходов. С волновыми полями могут быть связаны самые разные геометрические объекты — пространственное распределение интенсивности поля, форма волны, лучевая картина. Изучение фрактальных структур волновых полей, так же, как и в случае случайных процессов (см. раздел 2.2), может дать сокращенное описание поля сложной структуры, полезное, например, для понимания нелинейных волновых процессов или характеристик естественных шумов.

Наличие в волновых полях выделенного масштаба — длины волны — ограничивает масштабы проявления фрактальных свойств. В случае широкого спектра волн речь может идти о фрактальной структуре формы волны при наличии самоподобного участка спектра. В общем случае фрактальность может проявиться на масштабах, превышающих характерную длину волны, — в лучевой структуре или крупномасштабном распределении интенсивности поля.

В этом разделе мы опишем отдельные группы результатов по фрактальным структурам в волновых полях и рассмотрим перспективный общий подход к анализу сигналов и полей, основанный на мультифрактальной модели.

### 5.1. Мультифракталы и анализ сигналов

Мультифрактал — это объединение фрактальных множеств разных размерностей. Подробное общее описание мультифракталов и связанных с ними понятий и результатов содержится в книге [9] и обзоре [48].

Мультифрактальный анализ может давать нетривиальные результаты в применении не только к самоподобным объектам и даже не обязательно к фракталам. Суть же его — в рассмотрении размерностей  $D_q$  Реньи различных порядков. Для самоподобных в узком смысле объектов все эти размерности одинаковы и равны фрактальной размерности  $D_0$ . Рассмотрим моменты плотности распределения точек на объекте

$$M_q = \sum_{N(l)} [p(l)]^{q+1} \quad (73)$$

в зависимости от масштаба разбиения объекта  $l$ . Тогда по определению размерностей Реньи получаем

$$M_q(l) \sim l^{\varphi(q)} = l^{qD_{q+1}} = l^{qD_0}, \quad (74)$$

где последнее равенство выполняется для самоподобных объектов. Другими словами, функция  $\varphi(q)$  для самоподобных объектов линейна. В общем случае это не выполняется. Однако если скейлинг (74) с некоторой функцией  $\varphi(q)$  по-прежнему имеет место, то объект можно описать в терминах мультифрактальной модели. Предположим, что объект можно разбить на совокупность фрактальных множеств с размерностями  $f(\alpha)$ , вблизи которых плотности имеют степенную зависимость от размера ячеек вида  $(l) \sim l^\alpha$ . Тогда моменты распределения плотности можно выразить следующим образом:

$$M_{q-1}(l) \sim \int l^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (75)$$

Для оценки интеграла при малых  $l$  можно применить метод перевала. В седловой точке  $\bar{\alpha}$  должно быть

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} = q(\bar{\alpha}), \quad (76)$$

а интеграл оценивается выражением  $l^{q\bar{\alpha} - f(\bar{\alpha})}$ . Следовательно, функции  $f(\alpha)$  и  $D_q$  связаны преобразованием Лежандра  $(q-1)D_q = q\bar{\alpha} - f(\bar{\alpha})$ .

Мультифрактальная модель имеет наиболее ясный смысл в применении к анализу сигналов (полей) при количественном описании распределения особенностей недифференцируемых в бесконечном числе точек сигналов. Пример такого сигнала — винеровский процесс, не имеющий производной ни в одной точке. Естественно, для реальных физических сигналов о недифференцируемости можно говорить, только рассматривая некоторый диапазон масштабов, больших определенного минимального масштаба. Так, например, для пространственной зависимости скорости турбулентного течения — это масштабы, превышающие внутренний колмогоровский масштаб турбулентности.

Пусть имеется непрерывный процесс  $x(t)$  с особенностями производной. Предположим, что вблизи особенностей квадрат разности значений сигнала в близких точках ведет себя степенным образом при изменении расстояния между точками:

$$|x(t) - x(t + \tau)|^2 \sim \tau^{2\alpha}; \quad (77)$$

это соотношение соответствует наличию в точке особенности гельдеровской производной порядка  $\alpha$  [8]. В точках, где производная непрерывна,  $\alpha = 1$ , значение  $\alpha > 1$  соответствует точкам с нулевой производной, но вторая производная может иметь разрыв. Для всех точек винеровского процесса, например,  $\alpha = 1/2$ . Предположим далее, что точки с определенным показателем  $\alpha$  образуют фрактальное множество размерностью  $f(\alpha)$ ; тогда аналогично (75) можем записать для структурной функции процесса порядка  $q$  следующее выражение:

$$\langle |x(t) - x(t + \tau)|^q \rangle = \int \tau^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha \sim \tau^{q\bar{\alpha} - f(\bar{\alpha})},$$

где

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\bar{\alpha}} = q.$$

Таким образом, если структурные функции исследуемого процесса разных порядков имеют степенную зависимость от интервала вида  $\tau^{\varphi(q)}$ , то можно принять мультифрактальную модель распределения особенностей производной сигнала. Функцию  $f(\alpha)$  при этом можно получить как преобразование Лежандра показателя  $\varphi(q)$ .

Функция  $f(\alpha)$ , которую принято называть спектром сингулярностей, в последнее время находит широкое применение. В отличие от спектра мощности или корреляционных функций процесса спектр сингулярностей несет информацию о локальной структуре процесса, что существенно расширяет возможности распознавания сигналов различного происхождения. Заметим также, что мультифрактальный анализ дает осмысленную "выжимку" из информации о моментах различного порядка двухточечного распределения вероятностей процесса.

Первые применения мультифрактальной модели относятся, по-видимому, к описанию структуры скорости турбулентного течения в инерционном интервале масштабов [140, 141]. Получаемый при этом спектр сингулярностей скорости имеет еще одну важную интерпретацию. Разность скоростей в точках, разнесенных на расстояние  $r$ , согласно теории Колмогорова связана со средней по объему размера  $r$  диссипацией энергии  $\langle \varepsilon_r \rangle$  соотношением вида

$$\Delta v_r = (\langle \varepsilon_r \rangle r)^{1/3}.$$

Если считать, что  $\langle \varepsilon_r \rangle$  не зависит от объема усреднения, то для структурных функций скорости получаем

$$\langle |\Delta v_r|^p \rangle \sim r^{p/3};$$

спектр сингулярностей скорости вырождается в точку. Эксперимент показывает, что это не выполняется, и, следовательно, диссипация энергии не распределена равномерно в пространстве; к ее распределению, как и к распределению особенностей скорости, применима

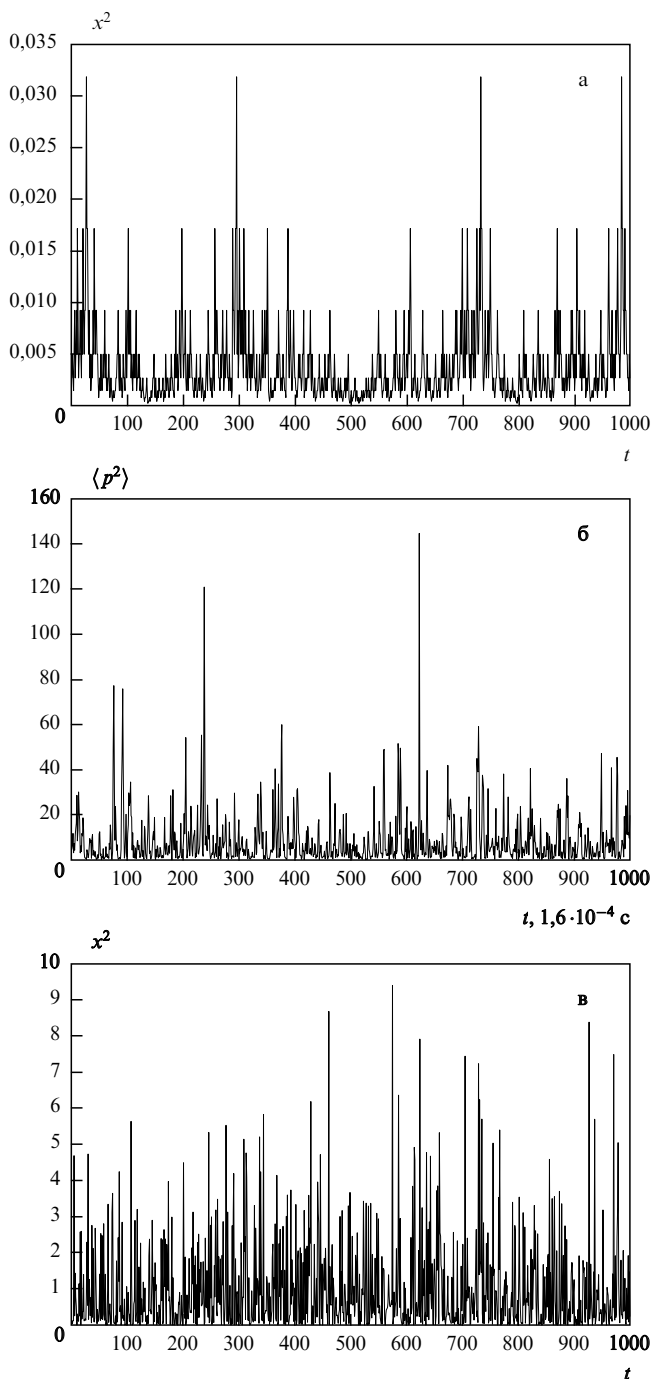
мультифрактальная модель. Другими словами, речь идет о применении мультифракталов к описанию перемежаемости поля диссипации энергии, которая первоначально описывалась с помощью логонормального распределения. Ясно, что мультифрактальная модель может применяться для анализа перемежаемости распределения плотности любой величины во времени или в пространстве. В этом случае об интеграле от этой плотности говорят как о мультифрактальной мере. Если рассматривать эту меру как недифференцируемую функцию, то ее спектр сингулярностей совпадает со спектром сингулярностей соответствующей плотности. Любой сигнал или его мгновенную мощность можно рассматривать как некоторую плотность на временной оси и применять к ней мультифрактальный анализ.

Подобный подход был применен в работе [50] к процессу пристеночных пульсаций давления при турбулентном течении в трубе. При этом в [50] процесс анализируется на временах, превышающих масштаб его корреляции; именно на таких масштабах времени перемежаемость процесса имеет мультифрактальную структуру. Существенно, что измерения показали независимость спектра сингулярности процесса от скорости потока. Спектр сингулярности действительно отражает структуру, а не энергетические характеристики процесса.

В работе [142] предложена простая модель мультифрактального процесса. Пусть на некотором отрезке амплитуда вначале равна  $a$ ; делим отрезок пополам и приписываем каждой половине случайным образом амплитуды  $pa$  и  $(1-p)a$ , затем повторяем процесс для каждой половины и так до бесконечности. Полученная таким образом плотность имеет мультифрактальный спектр сингулярности. Пример процесса, полученного по этой модели, показан на рис. 13а. На рис. 13б показан временной ход квадрата давления в процессе пристеночных турбулентных пульсаций. На рис. 13в для сравнения показан квадрат реализации гауссова белого шума. На рис. 14 приведены спектры сингулярностей этих процессов. Видно, что спектр сингулярностей для белого шума сосредоточен вблизи точки  $f = 1$ ,  $\alpha = 1$ . Экспериментально же измеренные точки спектра сингулярностей пульсаций давления хорошо ложатся на кривую спектра сингулярностей модельного процесса с  $p = 0,7$ . Схожесть характеров перемежаемости модельного и реального процессов видна и непосредственно по реализациям (рис. 13а,б).

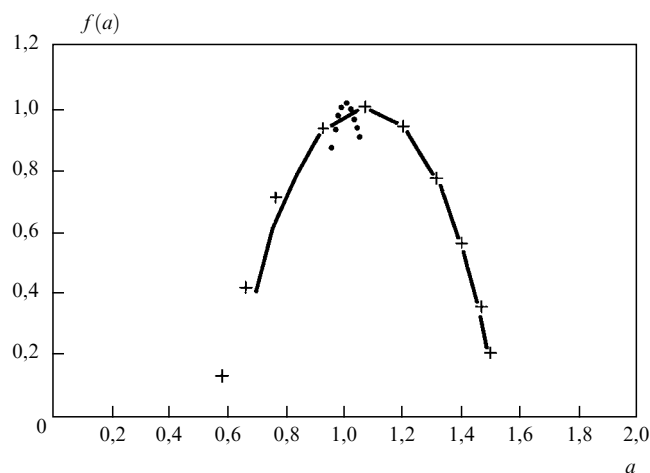
В работе [51] мультифрактальный анализ применен к распределению амплитуд волновых функций фрактонів на перколяционном кластере. Мультифрактальный анализ применяется здесь к плотности, равной квадрату амплитуды собственной функции уравнения (18) на перколяционном кластере. Кластер получен при моделировании перколяции с пороговой концентрацией узлов на квадратной решетке размером  $64 \times 64$ . Волновые функции получены путем прямого численного определения собственных векторов уравнения. Установлено степенное поведение получаемых по формуле (73) величин  $M_q$  в диапазоне значений  $q = 5-10$ . Для собственных функций на полной квадратной решетке показатель степени  $\varphi(q)$  из (74) в зависимости от  $q$  имеет простой вид —  $\varphi(q) = 2q$ . Для фрактонів эта зависимость изменяется, во-первых, потому, что волновые функции сосредоточены на фрактале, а во-вторых, потому, что сами волновые функции имеют очень нерегулярную структуру. При  $q = -1$  в [43]



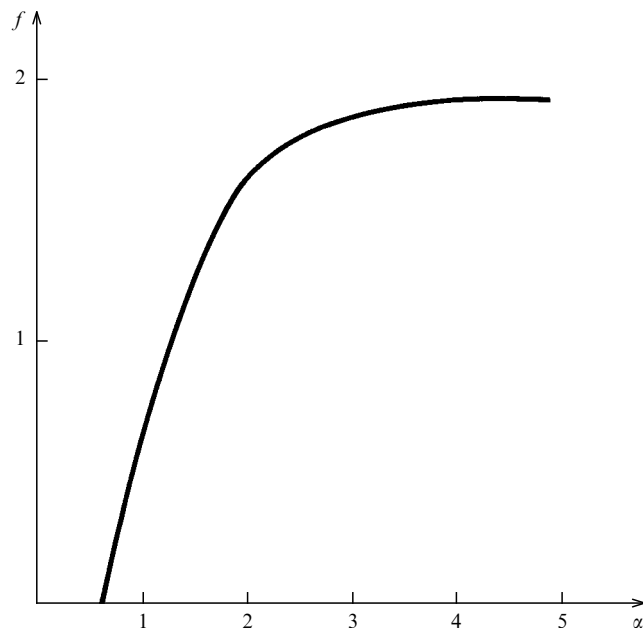


**Рис. 13.** (а) Мультифрактальный процесс, полученный по модели работы [140]. (б) Квадрат пристеночных пульсаций давления в турбулентном потоке, усредненный по интервалам  $1,6 \cdot 10^{-4}$  с [50]. Размер датчика 1 см, скорость потока — 10 м/с. (в) Квадрат белого шума с нормальным распределением амплитуд. По горизонтальной оси — номера отсчетов, по вертикальной — условные единицы

получено значение  $\varphi(q) = -1,9$ , равное фрактальной размерности перколяционного кластера, как и должно быть. Для других значений  $q$  равенство  $\varphi(q) = qD_0$  уже не выполняется, что обусловлено сильной перемежаемостью волновых функций в пределах кластера. Распределение амплитуд волновых функций имеет нетривиальный спектр сингулярностей  $f(\alpha)$ . Спектр  $f(\alpha)$  слегка зависит от частоты, но общая его структура одинакова для всех частот (рис. 15). Во-первых, при значении  $\alpha = 2$ , что отвечает точкам на кластере с обычным гладким



**Рис. 14.** Спектры сингулярностей процессов, изображенных на рис. 13а–в. Сплошная кривая — спектр сингулярностей модельного процесса, крестики — экспериментальный спектр пульсаций давления [50], пунктир — белый шум с нормальным распределением амплитуд



**Рис. 15.** Спектр сингулярностей фрактон на перколяционном кластере [51]

распределением амплитуд, значение  $f(\alpha)$  меньше размерности кластера —  $f(\alpha) = 1,5 - 1,6$ . Таким образом, точки с гладким поведением волновой функции занимают малую долю узлов кластера — тем меньшую, чем больше характерный масштаб локализации. Тем не менее для значений  $\alpha < 2$  спектр  $f(\alpha)$  быстро падает, т.е. точек, где амплитуда аномально быстро растет, еще меньше. Основная же доля точек приходится на значения  $\alpha > 2$ . В диапазоне значений  $\alpha = 2 - 5$  спектр сингулярностей приближается к постоянной величине  $f(\alpha) = 1,9$ , равной размерности кластера  $D_0$ . Таким образом, почти для всех точек кластера амплитуда волновой функции аномально мала. Отметим, что величина  $M_q$  при  $q = 0$  имеет прямое отношение к процессу нелинейного возбуждения фрактон удвоенной частоты. Спектр сингуляр-

ностей показывает, что нелинейный источник для фракталов удвоенной частоты сосредоточен в основном на части кластера, имеющей меньшую фрактальную размерность, чем весь кластер. Это обстоятельство должно существенно влиять на процесс генерации гармоник фрактонами.

## 5.2. Фрактальные структуры лучей

Фрактальные структуры присутствуют в картине лучей, распространяющихся в продольно неоднородном волноводе. Фрактальные структуры возникают из-за того, что уравнения лучей нелинейны. Изучение эффектов нелинейной динамики лучей опирается на представление уравнений лучей в гамильтоновой форме и аналогии с результатами нелинейной гамильтоновой динамики [143, 41].

В продольно однородных волноводах лучи периодически колеблются вблизи оси волновода, не покидая его. Захват лучей связан либо с наличием отражающих стенок, либо с неоднородным поперечным распределением показателя преломления. Длина цикла луча определяется начальным углом наклона луча к оси волновода. При наличии продольных неоднородностей (неровности стенок, колебания оси, изменения показателя преломления) становится возможным захват лучей в нелинейные резонансы. При этом существуют два типа поведения лучей, приводящие к фрактальным структурам. Если нелинейные резонансы не перекрываются, то динамика лучей не хаотична и фрактальность связана со структурой резонансов.

На примере акустического волновода в мелком море с периодически неровным дном было показано [144], что при распространении лучей в продольно неоднородном волноводе возможна ситуация, когда зависимость пространственной частоты (обратной длины цикла) лучей от угла выхода представляет собой фрактальную меру. Эта кривая почти везде имеет нулевую производную за исключением фрактального множества точек. Фрактальность проявляется и в зависимости времени распространения от угла выхода, что очевидно влечет фрактальный характер сигнала при распространении импульсного сигнала в волноводе.

В работе [144] рассматривается волновод с однородным заполнением и абсолютно отражающими стенками; одна его стенка плоская, а другая имеет периодические неровности вида

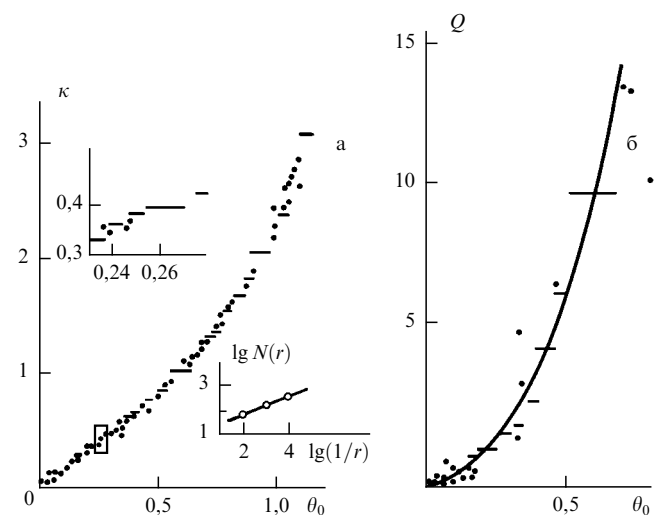
$$f(z) = \frac{4b}{L} \xi(1 - \xi),$$

где  $b, L$  — соответственно амплитуда и период неровностей,  $\xi = (z/L)$  — дробная часть нормированной на период продольной координаты  $z$ . При  $b = 0$  глубина волновода —  $h$ . Лучи в таком волноводе распространяются, попеременно отражаясь от его стенок. Распространение луча можно описать нелинейным отображением, определяющим угол и продольную координату отражения луча от плоской стенки через угол и продольную координату предыдущего отражения от плоской стенки. Если амплитуда неровностей равна нулю, то длина цикла луча  $D$  — расстояние между двумя последовательными отражениями от стенки — постоянна и равна  $D = 2h \cot \theta_0$ , где  $\theta_0$  — исходный угол выхода луча. Неровности оказывают наиболее сильное влияние на лучи, находящиеся в нелинейном резонансе с перио-

дом неровностей, что для некоторых целых чисел  $m$  и  $n$  означает выполнение равенства  $2n\pi/D = 2\pi m/L$ , или

$$\tan \theta_0^{(m,n)} = \frac{m}{n} \frac{2h}{L}, \quad (78)$$

обеспечивающего резонанс между какими-либо гармониками неровностей и траектории луча. Лучи с углом выхода вблизи одного из резонансных углов  $\theta_0^{(m,n)}$  захватываются в резонанс и имеют одинаковые средние периоды отражений и времена распространения. На рис. 16а [144] показана зависимость пространственной частоты  $\kappa$  колебаний луча от угла выхода  $\theta_0$ . Эта кривая состоит из ступенек с постоянной величиной  $\kappa$ , расположенных вблизи резонансных углов выхода. Распределение ступенек по углу выхода фрактально, в том смысле, что при увеличении разрешения  $r$  по углу число  $N(r)$  промежутков между ступеньками степенным образом зависит от разрешения. Это означает, что будет фрактальным распределение особенностей производной кривой (см. раздел 5.1). Фрактальность иллюстрируется на рис. 16 двумя врезками, показывающими увеличенно малый участок кривой и график зависимости  $N(r)$ . На рис. 16б представлена аналогичная ступенчатая зависимость длины луча (времени распространения сигнала по лучу).



**Рис. 16.** (а) Зависимость пространственной частоты колебаний луча от угла выхода луча из источника [144]. Шаг по углу — 0,01; на врезке увеличенный участок графика, обведенный прямоугольником, шаг по углу — 0,001. Параметры волновода:  $h/L = 1/3$ ,  $b/L = 0,001$ . (б) Зависимость длины луча (за вычетом расстояния вдоль волновода  $z$ ) от угла выхода луча [144]. Параметры волновода:  $h/L = 1/3$ ,  $b/L = 0,005$

Фрактальная структура нелинейных резонансов лучей следует уже из уравнения (78). На рис. 17 показаны распределения решений второго из уравнений (78) относительно угла выхода. На рис. 17а представлены решения с учетом резонансов до восьмой гармоники ( $m \leq 8$ ,  $n \leq 8$ ), на рис. 17б — решения с учетом резонансов до тридцати второй гармоники. Сравнение рис. 17 с рис. 16а показывает, что наиболее широкие области захвата нелинейных резонансов соответствуют углам выхода, в которых совпадает несколько резонансов. Сравнение рис. 17а и 17б демонстрирует самоподобную структуру

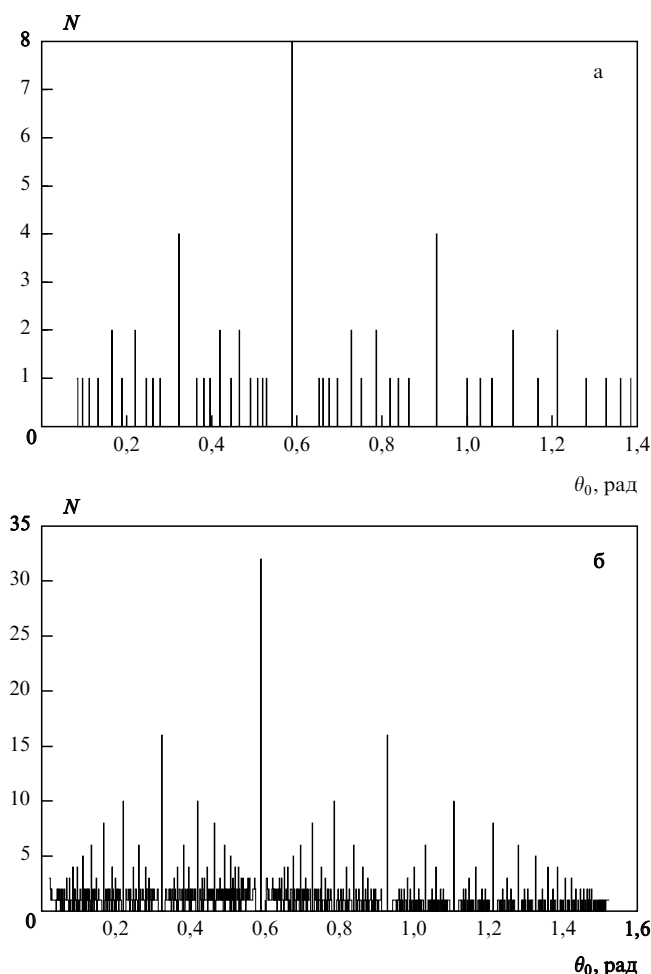


Рис. 17. Распределения резонансных углов выхода, полученные из уравнения (78) с учетом первых восьми гармоник (а) и первых тридцати двух гармоник (б)

резонансов. При увеличении числа гармоник — что эквивалентно увеличению разрешения по углу — растет число резонансов, причем распределение отдельных групп резонансов для большего числа гармоник подобно распределению резонансов во всем диапазоне углов для меньшего числа гармоник.

При перекрытии резонансов динамика лучей становится хаотической с присущими хаосу фрактальными свойствами фазового портрета. Для лучей в волноводе это отражается, например, в распределении плотности лучей в плоскости "угол наклона к оси — поперечная координата". Хаос лучей в акустическом волноводе в мелком море с периодически неровным дном рассмотрен также в [144]; он возникает при достаточно малых углах выхода лучей. Условия возникновения хаотической динамики лучей применительно к глубоководным океанским волноводам впервые, по-видимому, рассмотрены в [145]. Ввиду того, что эта ситуация наиболее интересна с точки зрения теории распространения волн в природных средах, остановимся на этом подробнее, опираясь на недавнюю работу [146]. В основе исследования хаотической динамики лучей лежат уравнения эйконала в гамильтоновой форме, например в виде

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad (79)$$

где  $z$  — глубина,  $r$  — расстояние,  $p$  — тангенс угла скольжения;

$$H(z, p, r) = 0, 5p^2 + V(z, r);$$

$$V(z, r) = 0, 5 \left\{ 1 - \left[ \frac{c_0}{c(z)} \right]^2 \right\} + g(z, r). \quad (80)$$

Здесь  $c_0$  — опорная скорость звука на некотором уровне,  $c(z)$  — невозмущенный профиль скорости звука,  $g(z, r)$  — возмущение, описывающее продольную неоднородность волновода. Необходимым условием хаотического поведения лучей является локальная неустойчивость решений уравнений (79). Критерий такой неустойчивости, полученный в [146], имеет вид

$$\frac{c_0^2}{(c(z))^4} \left[ c(z) \frac{\partial^2 c(z)}{\partial z^2} - 3 \left( \frac{\partial c(z)}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 g(z, r)}{\partial z^2} < 0. \quad (81)$$

Анализ условия (81), проведенный в [146], показал, что это условие может быть легко выполнено при небольшом продольном возмущении (вызванном, например, внутренними волнами в океане), если подводный звуковой канал имеет две оси. Численное решение уравнений (79) для типичного звукового канала в Северной Атлантике подтвердило этот результат. Таким образом, хаос лучей и фрактальные свойства сигналов могут оказаться типичными по меньшей мере в акустике моря.

Указанные результаты относятся к двумерным волноводам с одномерной продольной неоднородностью. В трехмерных задачах при учете двумерных неоднородностей ситуация качественно меняется. Становится возможной диффузия в фазовом пространстве — диффузия Арнольда. Трехмерные эффекты рассмотрены недавно в работе [147] на примере придонного океанского волновода с неровным дном. Качественно диффузия лучей выражается в случайных изменениях вдоль трассы направления распространения лучей в горизонтальной плоскости; причем возможно достижение любого направления, включая и направление, обратное первоначальному.

Подчеркнем, что фрактальная динамика (включая хаотическую) лучей возникает не в случайно-неоднородных средах. Продольные возмущения в волноводе могут иметь вполне регулярный характер. В разделе 5.3 рассмотрим некоторые статистические волновые задачи, в которых могут возникать фрактальные структуры.

### 5.3. Супердиффузия волн

Заметим прежде всего, что диффузионное приближение для описания распространения лучей в случайной среде, которое можно получить из уравнений (79) с короткокоррелированным случайным показателем преломления  $V(z, r)$  [148], не дает фрактальных траекторий лучей. Это ясно из первого уравнения (79), описывающего дифференцируемые траектории.

Диффузия волн имеет место и в общем случае распространения в случайно-неоднородной среде с мелкомасштабными неоднородностями. Диффузионный характер имеет смещение и расширение волнового пучка в неоднородной среде с плавно меняющимися вдоль и короткокоррелированными поперек направления распространения волн неоднородностями. Для описания волнового поля в этом случае применяют парабо-

лическое уравнение. В работе [44] численно исследуются поперечные смещения и расширение пучка волн при распространении в такой среде. Применяется следующее модельное уравнение для изменения амплитуды волны  $\psi$  вдоль дискретной продольной координаты  $t$ :

$$\psi_{t+1}(x) = -i \left[ \frac{1}{2} \Delta_x \psi_t(x) + r(x, t) v \psi_t(x) \right] + \psi_t(x),$$

где  $x$  — поперечные координаты,  $r(x, t)$  — случайная величина, принимающая равновероятные значения 1 и  $-1$ ,  $v$  имеет смысл амплитуды неоднородностей. Исследовалось смещение центра пучка  $x_c$  и уширение пучка  $\Delta x$ .

В трехмерном случае при  $v < 2$  выполнялись зависимости  $x_c \sim t^v$ ,  $\Delta x \sim t^{v'}$ , где  $v = v' = 1/2$ . При  $v > 2$  происходит качественное изменение в поведении этих величин. Простое диффузионное смещение пучка сменяется супердиффузией с показателем  $v = 0,67$ ; уширение пучка, наоборот, замедляется,  $v' = 0,45$ . В двумерном случае супердиффузия имеет место при любой амплитуде неоднородностей; здесь  $v = 0,75$ ,  $v' = 1/2$ . Значения показателя  $v$  указывают на фрактальный характер траектории пучка (см. раздел 2); однако нам не известны работы, в которых распространение волн в случайной среде рассматривается с этой точки зрения. Отметим, что фрактальная структура волн в случайной среде может приводить к фрактальным структурам, возникающим в результате воздействия волн на среду. И хотя современная теория распространения волн в случайных средах не требует привлечения фрактальных представлений, фрактальный анализ результирующих полей может привести к новым результатам.

Другая статистическая волновая задача, которая, по всей видимости, приводит к фрактальным структурам, связана с переносом возбуждения в двухуровневой резонансной среде с однородно уширенным переходом [42, 43]. При возбуждении такой среды внешним источником  $F(r)$  возникает некоторое распределение  $n(r)$  концентрации возбужденных уровней, устанавливающееся за счет переноса возбуждения излучаемыми при переходах фотонами. Вследствие уширения уровня излучаемые фотоны распределены в некотором диапазоне частот и имеют разные распределения времен свободного пробега до поглощения другим резонансным центром. Оказывается [43], что результирующее распределение расстояния переноса возбуждения не имеет конечной дисперсии и поэтому в пределе больших расстояний должно быть устойчивым по Леви распределением. В [43] процесс переноса возбуждения описывается следующим уравнением:

$$n(r) = F(r) + \int K(r - r') n(r') dV',$$

где ядро  $K$  имеет при больших расстояниях асимптотику:

$$K(r) \sim \frac{1}{r^{-3-2\gamma}}.$$

Вероятностная интерпретация уравнения переноса дает тогда асимптотику распределения вероятностей расстояния переноса возбуждения вида  $1/r^{1-2\gamma}$ , что соответствует устойчивому распределению с показателем  $\alpha = 2\gamma$  (см. раздел 2.3). Присущие "полету Леви" фрактальные свойства траекторий должны проявляться и в описанном процессе.

Упомянутые два примера статистических волновых задач с возможностью проявления фрактальных структур наверняка не исчерпывают всех таких процессов и дальнейшая работа в этой области может дать интересные результаты.

#### 5.4. Динамический хаос в нелинейных волновых полях

Рассмотренные в двух предыдущих разделах примеры возникновения фрактальных структур в волновых полях относятся к линейным волновым процессам в неоднородных средах. Нелинейные взаимодействия волн могут приводить к появлению фрактальных структур и в однородной среде. Здесь наиболее исследованы случаи, связанные с явлением динамического хаоса и присущей ему фрактальной структурой фазовых траекторий. Подробно эти вопросы обсуждаются, например, в обзорах [17, 149, 150].

Рассмотрим кратко некоторые пути возникновения динамического хаоса в нелинейных волновых полях.

Бесконечномерные волновые системы сводятся к конечномерным динамическим системам путем введения в рассмотрение амплитуд огибающих небольшого числа взаимодействующих квазимонохроматических волн. Довольно общий механизм, приводящий к динамическому хаотическому поведению амплитуд взаимодействующих волн, связан с распадной неустойчивостью. В этом случае имеет место параметрическое возбуждение низкочастотных волн в поле высокочастотной волны. Одно из проявлений такой неустойчивости, по-видимому, напрямую связано с переходом к турбулентности в пограничном слое [151–153]. Известно, что турбулентный переход в пограничном слое начинается с возникновения неустойчивости волн Толмина–Шлихтинга (Т–Ш). При превышении числом Рейнольдса некоторого критического значения возмущения течения — волны Т–Ш — в определенном диапазоне волновых чисел нарастают вниз по потоку. Нарастание имеет место для волновых чисел, больших определенного значения. В [151] экспериментально исследована нелинейная эволюция искусственно возбужденной нарастающей волны Т–Ш. Оказалось, что при этом возбуждается сначала субгармоника, а затем широкий спектр низкочастотных компонент возмущений, устойчивых в линейном приближении. Эти события предшествуют турбулентному переходу.

Расчеты, проведенные в [152], подтвердили возможность субгармонической неустойчивости. Позднее было показано [153], что может реализоваться каскадное возбуждение субгармоник. Таким образом, процесс ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое, возможно, аналогичен переходу к хаосу через удвоение периода.

Экспериментальные измерения (по алгоритму Такенса) размерности траектории движения в пограничном слое [154] показали, что на ранних стадиях стохастизации движение описывается конечномерной динамической системой.

Ряд явлений взаимодействия волн с параметрическим возбуждением субгармоники описываются уравнениями для медленных амплитуд, близкими к известной модели Лоренца [149]. Сюда относятся, например, эффект генерации второй гармоники в неравновесной усиливающей гармонике среде и взаимодействие ионного звука с плазменными волнами при параметрическом возбуждении.

Хаотическая динамика может проявиться при вынужденном рассеянии высокочастотных волн на низкочастотной волне — рассеяние Мандельштама–Бриллюэна [155]. Хаотический режим здесь возникает в случае нелокального взаимодействия при малом затухании звуковой волны, когда ее амплитуда может стать настолько большой, что самовоздействие звука приводит к фазовой расстройке резонанса.

Общий подход к распределенным системам с хаотической динамикой опирается на уравнения для амплитуд возмущений среды типа уравнения Гинзбурга–Ландау и применим к широкому классу волновых и неволновых задач [17, 150]. Этот подход основан на возможности выделения относительно слабо взаимодействующих распределенных в пространстве нелинейных структур или их дефектов. Их совместная динамика описывается дискретным аналогом уравнения Гинзбурга–Ландау и может проявлять конечномерный пространственный хаос.

Пример такого поведения волнового поля экспериментально и теоретически рассматривается в [156, 157]. В этих работах исследуется рябь Фарадея — система параметрически возбужденных капиллярных волн, возникающих на поверхности воды в сосуде с осциллирующим дном. При малых амплитудах вибраций дна образуется правильная структура волн с квадратными ячейками, образованными парами противоположно распространяющихся волн. При повышении амплитуды вибраций возникает модуляционная неустойчивость и образуется правильная периодическая структура волны модуляции исходной решетки. С дальнейшим ростом амплитуды вибрации возникают дефекты в структуре модуляции и хаотизация движения дефектов.

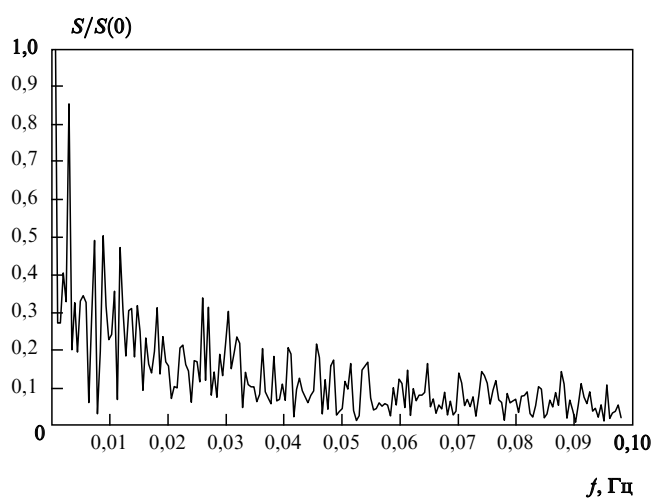
### 5.5. Фрактальные структуры в ветровых волнах на морской поверхности

Дальнейшие примеры фрактальных структур в волновых полях относятся к характеристикам морских ветровых волн. Здесь также возможен хаос лучей [158]. Фрактальными характеристиками обладает форма взволнованной морской поверхности, как для детерминированных [159], так и для случайных волн [45]. В работе [45] используются потоковые степенные спектры ветровых волн с показателями  $\beta = 11/3$  и 4 для гравитационных волн, а также  $\beta = 17/6$  для капиллярных волн. Определяются фрактальные размерности кривых, описывающих временной ход возвышений в точке, и кривых, описывающих возвышения вдоль сечения поверхности вертикальной плоскостью. Кривая, описывающая временной ход возвышений для гравитационных волн, не фрактальна сама по себе, но ее производная фрактальна с размерностями  $5/3$  и  $3/2$  для показателей  $\beta = 11/3$  и  $\beta = 4$  соответственно. Для капиллярных волн временная кривая фрактальна с размерностью  $13/12$ . Сечение же поверхности вертикальной плоскостью — фрактальная кривая для обоих показателей в спектре гравитационных волн; размерности кривой  $4/3$  и  $5/4$ . Для капиллярных волн пространственная кривая не фрактальна, а ее производная (наклон поверхности) — фрактал с размерностью  $13/8$ . Диапазон масштабов фрактального поведения здесь ограничивается, естественно, радиусом корреляции волнения. Заметим в связи с этим, что рассеяние волн на поверхности моря является, таким образом, рассеянием на фрактале.

Другой подход к анализу фрактальных свойств волнения применяется в работе [160]. Здесь по алгоритму Такенса определяется размерность аттрактора в фазовом пространстве. Размерность действительно проявляет тенденцию к снижению скорости роста с ростом размерности пространства, однако численная модель случайного сигнала со спектром, взятым из измерений, показала такое же поведение. Вывод, сделанный авторами [160], гласит, что поверхностное волнение не управляется конечномерной динамической системой со странным аттрактором.

В работах [46, 47] рассматриваются фрактальные свойства морской поверхности на масштабах, превышающих радиус корреляции волнения. В работе [46] путем анализа аэрофотоснимков установлена фрактальность распределения зон обрушивания волн по поверхности с фрактальной размерностью  $1/2$ . В [47] при измерениях, проведенных с помощью лазерного сканирующего локатора, обнаружена фрактальная структура распределения зеркальных точек вдоль пространственно-временной линии, определяемой ходом судна; фрактальная размерность 0,8. Диапазон проявления фрактальных свойств в обеих работах — по меньшей мере до масштабов, в десять раз превышающих радиус корреляции волнения. Измерения в [47] проводились в тропической Атлантике в открытом океане, где тропический пассат обеспечивал стационарное развитое волнение в течение нескольких суток. Анализу подвергались многочасовые записи интенсивности капиллярной ряби, полученные на ходу судна при помощи сканирующего лазерного локатора.

На рис. 18 показана реализация исходного пространственного спектра измеряемой величины. Анализ проводился путем усреднения по полосам частот аналогично подходу, примененному в работе [134] (см. раздел 4.2). Результаты для записей, полученных в разных районах работ и при различных скоростях ветра, показаны на рис. 19. Все записи дают степенные усредненные спектры с практически одинаковым показателем в диапазоне



**Рис. 18.** Пример исходного спектра крупномасштабной изменчивости интенсивности капиллярно-гравитационной ряби по данным лазерного сканирования [47]. По сути, измерялось число отражений при сканировании поверхности тонким лазерным пучком. Спектры получены при измерениях на ходу судна со скоростью 8 м/с, частота 1 Гц соответствует пространственному масштабу 8 м

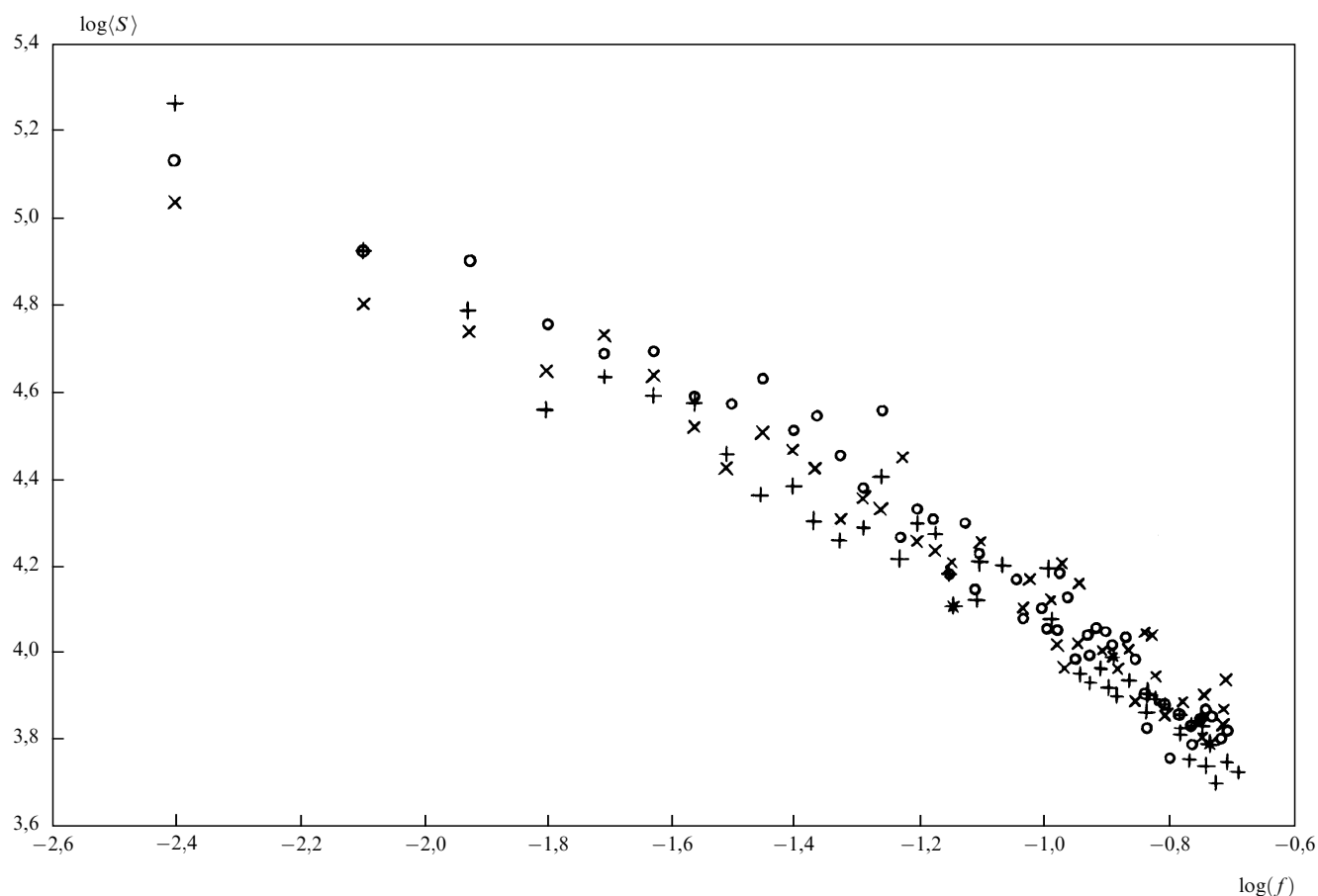


Рис. 19. Спектры изменчивости ряби, усредненные по полосам частот  $4 \cdot 10^{-3}$  Гц. Разные значки соответствуют разным реализациям. Скейлинг имеет место на пространственном интервале 40–400 м (0,2–0,02 Гц)

масштабов 40 м–1,6 км, которые находятся за пределами масштаба корреляции волнения. Подобная универсальность поведения позволяет предположить, что фрактальная изменчивость волнения в больших масштабах присуща слабой волновой турбулентности для волн с нераспадным спектром — модель, которая описывает рост и стационарные спектры ветрового волнения.

### 5.6. Фрактальный анализ сигналов в сейсмике

В сейсмике установлены разнообразные законы подобия, выполняющиеся в широком диапазоне масштабов. К ним относятся закон Гутенберга–Рихтера [161] о скейлинговой зависимости частоты повторяемости от энергетического класса землетрясения и закон Кнопова–Кагана [162] для распределения интервалов времени между событиями. Эти законы выполняются для процессов разрушения и в меньших масштабах, чем землетрясения. В недавней работе [163] исследовалась акустическая эмиссия при разрушении насыщенного водородом металлического образца. Насыщение проводилось при высокой температуре, а разрушение (образование микротрещин) начиналось после охлаждения образца. Установлено распределение амплитуд импульсов акустической эмиссии вида  $N(A' > A) = A^{-0.9}$ , причем такая зависимость выполнялась на интервале амплитуд более чем в два порядка. Это один из вариантов записи закона Гутенберга–Рихтера.

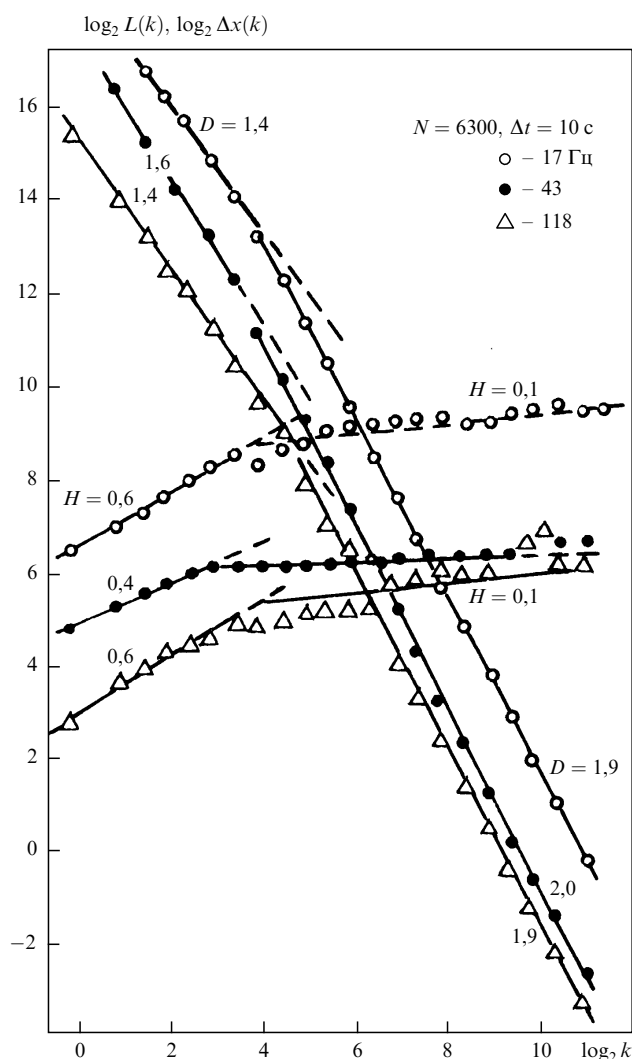
Закон Гутенберга–Рихтера находит объяснение в рамках решеточных моделей упругого тела [103, 164]. В

этих моделях используется одно из выражений для упругих сил в решетке (типа (32), (38)) и вводится правило, по которому выбираются и разрушаются звенья решетки при превышении их деформации определенного порога. В таких моделях получается также фрактальное распределение разрушенных участков.

В работе [165] проведен анализ натуральных данных по распределению гипоцентров<sup>7</sup> землетрясений. Распределение оказалось фрактальным с фрактальной размерностью  $-1,9$ . Моделирование на решетке, давшее близкий результат, проводилось в [165] с моделью упругости (38), в которой значения упругих постоянных брались случайными со степенной формой распределения.

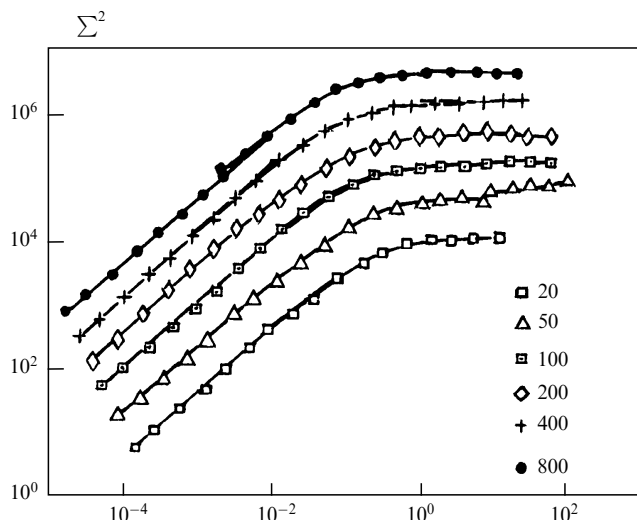
Фрактальные свойства присущи и сигналам сейсмоакустической эмиссии в периоды между землетрясениями. Подробное исследование таких сигналов проведено в работах [40, 52]. На рис. 20 показаны результаты фрактального анализа огибающих сигнала сейсмоакустической эмиссии в разных полосах частот. Представлены зависимости показателя Херста  $H$  и фрактальной размерности кривой  $D_-$  от длин рассматриваемых интервалов (выраженных через число отсчетов  $k$ ). Выполняется соотношение между показателем Херста и фрактальной размерностью, т.е. процесс может модели-

<sup>7</sup> Эпицентры землетрясений распределены по поверхности, а гипоцентры — в объеме коры. Гипоцентр находится под эпицентром на некоторой глубине.



**Рис. 20.** Структурная функция и длина графиков огибающих сигнала сейсмоакустической эмиссии в разных полосах частот в зависимости от длины интервала [40, 52]. Длина графика получается путем измерения длины ломаной с разными длинами звеньев. Зависимость измеренной длины от длины звена указывает на фрактальный характер графика, а наклон этой зависимости дает фрактальную размерность

роваться обобщенным броуновским движением. Измерения показали, что при определенной длине интервала имеет место кроссовер от поведения с показателем Херста  $H = 0,4 - 0,6$ . В работах [40, 52] дана следующая интерпретация этого явления. Предполагается, что источниками сейсмоакустической эмиссии являются фронты переупаковки пород, т.е. участки, где под действием напряжений происходит переход от рыхлой к уплотненной структуре пород. Концентрация пор на таких участках меняется в пространстве и в некотором месте достигает порога перколяции. Таким образом, структура фронта переупаковки может описываться моделью перколяции в градиенте концентрации [83]. В этой модели на участке фронта, где концентрация равна критической, образуются кластеры разных размеров, так что число частиц на фронте флуктуирует в результате отсоединения или присоединения кластеров. Это приводит к тому, что на некотором интервале времени флуктуации ведут себя как броуновский процесс с



**Рис. 21.** Структурные функции  $\Sigma^2 = \langle (N(t) - N(0))^2 \rangle$  флуктуаций числа частиц диффузионного фронта для разных значений обратного градиента концентрации. Результаты численных расчетов работы [83]

показателем Херста  $1/2$ , а на больших интервалах показатель Херста становится равным нулю.

На рис. 21 для сравнения с графиками рис. 20 показаны результаты численного определения структурной функции флуктуаций числа частиц на диффузионном фронте для разных значений градиента концентрации [83]. Видно качественное согласие графиков рис. 20 и 21.

При приближении к землетрясению перестройка пород заканчивается, что должно приводить к качественному изменению структуры сигналов сейсмоакустической эмиссии. Это изменение может быть определено путем измерения фрактальных размерностей. Имеются экспериментальные подтверждения резких изменений фрактальной размерности сигналов при приближении к землетрясению [52].

## 6. Заключение

Трудно назвать область физики, где так или иначе не используется теория волн. Это относится и к фундаментальным, и, может быть, в наибольшей степени к прикладным областям физики. Сама по себе теория волн богата глубокими результатами и развитыми теоретическими методами. Однако представления теории волновых явлений существенно опираются на модели сплошной среды и используют математический аппарат, оперирующий главным образом с гладкими функциями пространства и времени. Поэтому фрактальные модели качественно изменяют подходы к волновым явлениям. Применение фрактальных моделей здесь отнюдь не сводится к переложению известных вещей на новый язык.

Теория фракталов, которой в обзоре отводится наибольшее место, решает, по сути, задачу о распространении волн в неоднородных и неупорядоченных средах, не описываемых моделью сплошной среды. В таких средах теряют смысл понятия эффективного показателя преломления или эффективной сжимаемости. Фрактоны дают, в принципе, одинаковый подход и к задаче распространения упругих волн во фрактальной сетке, и к задаче многократного рассеяния на фрактальных агрегатах. В

обоих случаях речь идет о масштабно-инвариантном спектре возбуждений среды, которые и определяют волновые процессы.

Более частный вопрос о конкретных значениях спектральной размерности, по-видимому, не решен исчерпывающим образом. Прежде всего это касается расхождений экспериментальных данных по рассеянию нейтронов со значениями параметров, даваемыми моделями упругости фракталов, которые хорошо подтверждаются в экспериментах с более крупномасштабными объектами.

Важной стороной результатов в области теории фракталов являются перспективы их приложений. Мы имеем в виду прежде всего создание материалов с необычными волновыми свойствами. Развита в традиционной теории волн интуиция может здесь "давать осечку", и результаты прикладных попыток могут быть самыми неожиданными.

Исследования фрактальных структур в волновых полях не всегда обладают такой принципиальной новизной, как теория фракталов. Однако и здесь есть существенные достижения. Прежде всего это применения мультифрактального анализа, дающего наглядное описание структур перемежающихся полей. Спектр сингулярностей в отличие от спектра мощности или корреляционной функции процесса несет информацию о локальной структуре процесса, что расширяет возможности распознавания сигналов различного происхождения. Мультифрактальный анализ дает также осмысленную "выжимку" из информации о моментах различного порядка двухточечного распределения вероятностей процесса. Важны для изучения распространения волн в природных средах фрактальные свойства динамики лучей. Фракталы дают, быть может, самые естественные подходы к описанию такого изменчивого и притягивающего взгляд явления, как ветровое волнение. А в сейсмоакустике фрактальный анализ, возможно, открывает новые методы предсказания землетрясений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 93-02-16204.

## Список литературы

- Уленбек Г *УФН* **103** 275 (1971)
- Малиновский В К, Новиков В Н, Соколов А П *УФН* **163** (5) 119 (1993)
- Вильсон К Дж *УФН* **141** 193 (1983)
- Mandelbrot B B *Les objets fractals: Forme, Hasard et Dimension* (Paris: Flammarion, 1975)
- Mandelbrot B B *Fractals: Form, Chance and Dimension* (San-Francisco: Freeman, 1977)
- Mandelbrot B B *The fractal geometry of nature* (New York: Freeman, 1983)
- Мандельброт Б, в кн [21] с. 9
- Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **143** 493 (1985)
- Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)
- Соколов И М *УФН* **150** 221 (1986)
- Смирнов Б М *Физика фрактальных кластеров* (М.: Наука, 1991)
- Kaplan J C, Yorke J A, in *Functional differential equations and approximations of fixed points* (Ed. H-O Peirgen) Walther Lecture Notes in Mathematics (Berlin: Springer, 1979) Vol. 750
- Russel D A, Hanson J D, Ott E *Phys. Rev. Lett.* **45** 1175 (1980)
- Schroeder M *Fractals, Chaos, Power laws* (New York: Freeman, 1991)
- Гулд Х, Тобочник Я *Компьютерное моделирование в физике* (М.: Мир, 1990)
- Шустер Г *Детерминированный хаос. Введение* (М.: Мир, 1988)
- Рабинович М И Сушик М М *УФН* **160** (1) 3 (1990)
- Бершадский А Г *УФН* **160** (12) 189 (1990)
- Динариев О Ю *Изв. РАН МЖуГ* (5) 101 (1992)
- Moon F C *Chaotic and fractal dynamics* (New York: John Wiley&Sons Inc., 1992)
- Фракталы в физике (М.: Мир, 1988).
- Олемской А И, Флат А Я *УФН* **163** (12) 1 (1993)
- Зосимов В В, Лямшев Л М *Акуст. журн.* **40** (5) 7 (1994)
- Alexander S, Laerman C, Orbach R, Rosenberg H M *Phys. Rev. B* **28** 4615 (1983)
- Alexander S, Orbach R J. *de Phys. Lett.* **43** L625 (1982)
- Alexander S, Entin-Wholman O, Orbach R *Phys. Rev. B* **34** 2726 (1986)
- Jagannatham A, Orbach R, Eutin-Wohlman O *Phys. Rev. B* **39** 13465 (1989)
- Jagannatham A, Orbach R *Phys. Rev. B* **41** 3153 (1990)
- Allen W P et al. *Phys. Rev. B* **49** 257 (1994)
- Клингер М И *УФН* **152** 623 (1987)
- Шека Е Ф *УФН* **160** (2) 263 (1990)
- Клингер М И *УФН* **160** (1) 159 (1990)
- Berry M V J. *Phys. A* **12** 781 (1979)
- Bale H D, Schmidt P W *Phys. Rev. Lett.* **53** 596 (1984)
- Shaefer D W et al. *Phys. Rev. Lett.* **52** 2371 (1984)
- Маркель В А, Муратов Л С, Штокман М Н *ЖЭТФ* **98** 819 (1990)
- Максименко В В, Лушников А А *Письма в ЖЭТФ* **57** (4) 204 (1993)
- Секей Г *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике* (М.: Мир, 1990)
- Смирнов Б М *УФН* **163** (7) 51 (1993)
- Мухамедов В А *Изв. РАН. Физика земли* (3) 39 (1992)
- Абдуллаев С С, Заславский Г М *УФН* **161** (8) 1 (1991)
- Биберман Л М *ЖЭТФ* **47** 416 (1947)
- Абрамов Ю Ю, Дыхне А М, Напорович А П *ЖЭТФ* **56** 654 (1969)
- Feng S, Golubovie L, Zhang J-C *Phys. Rev. Lett.* **65** 1028 (1990)
- Stiassnie M, Agnon J, Shemer L *Physica D* **47** (3) 341 (1991)
- Заславский М М, Шарков Е А *ДАН* **294** 1362 (1987)
- Naugol'nyh K A, Zosimov V V *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science* **4** (1) 21 (1994)
- Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **156** (4) 147 (1987)
- де Вольф Э А, Дремин И М, Киттель В *УФН* **163** (1) 3 (1993)
- Акимов В Г, Зосимов В В, Сушков А Л *Акуст. журн.* **38** 375 (1992)
- Petri A, Pietronero L *Phys. Rev. B* **45** 12864 (1992)
- Мухамедов В А *Акустическая эмиссия дискретной геофизической среды. Автореферат дисс ... док. физ.-мат. наук* (Ашгабат, 1993)
- Physica D* **38** (1) 3 (1989)
- D'Antonio P *Sound and Vibr.* **26** (10) 24 (1992)
- Лунг Ч, в кн. [21] с. 260
- Forrest S, Witten T J. *Phys. A* **12** L109 (1979)
- Schaefer D W, Keefer K D *Phys. Rev. Lett.* **53** 1383 (1984)
- Bale H D, Schmidt P W *Phys. Rev. Lett.* **53** 596 (1984)
- Witten T A, Sander L M *Phys. Rev. Lett.* **47** 1400 (1981)
- Смирнов Б М *УФН* **160** (4) 1 (1990)
- Корум К Л, Корум Дж Ф *УФН* **160** (4) 47 (1990)
- Смирнов Б М *УФН* **161** (8) 141 (1991)
- Смирнов Б М *УФН* **161** (6) 171 (1991)
- Ожован М И *ЖЭТФ* **104** 4021 (1993)
- Девятко Ю Н, Рогожкин С В, Федотов Б А *ЖЭТФ* **104** 2556 (1993)
- Takens F *Dynamical systems and turbulence* (Berlin: Springer, 1981)
- Lautenborn W, Cramer E *Phys. Rev. Lett.* **47** 1145 (1981)
- Lautenborn W, Parlitz U, в кн. *Проблемы нелинейной акустики*. Сб. тр. симп. по нелинейной акустике (Новосибирск: Наука, 1987)
- Tao Q, Ni W, Miao G, Wei R Там же, с. 242
- Osborne A R, Provenzale A *Physica D* **35** 357 (1989)
- Новиков Е А, Стюарт Р У *Изв. АН СССР. Сер. Геофиз.* (3) 408 (1964)
- Понд С, Стюарт Р У *Изв. АН СССР. Сер. Физ.* **1** 914 (1965)
- Mandelbrot B B *J. Fluid Mech.* **62** 331 (1974)
- Prasad P R, Sreenivasan K R *J. Fluid Mech.* **216** 1 (1990)



75. Meneveau C, Sreenivasan K R *Phys. Rev. A* **41** 2246 (1990)
76. Osborne A R, Caponio R *Phys. Rev. Lett.* **64** 1733 (1990)
77. Basingthwaite J B, Beyer R P *Physica D* **53** (1) 71 (1991)
78. Shlesinger M F, West B J, Klafter J *Phys. Rev. Lett.* **58** 1100 (1987)
79. Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т. 2 (М.: Мир, 1984)
80. Shlesinger M F, Zaslavsky G M, Klafter J *Monthly Nature* **1** (5) 45 (1993)
81. Шкловский Б И, Эфрос А Л *УФН* **117** (3) 401 (1975)
82. де Жен П *Идеи скейлинга в физике полимеров* (М.: Мир, 1982)
83. Gouyet J F, Sapoval B, Boughaleb Y, Rosso M *Physica A* **157** 620 (1989)
84. Meakin P, Matsushita M, Hagakava Y *Physica A* **151** (3) 457 (1989)
85. Кац М *Несколько вероятностных задач физики и математики* (М.: Наука, 1967)
86. Slator T, Bernasconi A, Posselt D et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 1070 (1991)
87. Domany E, Alexander S, Bensimon D, Kadanoff L P *Phys. Rev. B* **28** 3110 (1983)
88. Rammal R Ibidem, p. 4871
89. de Vries P, de Raedt H, Lagendijk A *Phys. Rev. Lett.* **62** 2515 (1989)
90. Laces R *Monthly nature* **1** (2) 54 (1993)
91. Панюков С В *ЖЭТФ* **98** 668 (1990)
92. Панюков С В *Письма в ЖЭТФ* **58** 750 (1993)
93. Feng S, Sen P N *Phys. Rev. Lett.* **52** (5) 216 (1984)
94. Webman I, Kantor Y *Phys. Rev. Lett.* **52** 1891 (1984)
95. Deptuck D, Harrison J P, Zawadzky A *Phys. Rev. Lett.* **54** 913 (1985)
96. Benguigui L *Phys. Rev. B* **34** 8176 (1986)
97. Lobb C J, Forrester M G *Phys. Rev. B* **35** 1899 (1987)
98. Halperin I, Feng S, Sen P N *Phys. Rev. Lett.* **54** 2391 (1985)
99. Allen L C, Golding B, Haemmerle W H *Phys. Rev. B* **37** 3710 (1988)
100. Смирнов Б М *УФН* **152** (1) 133 (1987)
101. Gross J, Fricke J, Pekala R W, Hrubesh L W *Phys. Rev. B* **45** 12774 (1992)
102. Arbabi S, Sahimi M *Phys. Rev. B* **47** 695 (1993)
103. Луис Э, Гинеа Ф, Флорес Ф, в кн. [21] с. 244
104. Баланкин А С *Докл. РАН* **322** (5) 869 (1992)
105. Мосолов А Б *ЖТФ* **62** (6) 23 (1992)
106. Наугольных К А, Островский Л А *Нелинейные волновые процессы в акустике* (М.: Наука, 1990)
107. Skvortsov A T, Bogdanov A N *Trans. of I3ISA* (Bergen, Norway, 1993) (Singapore: World scientific, 1993) p. 659
108. Уэбман И, в кн. [21] с. 488
109. Корженевский А Л, Лужков А А *ЖЭТФ* **99** 530 (1991)
110. Craciun F, Bettucci A, Molinari E et al. *Phys. Rev. Lett.* **68** 1555 (1992)
111. Alexander S *Phys. Rev. B* **40** 7953 (1989)
112. *Физические величины*. Справочник (М.: Энергоатомиздат, 1991)
113. Sokolov A P, Kislink A, Soltwich M, Quitman D *Phys. Rev. Lett.* **62** 1540 (1992)
114. Page J N, Mccalloch R D *Phys. Rev. Lett.* **57** (11) 1324 (1986)
115. Alexander S, Courtens E, Vacher R *Physica A* **195** (3&4) 286 (1993)
116. Buchenau U, Nucker N, Dianox A J *Phys. Rev. Lett.* **53** 2316 (1984)
117. Fontana A, Rocca F, Fontana M P *Phys. Rev. Lett.* **58** 503 (1987)
118. Boukenter A, Quinson J F, Serughetti J et al. *Phys. Rev. Lett.* **57** 2391 (1986)
119. Courtens E, Pelous J, Phalippon J, Vacher R, Woignier T *Phys. Rev. Lett.* **58** 128 (1987)
120. Землянов М Г, Малиновский В К, Новиков В Н и др. *ЖЭТФ* **101** (1) 284 (1992)
121. Dianoux A J, Page J N, Rosenberg H M *Phys. Rev. Lett.* **58** 886 (1987)
122. Freltoft T, Kjems J, Richter D *Phys. Rev. Lett.* **59** 1212 (1987)
123. Tsujimi Y, Courtens E, Pelous J, Vacher R *Phys. Rev. Lett.* **60** 2757 (1988)
124. Vacher R, Coutrens E, Goddens G *Phys. Rev. Lett.* **65** 1008 (1990)
125. Shaefer D W, Brinker C J, Richter D et al. *Phys. Rev. Lett.* **64** 2316 (1990)
126. Conrad H et al. *Phys. Rev. B* **41** 2573 (1990)
127. Yakubo K, Nakayama T *Phys. Rev. B* **40** 517 (1989)
128. Li Q, Sokoloulis C M *Phys. Rev. B* **41** 11713 (1990)
129. Montagna M, Pilla O, Vilrani G et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** (9) 1136 (1990)
130. Lambert G J, Huges G D *Phys. Rev. Lett.* **66** (8) 1074 (1991)
131. Alippi A, Shkerdin G, Bettucci A et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 3318 (1992)
132. Бердыев А А, Мухамедов В А, в кн. *Проблемы нелинейной акустики*. Сб. тр. симп. по нелинейной акустике. Ч. 2 (Новосибирск: Наука, 1987) с. 14
133. Кузмин В Н *Изв. АН СССР. Сер. Физ. А* **28** (9) 953 (1992)
134. Аллен К, Клуатр М, в кн. [21] с. 91
135. Гурбатов С Н, Малахов А Н, Саичев А И *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии* (М.: Наука, 1990)
136. Шефер Д, Кефер К, в кн. [21] с. 62
137. Максименко В В, Крикунов В А, Лушников А А *ЖЭТФ* **102** 1571 (1992)
138. Луккин Ф, в кн. [21] с. 446
139. Gouyet J F *Physica A* **168** 581 (1990)
140. Chhabra A B, Meneveau C, Jensen R V, Sreenivasan K R *Phys. Rev. A* **40** 5284 (1989)
141. Турыгин А Ю, Чечеткин В Р *ЖЭТФ* **98** 146 (1990)
142. Meneveau C, Sreenivasan K R *Phys. Rev. Lett.* **59** 1424 (1987)
143. Абдуллаев С С, Заславский Г М *ЖЭТФ* **80** 524 (1981)
144. Абдуллаев С С, Заславский Г М *Акуст. журн.* **34** 578 (1988)
145. Palmer D C et al. *Geophys. Res. Lett.* **15** (6) 569 (1988)
146. Yan J *JASA* **94** 2739 (1993)
147. Abdullaev S S *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science* **4** (1) 63 (1994)
148. Клячкин В И, Татарский В И *УФН* **110** 499 (1973)
149. Рабинович М И *УФН* **125** (1) 123 (1978)
150. Рабинович М И, Фабрикант А Л, Цимринг Л Ш *УФН* **162** (8) 1 (1992)
151. Качанов Ю С, Козлов В В, Левченко В Я *Изв. АН СССР. МЖГ* (3) 49 (1977)
152. Володин А Г, Зельман М Б *Изв. АН СССР. МЖГ* (5) (1978)
153. Зельман М Б, Масленникова И И *ПМТФ* (2) 58 (1992)
154. Козлов В В, Рабинович М И, Рамазанов П И и др. *Письма в ЖТФ* **18** (16) 986 (1987)
155. Курин В В, Пермитин Г В, в кн. *Нелинейные волны. Структуры и бифуркации* (М.: Наука, 1987) с. 227
156. Езерский А Б, Коротин Н И, Рабинович М И *Письма в ЖЭТФ* **41** 129 (1985)
157. Езерский А Б, Рабинович М И, Реутов В П, Старобинец И М *ЖЭТФ* **91** 2070 (1986)
158. Brown M C, Tappert F D, Sundaram S E R B J. *Fluid Mech.* **227** 35 (1991)
159. Stiassnie M *Proc. Int. Sch. Phys. "Enrico Fermi"* Varenna 25 Jul–5 Aug. 1988, course 109 (Amsterdam–Bologna, 1991) p. 633
160. Elgar S, Mayer-Kress G *Physica D* **37** (1) 104 (1989)
161. Gutenberg B, Richter C F *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1949)
162. Kagan Y Y, Knopoff L J. *of Geophys. Res. B* **86** (4) 2853 (1981)
163. Cannelli G, Cantelli R, Corsero A *Phys. Rev. Lett.* **70** 3923 (1993)
164. Chen K, Bak P, Obuchov S P *Phys. Rev. A* **43** 625 (1991)
165. Salimi M, Robertson M C, Sammis C G *Phys. Rev. Lett.* **70** 2186 (1993)

## FRACTAL IN WAVE PROCESSES

V.V. Zosimov

*Institute for Applied Acoustics**141980 Dubna-1, p-b 36, Moscow Region, Russia**Tel. (7-09621) 4-5577**E-mail: root@niipa.cntc.dubna.su*

L.M. Lyamshev

*N.N. Andreev Acoustical Institute, Russian Academy of Sciences**ul. Shvernika 4, 117036 Moscow, Russia**Tel. (7-095) 126-9014**E-mail: lyamshev@wpd.jpi.msk.su*

A review of fundamental results on the manifestation of fractal structure in wave processes is presented. Elastic properties are considered, together with the dispersion of fractal materials, their distribution density, and the shape of wave functions of their localized elastic oscillations, namely fractons. Examples of their application to the explanation of amorphous properties of solids are presented. Some patterns of the wave scattering and radiation by fractal structures are examined. Principal methods of random signal analysis are described to reveal different fractal structures associated with these signals. Data on the wave field fractal properties are discussed.

PACS numbers: 47.35.+i, 47.52.+j, 47.53.+n, 61.43.Hv

Bibliography — 165 references

*Received 4 March 1994*

## Welcome to Uspekhi Fizicheskikh Nauk On-Line

Starting 26 December 1994 Uspekhi Fizicheskikh Nauk provide brand new electronic services, available via Internet on-line. On our new server, [ufn.ioc.ac.ru](http://ufn.ioc.ac.ru), you may find:

- UFN, electronic edition. We provide our articles in Plain TeX format, pictures included, available typically well before the actual issue release date.
- "Non-printable" information: starting 1995, we provide our authors an option of submitting materials, for some reasons not acceptable for printed copy — color photographs, animation, sounds *etc.*
- Abstracts and tables of contents
- Annual indexes in hypertext form
- Subject tree

Our information is available in many ways:

**WWW:** Our URL is: <http://ufn.ioc.ac.ru/ufn.html>. Now you can conveniently access abstracts, annual author indexes and other information stored here using your favourite WWW browser.

**Anonymous FTP:** with FTP, login to [ufn.ioc.ac.ru](http://ufn.ioc.ac.ru) with username **anonymous**, type in your e-mail address as a password. You may find more info in README file.

**E-mail archive:** if you do not have direct Internet access, you can access our information via our FTPMail gateway. Send a request to [ufnlib@ufn.ioc.ac.ru](mailto:ufnlib@ufn.ioc.ac.ru)

**UFN mailing list:** to receive monthly abstracts and tables of contents of our journal, send a request with 'subscribe' in subject line to [ufnlist@ufn.ioc.ac.ru](mailto:ufnlist@ufn.ioc.ac.ru). With subscription to this list you will be able to read abstracts of articles that would be released much later. The same information could be obtained via INFOMAG service

*We would be glad to hear all your comments and suggestions. It is an experiment for us and we do need your feedback. Send all your comments and suggestions about our services to [ufn@ufn.ioc.ac.ru](mailto:ufn@ufn.ioc.ac.ru).*