

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Гидродинамика: проблемы и парадоксы

С.К. Бетяев

Собраны актуальные разной сложности задачи гидродинамики, для которых созрели возможности либо построения математических моделей, либо проведения численных расчетов. Приведены подсказки к решениям. Предпочтение отдается неожиданному сопоставлению разнотипных явлений, установлению новых связей между отдаленными, изолированными на первый взгляд фактами.

PACS numbers: 47.10.+g, 47.11.+j, 47.32.-y, 47.90.+a

Посвящается учителям: профессору Александру Александровичу Никольскому и Вере Алексеевне Торжковой

Содержание

1. Введение (299).
2. Построение моделей (301).
 - 2.1. Принципы моделирования. 2.2. Методы возмущений. 2.3. Парадигма Прандтля. 2.4. Иерархия моделей. 2.5. Парадоксы.
3. Автономные течения (306).
 - 3.1. Классификация. 3.2. Идеальная жидкость. 3.3. Сжимаемая жидкость. 3.4. Спиральные вихревые пелены. 3.5. Вязкая жидкость. 3.6. Два замечания об автономных решениях.
4. Модель "сухой воды" (313).
 - 4.1. Объемные вихри. 4.2. Вихревые пелены. 4.3. Свободные границы. 4.4. Комбинированные вихри. 4.5. Координатные разложения в окрестности складок. 4.6. Вихревые нити.
5. Закрученные потоки (322).
 - 5.1. Обтекание тел. 5.2. Самовращение тел в потоке. 5.3. Течение в канале. 5.4. Еще раз о спиральных течениях.
6. Гидродинамика в ванной (327).
 - 6.1. Эволюция свободной поверхности. 6.2. Брызги и всплески. 6.3. Краевые волны.

Список литературы (329).

Самое прекрасное, что мы можем испытать, — это ощущение тайны. Она источник всякого подлинного искусства и науки. Тот, кто никогда не испытал этого чувства, кто не умеет остановиться и задуматься, охваченный рабским восторгом, тот подобен мертвецу, и глаза его закрыты...

А. Эйнштейн

1. Введение

За последние десятилетия акценты в физике сместились от теории поля и элементарных частиц к механике. Считавшаяся образцом полностью завершенной отрасли знаний механика претерпела глубокие изменения. Постепенно выяснялись все новые удивительные свойства эволюции динамических систем и определяющая роль таких антагонизмов, как устойчивость–неустойчивость, случайность–закономерность, непрерывность–дискретность, симметрия–асимметрия, эволюция–революция, обратимость–необратимость.

Сейчас уже можно говорить о становлении новой науки — синергетики, объединяющей много разделов естествознания от астрономии до биологии и во многом опирающейся на гидродинамику (ссылки см. в [1]). Конвергенция наук приводит к тому, что гидродинамика становится частью синергетики. Отпочковались лишь два ее раздела: физическая гидродинамика и вычислительная. Физическая гидродинамика — это кинетика, течение квантовых жидкостей, релятивистская гидродинамика, магнитная гидродинамика, динамика плазмы.

Вычислительная гидродинамика за 40 лет своего развития достигла определенной завершенности: если построена корректная математическая модель, то нетрудно выбрать метод для ее численной верификации [2–4]. Поэтому программирование и расчет, став техническим инструментарием и обретя автономию, теперь

С.К. Бетяев. Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, 140160 Жуковский-3, Московская обл., Россия
Тел. (095) 556-38-24

Статья поступила 26 июля 1993 г.,
после доработки 15 ноября 1994 г.

являются лишь завершающей частью математического моделирования — триады "опыт + физическая модель + методы возмущений". Не следует смешивать математическое моделирование (математическую формулировку задачи) с компьютерным моделированием — численным расчетом или численным моделированием (выбор алгоритма + программирование).

Самые мощные ЭВМ предназначены для решения задач, прямо или косвенно связанных с гидродинамикой. Так, установленный в 1993 г. в Корнельском университете суперкомпьютер SP1 фирмы IBM рассчитан на решение задач гидродинамики, физики плазмы, анализа загрязнений воздуха и грунтовых вод, создания новых лекарств, составления карт озонового слоя, сейсмического анализа.

Хотя та часть нерешенных задач, которая относится к физической гидродинамике, неизмеримо меньше остальной, выводы о математизации динамики жидкости необоснованны. Гидродинамика — удивительная наука, ее подходы эффективны в областях, где на первый взгляд совсем нет условий для применения гипотезы о жидком континууме. Пример: частицы и античастицы. Несмотря на еще не закончившийся успехом поиск антиматерии в ближних к нам звездах, получила хождение гипотеза о ячеистой структуре галактики: материя отделена от антиматерии тонкими поверхностными слоями ("слой Лейденфроста") — горячими областями, где происходит аннигиляция вещества [5]. Предполагается, что излучение, исходящее из этих слоев, слишком слабое для того, чтобы его зарегистрировать. Сколько может лететь антиметеорит, пока не сгорит? Как происходит взаимодействие вещество–антивещество?

Задачи подразделяются на проблемные и конкретные. Перефразируя слова Планка о физике XIX века и о двух нерешенных задачах (конечности скорости света и порциальности теплового излучения), можно сказать: "Гидродинамика практически вся завершена, есть только два облачка на ее ясном горизонте: открытое Рейнольдсом явление турбулентности и отрыв потока от тела". Эти фундаментальные проблемы, решение которых имеет важнейшее значение для дальнейшего развития транспорта и энергетики, составляют содержание всей теоретической гидродинамики. Проблемные задачи широко известны [6, 7], и о них нет смысла говорить.

История подборки конкретных нерешенных задач гидродинамики началась, пожалуй, с Марка Твена, когда он задолго до возникновения теории звука сформулировал классическую задачу акустики: "Нельзя понять, почему спящий не может слышать свой собственный храп". С тех пор многие выдающиеся математики и физики составляли сборники нерешенных задач.

Вскоре после того, как на рубеже веков Гильберт сформулировал свои знаменитые 23 проблемы, выяснилось, что не ими вымощена столбовая дорога прогресса в математике, приведшая затем к революционному прорыву в теоретической физике. Попытки сформулировать фундаментальные проблемы физики также терпели фиаско ввиду непредсказуемости зигзагов научной фантазии [8].

Известно, что Эйнштейну, который кроме всего прочего был и конструктором, и изобретателем, принадлежит авторство знаменитой задачи о чайниках [9]. Многие известные ученые (Колмогоров, Капица,

Лаврентьев, Сахаров [10–13] и др.) собирали и публиковали интересные нерешенные задачи. В настоящей статье содержатся десятки нерешенных задач гидродинамики [14].

Нерешенные задачи — это не только систематизация науки или коллекция парадоксов, но и программа действий. Наиболее эффективно выделение нерешенных задач в математике — здесь они имеют четкую теоремную формулировку. Например, знаменитые "Коуровские тетради", издаваемые с 1962 г., содержат примерно 800 таких задач по теории групп, некоторые из них уже решены. В гидродинамике, как и в физике, выбор нерешенных задач субъективен, зависит от применяемой шкалы ценностей, что затрудняет систематизацию. Тем не менее в некоторых разделах гидродинамики, где построены математические модели, систематизация возможна. Так, профессор Манчестерского университета Фритц Урселл приводит в [15] десять нерешенных задач по теории волн.

Для аналитического решения гидродинамических задач имеется, по сути дела, единственный метод — метод возмущений, разработка и применение которого в последнее время явились крупными достижениями [16]. Особняком стоят численные методы. Возможности их применения чрезвычайно широки. В работе [17] собрано 20 подготовленных к решению задач из астрофизики, физики плазмы, океанологии, теории турбулентности, физики твердого тела и т.д.

Гидродинамику, а при желании и любую другую область физики можно разделить на 5 частей:

- 1) математическое моделирование ламинарных течений,
- 2) физическое и математическое моделирование турбулентных течений,
- 3) теория отрывных течений,
- 4) теория устойчивости,
- 5) построение реологических моделей.

В [14] описаны задачи, относящиеся ко всем этим направлениям.

Выдающиеся *решенные* задачи появляются обычно спонтанно. В гидродинамике таковыми считаются открытия: 1) ударной волны Б. Риманом (1860) и Э. Махом (1887), 2) хаоса О. Рейнольдсом (1883), 3) пограничного слоя Л. Прандтлем (1904), 4) странного аттрактора Е. Лоренцем (1963), 5) солитона М. Крускалом и Н. Забуки (1965), 6) фрактала Б. Мандельбротом (1967) и 7) катастроф Р. Томом (1970). Сюда же, если не быть очень строгим, следовало бы добавить разработку профессором Штутгартского университета (ФРГ) Г. Хакеном (1977) и нобелевским лауреатом И. Пригожиным уже упоминаемой синергетики.

Сейчас гидродинамика немислима без метода Фоккера–Планка (Планк, 1917), вариационного метода усреднения Уизема (1965), метода обратной задачи рассеяния (Гарднер и др., 1967), метода ренормгрупп (Вильсон, 1971).

Все эти методы и открытия, обогащенные философским содержанием, из достояния только физики стали неотъемлемой частью всего естествознания. Их использование вкупе с идеологией методов возмущений и составляет то, что мы сейчас называем *культурой гидродинамики*.

При подборе *нерешенных* задач опасны две крайности: стать ферматистом или оказаться поставщиком

тем для дипломных работ. Если математик или физик могут сфокусировать узкий конус своих интересов на решение одной-единственной проблемы, то гидродинамик обязан усвоить весь необычайно большой объем знаний по своей науке, стать энциклопедистом. В этом и заключается смысл крылатой фразы: гидродинамика — наука гуманитарная!

Цель состоит не в том, чтобы прийти к решению, а в том, чтобы показать проблему. Если кто-то может заранее предсказать, чем закончится его исследование, то оно не является проблемой.

Глубоко заблуждается тот, кто надеется, взяв уравнение Навье–Стокса и препарировав его для проведения численного расчета, моментально получить результат. Путь к решению сложной технической проблемы (обтекание лопатки турбины или летательного аппарата, течение жидкости в аэродинамической трубе или в химическом реакторе и т.д.) тернист и многоступенчат: полная задача распадается на ряд частных, но не менее трудных задач, без решения которых исследование сразу же становится некорректным.

Предлагаемая коллекция задач адресуется любознательным — тем, которых Рене Декарт охарактеризовал так: "Любопытный отыскивает редкости только затем, чтобы им удивляться; любознательный же — затем, чтобы узнать их и перестать удивляться".

Неким промежуточным этапом между решенными и нерешенными задачами являются задачи, для которых построена математическая модель, и осталось только провести вычисления. Современная коллекция таких, весьма красивых по содержанию задач собрана в [18]. "В точных науках, как и в искусстве, красота есть важнейший источник света и ясности" (В. Гейзенберг).

2. Построение моделей

Одним из источников появления новых постановок задач является совершенствование известных математических моделей. Так, уравнение движения математического маятника, представляющего собой материальную точку на конце невесомой нити,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0, \quad (2.1)$$

где x — угол отклонения нити от вертикали, можно "улучшить" различными способами. Незначительно расширяет область применимости математической модели по значениям $x(0)$ учет нелинейного члена:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \frac{1}{6}x^3 = 0. \quad (2.2)$$

Гораздо принципиальнее, написав

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0, \quad (2.3)$$

сразу же расширить область применимости на весь диапазон значений $x(0)$.

Математическая модель — это упрощение реальной ситуации. Ее пригодность зависит от поставленных целей. Так, период колебаний можно найти из любого уравнения (2.1)–(2.3). Однако для определения числа

колебаний до остановки маятника эти уравнения совсем не подходят, и необходимо вспомнить о трении. Тогда в линейном приближении имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2.4)$$

Трение качения и скольжения в шарнире с точностью до знака пропорционально нагрузке, т.е. $(dx/dt)^2$. Когда велики значения $|dx/dt|$, точнее говоря — числа Рейнольдса Re , аэродинамическая сила сопротивления тоже велика и пропорциональна квадрату скорости $(dx/dt)^2$. Однако более корректно считать величину коэффициента k в уравнении (2.4) зависящей от $|dx/dt|$. Разумеется, и такая модель не является истиной в конечной инстанции.

Маятник движется не в спокойной, а в им же возмущенной среде — в следе. Поэтому более точная модель должна учитывать память — зависимость от предыстории процесса. Таков переход от простого осциллятора к сложнейшим нерешенным проблемам гидродинамики. Конкретная математическая модель усложняется, если ввести в описание новый эффект, не учитываемый на предыдущем этапе.

Можно попытаться учесть растяжение нити, пропорциональное $(dx/dt)^2$, ее вес и т.п., если вовремя не вспомнить известный афоризм о том, что "всякое уравнение длиной более пяти сантиметров скорее всего неверно".

Процессы бывают контролируруемыми и неконтролируемыми. Если деформация (следствие) l зависит от силы (причины) F таким образом, что $dl/dF = O(1)$, то процесс контролируемый (рис. 1а). Если указанная производная dl/dF велика, то процесс неконтролируемый (рис. 1б). Нерешенность в большей степени присуща задачам, описывающим неконтролируемые процессы. Простейшим известным примером такого процесса является развитие трещины в газетном листе бумаги. Когда сила приложена к краям начально образованной дырки (рис. 2а), процесс контролируем, но когда сила прилагается к краям листа бумаги (рис. 2б), процесс неконтролируем.

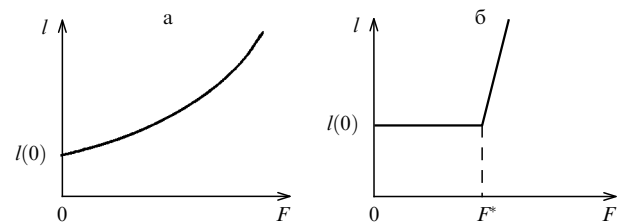


Рис. 1. Контролируемый (а) и неконтролируемый (б) процессы

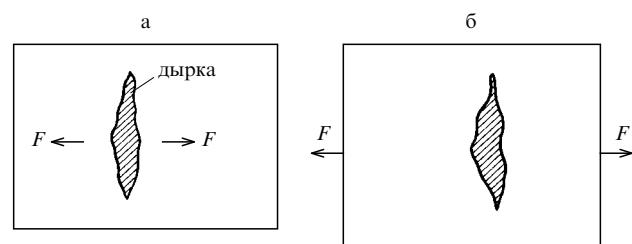


Рис. 2. Развитие трещины в листе бумаги — пример контролируемого (а) и неконтролируемого (б) процессов

Гидродинамика выделяется из всей физики нелинейностью своих проблем. Даже такое простейшее приближение, как модель несжимаемой ньютоновской жидкости, содержит следующие виды нелинейности:

1) конвективная — член $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ в уравнении Навье–Стокса, определяющий ускорение частицы (\mathbf{u} — ее скорость),

2) реологическая — зависимость коэффициентов переноса от давления и температуры,

3) ковариационная, характеризующая степень коррелированности скорости жидкости в различных областях пространства.

2.1. Принципы моделирования

Гидродинамика — наука о моделировании. Вся ее история, начиная от Гельмгольца и даже Ньютона, подтверждает этот тезис. Существует три взаимосвязанных вида моделирования: экспериментальное, физическое и математическое.

В основе любой науки, даже такой абстрактной, как математика, краеугольным камнем лежит опыт. Эксперименты Фарадея, Майкельсона, Герца и Менделя стали зачаточными для становления таких наук, как электродинамика, теория относительности, квантовая механика и генетика.

Различают несколько видов научных опытов. Если о природе изучаемого явления еще не выдвинуто никакой гипотезы (версии), то говорят о *поисковом* эксперименте. Если имеется одна гипотеза, то эксперимент, проводимый с целью ее проверки, называют *контрольным*. Наконец, если существует несколько гипотез, то эксперимент, проводимый с целью отбора одной из них, называют *решающим*.

Кроме разделения экспериментов по целевому назначению, в гидродинамике используется их формальное разделение на *количественные* и *качественные*. В результате проведения первого добываются цифровые данные, а в результате проведения второго определяется "геометрия" течения: например, поле траекторий движения частиц жидкости. Результаты количественного эксперимента представляются в виде графиков или таблиц, результаты качественного эксперимента иллюстрируются фотографиями или зарисовками. Количественный эксперимент обычно является "черным ящиком": регистрируется лишь эхо-сигнал некоторого воздействия на исследуемый объект, природа которого остается неизвестной. Большее значение для гидродинамики как науки имеет качественный эксперимент.

К нему следует отнести так называемые "*опыты в ванной*". Неприхотливые и дешевые, они проводятся в домашних условиях или в институтской физической лаборатории, как говорил выдающийся американский экспериментатор Р. Вуд, с помощью... палки, веревки, сургуча и слюды. Однако научное значение опытов в ванной, широко представленных в настоящей статье, трудно переоценить.

Коллекция выдающихся научных опытов по течению жидкости, как бы каталога золотого фонда гидродинамики, собрана профессором Стэнфордского университета Милтоном Ван-Дайком, обратившимся к известным экспериментаторам планеты с предложением прислать ему фотографии наиболее интересных течений. Таким образом в 1982 г. появился на свет "Альбом течений жидкости и газа" Ван-Дайка [19] — шедевр

одновременно научной и популярной литературы по гидродинамике.

Промышленный эксперимент получил более широкое распространение, чем научный. Он проводится в аэродинамических трубах, на стендах, в опытовых бассейнах и каналах по заданию конструкторских бюро. Обычно промышленный эксперимент является количественным, с его помощью формируется оптимальный облик самолета, ракеты, корабля, лопатки турбины.

Математическая модель строится на основе физической модели (первых принципов физики) и качественного эксперимента. Простейшая структурная схема научно-технических связей в гидродинамике представлена на рис. 3. Переход от качественного опыта к математической модели — это переход от созерцания к научному пониманию явления. Построение математической модели — это разработка стратегии численного расчета, но не его проведение [20].

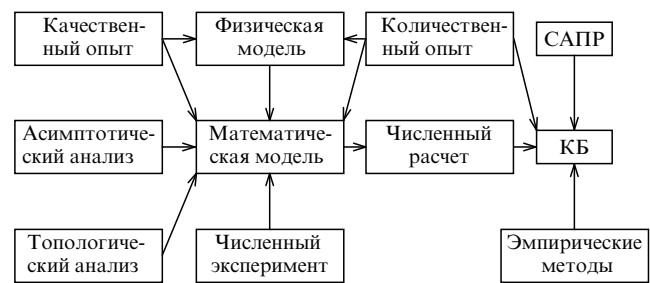


Рис. 3. Схема научно-технических связей

Подобно теории относительности теория математического моделирования, являющаяся острием философских проблем гидродинамики, разделилась на общую и специальную. В рамках общей теории строятся реологические модели неньютоновской жидкости. Специальная теория рассматривает сплошную ньютоновскую среду. В условиях, не сильно отличающихся от наших земных, т.е. соответствующих практическим нуждам авиации и судостроения, течение сплошной среды подчиняется уравнению Навье–Стокса (НС). Для несжимаемой жидкости, не подверженной воздействию внешних сил, оно имеет вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.5)$$

где p — давление, ρ — плотность, ν — коэффициент кинематической вязкости, t — время.

Уравнение Эйлера (Э) получается, если формально положить $\nu = 0$. Канонизируя уравнение НС, мы переходим от физического моделирования к математическому и сразу сталкиваемся с известными трудностями: получить решение уравнения НС при достаточно больших числах Re не удастся, уравнение Э имеет бесконечный набор решений, уравнение пограничного слоя Прандтля не всегда имеет решение.

В предельном случае, когда число $Re = u_\infty l / \nu$ (u_∞ — скорость однородного невозмущенного потока, l — характерный размер обтекаемого тела) мало, уравнение НС переходит в уравнение Стокса (С). В другом предельном случае, когда $Re \gg 1$, уравнение НС переходит в уравнение Э. Реальная ситуация не так проста: имеется большой набор дифференциальных, интегральных и

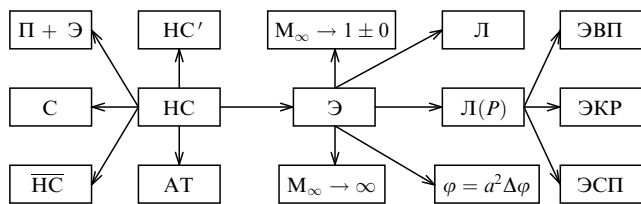


Рис. 4. Уравнения динамики жидкостей

интегродифференциальных уравнений, как асимптотических субмоделей гидродинамических явлений. На рис. 4 показаны лишь некоторые из них: П — уравнения пограничного слоя Прандтля, $\overline{НС}$ — усредненные уравнения НС, $НС'$ — укороченные (параболизированные, гиперболизированные и т.д.) уравнения НС, АТ — уравнения асимптотической теории (линеаризованные уравнения НС, уравнения взаимодействия, уравнения маргинального отрыва и т.д.), Л — уравнение Лапласа, Л(P) — уравнение Лапласа с разрывами (поверхностями скольжения), ЭВП, ЭКР, ЭСП — интегродифференциальные уравнения эволюции вихревой пелены, контактного разрыва, свободной поверхности.

Точки, линии и поверхности, на которых нарушается постулируемая гладкость решения, называются *складками*. Контроль корректности математической модели в окрестности складок, где "сконцентрирована" нелинейность, особенно важен. Корректная математическая модель должна иметь локальные асимптотические разложения в окрестности всех складок.

К сожалению, такие разложения не всегда известны. В частности поэтому в гидродинамике нашли широкое применение различные эмпирические принципы. *Принцип неопределенности* запрещает применение детерминированных методов расчета в областях, где течение хаотично; в соответствии с этим принципом оправданно введение таких "размытых" понятий, как отрыв, турбулентность и т.д. В рамках *принципа максимальной простоты* постулируются минимум числа отрывных образований на гладкой поверхности, условия ограниченности решения (условие Кутта и условие Бриллюэна–Вилля), минимальная особенность в решении задачи методом деформированных координат (правило Лайтхилла) и т.д. *Принцип сходимости* подразумевает повторяемость и воспроизводимость как опыта, так и численного расчета. *Принцип запрета* накладывает известные физические ограничения сверху и снизу на гидродинамические величины и на пространственно-временной масштаб течения; так, в масштабе длин $O(Re^{-1})$ и времени $O(\tau)$, где τ — время свободного пробега, нарушается концепция сплошной среды, т.е. уравнение НС. Принцип *экстремального соответствия*, состоящий в том, что при предельном значении параметров $(0, 1, \infty)$ математическая модель должна переходить в известную, служит ключом к отбору пригодных для практики моделей; свою эффективность он показал при отборе квантовомеханических теорий.

2.2. Методы возмущений

Асимптотический анализ корректности математической модели базируется на методах возмущений, которые приспособлены для решения уравнения $f(x; \epsilon) = 0$, когда параметр ϵ можно считать малым ($\epsilon \rightarrow 0$) или большим

($\epsilon \rightarrow \infty$). Один случай переходит в другой, например, с помощью замены $\delta = 1/\epsilon$.

Методы возмущений лежат в основе любой теории (Евклида, Ньютона, Дарвина, Смита, Маркса, Эйнштейна, Вернадского и т.д.), ибо каждая из них — это идеализация реального явления, построенная в предположении, что некоторые определяющие параметры устремлены к своим предельным значениям ($\epsilon = 0$). Методы возмущений — это не дань моде и не абстрактный математический аппарат, а инструмент естествоиспытателя. Являясь главенствующими как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях, они успешно конкурируют с вычислительными.

Корректность методов возмущений, зародившихся в начале XIX века, до сих пор не доказана. Такова драма идей: физики используют методы, которые "чистые" математики (пуристы) не признают.

Методы возмущений не были открыты в результате внезапного озарения одного математика. Из многочисленных ученых, занимавшихся разработкой этих методов, следует выделить трех выдающихся естествоиспытателей.

Французский астроном, математик и физик Пьер Симон Лаплас (1749–1827) широко использовал в своих исследованиях ряды. Решая задачу о равновесии большой невесомой капли на плоскости, он впервые использовал метод возмущений. Это был интуитивный прорыв в неизвестное. Лапласу принадлежит удивительная по емкости характеристика методов возмущений: "Математический метод тем более точен, чем более он необходим".

Французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857), один из основателей математического анализа, дал четкое построение теории сходящихся рядов, указав признаки их сходимости. Естественно, что в то время расходящиеся ряды никакого интереса для Коши не представляли. Его авторитет был настолько велик, что практическое применение асимптотических разложений надолго задержалось. В настоящее время асимптотические, как правило, расходящиеся ряды являются важнейшим инструментом исследования.

Идея метода деформированных координат восходит к выдающемуся французскому математику Анри Пуанкаре (1854–1912). Для получения равномерно пригодного асимптотического разложения он слегка изменил координату x , тоже разложив ее в асимптотический ряд. Таким образом, наряду с разложением для независимой переменной,

$$f(x; \epsilon) = f_0(s) + \epsilon f_1(s) + \epsilon^2 f_2(s) + \dots,$$

он строил ряд для координаты:

$$x(s; \epsilon) = s + \epsilon x_1(s) + \epsilon^2 x_2(s) + \dots,$$

где s — новая координата, заменяющая x . Функции $x_n(s)$, определяющие деформацию координаты x , заранее неизвестны и должны находится последовательно в процессе решения задачи.

История методов возмущений знает два триумфальных момента.

В 1846 г. французский астроном, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук Урбен Леверье открыл планету, названную впоследствии Нептуном. Открытие было весьма необычным: Леверье

не воспользовался телескопом, как это всегда делали для подобных целей его предшественники. Он открыл новую планету "на кончике пера", исследуя *возмущения*, которые она — загадочная невидимка — вносила в движение другой планеты — Урана. В том же 1846 г. по координатам, рассчитанным Леверье, неизвестную дотопе планету обнаружил на небосклоне (уже с помощью телескопа!) немецкий астроном Иоганн Галле.

Это был первый триумф методов возмущений. А второй — открытие в 1905 г. (тоже "на кончике пера") выдающимся немецким гидродинамиком Людвигом Прандтлем (1875–1953) так называемого пограничного слоя — тонкой прилегающей к поверхности тела области, где очень сильно изменяется скорость потока слабовязкой жидкости. Это открытие имело важнейшее значение для дальнейшего развития транспорта и энергетики.

Сегодня не только физики, но и математики называют пограничным слоем узкую область или малый интервал, в котором функция претерпевает резкое изменение.

В настоящее время разработано много методов возмущений: метод сращивания асимптотических разложений, метод многих масштабов, метод деформированных координат и т.д. Их настолько много, что это дало повод физикам для шутки: "Сколько задач, столько и методов возмущений".

Среди всевозможных методов возмущений на первое место в гидродинамике вышел метод сращивания асимптотических разложений, ставший из чисто математического инструмента категорией физического мышления. Метод сращивания асимптотических разложений эффективен, когда имеются, по меньшей мере, два различных по порядку величины масштаба длины, определяющих две характерные области: внешнюю и внутреннюю, в каждой из которых справедливо свое асимптотическое разложение.

Представьте себе, что у вас имеется фотография (внешняя область) с неясной, но важной деталью, которая ввиду малых размеров выглядит на снимке особой точкой (внутренняя область). Если рассмотреть эту область отдельно с помощью лупы, т.е. при многократном увеличении (растяжении координат), то где-то на ее периферии вы заметите те же подробности, которые едва различались в окрестности особой точки на неувеличенном фотоснимке. Такова суть метода сращивания асимптотических разложений.

2.3. Парадигма Прандтля

Предельный переход $Re \rightarrow \infty$ является особым. Концепция Прандтля о пограничном слое, справедливая для безотрывного обтекания, естественным образом обобщается на случай отрывного течения. Схема предельного обтекания некоторого условного тела с иглой, представленная на рис. 5, состоит из трех характерных областей: 1) тонкие вязкие слои, где справедливы уравнения П ($1A$ — пограничные слои; $1B$ — слои смешения; $1C$ — след), 2) окрестности складок, где уравнения П и Э несправедливы и необходимо более деликатное обращение с уравнениями НС ($2A$, $2B$ — окрестности линий отрыва от гладкой поверхности и от угловой кромки; $2C$, $2D$ — окрестность линии присоединения к гладкой поверхности и к угловой кромке; $2E$ — окрестность вершины каверны или замкнутой циркуляционной зоны;

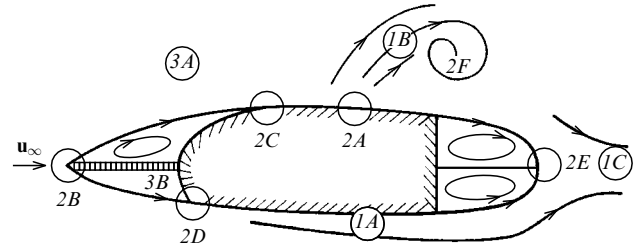


Рис. 5. Схема обтекания условного тела потоком слабовязкой жидкости

$2F$ — окрестность спирального ядра тангенциального разрыва, линии пересечения разрывов и т.д.), 3) область течения идеальной жидкости ($3A$ — область безвихревого течения; $3B$ — область вихревого течения). Поскольку при $Re \rightarrow \infty$ толщины областей 1, где сосредоточены малые количества массы, импульса и энергии жидкости, и размеры локальных зон 2 обращаются в нуль, пограничные слои совпадают с поверхностью тела, слои смешения стягиваются в вихревые поверхности разрыва тангенциальной компоненты скорости. Итак, в определенном диапазоне масштабов, не слишком малых, чтобы не попасть в вязкие слои, и не слишком больших, чтобы не проявлялась диффузия следа, например, в масштабах обтекаемого тела, течение при $Re \rightarrow \infty$ можно считать невязким. В областях 3 справедливы уравнения Э. Подобласти течения разделены поверхностями тангенциального разрыва: *контактным разрывом*, отделяющим жидкости с разными плотностями и существующим в двух- или многофазной среде; *вихревой пеленой*, разделяющей одну и ту же жидкость (частный случай контактного разрыва); *свободной поверхностью*, отделяющей область течения от области, на границе которой давление считается заданным. На контактном разрыве справедливы условия непротекания жидкости с обеих сторон и равенства скачка давления эффективному давлению, обусловленному действием сил поверхностного натяжения. На вихревой пелене давление непрерывно. На свободной границе выполняется условие непротекания со стороны движущейся жидкости, а также задается давление, в общем случае как функция поверхностных координат и времени. В частном случае свободная поверхность ограничивает изобарическую область. На свободной границе могут действовать поверхностные силы.

Вихревая пелена и свободная граница как поверхности разрыва тангенциальной компоненты скорости сохраняют свое определение и в случае сжимаемой среды. Плотность газа на вихревой пелене терпит разрыв.

Решение уравнения Э кусочно аналитическое: части пространства разделены кусочно аналитическими поверхностями разрыва скорости (поверхностями скольжения, слабыми разрывами и ударными волнами), при переходе через которые функции или их производные терпят скачок первого рода. Складками называются линии, на которых поверхности разрыва неаналитичны. Они образуются при пересечении поверхностей разрыва друг с другом и с обтекаемым телом. Складки в свою очередь тоже кусочно аналитичны. Точки, в которых они неаналитичны, являются особыми. С течением времени складки и особые точки могут возникать, сливаться или уходить на бесконечность. Пока нет полной ясности в

вопросе о том, какого рода особенности функций и поверхностей допустимы на складках. В рамках уравнения Э эти вопросы изучаются с помощью координатных разложений, а в рамках уравнения НС — с помощью метода сращивания асимптотических разложений. Имеется тесная связь между этими двумя теориями: внутренний предел разложения в теории течений идеальной жидкости равен внешнему пределу разложения в теории вязкой жидкости.

2.4. Иерархия моделей

К математической модели предъявляются три основных требования: соответствие опыту, согласие с исходной физической моделью и корректность задачи. Кроме качественного сходства между математической моделью и схемой течения, наблюдаемой в аэро- и гидродинамических трубах, требуется количественное совпадение с определенной погрешностью расчетных и реальных характеристик — модель должна удовлетворять запросам практики. Современные требования к корректности задачи значительно ослаблены ввиду отсутствия соответствующих теорем. Предполагается, что (кусочно аналитическое) решение существует. Не обязательно единственное, ибо оно проверяется экспериментально, не обязательно корректное по Адамару.

Казалось бы после разбиения полной задачи обтекания на ряд вспомогательных по схеме $НС \rightarrow Э + П + НС'$ следует, решив уравнение Э, получить тем самым граничные условия для уравнения П и, решив его, рассмотреть решение в особых областях в рамках укороченных уравнений $НС'$. Однако такая наивная программа терпит крах: модель идеальной жидкости ("сухой воды") не является логически замкнутой. Дело в том, что при формальном переходе $Re \rightarrow \infty$ в уравнении НС теряется старшая производная и вместе с этим определенная информация о течении: о гладкости, единственности, асимптотическом поведении на больших расстояниях или при больших временах, порой — о существовании решения. Даже дополненная разумными условиями (условие Кутта конечности давления на угловой кромке обтекаемого тела, условие Бриллюэна–Вилля конечности градиента давления на линии отхода поверхности тангенциального разрыва от гладкой поверхности тела, условие Бэтчелора, представляющее собой уравнение для определения завихренности в замкнутой циркуляционной области) модель "сухой воды" не имеет единственного решения — *a priori* без диагноза пограничного слоя местоположение и число отрывов, т.е. отходящих от тела поверхностей скольжения, остаются неизвестными. Обе задачи, т.е. решение уравнений Э и П, настолько взаимосвязаны, что формальное, хотя и корректное с позиций метода возмущений их разделение оказывается эмпирическим. Для решения уравнения Э требуются дополнительные предположения о числе, а иногда и о форме поверхностей разрыва, равно как и о наличии замкнутых вихревых зон, примыкающих к поверхности тела.

Однако при разделении задачи достигается принципиальное упрощение: свойственная маловязким течениям турбулентность сосредотачивается в тонких слоях. В гидродинамике стохастический слой [21] совпадает с пограничным слоем и слоем смещения. Такова физическая причина неустойчивости поверхностей разрыва. В отсутствие стабилизирующих факторов поверхности

скольжения обладают неустойчивостью Гельмгольца или, говоря другими словами, неустойчивостью по Ляпунову. Такая "неустойчивость в малом" изменит схему течения "сухой воды", если частота флуктуаций велика или их амплитуда достигает конечных значений. Но еще раньше, когда амплитуда перемещений разрыва сравняется по порядку величины с толщиной слоя смещения, нарушится концепция тонкого вязкого слоя.

С математической точки зрения следует различать существенно некорректные и условно некорректные задачи. Отсутствие решения некорректной задачи свидетельствует о неправильно выбранной модели и необходимости переформулировки задачи. Однако такая классификация остается умозрительной, пока нет критериев принадлежности задачи к одному из двух видов.

Конкретную модель можно улучшить, если ввести в рассмотрение новый эффект, не учитываемый на предыдущем этапе. Наиболее яркий пример этого — иерархический ряд математических моделей в теории крыла малого удлинения [22]. (Удлинение — параметр, определяющий вытянутость крыла по направлению невозмущенного потока.) Безотрывная модель (рис. 6а, здесь и далее показаны схемы поперечного сечения крыла) приводит к бесконечно большим значениям скорости на кромках крыла ($y = 0, z = \pm 1$), так как не удовлетворяется условие Кутта. Модель Лежандра (рис. 6б) исключает это противоречие, но приводит к неоднозначности решения ввиду разрыва давления на линии AF , соединяющей точечный вихрь в точке F с кромкой крыла A [23]. Схема "вихрь–разрез" (рис. 6в), ликвидирующая неоднозначность, содержит неопределенность в форме разреза AF [24]. Модель отрыва с отходящими от кромок спиральными вихревыми пеленами [25] свободна от этой неопределенности (рис. 6г), но приводит к бесконечному градиенту давления при приближении к кромке по верхней поверхности крыла.

Особое место в иерархии методов решения гидродинамических задач занимает численный эксперимент — "лобовое" решение уравнений Э или НС. Его зачинали еще в домашнюю эру такие гиганты, как Массо [26], Розенхед [27], Вестуотер [28], Каден [29], Ферми [30]. Численный эксперимент следует рассматривать не как

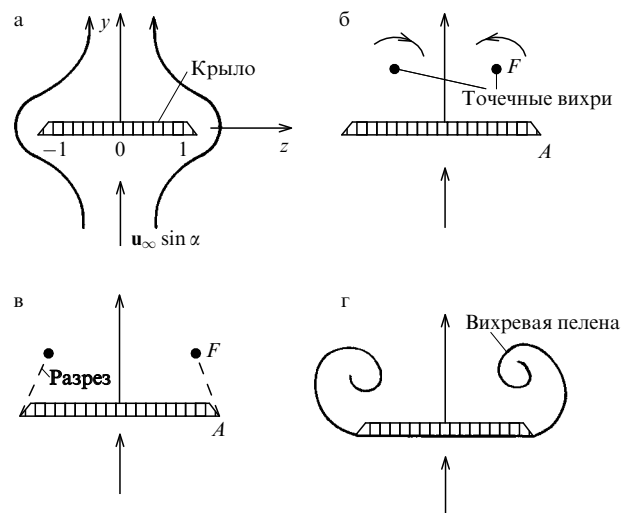


Рис. 6. Схемы обтекания крыла малого удлинения в рамках нестационарной аналогии

способ получения количественных результатов, а как попытку установить корректность задачи. С помощью подобных методов "грубой силы" можно получать лишь качественные результаты. Область применения численного эксперимента в гидродинамике сужается под напором наших расширяющихся представлений о свойствах течений слабовязкой жидкости.

2.5. Парадоксы

Парадоксом называется неожиданное суждение, резко противоречащее общепринятому. Практическое значение парадоксов — двигателей прогресса — состоит в том, что они заставляют по-новому посмотреть на основы старой теории и построить другую, более совершенную теорию, а зачастую — новую науку. Специальная теория относительности — это разрешение парадокса конечности скорости передачи информации, квантовая механика — разрешение парадокса прерывности сигнала в микромире. Парадоксы породили физику элементарных частиц и современную космологию, стимулировали развитие современной математики.

"Обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся на первый взгляд совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения, и предусмотреть их можно только из физических соображений" (Ж. Адамар).

Коль скоро мы умеем отличать опытное суждение, устанавливаемое с помощью эксперимента, от теоретического, основанного на математическом моделировании явления, нетрудно выделить три типа парадоксов.

Первый из них — противоречие между общепринятым и новым теоретическими суждениями. Такой, пожалуй, самый простой тип парадоксов ("теория–теория") возникает в результате усовершенствования математической модели и метода расчета. Сюда относятся парадоксы неединственности решения и парадоксы бесконечности.

Второй тип парадоксов — противоречие между общепринятым и вновь полученным опытными суждениями ("опыт–опыт"). Примером являются парадоксы симметрии. Разрушение или появление симметрии с точки зрения синергетики — это переход на другой (устойчивый) уровень организации, осуществляемый под воздействием всегда присутствующих в потоке малых асимметричных возмущений. Разумеется, такое объяснение слишком общо, каждая конкретная задача требует детального анализа. Другой пример — парадокс Эйфеля: вблизи "критического" числа Рейнольдса, равного примерно 150 000, сила сопротивления сферы резко (в 4–5 раз!) уменьшается с увеличением скорости. Этот факт, противоречащий нашим ожиданиям, тоже связан с переходом течения на другой уровень самоорганизации, а именно, с переходом ламинарного режима в турбулентный.

Для третьего типа парадоксов ("теория–опыт" или "опыт–теория") характерно противоречие между теоретическими результатами и тем, что мы называем опытом, интуицией или просто здравым смыслом. Самый известный из парадоксов такого типа — парадокс Эйлера–Даламбера нулевого сопротивления тела, движущегося в лишенной трения жидкости, можно отнести к парадоксам симметрии: если течение далеко перед телом такое же, как и вдали за ним, то по закону сохранения количества движения сила сопротивления равна нулю. В

реальном течении (опыте) симметрия всегда нарушена: за телом образуется след, представляющий собой заторможенную "струи" жидкости.

Созерцание — примитивная форма познания, а вот выявление противоречий — сложный гносеологический процесс. Каждый человек, обнаружив дисбаланс, ставит вопрос типа "почему?". "Почему яблоко падает вниз?" — спросил себя Ньютон и ответил на этот вопрос, сформулировав закон всемирного тяготения.

Нерешенные задачи — это неразгаданные парадоксы. В отличие от разгаданных, являющихся достоянием истории, они и сегодня будоражат умы ученых. Парадокс — это то, что рождается парадоксом, а умирает банальностью.

3. Автомодельные течения

Автомодельность — плохое слово. Первый корень, хотя и иноязычен по происхождению, правильно отражает суть явления, второй — просто ни к месту. Лучше говорить — самоподобие, как и говорят за рубежом (по-английски self-similar). К сожалению, термин "автомодельность" прижился, и изменить его скорее невозможно, чем трудно.

Автомодельное течение является виртуально промежуточной асимптотикой реального течения [31–33]. О выходе реального течения на автомодельный режим в некотором пространственно-временном интервале можно говорить только в смысле близости реального течения к автомодельному с заданной погрешностью. Влияние неавтомодельных факторов — противодавления, асимметрии, вязкости, других реальных свойств газа и т.д. — существенно при малых и больших временах в окрестности особых точек течения и на бесконечность. В случае малого фона неавтомодельных факторов гипотеза об автомодельности течения в целом справедлива при дополнительном предположении о ламинарности и поэтому нуждается в экспериментальной проверке.

Являясь чуть ли не единственным видом начальных данных для задачи Коши, описывающей эволюционные процессы в динамике жидкости и газа, автомодельные решения имеют исключительно важное значение. Так, в момент зарождения разрывного течения число определяющих параметров сводится к минимуму, обеспечивающему применение гипотезы автомодельности. От существования автомодельного решения кардинальным образом зависит существование решения полной неавтомодельной задачи, которое при известных для теоремы Коши–Ковалевской условиях нетрудно получить с помощью численных методов.

Автомодельность означает, что в четырехмерном пространстве \mathbf{r}_1, t , введены квазиконические координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1/bt^n$, t ($0 \leq t \leq \infty$), и зависимость от t представлена в явном (степенном) виде. Вектор \mathbf{r} характеризует скорость движения рассматриваемой точки, поэтому физический смысл приобретает вектор относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{r}$, где

$$m\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}_1(\mathbf{r}_1, t)}{bt^{n-1}},$$

\mathbf{u}_1 — вектор скорости движения частиц жидкости. Так, уравнения Эйлера для сжимаемого газа окажутся эллиптическими в области, где $|\mathbf{w}|^2 < a^2 = \gamma p/\rho$ (γ — показате-

тель адиабаты совершенного газа, a — скорость звука), и гиперболическими в области, где $|\mathbf{w}| > a$.

Параметрическое семейство векторных линий $\mathbf{w} \times d\mathbf{r} = 0$ определяет поле автомодельных траекторий. Выясним, каким образом были выбраны эти линии, фиксирующие одни и те же частицы жидкости, в начальный момент времени $t = 0$. Переходя к физическим переменным, в пределе $t \rightarrow 0$ получаем

$$(t\mathbf{u}_1 - n\mathbf{r}_1) \times d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 = 0.$$

Таким образом, каждая автомодельная траектория в начальный момент времени представляла собой прямую, проходящую через начало координат. Даже в случае течения несжимаемой жидкости поле автомодельных траекторий несоленоидально: $\nabla \cdot \mathbf{w} = -2$.

Топологические свойства автомодельного течения определяются характером и расположением особых точек поля автомодельных траекторий $\mathbf{w} = 0$. Типы особых точек разнообразны. Особенность типа "фокус" имеется в ядре спирального разрыва или в окрестности точечного вихря, ее наличие указывает на отрывной характер течения. Особенности типа "центр" не может быть в потоке, не содержащем источников жидкости, тогда как особенность типа "узел" даже при отсутствии источников присуща автомодельным траекториям, поскольку их поле несоленоидально. Если линеаризация в окрестности особой точки неприменима, то возникают более сложные типы особенностей, например, особенность "седло+узел". Такая ситуация возникает при слиянии особых точек, когда параметры достигают критического значения. Все особые точки расположены в области, где справедливы уравнения эллиптического типа, либо на ее границе — поверхности параболности.

3.1. Классификация

Пусть нестационарное течение идеального совершенного газа или несжимаемой жидкости определяется двумя параметрами ρ_0 и b с независимыми размерностями:

$$[\rho_0] = ML^{-3}T^{-kn}, \quad [b] = LT^{-n}.$$

Показатель автомодельности n характеризует закон расширения или сужения области течения. В случае несжимаемой жидкости $k = 0$.

Прежде всего следует выделить интервал изменения времени $t_1 \leq t \leq t_2$, в котором существует автомодельное решение. Различают две формы автомодельных течений [34]. Если оно возникло "недавно", т.е. $t_1 = O(t)$, то ввиду инвариантности решения относительно сдвига по времени всегда можно считать, что $t_1 = 0$, и автомодельное решение существует в положительном интервале времени ($t_2 = \infty$). Если течение зародилось "давно", т.е. $t_1 = -\infty$, то автомодельное решение существует в отрицательном интервале времени: $-\infty < t < 0$ ($t_2 = 0$).

Влияние неавтомодельных факторов, ответственных за возникновение автомодельного течения, существенно в начальный момент времени $t = t_1$. Влияние неавтомодельных факторов, ответственных за разрушение автомодельного течения, существенно в конечный момент времени $t = t_2$. Вопрос о роли неавтомодельных факторов обычно разрешим *a priori* из соображений размерности.

Рассмотрим его подробно на примере такого фактора, как сила вязкости, действующая в ньютоновой жидкости с постоянным кинематическим коэффициентом вязкости ν . Влияние этого фактора характеризуется числом

$$Re = \frac{u_\infty l}{\nu} = O[(\pm t)^{2n-1}],$$

где u_∞ и l — масштабы скорости и длины, верхний или нижний знак берется, если течение наблюдается соответственно в положительном или отрицательном интервале времени. Такое течение строго автомодельно в случае $n = 1/2$ (течение Биркгофа [35]). При $n \neq 1/2$ можно говорить только о движении идеального газа, т.е. об автомодельном решении уравнения Э. Но окажется ли влияние сил вязкости настолько малым или локализованным, чтобы течение в целом можно было считать невязким? Этот центральный вопрос гидродинамики маловязких жидкостей в общем виде остается нерешенным.

Если число Re убывает с течением времени от бесконечности до нуля, то обязательно настанет момент, когда влияние сил вязкости станет доминирующим. Поэтому необходимым условием существования автомодельного решения при $n \neq 1/2$ является возрастание числа Re с течением времени от нуля до бесконечности, т.е. условие $Re(t_1) = 0$. Следовательно, решение на полуинтервале $0 < t < \infty$ физически реально¹ при $n > 1/2$, а на $-\infty < t < 0$ — при $n < 1/2$. Полная циркуляция каждой вихревой зоны физически реального течения увеличивается от нуля до бесконечности, как и число Re .

Исходя из условия физической реальности автомодельного течения можно сразу же отвергнуть возможность продолжения решения на полуоси $0 < t < \infty$ в область отрицательных значений t . В противоположность этому случаю решение на интервале $-\infty < t < 0$ задает начальные условия при $t = 0$ для его продолжения в область положительных значений t . Если такое продолжение существует, то в силу соображений размерности оно должно иметь тот же показатель автомодельности, что и исходное решение, и разрушаться под действием сил вязкости с течением времени.

Решение на полуоси $-\infty < t < 0$ описывает коллапс (контактного разрыва, свободной границы, ударной волны), когда $n > 0$, и — расширение, когда $n < 0$.

В гидродинамике идеальной жидкости известно четыре класса автомодельных течений.

1) Несжимаемая жидкость. Показатель автомодельности произволен. Выделяют [34] псевдостационарное течение ($n = 0$), течение Биркгофа ($n = 1/2$), течение Кадена ($n = 2/3$), экспоненциально автомодельное течение ($n \rightarrow \pm\infty$), нестационарное коническое течение ($n \rightarrow \pm\infty$). Одномерный пример — симметричное схлопывание каверны.

2) Сжимаемая жидкость. Наличие размерного параметра — скорости звука в невозмущенном потоке — определяет единственное значение показателя автомодельности, равное единице. Каждая фиксированная

¹ Физическая нереальность не адекватна математической. Существование физически нереального решения должно лишь стимулировать расширение нашего представления о постановке задачи.

точка автомодельной плоскости движется с постоянной скоростью; система координат, связанная с движущейся поверхностью, инерциальна; величина b имеет размерность скорости; в рамках гипотезы автомодельности возможен учет давления невозмущенного газа, имеющего постоянную плотность. Одним из определяющих параметров является число Маха M_∞ в невозмущенном потоке. Одномерные примеры: распад произвольного разрыва, движение плоского поршня.

3) Гиперзвуковое течение. Показатель автомодельности снова произволен. Постулируется, что в неравномерном ($n \neq 1$) течении скорость звука в невозмущенном потоке a_0 пренебрежимо мала по сравнению со скоростью движения ударной волны, поэтому возможны только течения сжатия с сильной ударной волной ($M_\infty = \infty$). Определенная на положительном интервале времени задача автомодельна при $t \gg t_0$ для ускоренного ($n > 1$) движения и при $t \ll t_0$ — для замедленного ($n < 1$); здесь $t_0 = (a_0/b)^{1/(n-1)}$, $0 < t < \infty$.

Ускоренному автомодельному течению газа предшествует акустическая стадия эволюции слабых разрывов, когда $t \ll t_0$, и переходная стадия формирования гиперзвукового течения, когда $t = O(t_0)$. На переходной стадии образуется "энтропийный слой" заторможенного газа с характерной толщиной bt^n .

Одномерные примеры гиперзвукового автомодельного течения: движение поршня, сильный взрыв, схлопывание ударной волны.

4) Коническое течение — пример стационарной автомодельности [23, 36]. Решение не зависит от линейной координаты, а зависит только от двух угловых координат. Задача двумерна. Одномерный пример: обтекание кругового конуса, установленного под нулевым углом атаки.

В гидродинамике ньютоновой жидкости для полных уравнений НС показатель автомодельности нестационарного течения несжимаемой жидкости, как уже говорилось, равен $1/2$; стационарное автомодельное течение в сферической системе координат r, θ, λ может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(r, \theta, \lambda) = \frac{v}{r} \mathbf{U}(\theta, \lambda), \quad p(r, \theta, \lambda) = \frac{v^2}{r^2} P(\theta, \lambda).$$

В неидеальной среде с постоянным числом Pr и с коэффициентом вязкости, степенным образом зависящим от температуры ($\nu = aT^k$), показатель автомодельности фиксирован:

$$n = \frac{1 - 2k}{2 - 2k}, \tag{3.1}$$

а стационарное автомодельное решение приобретает форму

$$\mathbf{u}(r, \theta, \lambda) = b^\alpha r^m \mathbf{U}(\theta, \lambda), \quad p(r, \theta, \lambda) = b^{2\alpha} r^{2m} P(\theta, \lambda),$$

где $b = a\mathcal{R}^{-k}$, $\alpha = 1/(1 - 2k)$, $m = 1 - 1/n$, \mathcal{R} — газовая постоянная.

3.2. Идеальная жидкость

Решение, описывающее движение точечного вихря интенсивности Γ_0 или нескольких точечных вихрей и имеющее физический смысл в случае нестационарного

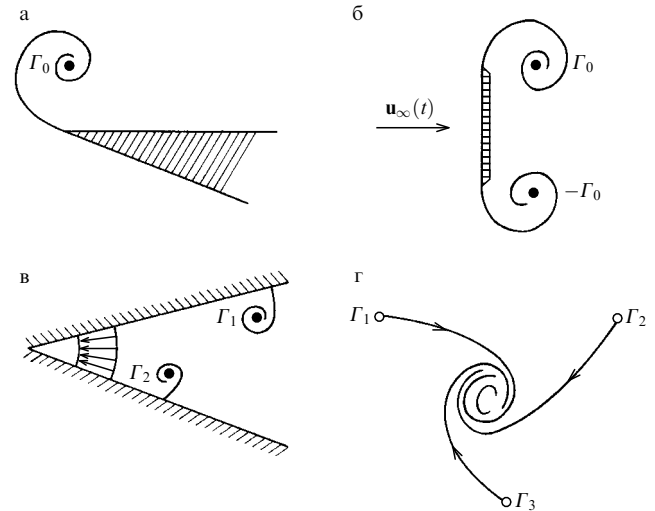


Рис. 7. Примеры течения Никольского

автомодельного течения, когда показатель автомодельности n стремится к $1/2 + 0$, впервые исследовано Никольским [37, 38] применительно к обтеканию бесконечного клина (рис. 7а); обтекание конечного тела (пластины, рис. 7б) рассмотрено в работе [39]. Для течения Никольского характерно, что все размеры тела и проходимый им путь увеличиваются пропорционально \sqrt{t} . К этому же типу относится течение внутри клина с постоянным расходом (рис. 7в).

Для применения теории Никольского к отрывным течениям требуется задание некоторых априорных величин, например числа точечных вихрей, имитирующих оторвавшиеся от тела вихреобразования. Благоприятные для этого возможности открываются при моделировании отрыва от клиновидной кромки тела, когда условие Кутта доопределяет задачу.

Течение Никольского — частный пример течения Биркгофа ($Re = \infty$). Несколько примеров течения Никольского, на основе которых можно изучать существование, бифуркацию, топологию и асимметрию автомодельных решений, предложено в [14].

Одним из удивительных явлений, происходящих в системе точечных вихрей, если их число ≥ 3 , является коллапс, представляющий собой по существу течение Никольского во вращающейся системе координат [40]. Вихри, имеющие комплексные координаты $z_j(t)$, движутся по спиральным траекториям к точке, где схлопываются за конечное время (рис. 7г).

Пусть кластер из трех вихрей, эволюционирующий по закону

$$\frac{d\bar{z}_j(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{z_j - z_k}, \quad j = 1, 2, 3,$$

вращается вокруг "центра тяжести" $z = 0$. В соответствии с теорией размерности угловая скорость вращения вихрей обратно пропорциональна корню квадратному из времени. Следовательно, решение представляется в виде

$$z_j = b\sqrt{-t} \mu_j \exp(i\omega \ln t), \quad \Gamma_j = \frac{1}{2} b^2 G_j, \\ \mu_j = \xi_j + i\eta_j, \quad -\infty < t \leq 0.$$

Уравнения эволюции превращаются в алгебраические:

$$(2i\omega + 1)\bar{\mu}_j = \sum_{k \neq j} \frac{G_j}{\mu_k - \mu_j}.$$

Имеется шесть действительных уравнений для восьми действительных констант, получающихся после приведения к безразмерному виду десяти неизвестных $\zeta_j, \eta_j, \Gamma_j, \omega$. Решение этой недоопределенной задачи существует.

Непрерывное продолжение решения в область положительных значений t можно трактовать как разлет вихря. Для этого случая направление стрелок на рис. 7г следует изменить на обратное. В отличие от коллапса вихрей, допускающего экспериментальную проверку, разлет вихря не является естественным, причинно обусловленным процессом. Невозможность разлета вихрей создает необратимость в динамике систем точечных вихрей. Этот механизм появления "стрелы времени" не имеет аналогов в динамике частиц.

Кажется почти очевидным, что слияние вихрей неустойчиво. Тем не менее представляет интерес определение условий "минимальной неустойчивости" в рамках суженного определения устойчивости, как это сделано, например, Карманом при исследовании цепочек точечных вихрей [41, 42].

Возможен ли коллапс двух точечных вихрей? Оказывается — да [43]! Для этого необходимо, чтобы точечные вихри, как показано на рис. 7б, имитировали отрыв от острых (или тупых) кромок, управляемый условиями Кутта, а тело схлопывалось в точку ($-\infty < t < 0$). Устойчивость такого слияния вихрей кажется почти очевидной.

Рассмотрим еще один пример автомодельного течения идеальной жидкости — коэволюцию вихревой пелены и свободной границы.

Хотя в случае совместной эволюции разнотипных поверхностей тангенциальных разрывов скорости в несжимаемой жидкости метод граничных интегродифференциальных уравнений допускает суперпозицию, исследование таких задач связано со значительными вычислительными трудностями. Важным для практики примером является автомодельная задача о наклонном входе клина в заполненное водой нижнее полупространство по степенному закону в зависимости от времени. Свободная граница 1 примыкает к щекам клина, а сходящая с его вершины спиральная вихревая пелена 2 обеспечивает выполнение условия Кутта конечности скорости (рис. 8а).

Применение метода сращивания асимптотических разложений, когда асимметрия мала, приводит к разде-

лению явления на два, в каждом из которых определяющим оказывается только один тип разрыва: во внешней области — свободная граница, во внутренней области, расположенной в окрестности вершины клина, — вихревая пелена [44].

Когда параметры асимметрии (угол α между вертикалью и биссектрисой клина и угол β между биссектрисой и направлением скорости входа u_0) достаточно велики, схема течения изменяется: с вершины клина O сходит свободная граница, свернутая в двойную спираль 3 вследствие ударного взаимодействия с острием клина в момент его касания воды (рис. 8б). Обе схемы нуждаются как в экспериментальной, так и в численной проверке.

3.3. Сжимаемая жидкость

Течение в окрестности вершины клина (или конуса) может быть автомодельно и в случае сжимаемой идеальной среды. Известны три задачи такого рода: дифракция ударной волны на клине (см. раздел 4.5), внезапное ускорение клина [45] и распад произвольного клиновидного разрыва [46]. Вдали от вершины клина течение одномерно. Как и в задаче о наклонном входе клина в воду, в задаче о несимметричной дифракции ударной волны на достаточно толстом клине условию Кутта можно удовлетворить в рамках схемы со сходящей с вершины линией скольжения, свободный конец которой свернут в спираль.

По той же причине спиральный вихрь сходит с вершины клина при его внезапном несимметричном движении из состояния покоя в режиме с отошедшей ударной волной.

Из-за наличия большого количества определяющих параметров до сих пор не установлена топологическая классификация распада произвольного клиновидного разрыва даже в симметричном варианте. Имеется несколько способов введения асимметрии в задачу о распаде клиновидного разрыва. Можно рассматривать эволюцию образования, состоящего в начальный момент из соединенных общей вершиной N угловых областей, в каждой из которых параметры газа различны. Не ясно, образуется ли в этом случае N -витковый спиральный вихрь. Можно считать, что при $t < 0$ "твердый" клин обтекается сверхзвуковым потоком с центрированной волной разрежения, а внутри клина газ покоится; в момент времени $t = 0$ стенки клина убираются.

Аналогично ставится задача и для несжимаемой жидкости: при $t < 0$ комплексная скорость степенным образом зависит от координаты. В качестве линии скольжения, изначально совпадающей со сторонами клина, можно выбирать вихревую пелену, свободную границу или контактный разрыв [47].

Распад разрыва, имеющего в начальный момент времени коническую форму, представляет собой сложную задачу [48], в асимметричном (трехмерном) варианте едва ли доступную для исчерпывающего анализа.

3.4. Спиральные вихревые пелены

Прежде чем обсуждать автомодельные спиральные течения, поговорим о спиральности в самом общем понимании, далеко отойдя от динамики жидкости в полном соответствии с принципом: кто не понимает

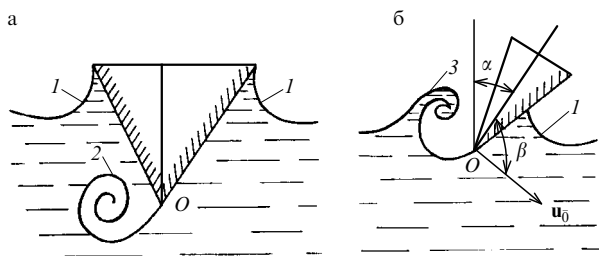


Рис. 8. Вход клина в воду: а — малая асимметрия, б — большая асимметрия

ничего, кроме гидродинамики, тот и ее понимает недостаточно. Окружающий нас мир спиральный. Живая и неживая природа представляет многочисленные примеры спиральных образований. Форму спиралей имеют раковины садовых улиток, которые легко найти у обочины дороги. С доисторических времен до нас дошли окаменелости, имеющие спиральную форму. Семена подсолнечника образуют два семейства противоположно закрученных спиралей. В технике спиральную форму имеют вращающиеся ножи, зубчатые передачи и др. Форму винтовой линии имеют цветковые и папоротникообразные растения, не способные сохранять вертикальное положение стебля самостоятельно, без опоры на скалы, постройки, другие растения. Рога винторогого козла закручены по винтовой линии в разные стороны.

Спиральность — фундаментальное свойство материи не только в макромире. В микромире спиральную структуру имеет молекула ДНК, в мегамире — галактики.

Со спиральной формой существования материи мы встречаемся настолько часто, что даже перечислить все ее проявления невозможно. Спиральные волны образуются при детонации, которая называется спиновой. Они же наблюдаются в известной реакции Белоусова-Жаботинского. Многие биологи считают, что возникновением спиральных волн объясняется аритмия в работе сердечной мышцы и другие биологические явления. Спиральные ударные волны обнаружены и в нашей, и в других галактиках. Пространственную спиральную структуру имеют циклон, смерч, течение Экмана над поверхностью океана, течение Тейлора в верхних слоях атмосферы.

В научном смысле термин "спиральность" (по-английски *helicity*) употребляется в двух схожих и несхожих значениях. В физике спиральность означает квантовое число элементарной частицы, равное проекции спина на направление ее движения. В гидродинамике этот термин, предложенный английским ученым Моффатом в 1969 г., означает скаляр $\mathbf{u} \cdot \text{curl} \mathbf{u}$ или объемный интеграл от этой величины, где \mathbf{u} — вектор скорости частиц жидкости. Спиральность сохраняется в идеальной жидкости, ее изменение вызвано изломом вихревых линий и диффузией. Она вводится для описания каскадного процесса турбулентности.

В каждом конкретном случае спиральные образования обычно представляют собой нерешенные задачи естествознания. Однако в более общем синергетическом смысле спиральная симметрия, принципиально отличающаяся от симметрии снежинки, атомного ядра или шахматной позиции, является естественным обобщением сферической симметрии. В отличие от сферической симметрии, которая характеризуется неизменностью радиуса при вращении, спиральная симметрия характеризуется сжатием или растяжением радиуса при его повороте по часовой стрелке или против нее. Поэтому спиральная симметрия — закон природы, а сферическая симметрия — его исключение, частность.

Почему подавляющее большинство спиральных раковин, как и молекул ДНК, закручено в одну сторону? Ответ на этот вопрос пока не получен. Начиная с Пастера, считается, что такой дисбаланс спиральной симметрии является характерной особенностью жизни.

Уже давно философы заметили, что искусство и наука, балансируя между традициями и новаторством, развиваются как бы по спирали: следующий виток познания, отличаясь от предыдущего, все же имеет с ним сходство. Аналогия символическая, но наглядная. Поскольку она не строгая, а качественная, у нее есть ярые противники:

"Я думаю — ученые наврали, —
Прокол у них в теории, порез:
Развитие идет не по спирали,
А вкривь и вкось, вразнос, наперерез."
(В. Высоцкий)

Что же, бывает и так.

Теперь уместно перейти к автомоделным течениям со спиральными вихревыми пеленами. Свободный конец вихревой пелены может сворачиваться в спираль с бесконечным числом витков. Асимптотическое поведение решения в центре плоского спирального вихря ($\theta \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$) исследуется с помощью замены полярных координат r, θ на r, η (где η — спиральная переменная,

$$0 \leq \eta = \theta - \theta_0(r) \leq 2\pi,$$

$\theta_0(r)$ — форма вихревой пелены, r — автомоделная координата) и разложения функций в ряд по степеням r . Такая замена возможна, если функция $\theta_0(r)$ монотонна. Изменение η от нуля до 2π при $r = \text{const}$ означает переход по окружности с одной стороны вихревой пелены к другой. Поэтому справедливо условие спиральной периодичности: давление и нормальная к вихревой пелене составляющая скорости одинаковы при $\eta = 0$ и $\eta = 2\pi$.

Спиральная пелена логарифмическая, если показатель автомоделности $n < 1/2$ [49], и алгебраическая, если $n > 1/2$ [50]. Численные решения конкретных задач о сходе вихревой пелены с твердой поверхности [25] получены лишь для алгебраических спиралей. Успех обеспечивался применением удачной, свойственной самой природе задачи аппроксимацией ядра вихревой пелены точечным вихрем с разрезом. Использование такой аппроксимации для ядра логарифмической спирали бьет мимо цели — численный расчет становится неустойчивым. Эта нерешенная задача свидетельствует, между прочим, о том, что шивка численного расчета с известной асимптотикой на складке является одной из сложных проблем вычислительной гидродинамики.

Экспериментально обнаружено, что в ядре спиральных вихрей, сходящих с кромок помещенного в гидротрубу крыла малого удлинения, образуются видимые вооруженным глазом кавитационные зоны. Согласно нестационарной аналогии, такое коническое течение эквивалентно плоскому ($n = 1$).

В некапельной жидкости (например, воздух или любой другой газ) каверна не образуется, в соответствии с асимптотикой течения в центре ядра вихревой пелены ($r \rightarrow 0$) давление p стремится к $-\infty$ по логарифмическому закону:

$$p \simeq p_0 + \rho u_0^2 \ln r,$$

где p_0, u_0 — некоторые характерные значения давления и скорости.

Порядковый размер каверны, образующейся в капельной жидкости (вода и пр.), мал², если число кавитации

$$\sigma = 2 \frac{p_0 - p_1}{\rho u_0^2}$$

велико (p_1 — давление в каверне). Наличие большого параметра σ в этой нерешенной задаче предопределяет использование асимптотического подхода.

Задача нуждается в обобщении на случай течения с показателем автомодельности $n \neq 1$, выбранном из диапазона $0,5 < n < 1$, когда давление во внешней по отношению к каверне области с уменьшением r стремится к $-\infty$ по степенному закону [50].

Если размеры каверны сравнимы с размером обтекаемого тела, то о спиральности говорить не приходится. Такое точное решение задачи получено Карманом в случае псевдостационарного ($n = 0$) симметричного обтекания пластины [51]. Не выяснено, когда точка смыкания каверны расположена на линии симметрии, а когда — на теле.

Можно ли обобщить решение Прандтля о логарифмической вихревой пелене [49] на случай течения сжимаемого газа? Ответ на этот вопрос до сих пор остается открытым.

Уравнения Эйлера

$$u_t + uu_R + \frac{1}{R} vu_\theta - \frac{1}{R} v^2 = -\frac{1}{\rho} p_R,$$

$$v_t + uv_R + \frac{1}{R} vv_\theta + \frac{1}{R} uv = -\frac{1}{R\rho} p_\theta,$$

$$\rho_t + \frac{1}{R} (R\rho u)_R + \frac{1}{R} (\rho v)_\theta = 0,$$

$$S_t + uS_R + \frac{v}{R} S_\theta = 0,$$

где u, v — составляющие скорости по направлениям R, θ , $S = p\rho^{-\gamma}$ — энтропийная функция, γ — показатель адиабаты, имеют (или не имеют!) точное решение в виде

$$u(R, \theta, t) = n \frac{R}{t} [U_0(\eta) + 1],$$

$$v(R, \theta, t) = n \frac{R}{t} V_0(\eta),$$

$$\rho(R, \theta, t) = \rho_0(\pm t)^{qn} r^{\varepsilon-2} \rho_0(\eta),$$

$$p(R, \theta, t) = n^2 \rho_0 b^2 (\pm t)^{qn-2+2n} r^\varepsilon p_0(\eta),$$

$$R = b(\pm t)^n r, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad \theta_0 = -k \ln r.$$

Вместо U_0 и V_0 введем составляющие относительной скорости U, V , которые на линии скольжения равны нормальной и тангенциальной компонентам:

$$\sqrt{1+k^2} U = V_0 + kU_0, \quad \sqrt{1+k^2} V = kV_0 - U_0.$$

Для определения неизвестных функций U, V, p_0 и ρ_0 из уравнений Эйлера получается система обыкновенных

дифференциальных уравнений:

$$(a^2 - U^2)U' = A, \quad UV' = B,$$

$$(a^2 - U^2)p'_0 = Cp_0, \quad U(a^2 - U^2)\rho'_0 = D\rho_0,$$

где $a^2 = \gamma T$, функции A, B, C и D — алгебраические многочлены, зависящие от U, V и $T = p_0/\rho_0$.

На вихревой пелене ($\eta_0 = 2\pi$) выполняются условия периодичности:

$$p_0(0) = p_0(2\pi), \quad U(0) = U(2\pi) = 0.$$

Возможна также задача о свертывании в логарифмическую спираль двух свободных границ

$$\theta_1(r) = -k \ln r, \quad \theta_2(r) = \eta_0 - k \ln r.$$

На них выполняются условия постоянства давления и непротекания:

$$p_0(0) = p_0(\eta_0) = p^0, \quad U(0) = U(\eta_0) = 0, \quad \eta_0 < 2\pi.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет две особые точки. Непрерывный переход через особую точку $\eta = \eta_1$ ($0 < \eta_1 < \eta_0$), в которой $a = \pm U$, возможен только при $A = 0$. Другая особенность $U = 0$ расположена на линии скольжения; при конечных значениях $T(0)$ производная $U'(0)$ конечна.

Не известно, существует ли в сжимаемом газе аналогичное решение для вихревой пелены, имеющей форму алгебраической спирали [52].

3.5. Вязкая жидкость

Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем, образующимся при сильном точечном взрыве на плоскости, представляет собой важную для приложений и совершенно не исследованную задачу. Формы заряда и ударной волны показаны на рис. 9 для случаев плоской ($N = 1$), цилиндрической ($N = 2$) и сферической ($N = 3$) симметрии. Цилиндрическая симметрия возможна, когда линия заряда перпендикулярна плоскости P (рис. 9б) и когда линия заряда лежит в плоскости P (рис. 9в). Течение автомодельно, если в соответствии с (3.1) $k = -1/2$ при $N = 1$, $k = 0$ при $N = 2$ и $k = 1/6$ при

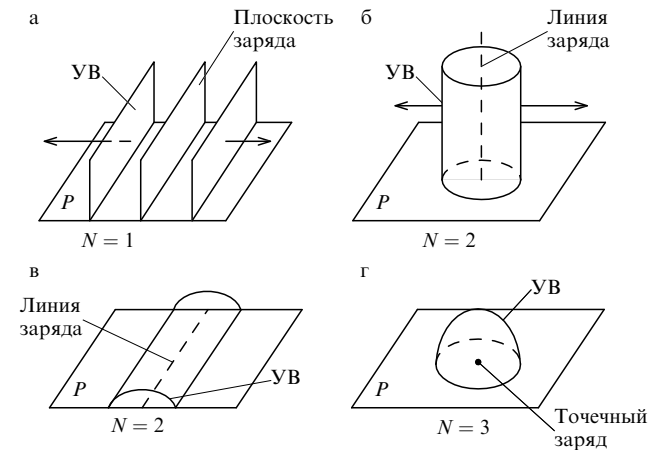


Рис. 9. К задаче о сильном взрыве заряда, расположенного на плоскости ($N = 1$), на линии ($N = 2$), в точке ($N = 3$); УВ — ударная волна

² Область, где существенна диффузия, имеет характерный размер $\sim \sqrt{vt}$. Поэтому при больших числах Re можно считать, что область вязкого течения расположена вблизи вершины крыла ($t \ll 1$).

$N = 3$. Определяющим параметром является число Рейнольдса

$$\text{Re} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/N} \frac{\mathcal{R}^k}{v_1},$$

где E — энергия, выделяющаяся при взрыве, ρ — плотность невозмущенного газа, \mathcal{R} — газовая постоянная.

Когда $\text{Re} \rightarrow \infty$, на плоскости P образуется пограничный слой. Особые области, где нарушается концепция пограничного слоя, расположены в окрестности эпицентра взрыва и в районе взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. Приводит ли это взаимодействие к образованию предвестника ударной волны?

Еще одним примером автомодельного течения вязкой жидкости является задача Стюартсона о движении полубесконечной пластины параллельно самой себе из состояния покоя со скоростью $nb t^{n-1}$ [53]. Если скорость направлена не по нормали к кромке (краю), то возникает задача о нестационарном обтекании скользящей пластины.

В рамках концепции пограничного слоя ($\text{Re} \rightarrow \infty$) для задачи Стюартсона допустимы любые значения показателя автомодельности; в рамках уравнения Навье–Стокса допустимы лишь те значения показателя автомодельности, которые удовлетворяют условию (3.1). *A priori* до проведения численных расчетов можно использовать принцип максимальной простоты. Полученное таким образом простейшее поле автомодельных траекторий, содержащее пять особых точек (два седла S и три узла N), показано на рис. 10 в предположении, что поток маловязкой жидкости ($\text{Re} \rightarrow \infty$) *натекает* ($b > 0$) на кромку [54]. За предельную линию $x = bt^n$ возмущения не проникают, в области $x > bt^n$ влияние вершины не ощущается — здесь справедливо одномерное решение, полученное еще Рэлеем [6]. Не ясно, какова топология автомодельных траекторий в задаче о *стекании* ($b < 0$) потока с кромки пластины, и как она изменяется с изменением числа Re .

Предельные линии возникают и в стационарном пространственном пограничном слое [55]. Решение в окрестности предельной линии не построено.

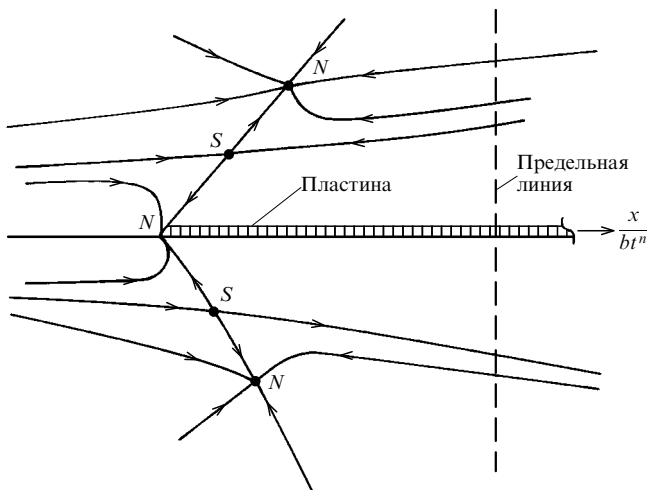


Рис. 10. Поле автомодельных траекторий в задаче Стюартсона

3.6. Два замечания об автомодельных решениях

До сих пор мы рассматривали автомодельные решения, точно удовлетворяющие уравнениям Эйлера, Навье–Стокса или Прандтля. Однако существует целый класс приближенно автомодельных течений, реализующихся в некоторой локальной пространственно-временной области. Это — асимптотически автомодельные решения.

Допустим, что решение

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{a} \mathbf{U}(\mathbf{R}), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{r} = b\mathbf{R}$, $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, справедливо при $t \rightarrow t_0$, $R = O(1)$. Тогда в случае $a = b$ и $|a'|a \ll 1$ оно удовлетворяет стационарному уравнению Навье–Стокса (при $|a'|a = 1$ имеется точное решение Биркгофа), в случае $a \ll b$ — уравнению Эйлера (при $|a'|b = |b'|a$ имеем точное решение), а в случае $a \gg b$ — уравнению Стокса.

Уравнение Стокса описывает, например, экспоненциальное приближение решения к состоянию покоя:

$$a = \exp(kt), \quad b = 1, \quad k > 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Подставляя (3.2) в уравнение (2.5) и пренебрегая в рассматриваемом случае квадратичными членами, получим

$$v \nabla_R^2 \mathbf{U} + k\mathbf{U} - \nabla_R P = 0, \quad \nabla_R \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$p(\mathbf{r}, t) = \exp(-kt)P(\mathbf{R}) + o(\exp(-kt)).$$

Такая линейная система уравнений описывает течение жидкости в ограниченных и неограниченных областях, например: вращение чая в стакане после прекращения помешивания, течение вблизи тела после его остановки, замедление вращения бескрылых ракет и т.д. Границы твердых тел могут покоиться либо двигаться с экспоненциально затухающей скоростью. В случае симметричного вращения жидкости относительно оси $r = 0$ система (3.3) сводится к уравнению Бесселя:

$$ru_0''(r) + u_0'(r) + \frac{k}{v} ru_0(r) = 0.$$

Второе замечание относится к неограниченным решениям. Пространственно-временная сингулярность решения, называемая физиками явлением неограниченной кумуляции, а математиками — режимом с обострением, может быть разделена на три типа:

1) Неограниченное решение в момент времени $t = 0$ во всем пространстве. К примеру, уравнение (2.5) имеет (или не имеет?) решение

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{t} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{t}\right), \quad p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{t^2} p_0(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Диссипативный член в этом приближении отсутствует:

$$-\mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0.$$

В том, что нелинейное уравнение теплопроводности допускает появление сингулярности за конечное время, убеждает простой пример:

$$u_t = uu_{xx}, \quad u = \frac{a_0 + a_1 x - x^2}{2t}.$$

2) Решение, неограниченное в любой момент времени на особом многообразии меньшей размерности, представляющем собой поверхность, линию или точку. Примеры таких особенностей: вихревая нить, линия источников, решение уравнения Навье–Стокса, когда $|\mathbf{u}| = O(r^{-1})$, $r \rightarrow 0$ и конвективный член $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ равен по порядку величины своему модулю члену $\nu|\nabla^2\mathbf{u}| = O(r^{-3})$.

Вблизи центра $r=0$ автомодельного точечного взрыва в идеальном газе скорость u и плотность ρ стремятся к нулю [31]:

$$u = c_1 \frac{r}{t} + o(r), \quad \rho = c_2 t^{-\frac{2N}{(N+2)(\gamma-1)}} r^{\frac{N}{\gamma-1}} + o\left(r^{\frac{N}{\gamma-1}}\right),$$

где r — радиальная координата, c_1 и c_2 — константы. Давление в центре взрыва конечно, температура стремится к бесконечности. Поэтому модель идеального газа становится непригодной, вблизи эпицентра следует учитывать эффекты теплопроводности и вязкости. Наиболее простая модель допускает применение гипотезы автомодельности. Когда $Re \gg 1$, влияние вязкости и теплопроводности сосредоточено вблизи эпицентра — во внутренней области. Во внешней области справедливо решение задачи о точечном взрыве в идеальной среде.

3) Неограниченное решение при $r = t = 0$. Пример — задача Гудерля о фокусировании цилиндрической или сферической ударной волны в точке $r = 0$ в момент времени $t = 0$ [32].

Задача Рэлея о схлопывании пузырьков в несжимаемой жидкости интересна тем, что в момент фокусировки $t = 0$ скорость бесконечна лишь в точке $r = 0$, а давление бесконечно во всей области течения. Поэтому ее можно отнести как к первому, так и к третьему типу. В некоторых случаях, например в задаче о выходе ударной волны на верхнюю границу атмосферы [32], давление ограничено, но бесконечна температура.

Рассмотренные парадоксы бесконечности являются следствием слишком сильного упрощения математической модели, и они разрешимы, если учесть реальные свойства жидкости: диссипацию, вторую вязкость, сжимаемость, термодинамическое несовершенство среды, релаксацию, излучение и т.д. По-видимому, всегда имеется сколь угодно малый фактор, учет которого делает решение ограниченным: природа не терпит бесконечностей. Так, схлопывание цилиндрического пузыря в несжимаемой жидкости прекращается при слабом вращении [56].

4. Модель "сухой воды"

На рис. 4 модели "мокрой воды" представлены двумя левыми столбцами, модели "сухой воды" — тремя правыми.

Модель "сухой воды" интенсивно изучалась на протяжении всей истории гидродинамики. Однако течение жидкости с нулевой вязкостью существенно отличалось от течения реальной жидкости. Совпадения были лишь исключением из этого правила: модель "сухой воды" не объясняла главное — появление вихрей в несжимаемой жидкости при наличии потенциальных внешних сил. Причина указанного различия кроется в том, что с устремлением коэффициента вязкости к нулю, действие вязкости не исчезает совсем, а прячется в малых подобластях (пограничных слоях и слоях смешивания), оказывает существенное влияние на течение в целом.

4.1. Объемные вихри

В вязкой жидкости вихри сливаются вследствие диффузии. В идеальной жидкости диффузии нет. Поэтому слияние вихрей в такой жидкости является одним из удивительных свойств вихревых кластеров. Имеется численный расчет (см. [57]) эволюции в несжимаемой жидкости двух вихрей одинакового знака, каждый из которых в начальный момент времени имел форму круга радиусом r и постоянную угловую скорость ω_0 . Когда безразмерное начальное расстояние l/r между вихрями достаточно велико, вихри, вытянувшись в овалы, вращаются раздельно, подобно точечным вихрям (такая аналогия справедлива при $l \gg r$) вокруг геометрического центра. Когда начальное расстояние между вихрями мало, вихри сливаются в единый клубок за конечное время. Наконец, в критическом случае ($l/r \simeq 3,2$), совершая периодическое движение, вихри то частично сливаются, то расходятся.

Детали слияния вихрей остаются невыясненными. Подразумевается, что оно контактное: за конечное время минимальное расстояние между вихревыми областями обращается в нуль, как изображено на рис. 11а, где завихренные области заштрихованы.

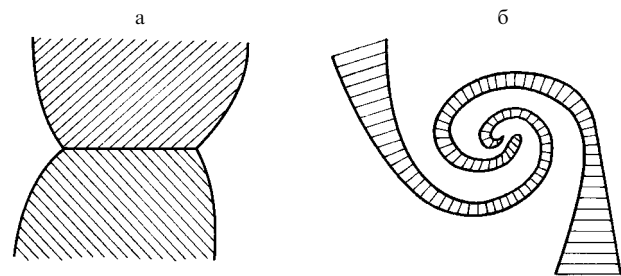


Рис. 11. Схемы слияния двух объемных вихрей

A priori непротиворечива и схема двухспирального захвата, когда завихренные области чередуются с незавихренными, связность пространства сохраняется (рис. 11б).

Переход к хаосу в системе точечных вихрей происходит [58], когда их число больше трех. Значит, в системе распределенных вихрей хаос заведомо возможен, если связность безвихревой потенциальной области больше четырех. Примеры стационарно вращающихся вихрей: эллиптический вихрь Кирхгофа, его различные однопараметрические обобщения в виде одинарных и двойных вихреобразований, называемых "заплатами Бюрбо" [59, 60]. Поиск продолжается.

Представляется правдоподобным, что в процессе эволюции связность вихревой области может как увеличиваться, так и уменьшаться.

В сжимаемом совершенном газе критическое значение l/r зависит от показателя адиабаты и от "числа Маха" $\omega_0 r/a_0$, где a_0 — скорость звука в бесконечности. Подобные задачи могут не только оказаться тестовыми при разработке численных методов расчета невязких течений, но и стать источником новых представлений о возникновении звуковых линий и ударных волн в процессе эволюции вихрей.

В качестве еще одного простого примера сразу же приходит на ум задача о тонкой завихренной струе. Казалось бы, ее решение получить не трудно — течение

в такой струе описывается уравнением тонкого слоя:

$$uu_x + vv_y = -\frac{1}{\rho} p'(x),$$

давление $p(x)$ постоянно в поперечном сечении слоя ($u(x, y), v(x, y)$ — составляющие скорости по оси струи x и по нормальной к струе координате y). Хотя это уравнение имеет квадратуру в виде аналога интеграла Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 = f(\psi),$$

где $-f'(\psi) = -\psi_{yy}$ — завихренность, ψ — функция тока ($u = \psi_y, v = -\psi_x$), такой асимптотический подход неприемлем в особых областях течения, где несправедливы исходные предположения о малой толщине области течения. Таковыми являются окрестности точек торможения потока на теле A , угловых кромок тела B , а также точек отрыва и присоединения потока C (рис. 12). Граница струи может быть подвержена действию сил поверхностного натяжения.

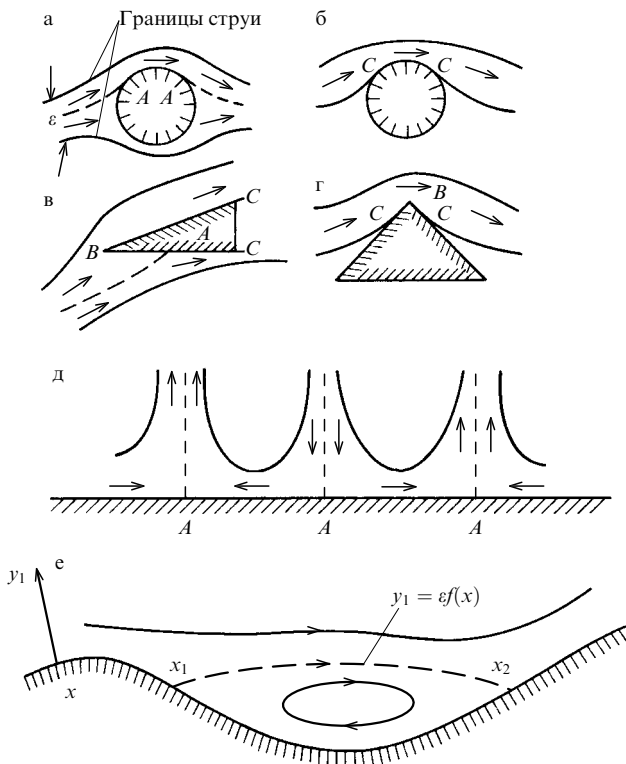


Рис. 12. Струйные течения

Таким образом, теория тонкого слоя идеальной жидкости далека от завершения как в плоском, так и в пространственном случае [61]. Представляют интерес вопросы отрыва тонкой струи от тела. Мыслимы две различные постановки задачи. Если струя погружена в покоящуюся жидкость (затопленная струя), то ее граница является свободной. Если струя окружена движущейся жидкостью, то ее граница представляет собой контактный разрыв.

Проблематично образование пузыря — замкнутой циркуляционной зоны — в потоке жидкости, не имеющей вязкости. Тем не менее несложно получить оценку

для формы тонкого пузыря в потоке несжимаемой жидкости, не подверженной воздействию сил поверхностного натяжения (рис. 12е). Справедливо приближение тонкого слоя:

$$\psi(x, y_1; \varepsilon) = \varepsilon \Psi(x, y) + o(\varepsilon), \quad y_1 = \varepsilon y,$$

где $\varepsilon \ll 1$ — коэффициент сплюснутости пузыря.

По теореме Бэтчелора [6] внутри пузыря завихренность постоянна:

$$\Psi = y u_0(x) - \frac{1}{2} y^2 \Omega, \quad \Omega = \varepsilon \omega,$$

$$p(x) = p_0 - \frac{1}{2} \rho u_0^2(x), \quad p_0 = \text{const}.$$

Границу пузыря зададим уравнением $y_1 = \varepsilon f(x)$. Вне пузыря течение безвихревое:

$$\Psi = [y - f(x)] u_1(x), \quad p(x) + \frac{1}{2} \rho u_1^2(x) = \text{const}.$$

Распределение давления $p(x)$ считается заданным, созданным посторонними причинами. Из условия $\Psi(x, f) = 0$ определяется форма пузыря:

$$f(x) = -\frac{2}{\Omega} \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{\rho}}.$$

Так как $f(x_1) = f(x_2) = 0$, давление $p(x)$ имеет максимум на участке расположения пузыря (x_1, x_2) .

4.2. Вихревые пелены

Сведение задачи к граничному уравнению понижает ее размерность на единицу, уравнения становятся двумерными. Этот факт позволяет при заданной мощности вычислительной техники решать более сложные задачи, чем те, которые непосредственно решаются разностными методами, методом конечных элементов и т.д. Метод граничных интегральных уравнений — современный вариант метода потенциала — нашел широкое применение при решении стационарных задач механики сплошных сред. Нестационарные уравнения не всегда удается свести к интегральным, ибо они содержат производную по времени. Поэтому остается шанс получить граничные интегродифференциальные уравнения. Он используется в случае течения несжимаемой жидкости.

Вклады в скорость \mathbf{u} от распределенных по объему вихрей и от вихрей, сконцентрированных на поверхности тангенциального разрыва, суммируются. Рассмотрим только последний из них. Пусть в безвихревом потенциальном потоке эволюционирует одиночная вихревая пелена, заданная уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\xi, \Gamma, t)$, где Γ — отсчитываемая от некоторого центра циркуляция, ξ — координата вдоль вихревой линии $\Gamma = \text{const}$. Физический смысл вихревой пелены — это вихрь $\boldsymbol{\omega}$ бесконечной интенсивности, сосредоточенной на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{R}^0$. Из формулы Био-Савара

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}^0}{|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}|^3} d\tau^0,$$

где $d\tau = d\eta dS$ — элемент объема, dS — элемент площади вихревой пелены, при

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty, \Delta \eta \rightarrow 0} (\boldsymbol{\omega} \Delta \eta) = \boldsymbol{\gamma}$$

имеем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{R}^0 - \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\gamma}^0}{|\mathbf{R}^0 - \mathbf{r}|^3} dS^0, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{n}$ — разрыв вектора скорости на вихревой пелене, \mathbf{n} — единичная нормаль к вихревой пелене.

С какой скоростью перемещается вихревая линия $\Gamma = \text{const}$? Из условия непрерывности давления на вихревой пелене и уравнения Бернулли получим

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2} \nabla(\Delta \varphi) = 0,$$

где $\Delta \varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$ — разность потенциалов на вихревой пелене. Таким образом, вихревая линия перемещается со скоростью $(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)/2$.

Согласно формуле Сохоцкого, главное значение особого интеграла (4.1), когда точка, в которой вычисляется скорость, располагается на самой вихревой пелене, тоже равно полусумме скоростей с разных ее сторон. Поэтому уравнение эволюции таково:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\xi, \Gamma, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{R}^0 - \mathbf{R}) \times \boldsymbol{\gamma}^0}{|\mathbf{R}^0 - \mathbf{R}|^3} dS^0. \quad (4.2)$$

Форма плоской вихревой пелены может быть представлена в виде $z = z(\Gamma, t)$, где $z = x + iy$ — комплексная координата. Из (4.2) получаем

$$\frac{\partial \overline{z(\Gamma, t)}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\Gamma^0}{z(\Gamma^0, t) - z(\Gamma, t)}.$$

Здесь особый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, черта означает комплексное сопряжение. Присутствие обтекаемого тела особенно просто учитывается, когда с помощью конформного преобразования $\zeta = \zeta(z, t)$ область течения отображается на полуплоскость или окружность. В этом более общем случае вводятся сопряженные вихревые пелены, уравнение эволюции приобретает вид

$$a \frac{\partial \overline{\zeta_k(\Gamma, t)}}{\partial t} = b(\zeta_k, t) + \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int \frac{d\Gamma^0}{\zeta_n(\Gamma^0, t) - \zeta_k(\Gamma, t)}, \quad (4.3)$$

где $a = |\partial z / \partial \zeta|^2$ — квадрат модуля растяжения координат, b — комплексная скорость течения при отсутствии вихревых пелен.

Исследованием уравнений (4.2), (4.3) математики еще не занимались.

Переход к течению с точечными вихрями совершается, если решение можно представить в виде δ -функции:

$$\frac{d\Gamma^0}{d\zeta_n} = \Gamma_n \delta(\zeta - \zeta_n).$$

В этом случае интеграл типа Коши заменяется алгебраическим выражением, а интегродифференциальное уравнение (4.3) превращается в просто дифференциальное.

Для уравнения эволюции тангенциальных разрывов естественным образом ставится автономная задача с

начальными данными, т.е. не связанная непосредственно с проявлением вязкости, и формулируется эта задача так: найти геометрию и интенсивность разрыва при $t > 0$, если при $t = 0$ они известны. Принципиальным является вопрос о некорректности этой задачи. Вихревая пелена всегда неустойчива, контактный разрыв и свободная граница неустойчивы при отсутствии стабилизирующих факторов. Математическим проявлением такой неустойчивости и является некорректность. Действительно, малые коротковолновые возмущения типа бегущей волны

$$y_0 = \exp\left(\omega t - i\omega \frac{x}{u_0}\right)$$

(где $y = y_0(x, t)$ — форма разрыва, $\pm u_0$ — скорость жидкости на его разных берегах) удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + u_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

для которого задача с начальными данными некорректна по Адамару [62].

Известно, что некорректность — постоянный спутник обратных задач. Стационарная обратная задача гидродинамики — это определение формы обтекаемого тела либо по распределению на нем давления [63], либо по форме образованной перед ним ударной волны [64, 65]. Рассматриваемая задача определения формы поверхности тангенциального разрыва (при заданной форме обтекаемого тела) — прямая.

Необходимым условием корректности (непрерывной зависимости решения от начальных данных и внешних воздействий) эволюционных задач является требование аналитичности поверхности раздела. Условно корректное, т.е. кусочно аналитическое, решение можно получить с помощью специальных методов регуляризации [22, 66]. Регуляризатор отрезает высокочастотные гармоники ряда Фурье, сглаживая коротковолновые возмущения и не уменьшая заданной точности численной схемы. Поясним действие одного из них на примере Адамара:

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta \sin(nx).$$

Решение

$$u(x, t) = \frac{\delta}{n} \sinh(nt) \sin(nx),$$

определенное на конечном интервале времени $0 < t < 1$, экспоненциально возрастает при $n \rightarrow \infty$. Добавим в уравнение регуляризатор в виде производной четвертой степени от искомой функции:

$$u_{tt} + u_{xx} + \varepsilon^2 u_{xxxx} = 0.$$

Задача состоит в определении такого значения $\varepsilon(\delta)$, которое удовлетворяло бы условиям

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} u(x, t) = 0.$$

Для решения

$$u(x, t) = \frac{\delta}{k} \sinh(kt) \sin(nx), \quad k = n\sqrt{1 - \varepsilon^2 n^2}$$

имеет место следующая оценка:

$$|u(x, t)| \leq \frac{\delta}{k_{\max}} \sinh k_{\max} = 2\epsilon\delta \sinh \frac{1}{2\epsilon}, \quad k_{\max} = \frac{1}{2\epsilon}$$

(в примере Адамара $k_{\max} = \infty$). Поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u(x, t) = 0, \quad \text{если} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\epsilon\delta \exp \frac{1}{2\epsilon} \right) = 0.$$

В качестве $\epsilon(\delta)$ можно выбрать, например, функцию

$$\epsilon = -\frac{1}{2 \ln \delta}.$$

Этот пример регуляризации, основанный на введении в уравнение четной производной высокого порядка, лишь простейшая иллюстрация к механизму действия линейного регуляризатора [62], основанного на аддитивном введении в уравнение эволюции вихревой пелены (4.3) члена

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 z(\Gamma, t)}{\partial \Gamma^2}.$$

Способов регуляризации бесчисленное множество. Кроме метода линейной регуляризации, на практике апробирован метод искусственного вихревого слоя [67] и метод редикретизации [68]. Поверхностное натяжение в качестве регуляризатора предложено в [69]. По-видимому, такой регуляризатор не эффективен: когда коэффициент поверхностного натяжения мал, стабилизации не происходит. Выбор оптимального регуляризатора является актуальной задачей вычислительной гидродинамики.

Метод граничных интегродифференциальных уравнений нуждается в обобщениях как на случай осесимметричных течений несжимаемой жидкости [70], так и на случай плоских течений сжимаемой жидкости [71].

4.3. Свободные границы

Уравнение плоского контактного разрыва представим в виде $z = z(\sigma, t)$, где постоянное значение непрерывного вдоль разрыва параметра σ отмечает точку, движущуюся со скоростью $(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)/2$. Точка $\Gamma = \text{const}$ в данном случае не движется с этой скоростью. Поэтому для определения двух заданных на разрыве функций $z(\sigma, t)$ и $\Gamma(\sigma, t)$ требуется система двух уравнений. Они получены с учетом поверхностного натяжения, сил тяжести, разности плотностей ρ^\pm и констант Бернулли сопредельных жидкостей как для периодических волн [69], так и для замкнутого контактного разрыва [22]. Имеются предварительные попытки численного решения системы уравнений эволюции контактного разрыва.

Такая система уравнений справедлива, когда $\rho^+ \rho^- \neq 0$, и принципиально отличается от системы уравнений эволюции свободной границы. Формальный переход к последним с помощью предельного перехода $\rho^+ \rightarrow 0$ или $\rho^- \rightarrow 0$ невозможен — площадь, ограниченная контактным разрывом, в отличие от площади, ограниченной свободной границей, т.е. от каверны, инвариантна в соленоидальном поле течения. Интегродифференциальное уравнение эволюции свободной границы как линии вихреисточников на плоскости, введено в работе [22], интегральные уравнения обсуждаются в [72].

Не решены вопросы генезиса стационарных отрывных течений. Возможны, например, такие сценарии установления течения с отходящими от тела двумя свободными границами: расширение замкнутой каверны, расширение двух замкнутых каверн с последующим их смыканием в одну, развитие двух разгонных вихрей Прандтля со смыканием их на бесконечности. На заключительной стадии ($t \gg 1$) эволюции кавитационного течения каверна стягивается в отрезок прямой, а обтекаемое тело — в точку, особенность в которой определяется значением коэффициента сопротивления.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

В 1910 г. недалеко от Парижа успешно прошли испытания самолета необычной конструкции. У него отсутствовал обязательный для того времени пропеллер, вместо которого в носовой части располагался мотокомпрессорный двигатель — прототип современного воздушно-реактивного двигателя! Чтобы отражать пламя, вырывающееся из реактивных сопел, от фанерного фюзеляжа, молодой конструктор этого самолета румын Г. Коанда установил металлические щитки. Каково же было его удивление, когда реактивная струя вместо того, чтобы отклоняться от фюзеляжа, присасывалась к нему.

Явление, когда при достаточно малом значении расхода струя резко отклоняется от того направления, по которому истекает при большом значении расхода, называется эффектом Коанда и имеет еще одно укоренившееся название — чайниковый эффект. С ним мы сталкиваемся каждый день: при малых углах наклона чайника струйка прилипает к его наружной стенке, принимая различные формы.

Эффект Коанда в плоском течении можно наблюдать в открытом лотке. Едва ли удастся реализовать плоское течение в чистом виде (не является ли этот факт типичным для гидродинамических явлений?), однако *a priori* можно предположить, что кроме режима с присоединенной к наружной поверхности пластины струей (рис. 13а) и режима со свободной струей (рис. 13б) в широком диапазоне расхода существует промежуточный режим, в котором плоская струя подобно осесимметричной разделяется на пристеночную и свободную (рис. 13в). Решение уравнения Эйлера для первых двух схем существует, а для схемы, изображенной на рис. 13в, не существует.

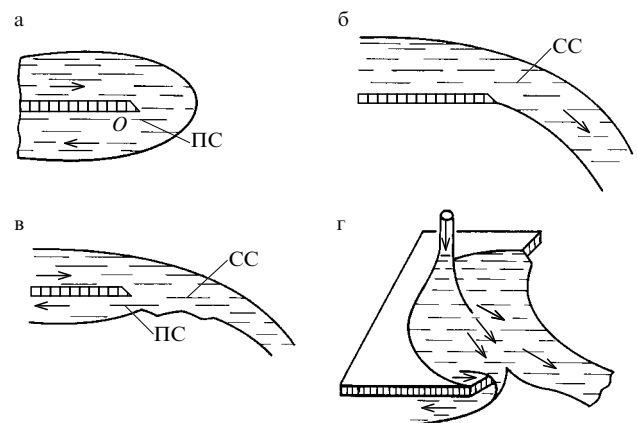


Рис. 13. Эффект Коанда; ПС — пристеночная струя, СС — свободная струя

Если подставить под вытекающую из водопроводного крана струю прямоугольную пластину, то на ее смоченной кромке будут видны все режимы обтекания сразу (рис. 13г).

Традиционно считается, что задача об огибании плоской струей острой кромки формулируется в рамках теории "сухой воды" [73, 74]: разность между атмосферным давлением на свободной границе струи и теоретическим бесконечным разрежением в вершине пластины O (рис. 13а) прижимает струю к пластине. Однако при $Re = q/v \gg 1$ (q — расход жидкости в струе) под действием неблагоприятного (тормозящего поток) градиента давления на нижней поверхности пластины пограничный слой должен оторваться. Поэтому влияние вязкости существенно.

Вблизи кромки пластины всегда имеется область, где полное уравнение Навье–Стокса упростить нельзя. Ситуация похожа на известную нерешенную задачу о течении жидкости в окрестности передней и задней кромок пластины, на которой образуется пограничный слой Прандтля–Блазиуса [75]. В последнем случае имеется координатное разложение, справедливое в окрестности кромки [75, 76], которое не перекрывается с решением в области, где действует уравнение Навье–Стокса, а тем более — Прандтля. Естественное обобщение этой задачи — обтекание угловой кромки.

Свободная пленка жидкости, ускоряющаяся, например, под действием силы тяжести, утоньшается и в конце концов разрушается. Одной из форм разрушения пленки является ее свертывание в систему струй. Решение в окрестности края свободной пленки, как и в окрестности "точки" образования струи, неизвестно. Неизвестно и число струй. В [14] утверждается, что система может состоять из одной, двух или трех струй.

Из-за отсутствия критерия свертывания невозможно рассчитать переход от пленочного течения к струйному и смену топологических различных режимов этого процесса. Поэтому на первый план выходит экспериментальное определение параметрических границ существования указанных режимов и обнаружение новых режимов.

Если металлический диск поместить в заполненную водой ванну, то он потонет. А если направить на него сверху струю из водопроводного крана (рис. 14)? Казалось бы, под напором струи он потонет еще быстрее. Однако диск не тонет! На него действует выталкивающая сила [77, 78]. Разгадка этого парадокса состоит в том, что на верхнюю поверхность диска действует атмосферное давление, так как она омывается лишь тонкой струей воды, а на нижнюю поверхность действует гидростатиче-

ское давление, которое больше атмосферного, так как диск оказывается погруженным в воду на значительную глубину. Их разница и составляет выталкивающую силу, аналогичную силе Архимеда. Эта же разница обуславливает своеобразный гидравлический прыжок жидкости (бору) вблизи кромки диска. Решение задачи о плавающей пластине не получено ни в плоском, ни в осесимметричном случае. Не ясно, насколько существенна роль вязкости вблизи кромки, где формируется контактный разрыв.

Совершенно не исследована динамика воздушных пузырей в воде. Одним из удивительных явлений гидродинамики является возникновение несимметричного обтекания водой воздушного пузыря, характерный размер которого l настолько мал, что включаются в действие силы поверхностного натяжения [6, 79]. Такой пузырь, влекомый архимедовой силой, поднимается вверх по винтовой траектории. Считается, что первопричиной появления боковой силы в данном случае является не столько асимметрия отрыва потока от поверхности пузыря, сколько периодические колебания ближнего следа.

Простейший опыт с всплывающим пузырем заключается в подаче на дно заполненного водой достаточно высокого и широкого стеклянного сосуда дозированной порции воздуха, объем которой имеет характерную длину l . Изменяя ее при прочих фиксированных параметрах, получим однопараметрические зависимости формы пузыря, коэффициентов действующих на него аэродинамических сил, а также отношения h/r от числа Re , где h — шаг винтовой линии, r — ее радиус.

Форму пузыря можно рассчитать, если предположить, что течение невязкое, симметричное и безотрывное, внутри пузыря движение воздуха пренебрежимо мало, а давление на его поверхности равно

$$p = \text{const} - \frac{\alpha}{R},$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, R — радиус кривизны поверхности пузыря. Даже если решение такой задачи существует, оно не имеет практического значения, так как обтекание движущегося по винтовой линии пузыря отрывно.

Простейшей задачей истечения является задача о форме свободной границы при стоке конечной массы жидкости в вершину конуса или клина с расходом, зависящим, например, степенным образом от времени. Установится ли автомодельный режим? Какой из факторов — вязкость, весомость или капиллярность — окажется в заключительной стадии слива доминирующим? Задачу можно "одномеризовать", если принять угол при вершине конуса (клина) малым параметром.

4.4. Комбинированные вихри

Объемный вихрь конечных размеров называется *простым*, если не содержит тангенциальных разрывов, и — *комбинированным*, если содержит тангенциальные разрывы. Границей комбинированного вихря служит поверхность скольжения: контактный разрыв или свободная поверхность. Примером комбинированного вихря, ограниченного контактным разрывом, является сферический вихрь Хилла, а примером комбинированного вихря, ограниченного свободной поверхностью, является комбинированный вихрь Рэнкина [80].

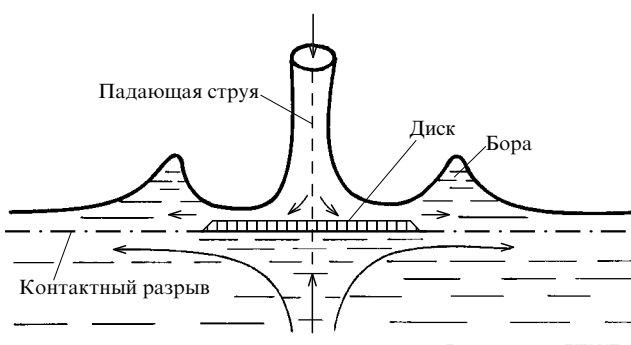


Рис. 14. Падение струи воды на плавающий диск

Комбинированный вихрь конечных размеров называется *пoльм*, когда объемной завихренности нет, т.е. $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ всюду, кроме поверхностей тангенциального разрыва скорости. Если внутри полого вихря движение отсутствует, то его границей будет свободная поверхность. Примером полого вихря, ограниченного вихревой пеленой, является плоский круговой вихрь, в центре которого размещен точечный вихрь интенсивности $-\Gamma/2$, где Γ — общая циркуляция вихревой пелены.

Удивительный мир комбинированных вихрей совсем не изучен. Отмечено, что взаимодействие двух простых плоских вихрей сопровождается формированием точки заострения и образованием вихревой пелены [59]. Такой эффект (артефакт?) нуждается в воспроизведении и осмыслении. Не исследованы вопросы динамики заострения тангенциального разрыва [81], а также спонтанного (без внешнего воздействия) зарождения спиральности на его гладкой поверхности.

Мы уже рассматривали пузырь в градиентном потоке жидкости (рис. 12е). Совсем другая ситуация возникает, когда тонкий пузырь обтекается безградиентным потоком с постоянной скоростью u_∞ . Градиент давления индуцируется самим пузырем, т.е.

$$p(x, y_1) = p_\infty + \varepsilon p_1(x, y_1) + o(\varepsilon), \quad p_\infty = \text{const}.$$

Давление вне пузыря определяется в результате решения линейной задачи об обтекании потенциальным потоком тонкого тела, форма которого задана уравнением $y_1 = \varepsilon f(x)$:

$$p_1(x, 0) = \frac{\rho u_\infty^2}{\pi} \int_0^l \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi.$$

Чтобы пузырь "выдержал" такое давление, скорость внутри него по закону Бернулли должна иметь величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, внутри пузыря

$$\psi(x, y_1) = \varepsilon^{3/2} \psi_0(x, y) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad p_1|_{y=f} = -\frac{1}{8} \rho \omega^2 f^2,$$

$$\psi_0(x, y) = \frac{1}{2} \omega y(f - y), \quad \omega = \text{const}, \quad y_1 = \varepsilon y.$$

Равенство давлений с внешней и внутренней сторон пузыря с учетом действия сил поверхностного натяжения приводит к нелинейному интегродифференциальному уравнению для функции $f(x)$:

$$\frac{u_\infty^2}{\pi} \int_0^l \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{8} \omega^2 f^2 - \frac{\alpha}{\rho} f'' = 0, \quad (4.4)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения. При $\alpha = 0$ решения, по-видимому, не существует.

Постановка задачи о пузыре в сверхзвуковом потоке слишком экзотична. В соответствии с линейной сверхзвуковой теорией давление пропорционально углу наклона поверхности, точнее

$$p_1(x, 0) = \rho u_\infty^2 f'(x).$$

Вместо (4.4) получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_\infty^2 f' + \frac{1}{8} \omega^2 f^2 - \frac{\alpha}{\rho} f'' = 0.$$

Нуждается в обосновании корректности задачи о вихревом пузыре в рамках уравнения Навье–Стокса.

Комбинированный вихрь может иметь спиральную структуру. Уравнение переноса завихренности ω в полярной системе координат r, θ

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0, \quad (4.5)$$

где функция тока имеет вид

$$\psi(r, \theta, t) = \frac{1}{4\pi} \int \omega(r^0, \theta^0, t) \times$$

$$\times \ln[r^2 - 2rr^0 \cos(\theta - \theta^0) + r^{02}] r^0 dr^0 d\theta^0,$$

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

допускает точное решение с разделяющимися переменными:

$$\psi = r^2 \Psi(\eta, t), \quad \omega = \omega(\eta, t),$$

$$p = r^2 P(\eta, t), \quad \eta = \theta + k \ln r.$$

Система координат в физической плоскости неортогональна и представляет собой семейство спиралей и семейство окружностей; решение ищется в полуплоскости $t > 0$, $0 \leq \eta \leq 2\pi$.

Для численного решения уравнения (4.5) недостает начального задания вихря $\omega(\eta, 0)$ и граничных условий. В качестве последних принимается равенство давлений и нормальных составляющих скорости u_n на линиях $\eta = 0$ и $\eta = 2\pi$, которые в физической плоскости совпадают:

$$P(0, t) = P(2\pi, t), \quad u_n(0, t) = u_n(2\pi, t).$$

Поскольку в граничные условия задачи вошло давление, ее следует дополнить уравнением для определения $P(\eta, t)$.

Возможны две физически различные постановки.

1) Простой вихрь. Тангенциальные составляющие скорости не теряют разрыва:

$$u_t(0, t) = u_t(2\pi, t).$$

2) Комбинированный вихрь. Спираль $\eta = 0$ (или 2π) является вихревой пеленой. Поскольку через вихревую пелену жидкость не перетекает, нормальная составляющая скорости на ней равна скорости перемещения разрыва $c(t)$:

$$u_n(0, t) = c(t).$$

Нет уверенности, что такое решение описывает "псевдослучайные течения". Однако имеется основанная на анализе частного случая — автомодельного решения [82] — уверенность о спонтанном возникновении бесконечной особенности в распределении вихря [33]. До сих пор такой феномен обсуждался либо для пространственных течений [84], либо для плоских вихревых пелен, эволюционирующих в потенциальном потоке [85].

4.5. Координатные разложения в окрестности складок

В рамках модели "сухой воды" локальное решение вблизи складки представляет собой координатный ряд по степеням расстояния от складки. Такое разложение является внешним пределом решения задачи о мелко-

масштабной структуре потока слабвязкой жидкости. В сферических координатах r, θ, λ решение уравнения Лапласа для потенциала скорости ищется в виде $r^n f_n(\theta, \lambda) + o(r^n)$. Наряду с регулярными гармониками, которым соответствуют целые значения n , имеются собственные решения с нецелыми n . Цель состоит в определении собственного решения с минимальным показателем n .

Рассмотрим некоторые примеры.

"Закон 3/2" (рис. 15а), справедливый для формы вихревой пелены вблизи острой кромки, с которой она сходится [86], нарушается в окрестности излома кромок крыла. На рис. 15б показана форма крыла в плане с точками излома кромок A, B, C . В зависимости от угла атаки (угла наклона крыла к направлению невозмущенного потока) и угла при вершине излома θ реализуются различные схемы течения. Безотрывная схема рассмотрена в [87] почему-то лишь для случая $\theta < \pi$. Имеются линеаризованные решения [88], нуждаются в верификации схемы, предложенные в [14].

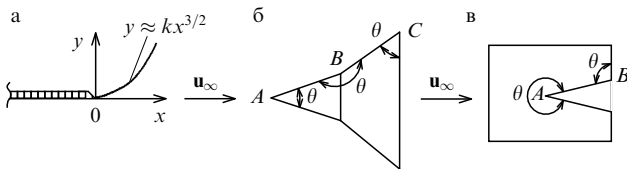


Рис. 15. (а) "Закон 3/2". (б) Угловые точки на крыле (вид в плане). (в) Крыло с продольным вырезом

На рис. 15в представлена форма крыла в плане, имеющего продольный вырез. Схемы обтекания складок A и B , предложенные в [14], тоже нуждаются в верификации.

Отрыв от гладкой поверхности тела более разнообразен, его топологическую классификацию следует проводить по типу линий контакта вихревой пелены с телом. Возможные случаи пространственного отрыва показаны на рис. 16: а) гладкий отрыв, б) открытый отрыв, в) дипольный отрыв и г) спиральный отрыв. В сечениях, перпендикулярных к линии контакта (штриховые линии на рис. 16), форма гладкого отрыва аналогична плоскому, справедлив закон 3/2.

Координатное разложение в окрестности вершины линии контакта вихревой пелены с телом еще не

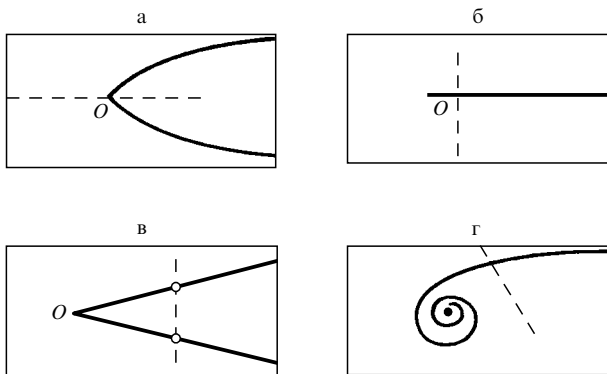


Рис. 16. Возможные типы линий контакта вихревых пелен с телом

построено ни для одного случая. Что же касается задачи о контактном разрыве, на котором действуют силы поверхностного натяжения, то для нее не построено координатное разложение даже в случае плоского течения; закон 3/2 несправедлив ни для отрыва от острой кромки, ни для отрыва от гладкой поверхности. По-видимому, в окрестности точки отрыва (этот факт установлен экспериментально [19]) образуются замкнутые вихревые области.

Один из наиболее известных примеров течения сжимаемой жидкости, для которого неизвестно координатное разложение в окрестности складки, — это предложенная Рихтмайером [65] задача о тришоке — простом маховском отражении ударной волны от клина. Схема течения представлена на рис. 17а, отходящий от тройной точки контактный разрыв изображен штриховой линией, автомодельные траектории — сплошными линиями. Казалось бы, линии разрыва должны быть аналитическими кривыми всюду, за исключением самой тройной точки, а решение в автомодельной фазе должно быть аналитическим по переменным x/t и y/t . Для получения локального решения Рихтмайер применил ряды с дробными степенями и логарифмами. Построенные для каждой из четырех угловых подобластей 1, 2, 3, 4 (рис. 17а) и удовлетворяющие дифференциальным уравнениям ряды склеивались друг с другом на линиях разрыва. Увы, получить решение таким образом не удалось. Характер особенности до сих пор остается неизвестным. В чем же дело? По-видимому, Рихтмайер не учел особый трансзвуковой характер течения в окрестности тройной точки.

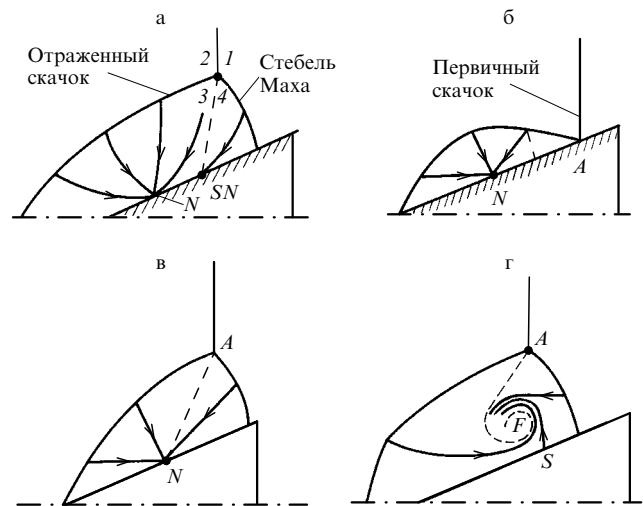


Рис. 17. Схемы отражения ударной волны от клина

Прежде чем предложить возможное объяснение неудачной попытки Рихтмайера, вспомним уже установленный в разделе 3 факт, что особые точки поля автомодельных траекторий расположены в области эллиптических уравнений. Так, в режиме регулярного отражения линия параболичности (штриховая линия на рис. 17б) отделяет "сверхзвуковое" течение в окрестности точки A от "дозвукового" течения, окружающего узел автомодельных траекторий N .

Весьма вероятно, что в режиме простого маховского отражения линия параболичности делит угловую об-

ласть 4 (рис. 17а), заключенную между стеблем Маха и контактным разрывом, на две угловые подобласти, разложения решения в которых принципиально различны. Влияние эллиптичности системы уравнений скажется вплоть до предельной характеристики.

Аналогичные соображения справедливы для стационарного простого маховского отражения ударной волны от твердой стенки.

К задаче Рихтмайера относятся еще две нерешенные проблемы. Одна из них, давно дискутируемая [89], может быть решена после установления топологии течения и ее численной проверки. Это — определение критерия перехода от регулярного отражения к простому маховскому.

Вторая проблема — поведение конца контактного разрыва. Схема, представленная на рис. 17а, справедлива лишь в том случае, если скорость жидкости слева от контактного разрыва не равна скорости движения точки типа "седло+узел" SN — точки присоединения линии скольжения к клину. Разумеется, такая "отрывная" ситуация не самосогласована с отрывом автомодельного пограничного слоя на клине. Столь же сомнительна простейшая топология с одним узлом N (рис. 17в), когда скорость жидкости слева от контактного разрыва равна скорости движения точки N , т.е. разрыв скорости на этом конце линии скольжения обращается в нуль. При некоторых условиях в опытах наблюдается свернутый в спираль конец контактного разрыва. Схема такого течения, содержащая фокус и седло S (рис. 17г), формально непротиворечива.

В заключение этого раздела следует сделать замечание, окончательно развеивающее наши иллюзии относительно простоты построения разложений в окрестности складок. Локальное решение не всегда имеет такую простую форму, как координатный ряд. Альтернативой является случай, когда окрестность точки (линии, поверхности) необходимо разбивать на несколько (три, десять или более) подокрестностей, в каждой из которых редуцировать исходную полную задачу к упрощенной. Решения в таких, вложенных друг в друга как матрешки под областях асимптотически компактны и взаимно скоррелированы. Впервые такой метод был применен к задаче о течении в окрестности точки отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке Нейландом [90], а также Стюартсоном и Вильямсом [91]. Сегодня подобные разложения стали обычным инструментарием исследователя, особенно широка нива их приложений в теории гидродинамической устойчивости — обширной, почти не затронутой нами темы.

Таким образом, не разработана теория локальных решений не только уравнений Навье–Стокса, но и уравнения Эйлера.

4.6. Вихревые нити

Вихревая нить, представляющая собой математический образ завихренности, сосредоточенный на линии в виде дельта-функции, мало пригодна для моделирования реальных гидродинамических процессов прежде всего потому, что ее скорости перемещения и деформации в общем случае бесконечны [6, 92].

Криволинейные вихревые нити служат обычно для качественного анализа явлений. Известно, что две кольцевые вихревые нити, имеющие общую ось, должны периодически проходить одна сквозь другую. Об этом написано чуть ли не во всех учебниках по гидродинамике.

В соответствующих опытах последовательные выбросы кольцевых вихрей обычно осуществляются через круглое отверстие в результате импульсного сжатия замкнутого объема воздуха. Визуализация срывающихся с острых кромок отверстия вихрей легко получается с помощью дыма.

При подходящих условиях два вихревых кольца, выстреливаемых одно за другим, сливаются в одно кольцо, которое сначала колеблется, принимая эллипсообразную форму, а затем разделяется на два новых кольца. Связанный с этим парадокс, ожидающий удовлетворительного объяснения, заключается в том, что за короткое время своего взаимодействия вихри успевают обменяться завихренностью. Действительно, если начальные кольца окрасить в разные цвета, то каждое из новых колец, полученных в результате их взаимодействия, окажется окрашенным наполовину в один цвет, наполовину в другой.

Когда будете проводить этот опыт, попробуйте выстрелить из отверстия несколько, вплоть до десяти, вихревых колец, следующих друг за другом через малые интервалы времени. Кольца пройдут некоторое расстояние вдоль общей оси, а затем эффектно разойдутся, образуя великолепный "букет". Такое явление, демонстрирующее единство случайного и закономерного начал в движении вихрей, пока не доступно математическому моделированию.

Могут ли кольцевые вихри проходить один сквозь другой многократно? Для ответа на этот вопрос в 1972 г. Максурси попытался смоделировать "чехарду" вихревых колец в воде [93]. Когда начальная скорость вихрей выбиралась примерно одинаковой, оба кольца соединились в единый и неразделимый в дальнейшем вихрь. Когда скорость второго вихря намного превышала скорость первого, образовывалось неустойчивое составное кольцо, разделяющееся затем на два. В результате второе кольцо обгоняло первое, однако после этого скорость обоих колец оказывалась примерно одинаковой, поэтому последующего их соединения не наблюдалось.

Если Максурси прав, то в воде "чехарда" вихревых колец невозможна. Двукратное взаимодействие воздушных вихревых колец зафиксировано Ямадой и Матцуи шесть лет спустя [19].

Прямолинейные вихревые нити, имеющие конечную скорость перемещения, более пригодны для моделирования, чем криволинейные. Схема обтекания цилиндра с двумя симметрично расположенными вихрями предложена Фёпелем (1913 г.). Вихри могли располагаться не только позади цилиндра, но и спереди [94]. Их циркуляция Γ оказалась свободным параметром.

В отличие от течения Никольского модель Фёпеля некорректна: возникновение и существование точечных вихрей в реальной вязкой жидкости невозможно. Однако с практической точки зрения такая модель весьма привлекательна, так как дает нулевую силу сопротивления. Этот факт сразу же приводит к интересной идее искусственной реализации точечных вихрей в течении Фёпеля с помощью двух вращающихся цилиндров достаточно малого радиуса с целью снижения сопротивления и ликвидации следа. Оценка энергетических затрат, необходимых для проведения подобного эксперимента, свидетельствует о его возможности, однако технологические трудности препятствуют осуществлению этой идеи.

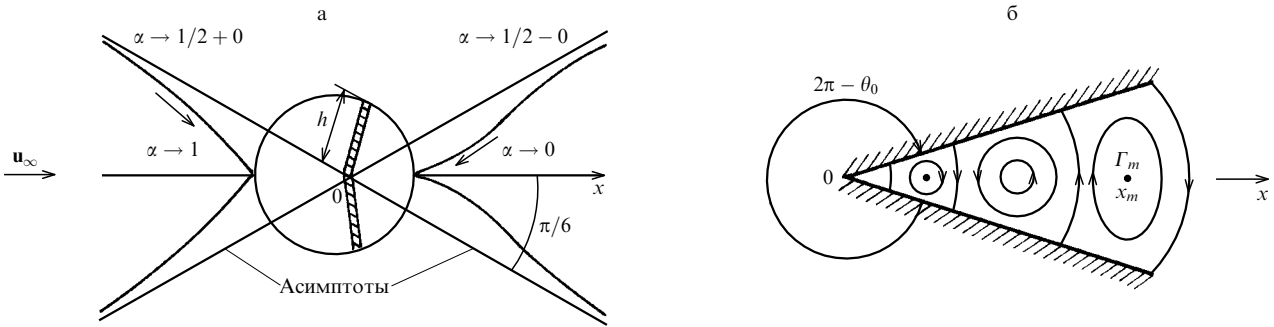


Рис. 18. Две задачи с точечными вихрями

В скобках заметим, что вращающийся на поверхности профиля крыла цилиндр уже используется для затягивания отрыва по углу атаки [95].

В исследовании модели Фёппеля есть другая, чисто теоретическая цель — обнаружить необычные свойства отрывного течения и перенести их на реальные математические модели.

Наличие в задаче Фёппеля свободного параметра Γ позволяет применить его модель к обтеканию тел с острыми кромками, подобрав значение Γ таким образом, чтобы удовлетворить условию Кутта, или, говоря другими словами, фиксировать точку схода потока на крыле.

Рассмотрим симметричное обтекание уголка — пластины, имеющей излом в начале координат. Углы пластины с осью x обозначим $\pm\alpha\pi$ (рис. 18а). В точках z_1 и \bar{z}_1 расположим точечные вихри интенсивности $-\Gamma$ и Γ . Конформное преобразование

$$z = b(\zeta + 1)^{1-\alpha}(\zeta - 1)^\alpha, \quad b = \frac{1}{2} \frac{h}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha$$

отображает внешность пластины в плоскости z на плоскость ζ с выброшенным отрезком оси абсцисс. Комплексно-сопряженная скорость течения равна

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} \left(bu_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} \right).$$

Совершив в условии стационарности (отсутствия внешней силы) предельный переход

$$\lim_{\zeta \rightarrow z_1} \left(\frac{dw}{dz} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} \right) = 0,$$

получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} (\xi_1 - k)(\xi_1^2 - \eta_1^2 - 1) &= 2\xi_1\eta_1^2, \\ \left(1 - \frac{2\eta_1}{g} \right) (3\xi_1^2 - \eta_1^2 - 2k\xi_1 - 1) &= 1 - k^2, \end{aligned}$$

где $2\pi u_\infty a g = \Gamma$, $k = 1 - 2\alpha$, $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$.

Условие Кутта на острой кромке

$$\frac{dw(k)}{d\zeta} = 0$$

дополняет задачу определения ξ_1 , η_1 и g третьим алгебраическим уравнением:

$$(k - \xi_1)^2 + \eta_1^2 = 2g\eta_1.$$

Геометрическое место центров вихрей в зависимости от значения α показано на рис. 18а. При малых значениях α (или при $\alpha \rightarrow 1$) точечный вихрь малой интенсивности расположен в окрестности кромки, с увеличением α до значения 0,5, соответствующего обтеканию пластины, интенсивность вихря неограниченно увеличивается, и он уходит на бесконечность вдоль асимптот, составляющих с осью абсцисс угол $\pm\pi/6$. Таким образом, вопреки существующему мнению [94] решения задачи о симметричном обтекании пластины с двумя точечными вихрями не существует. Этот факт составляет содержание парадокса Фёппеля. В широком смысле слова парадоксом Фёппеля будем называть отсутствие стационарного решения задачи при некоторых критических значениях определяющих параметров σ_{cr} , если в итоге предельного перехода $\sigma \rightarrow \sigma_{cr}$ вихреобразование удаляется на бесконечность.

Происходит ли при $\alpha = 0,5$ бифуркация к асимметричному течению Фёппеля? Имеет ли место парадокс Фёппеля для других конфигураций или при других распределениях завихренности, отличных от точечно-сосредоточенных? Интересно отметить, что решение задачи об обтекании уголка по схеме Никольского существует при любых значениях α .

Применима ли схема Фёппеля к течению внутри клиновидной области? Дело в том, что течение сильновязкой жидкости ($Re \rightarrow 0$) содержит внутри клиновидной области бесконечную цепочку объемных вихрей убывающей знакопеременной интенсивности (рис. 18б), наблюдаемую экспериментально — вихри Моффата [19, 96]. Такая система вихрей является точным решением уравнения Стокса. Аналогичное решение уравнений Навье–Стокса или Эйлера не известно.

Одним из возможных решений уравнения Эйлера является дорожка точечных вихрей циркуляции Γ_m , расположенных в точках x_m биссектрисы клина. Условие отсутствия действия силы на каждый точечный вихрь приводит к бесконечной системе трансцендентных уравнений:

$$\sum_{j \neq m} \frac{\Gamma_j \xi_j}{\xi_m^2 - \xi_j^2} = \frac{2\theta_0 - \pi}{4\pi} \frac{\Gamma_m}{\xi_m},$$

где $\xi_m = x_m^{\pi/2\theta_0}$, θ_0 — угол раствора клина. Простое решение $\Gamma_m = (-1)^m$, $x_m = m = 1, 2, 3, \dots$ возможно лишь в случае, когда $\theta_0 = \pi$.

Интенсивно изучаются системы точечных вихрей, эволюционирующих в отсутствие твердых границ. Примером является так называемый дискретно-круговой вихрь (рис. 19) — симметричная система точечных

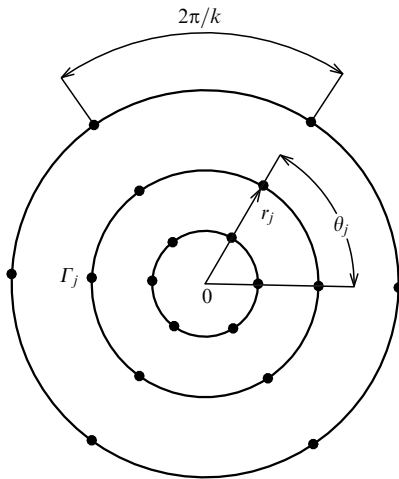


Рис. 19. Дискретно-круговой вихрь

вихрей, расположенных на N концентрических окружностях таким образом, что на каждой окружности имеется одинаковое количество k вихрей, циркуляция которых тоже одинакова.

По поводу устойчивости симметричных кластеров следует высказать одно общее замечание, касающееся способов исследования этого явления. Можно изучать нарушение симметрии системы в целом, считая ее элементы устойчивыми образованиями, а можно, зафиксировав симметрию, как точное решение задачи, изучать неустойчивость отдельного ее элемента. Такое разделение задачи на две открывает чуть ли не единственный путь к исследованию устойчивости симметричных вихревых структур.

В случае дискретно-кругового вихря можно следить за поведением всех kN вихрей, тогда образованное "облако" вихрей [86] продемонстрирует неустойчивость симметрии, аналогичную свойственной контактному разрыву неустойчивости Гельмгольца [69], дискретно-круговой вихрь сразу же разрушится. В другом случае можно, выбрав на каждой окружности по одному вихрю и зафиксировав симметричное расположение остальных, следить за неустойчивостью N вихрей. Механизм такой неустойчивости, принципиально отличный от неустойчивости Гельмгольца, не известен.

Итак, если выбрать на каждой окружности по одному вихрю с циркуляцией Γ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) и с комплексной координатой

$$z_j(t) = r_j(t) \exp[i\theta_j(t)],$$

то функции $r_j(t)$ и $\theta_j(t)$ будут подчиняться системе $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Справедливы инварианты Кирхгофа [6].

В процессе движения знак величины $r_{j+1} - r_j$ может изменяться. В случае $N = 2$ это явление напоминает уже известную нам "чехарду" вихрей. Она происходит, когда начальное значение r_1/r_2 меньше некоторой критической величины σ . Представляет интерес зависимость σ от Γ_2/Γ_1 — граница области, где имеется "чехарда" вихрей. Она полезна для определения шага дискретизации при численном расчете многоспиральных вихревых пелен.

В случае $N = 2$ течение детерминировано, в случае $N > 2$ может возникать хаос. Один из вероятных сценариев

возникновения хаоса — появление ε -слоя на сепаратрисах в фазовом пространстве [97].

Неизвестно, возможен ли коллапс дискретно-кругового вихря. Этот вопрос тесно связан с уже обсуждавшимся нами вопросом об устойчивости обычного коллапса трех точечных вихрей³, так как при $t \rightarrow 0$ ($t = 0$ — время схлопывания) основной вклад даст выбранная тройка коллапсирующих вихрей, а остальные $k - 1$ троек вихрей — лишь уменьшающаяся с течением времени добавка.

Как уже отмечалось, хаос в системе точечных вихрей наступает, когда их число больше трех. Такой вывод относится к эволюции вихрей в безграничном пространстве. Обладает ли такими же свойствами система из трех точечных вихрей в ограниченном пространстве? Под ограниченным пространством подразумевается либо внутренняя область (клина, окружности), либо внешняя по отношению к обтекаемому телу область. Наиболее простая из этих задач — задача об эволюции трех точечных вихрей над непроницаемой плоскостью эквивалентна трем симметричным относительно этой плоскости парам точечных вихрей в безграничном пространстве.

Возможен ли в случае $N = 2$ хаотический режим эволюции дискретно-кругового вихря, размещенного внутри или вне окружности?

С помощью точечных вихрей открывается благоприятная возможность моделирования как малых, так и больших возмущений в динамике идеальной несжимаемой жидкости. Такие возмущения часто не только деформируют, но и разрушают когерентные образования. Задача формулируется следующим образом: при $t = 0$ в поток жидкости вносятся точечные вихри, которые начинают взаимодействовать сами с собой и с твердыми границами. В зависимости от предыстории течения и характера этого взаимодействия реализуется один из трех вариантов: отрыва нет, вихри инициируют отрыв, которого не существовало раньше при $t < 0$, вихри взаимодействуют с развитым отрывом, существовавшим при $t < 0$, например, в виде свободных границ. Конкретные задачи приведены в [14].

5. Закрученные потоки

Закрученными считаются трехмерные течения, у которых выделена ось вращения жидкости. Даже в приближении "сухой воды" установлены удивительные свойства быстропротекающих закрученных движений: смена типов уравнений с эллиптического на гиперболический, образование столбов Праудмена–Тейлора, пропорциональность силы сопротивления тела не ускорению, а скорости или ... пути (!), пройденному телом [6, 99, 100]. Однако общая теория закрученных ламинарных потоков еще далека от завершения.

5.1. Обтекание тел

Пусть осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости определяется следующими параметрами: модулем максимальной угловой скорости Ω , характерным размером обтекаемого тела l и постоянной вдали от него осевой скоростью u_∞ . Тогда влияние вращения

³ Вопросы существования и устойчивости стационарных и равномерно вращающихся кластеров точечных вихрей обсуждаются в [98].

потока будет определяться значением числа Россби

$$Ro = \frac{u_\infty}{\Omega l}.$$

Уравнение Эйлера имеет вид [6]

$$\psi_{xx} + \psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r = Ro^{-2} [r^2 H'(\psi) - C(\psi)C'(\psi)],$$

где функция тока ψ отнесена к $u_\infty l^2$, цилиндрические координаты x и r — к l , полное давление в струйке тока H — к $\rho l^2 \Omega^2$, циркуляция скорости вокруг оси симметрии ($r = 0$) — к $l^2 \Omega$; функции $H(\psi)$ и $C(\psi)$ заданы из условий на бесконечности ($x = -\infty$), где $\psi = r^2/2$.

При $Ro \ll 1$ течение в целом не зависит от x , функция тока определяется из уравнения

$$r^2 H' = C C'. \tag{5.1}$$

Изменение происходит лишь в тонком, прилегающем к поверхности тела невязком пограничном слое толщиной $O(Ro)$. В простейшем случае обтекания диска (рис. 20а) функция тока в пограничном слое ψ_0 определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi_0(\xi, r)}{\partial \xi^2} = r^2 H'(\psi_0) - C(\psi_0)C'(\psi_0)$$

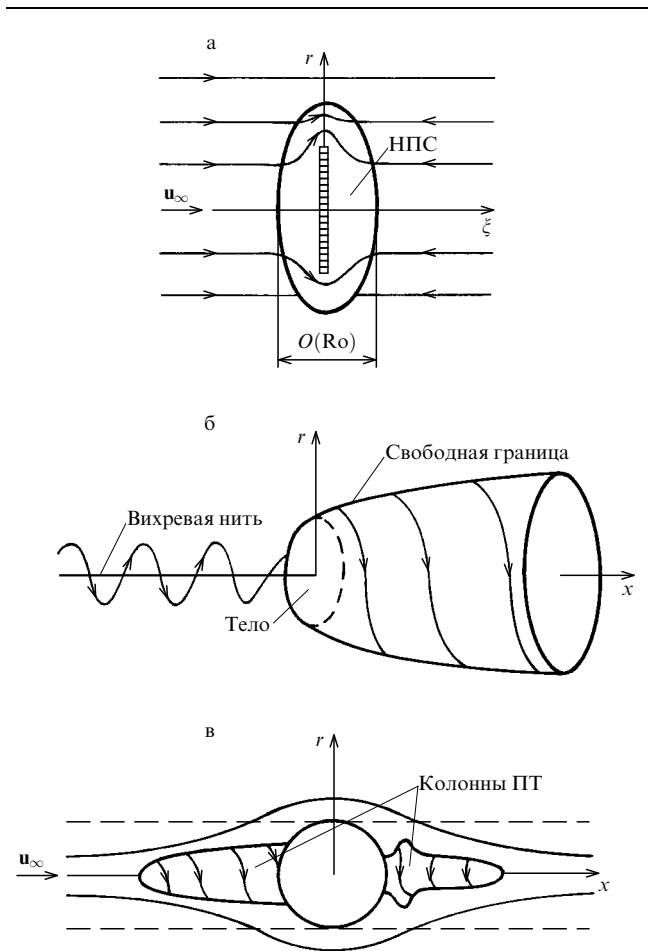


Рис. 20. а — Нвязкий пограничный слой (НПС) на диске. б — Взаимодействие вихревой нити с телом по схеме Гельмгольца. в — Колонны Праудмена–Тейлора (ПТ)

с граничными условиями (5.1) при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и условием $\psi_0 = 0$ при $\xi = 0$, где $x = \xi Ro$.

Если $\Omega = \infty$, то $Ro = u_\infty l / \Gamma$, где Γ — циркуляция вихревой нити. Не решена задача об обтекании тела по схеме Гельмгольца струей жидкости, представляющей собой вихревую нить ($r = 0$) в однородном потоке (рис. 20б).

Совсем по-другому ставится задача, когда поток закручивается под воздействием вращающегося тела, а на бесконечности закручивания нет. Не разработана математическая модель колонн Праудмена–Тейлора, возникающих в этом случае перед телом и за ним (рис. 20в). Заслуживает внимания также вопрос об исчезновении задней колонны при уменьшении числа $Re = u_\infty l / \nu$. Столбы Праудмена–Тейлора в идеальной жидкости простираются по оси x до $\pm\infty$ (штриховые линии на рис. 20в).

Если осевую скорость u отнести к u_∞ , радиальную v и круговую w — к Ωl , а давление — к $\rho(\Omega l)^2$, то уравнения Навье–Стокса примут вид

$$\begin{aligned} Ro \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} &= 0, \\ Ro u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \alpha \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right), \\ Ro u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \alpha \left(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} \right), \\ Ro u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{Ro} \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\alpha Re = Ro, \quad \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Следующие две нелинейные субмодели соответствуют случаям сильнозакрученной ($Ro \ll 1$) и слабозакрученной ($Ro \gg 1$) жидкости.

1) $Ro \ll 1$. Тело сплющено по оси x , его форма описывается уравнением $x = Ro f(r)$. Давление не зависит от ξ , зависимость $p(r)$ определяется из условий на бесконечности ($\xi \rightarrow -\infty$):

$$\frac{dp}{dr} = \frac{w^2}{r}, \quad u = 1, \quad v = 0.$$

Из (8.2) получаются укороченные уравнения Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{dp}{dr} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial \xi} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

2) $Ro \gg 1$. Теория тонкого тела, уравнение поверхности имеет вид $r = Ro^{-1} f(x)$. Давление определяется отдельно из второго уравнения системы (5.2). Безградиентное течение описывается параболизированными

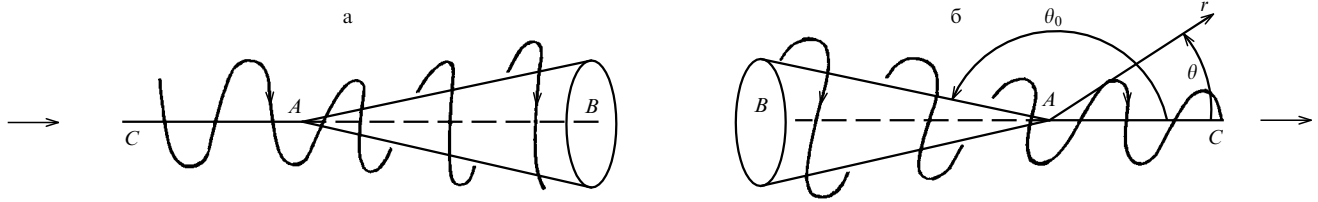


Рис. 21. Взаимодействие вихревой нити с конусом: а — "точка входа", б — "точка схода"

уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta v)}{\partial \eta} = 0,$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{vw}{\eta} = \beta \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - \frac{w}{\eta^2} \right],$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{u}{\eta^2} \right],$$

где $\eta = r \text{Ro}$, $\beta \text{Re} = \text{Ro}^2$.

Численный расчет начинается от точки $x = -1$. В окрестности передней и задней кромок имеются особые области.

Различают "точку входа" потока (рис. 21а) и "точку схода" (рис. 21б). В рамках уравнений Эйлера эти типы течений неразличимы в силу принципа обратимости потока. В безвихревом случае к вершине конуса A примыкает прямолинейная вихревая нить, расположенная на продолжении оси конуса. Действительно, условие осесимметричности, записанное для потенциала φ в сферической системе координат r, θ, λ как

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \lambda} = 0,$$

сразу же определяет его функциональный вид:

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = \varphi_1(r, \theta) + \varphi_2(\lambda).$$

Из уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ получаем, что $2\pi\varphi_2(\lambda) = \Gamma\lambda$, где Γ — константа. Таким образом, продолжением присоединенной вихревой нити AB является свободная вихревая нить AC с циркуляцией Γ (рис. 21). Такое локальное решение подразумевает зависимость от времени, как от параметра.

В силу линейности задачи деструкцию осевой симметрии можно изучать отдельно. Представив потенциал в виде ряда Фурье

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(r, \theta) \sin(k\lambda)$$

и ограничившись при малых r степенным решением

$$\Phi_k(r, \theta) = r^n F_k(\theta),$$

из уравнения Лапласа получим уравнение Лежандра для F_k . Условие непротекания на конусе ($F_k'(\theta_0) = 0$) и "условие Кутты" конечности скорости на оси $\theta = 0$ ($F_k(0) = 0$) доопределяют задачу на собственные значения $n(k)$.

Известно, что вихревая нить — чрезвычайно неустойчивое образование. Малая деформация ее элемента сразу

же приводит к теоретически бесконечной скорости ее перемещения. Поэтому схема обтекания с вихревой нитью вряд ли может служить внешним разложением для решения задачи о течении вязкой жидкости при $\text{Re} = \Gamma/\nu \rightarrow \infty$, где ν — кинематический коэффициент вязкости. Автомодельное решение, предложенное для случая $\theta_0 = \pi/2$ в [101], неприменимо, так как не учитывает диффузию вихревой нити и не существует при достаточно больших значениях числа Re .

С целью конкретизации механизма возникновения вращения потока можно предположить, что конус равномерно вращается вокруг своей оси. Тогда решение локальной задачи следует искать в полуполосе $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ с условием прилипания на линии $\theta = \theta_0$ и с условиями минимальной особенности на линиях $\theta = 0$ и $r = 0$. Солитонное решение этой задачи ($\theta_0 = \pi/2$) получено Карманом (см., например, [102]).

5.2. Самовращение тел в потоке

Если тело закреплено шарнирно в точке или на оси, то оно приобретает свободу вращения в потоке. Незатухающее с течением времени вращение тела называется самовращением. Энергия для такого движения черпается из внешнего потока. Экспериментально обнаружены установившееся, осциллирующее и беспорядочное самовращение.

Исследовалось в основном самовращение относительно оси, совпадающей с направлением невозмущенного потока жидкости.

Самовращение прямоугольной пластины обнаружил Жуковский в 1906 г. Оно происходило в диапазоне углов атаки, соответствующих отрицательной производной нормальной силы по углу атаки [103]. Только в этом случае появляется вращающий крыло аэродинамический момент.

В этой связи удивительно самовращение эллипсоида, имеющего удлинение равное 5, вокруг оси, совпадающей с его малой осью и с направлением невозмущенного потока: у такого тела обтекание от угла атаки не зависит, да и подъемной силы нет [104]. С увеличением числа Re частота вращения сначала не изменяется (?), а затем ($\text{Re} = \text{Re}_{\text{cr}}$) эллипсоид останавливается и начинает ($\text{Re} > \text{Re}_{\text{cr}}$) вращаться в другую (мистика?) сторону с большой угловой скоростью. Самовращение объясняется асимметрией вихрей Гертлера на приходящей и уходящей частях эллипсоида. Такой опыт нуждается в повторении и осмыслении.

Самовращение имеет практическое значение для маневренных самолетов. Поскольку такие самолеты имеют крылья малого удлинения ($\lambda \ll 1$), центр тяжести исследований сместился в сторону изучения их вращения [105]. В этом случае на первый план выступает взаимодействие вихрей, сходящих с обеих боковых кромок, их развитие и разрушение. Математическое моделирование

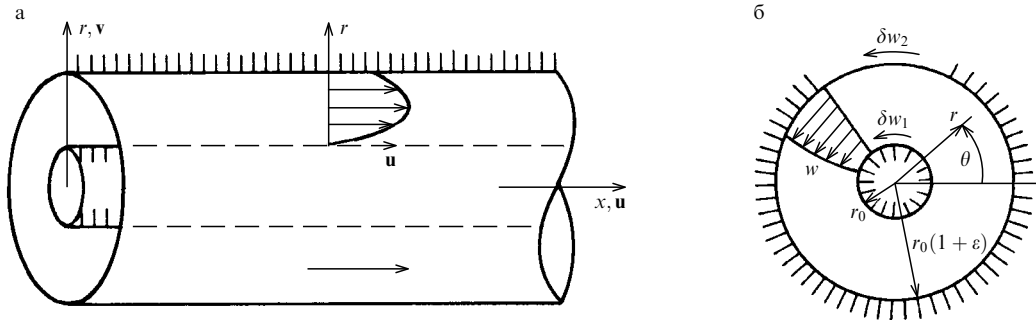


Рис. 22. Схема течения жидкости в канале

большинства из этих эффектов возможно на основе предположения, что жидкость идеальная. В частности, подлежит разработке закон плоских сечений для вращающегося крыла малого удлинения.

Наоборот, в аэродинамике самовращающихся бескрылых ракет первостепенное значение играют эффекты вязкости: отрыв пограничного слоя на вращающейся стенке и ламинарно-турбулентный переход [106].

Даже незначительная асимметрия может резко усилить самовращение. Такой эффект наблюдается, если в сплошном шарике, помещенном в воздушную струю, сделать дырку.

Удивительны и разнообразны режимы самовращения двойных конфигураций [107]. Самовращаются два цилиндра, оси которых параллельны друг другу, но перпендикулярны направлению невозмущенного потока. Самовращается детская погремушка — конфигурация из нескольких сфер, шарнирно закрепленных на кольце.

5.3. Течение в канале

Дабы стать разрешимой, типовая задача о внутреннем течении жидкости должна основываться не на уравнении Навье–Стокса, а, например, на его параболизированном субаналоге. Вот одна из таких математических моделей.

Пусть жидкость движется между двумя концентрическими цилиндрами (рис. 22). Закручивание вызвано вращением внутреннего цилиндра со скоростью δw_1 и внешнего — со скоростью δw_2 , где δ — безразмерный параметр: $\delta = O(1)$ или $\delta = o(1)$. Ширина кольцевого канала мала: радиус внешнего цилиндра равен $(1 + \epsilon)r_0$, где r_0 — радиус внутреннего цилиндра, $\epsilon \ll 1$. Продольную координату x отнесем к r_0 , вместо r введем растянутую переменную

$$R = \frac{r - r_0}{\epsilon r_0}, \quad 0 \leq R \leq 1.$$

Для большей общности можно принять, что по нормали к поверхностям обоих цилиндров происходит впрыскивание или отсос жидкости с характерной скоростью τu_∞ , где u_∞ — характерная скорость осевого движения, $\tau = O(\epsilon)$ или $\tau = o(\epsilon)$.

Подставляя разложения составляющих скорости

$$u = \frac{\tau}{\epsilon} U(x, R) + o\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right), \quad v = \frac{\tau u_\infty}{\Omega l} V(x, R) + o(\tau),$$

$$w = \frac{\delta w_1}{\Omega l} W(x, R) + o(\delta)$$

в систему (5.2), из первого и третьего уравнений получим

$$UW_x + VW_R = \frac{1}{\text{Re}} W_{RR}, \quad U_x + V_R = 0,$$

где $\text{Re} = \tau \epsilon u_\infty r_0 / \nu = O(1)$.

Условия на поверхности цилиндров

$$U(x, 0) = U(x, 1) = 0, \quad V(x, 0) = V_1(x),$$

$$V(x, 1) = V_2(x), \quad W(x, 0) = 1, \quad W(x, 1) = \frac{w_2}{w_1} \quad (5.3)$$

содержат функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$, которые считаются заданными.

Оценки давления оказываются противоречивыми. Из второго уравнения системы (5.2) имеем

$$p = O(\epsilon \delta^2) + O(\tau^2),$$

а из третьего

$$p = O\left(\frac{\tau^2}{\epsilon^2}\right).$$

В зависимости от соотношения между $\epsilon \delta^2$ и τ^2 / ϵ^2 возможны три случая.

1) Сильное вращение:

$$\epsilon^3 \delta^2 \gg \tau^2, \quad p = \epsilon \delta^2 \rho w_1^2 P(x, R) + O(\epsilon \delta^2).$$

Решение получается в замкнутой форме:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{dP(R)}{dR} = W^2, \dots$$

2) Слабое вращение:

$$\epsilon^3 \delta^2 \ll \tau^2, \quad p = \frac{\tau^2}{\epsilon^2} \rho w_1^2 P(x, R) + o\left(\frac{\tau^2}{\epsilon^2}\right).$$

Справедливо приближение пограничного слоя:

$$P_R = 0, \quad U_x + V_R = 0, \quad UU_x + VU_R = -P'(x) + \frac{1}{\text{Re}} U_{RR}.$$

3) Основная модель:

$$\epsilon^3 \delta^2 = \tau^2, \quad p = \epsilon \delta^2 \rho w_1^2 P(x, R) + o(\epsilon \delta^2).$$

Система уравнений

$$U_x + V_R = 0, \quad P_R = W^2,$$

$$UW_x + VW_R = \frac{1}{\text{Re}} W_{RR},$$

$$UU_x + VU_R = -P_x + \frac{1}{\text{Re}} U_{RR} \quad (5.4)$$

совместна с граничными условиями (5.3). Кроме того, следует задать начальные значения функций в некотором сечении $x = 0$: $U(0, R)$, $V(0, R)$, $W(0, R)$ и $P(0, R)$. Из этого начального многообразия две функции взаимозависимы:

$$P_R = W^2, \\ 2VWW_R - VUU_{RR} + U^2V_{RR} = \frac{1}{\text{Re}}(2WW_{RR} - UU_{RR}).$$

Для численного расчета задачи можно использовать схему Кранка–Никольсена или неявную трехслойную схему [3–4].

При $\text{Re} = 0$ решение квадратурное:

$$U = \text{Re} A'(x) \frac{R(R-1)}{2}, \quad \text{Re} A''(x) = 12(V_2 - V_1), \\ V = V_1 + (V_1 - V_2) R^2(2R - 3), \\ W = 1 + R \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right), \quad P = \int W^2 dR + A(x).$$

Представляют интерес вопросы устойчивости решения системы (5.4)

До сих пор не решена известная задача о стационарном осесимметричном истечении воды в ванной, происходящем под действием силы тяжести. Модель идеальной жидкости применима, когда

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{gd^3}}{\nu} \gg 1,$$

где g — ускорение силы тяжести, d — диаметр отверстия. Задача определяется единственным безразмерным параметром $\sigma = h/d$, h — невозмущенный уровень воды.

Из опыта известно, что в некотором диапазоне значений σ ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$) самопроизвольно возникает вращение потока. Единственно ли значение угловой скорости струи Ω ? Является ли значение Ω собственным значением задачи или определяется из соображений устойчивости? Применим ли метод граничных интегральных уравнений к этой задаче?

Наблюдаемое на опыте увеличение расхода воды в режиме с вращением потока объясняется, по-видимому, уширением струи под действием центробежных сил.

Задача об осесимметричном фонтане тоже допускает обобщение на случай вращения жидкости вокруг оси x (рис. 23). Начальное распределение вертикальной скоро-

сти $u(r)$ достаточно произвольно. Возможно ли отслоение пленок и образование пузырей? Приближение тонкой струи рассмотрено в [108].

5.4. Еще раз о спиральных течениях

Спиральное движение является частным случаем закрученного движения. Намереваясь приступить к описанию пространственных спиральных вихреобразований, я с ужасом обнаружил, что не знаю математического определения спирали даже как плоской кривой. Оказывается, его просто нет! Нельзя же за такое определение принять абракадабру, которая написана в "Математическом энциклопедическом словаре" (М.: Советская энциклопедия, 1988): "Спираль — плоская кривая, которая обычно (? — знак мой, С.Б.) обходит вокруг одной (или нескольких) точки, приближаясь или удаляясь от нее". Такому отнюдь не математическому определению соответствует, например, эллипс.

В динамике жидкости под спиралью обычно (!) понимают линию, имеющую бесконечное число витков. Поэтому определим спираль как плоскую кривую, которая, наматываясь на простую замкнутую линию или точку, совершает бесконечное число оборотов. В первом случае простая замкнутая линия называется *предельным циклом*.

Если в математических моделях число оборотов спирали бесконечно, то на опыте, естественно, наблюдается конечное число витков — природа, как уже отмечалось, не признает бесконечности.

Спиральной поверхностью назовем поверхность, имеющую в качестве оси простую кривую, нормальное сечение к которой вырезает спираль с расположенным на этой оси фокусом. Таким образом, ось спиральной поверхности является фокальной кривой — геометрическим местом фокусов спиралей. Ось цилиндрической спиральной поверхности — прямая, спирали в каждом сечении одинаковы.

Пространственной спиральной линией будем называть траекторию частицы, движущейся по спиральной поверхности таким образом, что в проекции на нормальную к оси плоскость описывается спираль. Определенное сходство с пространственной спиральной линией имеет *винтовая линия* — пространственная кривая, описываемая частицей, которая вращается вокруг некоторой прямой линии (оси) и одновременно перемещается вдоль нее.

Для моделирования пространственных спиральных течений пригодны системы координат, имеющие ось и азимутальный угол λ . Таковыми, например, являются сферические (r, θ, λ) и цилиндрические (x, r, λ) координаты. Вместо λ вводится спиральная переменная $\eta = \lambda + g$, где $g = g(r, \theta, t)$ в сферической системе координат и $g = g(x, r, \lambda)$ в цилиндрической. При $\eta = 0$ и $\eta = 2\pi$ выставляются уже известные нам условия спиральной периодичности.

Не изучена форма смерчевидной вихревой пелены в плоскости симметрии течения, а также вблизи гладкой поверхности, от которой она отходит. Пригодны ли для этих задач стационарные автомодельные решения?

Спиральные течения возникают на вращающихся телах или внутри вращающихся объемов. Не исследована бифуркация осесимметричного течения к спиральному. Существует ли аналог вихря Хилла [6] в медленно вращающемся спиральном потоке?

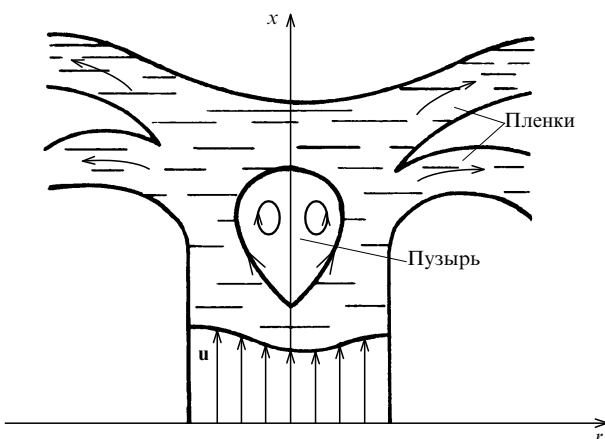


Рис. 23. Осесимметричный фонтан

Автомодельное стационарное решение уравнения Навье–Стокса в сферической системе координат имеет вид

$$\mathbf{u}(r, \theta, \lambda) = \frac{v}{r} \mathbf{U}(\theta, \eta), \quad p(r, \theta, \lambda) = \frac{v^2}{r^2} P(\theta, \eta), \\ g(\theta, r) = k \ln r + f(\theta).$$

Область существования решения ограничена — это прямоугольник $0 \leq \eta \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. В частном случае осесимметричного течения ($\partial/\partial\eta = 0$) с закруткой ($w \neq 0$) или без нее ($w \equiv 0$) уравнения сводятся к обыкновенным, а условия спиральной периодичности становятся ненужными. Известно три постановки такой задачи: осесимметричный поток импульса из точечного источника, течение, индуцированное расположенной вдоль оси конуса вихревой нитью, и течение, индуцированное расположенным на оси конуса линейным источником. Все эти задачи нуждаются в обобщении на случай спирального течения.

Обобщение осесимметричных течений на этот случай удобно проводить в цилиндрической системе координат. Представляют интерес приближения быстро сходящейся ($r|\partial g/\partial r| \gg 1$) и медленно сходящейся ($r|\partial g/\partial r| \ll 1$) спирали. Возможно ли наличие в поле линий тока предельного цикла?

Хотя давно известно, что смерч имеет спиральную структуру, исследованы лишь его осесимметричные модели. Впрочем, рассматриваемая постановка пригодна лишь для моделирования смерчевидного вихря, срывающегося с поверхности крыла. Для моделирования настоящего смерча следует дополнительно учитывать жсткость, силу тяжести и теплопроводность.

Точное автомодельное решение

$$u_x = \frac{vx}{r^2} u(\eta), \quad u_r = \frac{v}{r} v(\eta), \quad u_\lambda = \frac{v}{r} w(\eta), \\ p = \frac{v^2}{r^2} P(\eta), \quad \eta = \lambda + k \ln r$$

описывает спиральный поток в плоскости симметрии $x = 0$. Его можно трактовать как оборванное координатное разложение по степеням x неавтомодельного решения в окрестности плоскости симметрии $x = 0$.

Плоское течение Гамеля, задаваемое функцией тока $\psi = \psi(\eta)$, где $\eta = \lambda + k \ln r$, как и его различные обобщения [42, 109], по-видимому, не являются физически реальными течениями, ибо не удовлетворяют условиям спиральной периодичности.

Неизвестно, образуется ли спиральный пограничный слой на вращающемся обтекаемом теле, в частности, на вращающемся диске.

6. Гидродинамика в ванной

Опыты в ванной часто обсуждались в предыдущих разделах. Исключение составили лишь широко известные опыты: Магнуса, Ранка, Тейлора, Марангони, Томса и др. [9, 110]. Однако даже при поверхностном взгляде на любой из этих опытов можно увидеть нерешенные задачи, незавершенность привычной интерпретации.

Возьмем, к примеру, опыт с чайнками. Почему они собираются в центре дна стакана после того, как чай размешали ложкой? Ответ на этот вопрос опубликовал

сам Эйнштейн: чайнки сносятся направленным к центру придонным течением. Хотя точного расчета движения чайнок не имеется, можно утверждать, что расположенные на дне "мокрые" чайнки, плотность которых больше плотности воды, вращаются не в самом центре сосуда, а вблизи него, образуя как бы "пояс астероидов". Ширина "пояса" зависит, по-видимому, от степени неоднородности чайнок: чайнки разных размеров и масс вращаются по окружностям разных радиусов. Лишь на заключительной стадии торможения они собираются в центре.

"Опыты" с чайнками мы проводим каждый день, но не обращаем на их поведение должного внимания. Следовало бы выяснить, как ведут себя в процессе движения и на его заключительной стадии не только "мокрые" чайнки, но и "сухие", т.е. те, которые плавают внутри объема и на поверхности воды. Вместо чайнок можно взять другие частицы, желательнее — калиброванные. Кроме помешивания ложкой можно использовать более "чистый" способ организации вращательного движения — раскрутить стакан с чаем, зажав его в миксере или поставив на середину вращающегося диска проигрывателя.

Итак, возможны следующие варианты проведения опыта с чайнками: 1) фиксировать их положение во время вращения или после него, 2) раскручивать чай или стакан, 3) наблюдать за придонными, поверхностными или плавающими внутри объема частицами. Всего $2 \times 2 \times 3 = 12$ комбинаций. Но это еще не все! Можно исключить влияние деформации свободной поверхности, например, плотно накрыв объем воды в стакане крышкой. Можно ... Впрочем, пусть читатель сам придумает другие варианты этого на вид простого, а по своей природе чрезвычайно сложного опыта.

Вряд ли Эйнштейн предполагал, что эффект концентрации чайнок в центре стакана найдет применение в технике. А ведь на его основе была создана центрифуга для промышленного очищения олова от примесей: вращаясь в расплавленном металле, она собирает примеси в центре и автоматически их удаляет.

Научный опыт отличается от созерцания тем, что он предназначен для разработки, проверки или совершенствования математической модели изучаемого явления.

6.1. Эволюция свободной поверхности

Настоящие "опыты в ванной" — это опыты со свободной поверхностью.

В гидродинамике капиллярной жидкости не решен принципиальный вопрос о времени подъема мениска в цилиндрической трубке. Конечно оно или бесконечно? В [111] авторы пренебрегали инерциальным членом, поэтому закон движения мениска получился экспоненциальным, время приближения к равновесию — бесконечным. На самом деле инерциальные члены имеют тот же порядок величины, что и остальные члены, — ими пренебрегать нельзя. В [14] показано, что экспоненциальный закон справедлив только для сильновязкой жидкости, столб маловязкой жидкости будет колебаться около положения равновесия. Полученные выводы нуждаются в экспериментальной проверке.

На поверхности вытасченного из жидкости твердого тела остается пленка жидкости. Если тело представляет собой пластину, выдвигаемую параллельно себе самой (рис. 24а), то жидкость будет увлекаться под действием касательных сил, т.е. сил вязкости. Течение можно

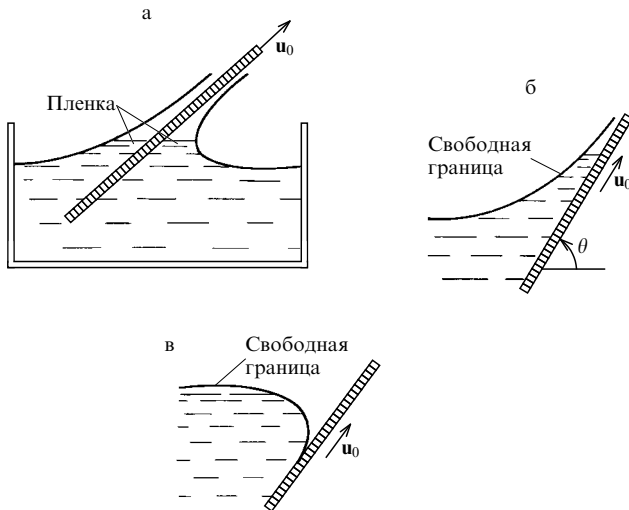


Рис. 24. Образование пленки при выдвигании пластины из жидкости

считать стационарным, если размеры сосуда и длина пластины достаточно велики (рис. 24б), а скорость выдвигания пластины u_0 постоянна. Из размерных определяющих параметров u_0 , ν , g , ρ и коэффициента поверхностного натяжения α можно составить две безразмерные комбинации:

$$Re = \frac{u_0^3}{g\nu} \quad \text{и} \quad We = \frac{\rho u_0^4}{g\alpha}.$$

Имеются два характерных масштаба: длина $l_{\text{вязк}} = \nu/u_0$, определяемая действием вязких сил, и длина $l_{\text{кап}} = \sqrt{\alpha/\rho g}$, определяемая действием капиллярных сил. Их отношение равно

$$\frac{l_{\text{кап}}}{l_{\text{вязк}}} = \frac{Re}{\sqrt{We}}.$$

В зависимости от порядка величины отношения чисел Рейнольдса Re и Вебера We ($\gg 1$, ~ 1 , $\ll 1$) имеются $3 \times 3 = 9$ асимптотических субмоделей течения⁴, нуждающихся в экспериментальной верификации. В приближении тонкого слоя внутреннее разложение описывает структуру пленки.

Возможна постановка задачи о внедрении пластины в смачивающую жидкость. Для такой же задачи об извлечении пластины, по-видимому, существует критическое значение числа $Re(We, \theta)$, отделяющее режим, когда образующаяся пленка смачивает всю пластину, от режима, когда пленка не образуется (рис. 24в).

Представляют интерес нестационарные, в частности, автомодельные задачи о входе пластины в полуплоскость покоящейся жидкости и о выходе из нее.

6.2. Брызги и всплески

Всплеск — это выброс (обычно вверх) воды в виде струи или пленки. Брызги — это капли жидкости, стремительно разлетающиеся от удара или всплеска. Помните А.С. Пушкина: "Теснился кучами народ, любуясь брызгами, горами и пеной разъяренных вод!"

Водопады, опрокидывание волны, удар волны о скалу, падение метеоритов на твердую поверхность —

все эти явления сопровождаются всплесками. Относящиеся сюда нерешенные задачи собраны в [112], хотя рассматриваемая там же одномерная математическая модель всплеска не выдерживает даже легкой критики. Не ясно, выполняется ли для всплеска критерий Мура-Ротта-Сирса отрыва пограничного слоя.

Всплески обычно распадаются на брызги. Механизмы брызгообразования разнообразны. Так, струя жидкости может дробиться на капли под действием турбулизации, неустойчивости Рэля, капиллярной неустойчивости [19]. Большие массы жидкости (свыше 100 г), не удерживаемые в целостности поверхностными силами, разбрызгиваются. Этот факт существенно выбрасываемой из самолета большой массы воды. После ответа на вопрос о том, как влияют на разбрызгивание поверхностное натяжение и способ выброса воды, эта задача должна подвергнуться "мозговой атаке" изобретателей.

Всплеск в виде называемой "султаном" встречной струи образуется при падении капли на свободную поверхность жидкости. Совсем по-другому происходит падение капли на твердую поверхность. Весь мир обошел фотоснимок всплеска из 24-х симметрично расположенных по окружности брызг (рис. 25) [107]. Такая "корона" возникает при падении капли молока на твердую плоскость. Ударившись о плоскость, капля сначала трансформируется в растекающееся пятно, на границе которого образуются волны с периодом по угловой координате в $360^\circ/24 = 15^\circ$. Поток отрывается от плоскости, и оторвавшийся тонкий слой жидкости разделяется на 24 брызга. В этот момент и сделан снимок. Затем движение приобретает хаотический характер. Почему образуется именно 24 брызга? Каково влияние сил вязкости и сил поверхностного натяжения? На эти и другие вопросы ответа пока еще нет.

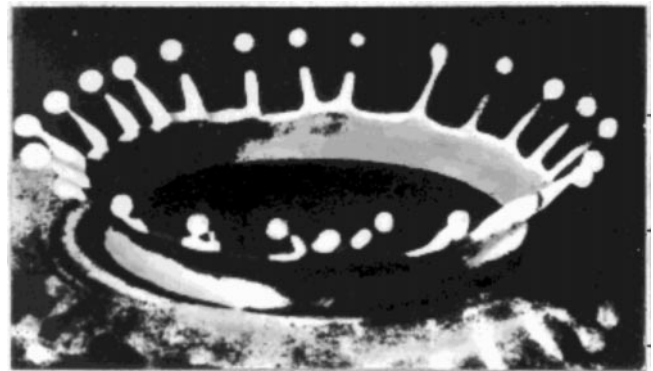


Рис. 25. Падение капли молока на плоскость

Экспериментальное исследование дробления жидкой капли, начавшееся на заре развития авиации (1904 г.), имеет большое научное и техническое значение. Приложения включают химические процессы в двухфазной среде, высыхание брызг, эрозию лопаток турбин, формирование аэрозолей, работу газовых турбин, дизельных и ракетных двигателей, камер сгорания с инъекцией жидкости.

Известно шесть типов дробления изначально сферической жидкой капли в потоке газа [113]: вибрационный,

⁴ Модель, предложенная в [111], является феноменологической, а не асимптотической.

мешкообразный (bad type), тычинкообразный, хаотический, отслаивающийся (stripping type), катастрофический. Основными параметрами, определяющими процесс дробления, являются

$$\frac{\rho}{\rho_0}, \quad \text{Re} = \frac{u_\infty d}{\nu}, \quad \frac{\nu}{\nu_0}, \quad \text{We} = \frac{\rho u_\infty^2 d}{\alpha}, \quad \text{M}_\infty = \frac{u_\infty}{a},$$

где ρ — плотность жидкости, ρ_0 — плотность газа, ν — кинематический коэффициент вязкости воды, ν_0 — кинематический коэффициент вязкости газа, u_∞ — скорость потока, d — начальный диаметр капли, α — коэффициент поверхностного натяжения, a — скорость звука в газе.

Попытка по имеющимся опытным данным построить на диаграмме $\text{Re}-\text{We}$ границы различных типов дробления капли воды в малоскоростном ($\text{M}_\infty \simeq 0$) потоке воздуха оказались несостоятельными. Не ясно, была ли недостаточна точность экспериментов или в задаче существует скрытый определяющий параметр, от которого зависит механизм дробления.

6.3. Краевые волны

Погрузив вертикально в наполненную водой ванну пластинку на небольшую глубину (примерно на 4 мм) и заставив ее колебаться в горизонтальной плоскости, вы увидите необыкновенные волны, называемые краевыми. Впрочем, представим слово их первооткрывателю Майклу Фарадею, создателю учения об электромагнетизме: "Немедленно стали образовываться волны, возвышения и складки на воде, имеющие весьма странный характер. Волны, распространяющиеся от пластинки к стенкам сосуда, были едва заметны; но у самой пластинки непрерывно возникали направленные перпендикулярно ей бугорки высотой от трети до половины дюйма и более, напоминающие зубья очень короткой грубой расчески". Частота их равна половине частоты колебаний пластинки [107, 114].

Краевые волны следует разделить на два вида. Существование одних, образующихся вблизи колеблющейся острой кромки пластины, связано, по-видимому, с отрывом потока от кромки.

Второй вид краевых волн наблюдается, когда отрыва от острой кромки нет. Они появляются, например, в наполненном водой бокале, если осторожно провести по его кромке мокрым пальцем, возбуждая колебания стенок бокала. О природе этих волн, которые тоже наблюдал любознательный Фарадей, совсем ничего не известно.

Список литературы

1. Пригожин И, Стенгерс И *Порядок из хаоса* (М.: Прогресс, 1986)
2. Бабенко К И *Основы численного анализа* (М.: Наука, 1986)
3. Флетчер К *Вычислительные методы в динамике жидкостей* (М.: Мир, 1991) т. 1, 2
4. Андерсон Д, Таннехилл Дж, Плетчер Р *Вычислительная гидромеханика и теплообмен* (М.: Мир, 1990) т. 1, 2
5. Альвен Х *Космология и физика* в сб. *Наука и человечество. 1971–1972* (М.: Знание 1972) с. 332
6. Бэтчелор Дж *Введение в динамику жидкости* (М.: Мир, 1973)
7. Неуудов J C *Lect. Notes Math.* **1431** 1 (1990)
8. Гинзбург В Л *О физике и астрофизике* (М.: Наука, 1985)
9. Бурлаки Н *Квант* (2) 42 (1992)
10. Колмогоров А Н *Математика — наука и профессия (Библиотечка "Квант", вып. 64)* (М.: Наука, 1988)
11. Капица П Л *Эксперимент. Теория. Практика* (М.: Наука, 1977)
12. Лаврентьев М А *Наука и жизнь* (7) 9 (1965), (1) 48 (1966)
13. *Сахаровский сборник* (Сост. А Бабенышев, Р Лерт, Е Печуро) (М.: Книга, 1991)
14. Бетяев С К Препринты ЦАГИ 26, 36, 48, 55, 58, 64, 71, 72, 85, 97 (1991–1994)
15. Ursell F, in *Wave asymptotics* (Eds P A Martin, G K Wickham) (Cambridge: Univ. Press, 1992)
16. Бурлаки Н Препринт ЦАГИ № 73 (1993)
17. Захаров В Е, Сагдеев Р З, Халатников И М Препринт ИТФ им. Ландау (Черноголовка, 1985)
18. Гулд Х, Тобочник Я *Компьютерное моделирование в физике* (М.: Мир, 1990) ч. 1, 2
19. Ван-Дайк М *Альбом течений жидкости* (М.: Мир, 1987)
20. *Математическое моделирование* (Под ред. Дж Эндрюс, Р Мак-Лоун) (М.: Мир, 1979)
21. Заславский Г М и др. *Слабый хаос и квазирегулярные структуры* (М.: Наука, 1991)
22. Бетяев С К Препринт ИТПМ СО АН СССР 14–93 (Новосибирск, 1983)
23. Булах Б М *Нелинейные конические течения газа* (М.: Наука, 1970)
24. Edwards R H *JAS* **21** (2) 134 (1954)
25. Smith J H В *Proc. Roy. Soc. A* **306** 67 (1968)
26. Massau *Mém. sur l'integration graphiques des équations aux dérivées partielles* (Delporte: Mons., 1914)
27. Rosenhed L *Proc. Roy. Soc. A* **134** 170 (1931)
28. Westwater F L *Aero. Res. Council Rep. and Met.* (1692) 116 (1936)
29. Kaden H *Ing. Arch.* (2) 140 (1931)
30. Ферми Э, Паста Д, Улам С, в кн. *Ферми Э. Научные труды* (М.: Наука, 1972) т. 2
31. Седов Л И *Методы подобия и размерности в механике* (М.: Наука, 1977)
32. Зельдович Я Б, Райзер Ю П *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (М.: Наука, 1966)
33. Баренблатт Г И *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (М.: Гидрометеиздат, 1978)
34. Бетяев С К *ЖВММФ* **26** 1081 (1986)
35. Биркгоф Г *Гидродинамика* (М.: ИЛ, 1954)
36. Бузман А, в сб. *Газовая динамика* (М.: ИЛ, 1950) с. 197
37. Никольский А А *ДАН СССР* **116** 193 (1957)
38. Никольский А А *ДАН СССР* **116** 365 (1957)
39. Никольский А А, Бетяев С К, Малышев И П, в сб. *Проблемы прикладной математики и механики* (М.: Наука, 1971) с. 262
40. Aref H *Phys. Fluids* **22** 393 (1979)
41. Ламб Г *Гидродинамика* (М. –Л.: ОГИЗ, 1947)
42. Кочин Н Е, Кибель И А, Розе Н В *Теоретическая гидродинамика* (М.: Физматгиз, 1963) ч. 2
43. Бетяев С К *ДАН СССР* **257** 1310 (1981)
44. Бетяев С К *Труды ЦАГИ* № 2275 (1985)
45. Бетяев С К *Уч. зап. ЦАГИ* **1** (3) 15 (1970)
46. Тугазаков Р Я *Изв. АН СССР МЖГ* (2) 159 (1989)
47. Бетяев С К, Солнцев И А *ПММ* **48** 145 (1984)
48. Архангельский Н А, Шуршалов Л В *Изв. АН СССР МЖГ* (1) 83 (1977)
49. Prandtl L, in *Vortage aus Hydro- und Aerodynamik* (Berlin: Springer-Verlag, 1924) s. 18
50. Mangler K W, Weber J J. *Fluid Mech.* **30** 177 (1967)
51. Karman T *Ann. mat. pura ed appl.* **29** pt 4 247 (1949)
52. Brown S N, Mangler K W *The Aeron. Quart.* (11) 354 (1967)
53. Telionis D P *Unsteady viscous flow* (N.-Y.: Springer, 1981)
54. Бетяев С К *Труды ЦАГИ* № 2517 (1993)
55. Нейланд В Я *Учен. зап. ЦАГИ* **5** (2) 70 (1974)
56. Забабахин Е И, Забабахин И Е *Явления неограниченной кумуляции* (М.: Наука, 1988)
57. Поттер Д *Вычислительные методы в физике* (М.: Мир, 1975)
58. Петвиашвили В И, в кн. *Нелинейные волны* (М.: Наука, 1979) с. 5
59. Дим Г, Забуски Н, в кн. *Солитоны в действии* (Под ред. К Лонгрена, Э Скотта) (М.: Мир, 1981) с. 289
60. Burbea J *Lett. Math. Phys.* (6) 1 (1982)
61. Лаврентьев М А, Шабат Б В *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (М.: Наука, 1973)
62. Молчанов В Ф *Учен. зап. ЦАГИ* **6** (4) 1 (1975)
63. Тумашев Г Г, Нужин М Т *Обратные краевые задачи* (Казань: КГУ, 1965)

64. Гиро Ж *Основные вопросы теории гиперзвуковых течений* (М.: Мир, 1965)
65. Рихтмайер Р *Принципы современной математической физики* (М.: Мир, 1982)
66. Тихонов А Н, Арсенин В Я *Методы решения некорректных задач* (М.: Наука, 1979)
67. Chorin A J, Bernard P S *J. Comp. Phys.* (13) 423 (1973)
68. Fink P T, Soh W K, in *Proc. Tenth. Symp. Naval Hydr.* (Cambridge, 1974) p. 463
69. Биркгоф Г, в кн. *Гидродинамическая неустойчивость* (М.: Мир, 1964) с. 68
70. Положий Г Н *Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного* (Киев: изд-во КГУ, 1965)
71. *История отечественной математики* (Киев: Наук. думка, 1970) т. 4, кн. 1, с. 295
72. Yeung R W *Ann. Rev. Fluid Mech.* (14) 395 (1982)
73. Гуревич М И *Теория струй идеальной жидкости* (М.: Наука, 1979)
74. Уолкер Дж *Наука вокруг нас* (12) 92 (1984)
75. Ван-Дайк М *Методы возмущений в механике жидкости* (М.: Мир, 1967)
76. Хасимото Х, Сано О *Механика. Новое в зарубежной науке. Вихри и волны* (М.: Мир, 1984) с. 80
77. Olsson R G, Turkdogan E T *Nature* (211) 813 (1966)
78. Лузин А Н *Квант* (10) 19 (1986)
79. Биркгоф Г, Сарантонелло Э *Струи, следы и каверны* (М.: Мир, 1964)
80. Милл-Томсон Л М *Теоретическая гидродинамика* (М.: Мир, 1964)
81. Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
82. Бетяев С К, Гайфуллин А М *Изв. АН СССР МЖГ* (3) 53 (1982)
83. Сэффмен Ф, в сб. *Современная гидродинамика. Успехи и проблемы* (Под ред. Дж Бэтчелора, Г Моффата) (М.: Мир, 1984) с. 75
84. Morf R H, Orszag S A, Frisch U *Phys. Rev. Lett.* **44** 572 (1980)
85. Moore D W *Proc. Roy. Soc. A* **365** 105 (1979)
86. Бетяев С К, в сб. *Динамика сплошной среды со свободными поверхностями* (Чебоксары: ЧГУ, 1980) с. 27
87. Brown S N, Stewartson K *J. Inst. Math. Appl.* **5** 206 (1969)
88. Medan R T *AGARD CP-204* No. 18 (1977)
89. Гриффитс У, в сб. *Современная гидродинамика. Успехи и проблемы* (Под ред. Дж Бэтчелора, Г Моффата) (М.: Мир, 1984) с. 120
90. Нейланд В Я *Изв. АН СССР МЖГ* (4) 53 (1969)
91. Stewartson K, Williams P G *Proc. Roy. Soc. London A* **312** (1509) 181 (1969)
92. Widnall Sh *Ann. Rev. Fluid Mech.* **7** 141 (1975)
93. Maxworthy T J *Fluid Mech.* **51** pt 4 15 (1972)
94. Вилля Г *Теория вихрей* (М.: ОНТИ, 1936)
95. Modi V J et al. *J. Aircraft.* **28** (2) 104 (1991)
96. Moffatt H K *J. Fluid Mech.* **18** 1 (1964)
97. Рабинович М И, Трубецков Д И *Введение в теорию колебаний и волн* (М.: Наука, 1992)
98. Aref H et al. *Fluid Dyn. Res.* (3) 63 (1988)
99. Никольский А А *Труды ЦАГИ* № 2122 (1981)
100. Lugt H *Vortex flow in nature and technology* (N.-Y.: John Wiley, 1983)
101. Гольдшттик М А, Штерн В Н, Яворский Н И *Вязкие течения с парадоксальными свойствами* (Новосибирск: Наука, 1989)
102. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика сплошных сред* (М.: Наука, 1986)
103. Мартынов А К *Прикладная аэродинамика* (М.: Машиностроение, 1972)
104. Короткин А И *Учен. зап. ЦАГИ* **4** (25) 26 (1973)
105. Zee E M, Vatina J T *J. Aircraft.* **28** (2) 94 (1991)
106. Хемш М, Нильсон Дж *Аэродинамика ракет* (М.: Мир, 1989) кн. 1
107. Уокер Дж *Физический фейерверк* (М.: Мир, 1989)
108. Никулин В В *ПМТФ* (4) 42 (1992)
109. Schultz-Piszachick W *ЗАММ* **62** 115 (1982)
110. Бетяев С К *Квант* (8) 52, (10) 52 (1989)
111. Левич В Г *Физико-химическая гидродинамика* (М.: Фитматгиз, 1959)
112. Перегрин Д, в сб. *Современная гидродинамика. Успехи и проблемы* (Под ред. Дж Бэтчелора, Г Моффата) (М.: Мир, 1984) с. 91
113. Wierzbna A, Takayama K *Rep. Inst. High Speed Mech. Tohoku Univ.* **53** (382) 1 (1987)
114. Уокер Дж *В мире науки* (2) 74 (1985)

HYDRODYNAMIC: PROBLEMS AND PARADOXES

S.K. Betyaev

Central Institute of Aero- and Hydrodynamics,
140160 Zhukovskii-3, Moscow Region, Russia
Tel. (7-095) 556-38 24

This is a collection of topical hydrodynamic problems of various complexity, for which the time is ripe either for mathematical modeling or for numerical calculations. Hints to solutions are suggested. Preference is given to unexpected comparisons between different-type phenomena, establishing new links between seemingly remote, isolated facts.

PACS numbers: 47.10. + g, 47.11. + j, 47.32.-y, 47.90. + a

Bibliography — 114 references

Received 26 July 1993, revised 15 November 1994